

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

**FENÓMENOS COLECTIVOS EN ESTRUCTURAS
COMPLEJAS**

Damián G. Hernández
Doctorando

Dr. Damián H. Zanette
Director

Enero de 2015

Física Estadística e Interdisciplinaria – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mi abuelo Hermann

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Contexto	2
1.1.1. Modelado de comportamientos colectivos en sistemas complejos	2
1.1.2. Estudio de interacciones por medio de teoría de la información .	3
1.2. Contenidos	3
1.2.1. Efecto de la dinámica microscópica en el comportamiento colectivo	4
1.2.2. Detección de dependencias a partir del estado colectivo de un grupo de agentes	5
1.3. Panorama	5
2. Efecto del tamaño del grupo de interacción en juegos evolutivos	7
2.1. Motivación	7
2.2. Introducción	8
2.3. Juego evolutivo espacial y campo medio	9
2.4. Transición crítica entre estados mixtos y puros	12
2.5. Discusión	17
3. Interacción en tripletes en juegos cíclicos	19
3.1. Motivación	19
3.2. Introducción	20
3.3. El modelo	21
3.4. Resultados numéricos	23

3.5. Estudio de campo medio	26
3.5.1. Relación con poblaciones finitas	28
3.6. Aproximación analítica para las probabilidades de supervivencia	29
3.7. Discusión	34
4. Juegos evolutivos de distribución de recursos	37
4.1. Motivación	37
4.2. Introducción	38
4.3. Asignación óptima de estrategias en el juego del Coronel Blotto	40
4.3.1. Juego con dos jugadores	40
4.3.2. El juego en una población	43
4.4. Evolución de estrategias: reglas dinámicas y simulaciones numéricas	47
4.5. Generalizaciones	52
4.5.1. Probabilidades de interacción de acuerdo al tipo de jugador	52
4.5.2. El juego en redes de mundo pequeño	53
4.5.3. Imitación estocástica	54
4.6. Discusión	55
5. Interacciones en tripletes: ejemplo en lenguaje escrito	59
5.1. Motivación	59
5.2. Introducción	60
5.3. Dependencias triples	62
5.3.1. La compuerta <i>XOR</i> y las interacciones triples	65
5.3.2. Solución para el modelo de máxima entropía	66
5.4. Análisis en tripletes de interacciones de a pares	67
5.5. Comparación entre información mutua e interacciones de a pares en un triplete	68
5.6. Interacciones de a dos mediadas por una tercera variable	68
5.7. Marginalización y variables latentes	71
5.7.1. Ejemplo de los efectos de marginalización	72
5.8. Ocurrencia de palabras en un libro	74
5.8.1. Entropía y ráfagas de palabras	75
5.8.2. Información triple en palabras	77
5.8.3. Interacciones de dos mediadas por una tercera palabra	81
5.9. Significación y errores para el estudio en tripletes	83
5.9.1. Análisis de significación	83
5.9.2. Estimación del error	84
5.10. Información mutua entre grupos de palabras y partes de un texto	86
5.10.1. Dependencia entre palabras individuales y partes de un texto	87

5.10.2. Dependencia entre pares de palabras y partes de un texto	89
5.11. Discusión	92
6. Conclusiones	95
6.1. Sumario de resultados	96
6.2. Extensiones	98
A. Entropías promedio de secuencias mezcladas	99
Bibliografía	103
Publicaciones asociadas	111

Índice de figuras

2.1. Distribución de la estrategia A como función del tiempo	12
2.2. Fracción asintótica de agentes con la estrategia A como función del tamaño del vecindario	13
2.3. Evaluación numérica de los exponentes críticos θ y δ	14
2.4. Diagramas de fase en el espacio de tamaño del grupo de interacción y nivel de ruido	16
3.1. Diagrama de la dominación cíclica entre las tres estrategias	22
3.2. Fracciones de la población en cada una de las estrategias como función del tiempo	23
3.3. Probabilidades de supervivencia obtenidas de las simulaciones como función del parámetro de cooperación r	24
3.4. Condiciones iniciales en el simplex que llevan a cada uno de los estados puros finales	26
3.5. Fracciones de la población en cada una de las estrategias, en escala logarítmica, como función del tiempo obtenidas a partir de la evolución del sistema dinámico	30
3.6. Probabilidades de supervivencia, como función de r	33
3.7. Efecto del tamaño del sistema en las probabilidades de supervivencia, como función de r	34
4.1. Representación esquemática de cuatro jugadores de la dinámica de toda la población	44
4.2. Dominios en el espacio de parámetros (ϵ, α) donde las soluciones I, II, y III están respectivamente bien definidas y ejemplos de las correspondientes distribuciones de probabilidad marginal	45
4.3. Resultados numéricos para las distribuciones de probabilidad asintóticas en tres puntos del espacio de parámetros (ϵ, α) , junto a las distribuciones analíticas	50
4.4. Soluciones asintóticas obtenidas numéricamente en diferentes puntos del espacio de parámetros	51

5.1. Representación esquemática de los efectos de marginalización	71
5.2. Interacciones Δ_{123} , $D_{123}^{(2)}$ y $D_{123}^{(3)}$ como función del campo β	73
5.3. Entropía y entropía esperada para un comportamiento poissoniano . . .	76
5.4. Fracción de la dependencia dentro de un triplete que corresponde a interacciones puras de a tres	77
5.5. Información triple como función de la co-información	79
5.6. Interacción irreducible como función de la información mutua	81
5.7. Desviación estándar de la información triple	86
5.8. Diferencia de información mutua entre partes y palabras como función de la escala	88
5.9. Diferencia de información mutua entre partes y pares de palabras como función de la escala	91

Índice de tablas

2.1. Matriz de ganancia del juego. Los parámetros a y b son constantes positivas, con $a < b$	9
5.1. Palabras con valores altos en la diferencia de entropías $\Delta H_i = H_i^{poiss} - H_i$, para el libro OS (izquierda) y para el libro AM (derecha). Las unidades corresponden a <i>bits</i>	77
5.2. Palabras con alta información triple $D_{ijk}^{(3)}$. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Cuando $\theta_{123} < 0$ ($\theta_{123} > 0$) el comportamiento del triplete se asemeja al de la compuerta <i>XOR</i> (a su opuesto). Los valores están dados en <i>bits</i>	78
5.3. Palabras con redundancia en las informaciones mutuas respecto de las interacciones de pares medidas en el triplete, es decir, aquellas que poseen altos valores de $D_{ijk}^{(3)} + I_{ijk} = I_{ij} + I_{ik} + I_{jk} - D_{ijk}^{(2)}$. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Los valores están dados en <i>bits</i>	81
5.4. Pares de palabras con alta interacción irreducible. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Los valores están dados en <i>bits</i>	82
5.5. Pares de palabras, que teniendo alta información mutua, poseen baja interacción irreducible. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Los valores están dados en <i>bits</i>	83
5.6. Conexiones obtenidas a partir de la componente negativa de la diferencia de información entre partes y pares de palabras, ΔI_2^- , para escalas $s = 175$ y $s = 147$ para los libros AM y OS, respectivamente.	91

Resumen

En este trabajo estudiamos la relación entre el comportamiento colectivo de un sistema y los elementos individuales que lo componen, desde dos perspectivas. Desde un enfoque del modelado, analizamos como la dinámica de los agentes y su patrón de interacciones afecta el estado global del sistema. Por otro lado, desde un punto de vista del análisis de datos, nos embarcamos en la tarea de encontrar las interacciones entre los elementos, dado determinado estado del sistema.

La primera parte se lleva a cabo considerando varias aristas particulares del asunto. Primero, estudiamos la diversidad en el estado asintótico de una población que participa de un juego evolutivo de dos estrategias como función del tamaño del grupo de interacción. Para tal caso, se observa la presencia de un fenómeno crítico. En segundo lugar, se analizan la supervivencia y extinción de estrategias en un juego cíclico, donde introducimos la cooperación entre agentes débiles dentro de tripletes, obteniendo que tal cooperación sólo beneficia la estrategia que la emplea cuando esta supera cierto umbral. Finalmente, estudiamos el problema de distribución de recursos en una población desde una original perspectiva evolutiva. En este contexto, nos preguntamos cómo un factor de incertidumbre, asociado a la cantidad de recursos de los oponentes, modifica las estrategias asintóticas adoptadas por los agentes.

La segunda parte —esto es, cómo detectar dependencias entre los elementos de un sistema, dado cierto estado global— se encara desde el marco de la teoría de la información, y se aplica al caso particular de interacciones entre palabras en lenguaje escrito. A través de técnicas de máxima entropía, proponemos un análisis de tríos de variables para revelar la estructura de dependencias. Con este método, no sólo somos capaces de encontrar interacciones puras de a tres, sino que también podemos detectar interacciones de a dos que se explican por medio de una tercera variable.

Palabras clave: COMPORTAMIENTO COLECTIVO, DEPENDENCIAS, TEORÍA DE JUEGO EVOLUTIVA

Abstract

In this work we study the relation between the collective behavior of a system and its individual component elements, from two perspectives. From a modeling approach, we analyze how the dynamics of the agents and their pattern of interaction affects the global state of a system. On the other side, from a point of view of data analysis, we embark in the task of finding the interactions between the elements, given a certain state of the system.

The first part is carried out considering several particular angles. Firstly, we study the diversity in the asymptotic state of a population involved in a two-strategy evolutionary game as a function of the size of the group of interaction, observing the presence of a critical phenomenon. Secondly, the survival and extinction of strategies are analyzed in a cyclic game, where we introduce the cooperation between weak agents within triplets, obtaining that cooperation only benefit the strategy that employs it when it exceeds certain threshold. Finally, we study the problem of resource allocation in a population from a novel evolutionary perspective. In this context, we ask how an uncertainty factor, regarding the amount of resources of the opponents, modify the asymptotic strategies adopted by the agents.

The second part—that is, how to detect dependencies between elements of a system, given certain global state—is faced from the framework of information theory, and it is applied to the particular case of interactions between words in written language. Through maximum entropy techniques, we propose an analysis of triplet of variables to unveil the structure of dependencies. By this methodology, we are not only able to find pure triple interactions, but we also can detect pairwise dependencies that are explained through a third variable.

Keywords: COLLECTIVE BEHAVIOR, DEPENDENCIES, EVOLUTIONARY GAME THEORY

Capítulo 1

Introducción

“You tried your best, and you failed miserably. The lesson is, never try.”

— H. Simpson

Entender cómo los diferentes ingredientes de la dinámica microscópica de un sistema de agentes determinan el comportamiento colectivo es un interrogante central en una amplia gama de problemas estadísticos. Por otra parte, descubrir las interacciones microscópicas o influencias de variables ocultas a partir del comportamiento global del sistema o parte del mismo —una clase de problema inverso al primero— es también una cuestión relevante en variados campos de estudio. Ambos interrogantes, que son dos caras de una misma problemática, representan el eje temático de este trabajo.

La primera problemática, entender la dinámica colectiva a partir de los elementos microscópicos, la encararemos desde el punto de vista del modelado. Por otro lado, la segunda problemática, descubrir las interacciones microscópicas a partir de cierto estado colectivo, se estudiará desde el análisis de datos. Estas dos perspectivas utilizan diferente terminología para conceptos similares. Por ejemplo, cuando se modela un sistema existen partes que se definen como entes individuales, los cuales usualmente se denominan agentes. Sin embargo, al analizar los datos de un sistema, puede no ser evidente que las mediciones realizadas provengan de tales entes individuales (por ejemplo, al medir actividad de neuronas, quizás no es posible acceder a los disparos de cada neurona en particular), por lo cual es más usual hablar de variables que se miden, que pueden o no hacer referencia a determinado aspecto de un agente o de varios.

También es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de comportamiento colectivo, lo que en principio incluye varias posibilidades. Un ejemplo es la aproximación asintótica de la población a un estado de equilibrio. En dicho caso, es necesario ver las características del equilibrio, tales como las fluctuaciones (o la ausencia de fluctuaciones, en estados absorbentes), la diversidad en la distribución de estados de los agentes, la estabilidad de dicho equilibrio, entre otros aspectos. Otro posible

comportamiento colectivo es la presencia de oscilaciones globales o sincronización, con su respectiva amplitud y frecuencia. Asimismo, la extinción o supervivencia de especies o tipos de agentes es otra posible caracterización del estado de una población. Los cambios bruscos o transiciones entre diferentes comportamientos, y qué los determinan, son de especial interés.

1.1. Contexto

A continuación mostraremos el contexto en el que pensamos las dos problemáticas planteadas. Estas corresponden respectivamente al estudio de sistemas complejos, en particular en el marco de la teoría de juego evolutiva, y al estudio de interacciones desde el análisis de datos, usando conceptos de teoría de la información.

1.1.1. Modelado de comportamientos colectivos en sistemas complejos

Una de áreas pioneras donde se estudió cómo los elementos microscópicos afectan el comportamiento colectivo es la propagación de enfermedades infecciosas [1, 2]. Considerando poblaciones con individuos infectados (que llevan la enfermedad) e individuos susceptibles (aquellos que no están enfermos, pero pueden contraer la enfermedad), se analizó cómo la tasa de reproducción de la enfermedad entre individuos o la probabilidad de curarse determinan la ocurrencia de una epidemia. A su vez, y en conexión con fenómenos de percolación [3, 4], se pasó a estudiar el efecto de la topología de redes complejas en la dinámica de la propagación de una enfermedad.

Otro campo de estudio es el de los procesos de sincronización, es decir, aquel en el que considerando poblaciones de elementos que interactúan de manera local se da lugar a un fenómeno global de oscilación. Este campo parte desde el estudio del modelo de Kuramoto [5, 6], donde osciladores acoplados transicionan espontáneamente a una fase de sincronización a medida que se aumenta la fuerza de acoplamiento, hasta el análisis de sincronización en redes complejas [7].

También desde la biología, en el estudio de poblaciones, se analizó cómo las interacciones entre organismos afecta la supervivencia de las diferentes especies o la diversidad de determinado ecosistema [8].

La teoría de juego evolutiva, campo en que nos concentraremos en la parte de modelado de esta tesis, ha servido como base para entender fenómenos tanto ecológicos como sociales [9, 10]. Partiendo de simples reglas para la interacción de individuos en situaciones de competencia o toma de decisiones, dicha teoría permite entender fenómenos globales de variadas características, tanto en poblaciones homogéneas como cuando existen patrones de interacciones complejos [11, 12].

1.1.2. Estudio de interacciones por medio de teoría de la información

Consideremos un sistema compuesto por un gran número de elementos, de los cuales estamos midiendo ciertas propiedades. Dilucidar las relaciones que existen entre los elementos —es decir, la red de interacción— a partir de dichas mediciones es fundamental para comprender y predecir el comportamiento del sistema en conjunto, pero puede llegar a ser una tarea difícil si el sistema presenta una componente estocástica considerable. A partir de la expansión de la genómica a finales del siglo XX, uno de los campos más activos dentro de la biología cuantitativa es la inferencia de redes de interacción, como redes reguladoras de proteínas o genéticas [13, 14]. Las expresiones genéticas bajo diferentes condiciones se interpretan como muestras de una distribución de probabilidad conjunta, a partir de la cual se infiere la red genética.

Otro campo donde se estudia la misma problemática es la neurociencia, en particular el estudio de interacciones funcionales en el cerebro o en grupos de neuronas a partir de los disparos del potencial de membrana [15–17]. Las técnicas utilizadas para analizar estas redes neuronales son variadas, pasando por medidas de correlación, sincronización u otras extraídas de teoría de la información [18–22].

Justamente este último grupo de medidas provenientes de teoría de la información constituye el contexto en el que trabajaremos [23–25]. Una de las dificultades esenciales es definir qué quiere decir interacción, y en ese sentido la información mutua de Shannon [23] entre dos variables aleatorias está establecida como una medida única por su generalidad y ámbito de aplicación. Sin embargo, para interacciones múltiples o irreducibles el panorama es mucho más amplio y no existe un consenso general dentro de la comunidad científica. A su vez, aparte de las definiciones teóricas, está el problema de estimar dichas medidas y sus respectivos errores.

1.2. Contenidos

La problemática de cómo los elementos microscópicos determinan el comportamiento global en principio cuenta con muchos ángulos a considerar debido a la gran variedad de posibilidades respecto de las interacciones microscópicas. En esta tesis la encararemos analizando ciertos aspectos sobre el patrón de interacciones subyacente e introduciendo dinámicas complejas, como la asignación de recursos en una población evolutiva. El segundo interrogante —es decir, el estudio de las interacciones entre los elementos de un sistema— se tratará desde el marco de teoría de la información, y a partir de modelos de máxima entropía para la detección de dependencias. Como ejemplo de aplicación, se estudiará el caso de relaciones entre palabras en lenguaje escrito.

1.2.1. Efecto de la dinámica microscópica en el comportamiento colectivo

Como dijimos, existen diversos puntos para estudiar en relación al impacto de las reglas microscópicas sobre el comportamiento colectivo de un sistema. En primer lugar, analizaremos dos aspectos relacionados con cambios en el patrón de interacciones. Nos preguntaremos sobre el efecto del tamaño del grupo de interacción en la diversidad de los estados asintóticos de los agentes del sistema y, por otra parte, qué sucede cuando las interacciones básicas dejan de ser sólo entre pares de agentes e involucran simultáneamente más individuos, en particular en dinámicas globales cíclicas. En segundo lugar, consideraremos una dinámica evolutiva de distribución de recursos en una población, un problema que sólo había sido considerado en un marco estático, con el ingrediente adicional de incertidumbre en la cantidad de recursos del agente con el que se compete.

En el capítulo 2 consideramos un juego evolutivo de dos estrategias, del tipo conocido como anticoordinación, donde el estado de los jugadores evoluciona por imitación. Dada una distribución espacial de la población, estudiamos qué ocurre cuando cambiamos el tamaño del grupo de agentes con los que se interactúa y qué efecto tiene dicha variación sobre la diversidad en la población.

A continuación, en el capítulo 3, estudiamos un juego cíclico de tres estrategias. Como novedad, permitimos que la dinámica se desarrolle en tripletes —grupos de tres agentes— en relación a las interacciones de a pares usualmente adoptadas. El juego en tripletes da lugar a un conjunto más rico de reglas microscópicas, y en este sentido nos preguntamos de qué manera la cooperación entre agentes *débiles* para vencer a uno *fuerte* cambia la naturaleza cíclica del juego.

En el marco de la teoría de juegos, en el capítulo 4 analizamos una versión evolutiva de un modelo de asignación de recursos —el juego del Coronel Blotto—. En este juego, dos jugadores distribuyen sus recursos en un conjunto de ítems, de forma que el jugador que más recursos asignó por un ítem obtiene dicho ítem como ganancia. El desafío de llevar este juego a una versión evolutiva se debe fundamentalmente a que los jugadores tienen un espacio de estrategias de dimensión infinita para explorar. Sin embargo, las ventajas de tal versión dinámica son evidentes, ya que evita la suposición de racionalidad en la elección de las estrategias óptimas y, en cambio, provee las estrategias de equilibrio como resultado de un proceso dinámico en una población. Es decir, los jugadores maximizan sus ganancias cambiando sus estrategias a medida que pasa el tiempo, en el mismo sentido que la evolución biológica. En este marco evolutivo, consideramos qué sucede con el estado colectivo de la población si los jugadores poseen cierta incerteza acerca de los recursos de sus oponentes.

1.2.2. Detección de dependencias a partir del estado colectivo de un grupo de agentes

Pensemos ahora en el segundo interrogante considerado. Es decir, dado cierto estado colectivo de un sistema queremos entender cuáles son los ingredientes microscópicos que le dan origen, o bien cómo se relacionan los elementos individuales que componen tal sistema. Vemos desde ya que es una cuestión con un alto grado de complejidad, dado que surgen muchas preguntas, entre las cuales se encuentran: ¿cómo se definen los elementos individuales que dan origen al estado global? O bien, ¿hasta qué nivel de descripción es necesario descender para explicar cierta dinámica colectiva? ¿Qué quiere decir que los elementos individuales estén relacionados o interactúen? En el caso anterior, se partía de que las interacciones estaban dadas, pero acá sólo contamos con el estado del sistema o parte de él. En este sentido ¿qué podemos hacer si no tenemos acceso a todas las variables relevantes que determinan el estado del sistema? ¿Cuál es el efecto de estas variables no observadas sobre el resto?

En el capítulo 5 abordamos algunas de estas preguntas desde el marco de la teoría de la información, el cual permite un estudio riguroso de dependencias entre variables aleatorias, tanto discretas como continuas. En este sentido se estudian dos métodos. El primero, en el cual nos centramos, está basado en técnicas de máxima entropía para la detección de interacciones, y lo consideramos en tripletes de variables. El segundo, que repasamos brevemente, estudia la dependencia entre partes de un sistema y los elementos individuales que componen dichas partes, y a partir de esta dependencia extrae relaciones entre los elementos.

Para validar las medidas teóricas propuestas se utiliza como ejemplo el lenguaje escrito ya que, por un lado, al ser una proyección de la mente humana conserva la complejidad necesaria y, por otra parte, nos proporciona de entrada los elementos individuales a analizar, es decir, las palabras. Finalmente, y sin ser una razón menor, las bases de datos de lenguaje escrito son muchas y de fácil acceso.

1.3. Panorama

Dada la amplitud del contexto considerado, evidentemente no se trata de cubrir extensivamente todas las posibilidades, y se apunta más bien a resolver preguntas particulares. De esta manera, nos embarcamos en la tesis para abordar los diferentes interrogantes propuestos y ver hasta qué punto podemos echar luz sobre tales cuestiones.

Capítulo 2

Efecto del tamaño del grupo de interacción en juegos evolutivos

“In this house, we obey the laws of thermodynamics!”

— H. Simpson

2.1. Motivación

Consideremos un sistema compuesto por un determinado número de agentes involucrados en un juego evolutivo, donde interactúan de a pares. Es decir, los agentes teniendo ciertas estrategias individuales se enfrentan con otros, y de esos enfrentamientos obtienen una ganancia que depende de las estrategias empleadas. En una escala de tiempo mayor, los agentes pueden cambiar las estrategias que poseen, imitando las estrategias de otros en función de una comparación entre las diferentes ganancias.

Una pregunta interesante que nos podemos plantear en tales juegos evolutivos es como afecta en la dinámica de la población el tamaño del grupo de interacción de agentes con los que cada uno interactúa. Es decir, este grupo estará compuesto por los jugadores con los que se compete en el juego y se imita en el momento de cambiar de estrategia —que en principio pueden representar una pequeña fracción de la población total—, y la dinámica colectiva sobre la que nos preguntamos puede referirse, por ejemplo, a la posibilidad de coexistencia de múltiples estrategias o a la estabilidad de oscilaciones globales del sistema.

En un sistema naturalmente pueden surgir perturbaciones que modifiquen la movilidad o capacidad de los agentes para interactuar entre ellos, lo que a su vez cambia el grupo de interacción. Si pensamos en sistemas biológicos, estas modificaciones pueden provenir de efectos climáticos o ambientales, o quizás la reducción drástica de un recurso global, consideración válida también en sistemas económicos. Cuando el número

de jugadores con los que uno interactúa es afectado, se vuelve crucial entender cómo esta perturbación cambia el comportamiento colectivo de la población.

En este capítulo encararemos dicha cuestión a través del análisis de un juego evolutivo de dos estrategias, donde los jugadores están espacialmente distribuidos. Como veremos, existe un comportamiento crítico en forma de transición en lo que se refiere a coexistencia de estrategias si se varía el tamaño del grupo de interacción.

2.2. Introducción

Desde los trabajos pioneros de Maynard Smith y otros [9, 10], los modelos matemáticos basados en juegos evolutivos han tenido un rol fundamental para entender los mecanismos básicos que le dan forma al surgimiento de un comportamiento colectivo en sistemas ecológicos y sociales. La identificación de las ganancias de un juego con las aptitudes individuales en las reglas de evolución de las estrategias hizo posible concebir el desarrollo de complejos patrones de comportamiento como consecuencia de la selección natural. Los modelos de juegos evolutivos han sido usados, en particular, para tratar de entender fenómenos sociales tales como el altruismo, cooperación consensuada y justicia social, los cuales son difíciles de explicar desde la base del tradicional postulado de evolución Darwiniana *la supervivencia del más apto*.

Originalmente se estudiaron los juegos evolutivos en poblaciones homogéneas, donde cada jugador tenía la misma probabilidad de interactuar con cualquier otro de la población. Más temprano que tarde se volvió claro que la evolución de las estrategias podía depender fuertemente del patrón de interacciones subyacente en la población, como muestran reseñas recientes [11, 12]. Dada una distribución espacial de los jugadores, la localización de la interacción puede introducir efectos no triviales en el comportamiento colectivo de la población [26–30]. Por ejemplo, Nowak y May mostraron que la distribución espacial en una población involucrada en el dilema del prisionero iterado puede sostener la coexistencia de cooperadores y desertores [26], mientras que en el caso de interacciones homogéneas sólo pueden sobrevivir desertores. Por otra parte, los efectos espaciales pueden suprimir la cooperación en el juego conocido como el del montón de nieve [31]. Estos dos ejemplos pertenecen a la clase de juegos evolutivos espaciales donde, dependiendo de ciertos parámetros del problema, la población se encuentra o en un estado puro, que corresponde al caso donde todos los jugadores poseen la misma estrategia, o en un estado mixto donde diferentes estrategias coexisten. Desde esta perspectiva, estos juegos modelan la alternativa entre diversidad y un comportamiento uniforme.

La transición entre estados puros y mixtos en una variedad de juegos evolutivos ha sido estudiada tanto como función de los parámetros de ganancia y ruido, como también de la topología espacial [32, 33]. En este caso, nosotros ponemos el enfoque

Tabla 2.1: Matriz de ganancia del juego. Los parámetros a y b son constantes positivas, con $a < b$.

	A	B
A	0,0	a, b
B	b, a	0,0

en el papel que juega el tamaño del grupo de interacción, es decir, el tamaño del vecindario donde cada jugador se encuentra restringido a participar del juego. Los efectos de variar este parámetro han sido discutidos, con diferente nivel de detalles, más que nada en conexión con la aparición de la cooperación en el dilema del prisionero [34, 35]. El juego del montón de nieve también ha sido considerado [35], y se encontraron resultados analíticos para topologías en forma de árbol. Acá, por otro lado, estudiamos la transición entre estados puros y mixtos como función del rango de interacción para poblaciones altamente agrupadas (con alto *clustering*) en topologías unidimensionales. En la siguiente sección presentamos nuestro modelo de juego evolutivo y discutimos su comportamiento en poblaciones homogéneas. En la sección 2.4 se caracteriza la naturaleza crítica de la transición, mostrando evidencia de que ésta pertenece a la clase de universalidad de percolación dirigida. Los diferentes resultados se discuten en la sección 2.5.

2.3. Juego evolutivo espacial y campo medio

Consideremos una población formada por N agentes en un juego simétrico de dos jugadores con dos estrategias, A y B . La estrategia usada por cada jugador permanece fija hasta que, imitando a los restantes agentes de la población, dicha estrategia cambia. El juego está caracterizado por la matriz de ganancia mostrada en la tabla 2.1, donde los parámetros a y b son constantes positivas. Sin perder generalidad, podemos fijar $a < b$, ya que el caso recíproco corresponde a intercambiar las estrategias.

La matriz de ganancia mostrada en la tabla 2.1 define una instancia de lo que se conoce como juegos de anti-coordinación [36], una clase que incluye al conocido juego de halcones y palomas [9] (o de la gallina, o del montón de nieve). En una población homogénea donde cada agente tiene igual probabilidad de jugar con cualquier otro, y donde las estrategias evolucionan en respuesta a diferencias en la aptitud de los jugadores —como ocurre por ejemplo en el modelo lineal del replicador [10] y también bajo las reglas dinámicas consideradas en este caso (ver más abajo)— este juego es de hecho equivalente al del montón de nieve en su formulación habitual [31]. Se espera que la presión evolutiva por obtener mayores ganancias lleve hacia una distribución heterogénea de estrategias, donde algunos agentes usan la estrategia A y otros B .

Así, bajo estas condiciones, el juego modela interacciones sociales que promueven la diversidad.

En esta implementación del proceso, se asume que cada agente i participa del juego con una subpoblación \mathcal{N}_i de tamaño N_i , lo que define el vecindario o grupo de interacción de i . Si, a un dado tiempo t , la cantidad de agentes que poseen la estrategia A y B es $N_i^A(t)$ y $N_i^B(t)$, respectivamente, entonces la ganancia promedio que espera tener el agente i es

$$\pi_i(t) = \begin{cases} ax_i^B(t) & \text{si la estrategia de } i \text{ es } A, \\ bx_i^A(t) & \text{si la estrategia de } i \text{ es } B, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x_i^{A,B}(t) = N_i^{A,B}(t)/N_i$ es la fracción de agentes con cada estrategia en el vecindario \mathcal{N}_i .

Por cada paso temporal, cada agente intenta actualizar su estrategia imitando a alguno de sus vecinos de la siguiente manera. Un agente j es elegido al azar entre los vecinos de i , es decir de \mathcal{N}_i . Si la estrategia de j coincide con la de i , no pasa nada. En el otro caso, i adopta la estrategia de j con una probabilidad que depende de la diferencia entre las ganancias que poseen dichos agentes en ese momento, π_i y π_j ,

$$p = \{1 + \exp[-w(\pi_j - \pi_i)]\}^{-1}. \quad (2.2)$$

El parámetro w juega el rol del inverso de una temperatura. Cuando w es grande, el agente i imita sólo a aquellos vecinos que poseen mayor ganancia. Por otro lado para $w \rightarrow 0$, cambia o permanece igual con la misma probabilidad. Es necesario notar que, con estas reglas de imitación, los estados puros —donde todos los agentes poseen la misma estrategia— son puntos fijos absorbentes de la dinámica, dado que en estos estados los agentes nunca tienen la opción de cambiar sus estrategias individuales.

También hay que observar que la probabilidad p es invariante ante el cambio de parámetros $(a, b, w) \rightarrow (\alpha a, \alpha b, w/\alpha)$ para un valor arbitrario $\alpha > 0$. En nuestras simulaciones numéricas aprovechamos esta simetría fijando $a = 1$ (i.e., $\alpha = 1/a$) y estudiamos la evolución en términos de b y w .

La versión de campo medio de este proceso, donde el vecindario de cada agente es toda la población, puede ser analizada fácilmente en el límite de N grande. A un dado tiempo t , sean $x_A(t)$ y $x_B(t) = 1 - x_A(t)$ las fracciones de agentes en cada estrategia. La ganancia esperada para todos los agentes con igual estrategia es la misma, digamos $\pi_A = ax_B$ y $\pi_B = bx_A$. Asignando a cada paso temporal una duración $\delta t = N^{-1}$ y tomando en cuenta la forma de la probabilidad de transición p dada por la ecuación

(2.2), una aproximación en tiempo continuo para la evolución de x_A se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{x}_A &= x_A [p_A - (x_A p_A + x_B p_B)] \\ &= x_A (1 - x_A) (p_A - p_B).\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde p_A es la probabilidad de que un agente con la estrategia B adopte la estrategia A , mientras que p_B es la probabilidad de que un agente con la estrategia A adopte la estrategia B (ver ecuación (2.2)). A partir de ahí,

$$\dot{x}_A = x_A (1 - x_A) \frac{\sinh[w(\pi_A - \pi_B)]}{1 + \cosh[w(\pi_A - \pi_B)]}.\tag{2.4}$$

Para cada par de valores $a, b > 0$ y para cada w positivo, esta ecuación tiene un único punto fijo $x_A^* = (1 + b/a)^{-1}$, que satisface $0 < x_A^* < 1$. Por otro lado, $x_A = 0$ y 1 son equilibrios inestables. La solución estable corresponde a un estado mixto, donde la población queda distribuida entre las dos estrategias. Dicho estado mixto es evolutivamente seleccionado dado que cuando en el juego participan jugadores con estrategias opuestas las ganancias son mayores.

Como se podía esperar, simulaciones numéricas para N finito del sistema homogéneo muestran que, para tiempos largos, la fracción de la población con estrategia A fluctúa alrededor de x_A^* . Tales fluctuaciones disminuyen cuando aumentamos N y w .

Por otra parte, simulaciones del mismo proceso evolutivo con grupos de interacción más pequeños revelan un panorama totalmente diferente. A manera de ilustración, consideramos una población de $N = 10^4$ agentes en una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas, donde el vecindario de cada agente está compuesto por los k vecinos tanto a izquierda como a derecha. De esta forma los vecindarios son simétricos (si i es vecino de j , entonces j es vecino de i) y su tamaño es $2k$.

La figura 2.1 muestra la distribución de agentes con estrategia A (puntos negros) para una porción de la población de 500 agentes para $a = 1$, $b = 3$, y $w = 1$, y para tres valores del tamaño del vecindario, como función del tiempo. Mientras que para el grupo de interacción más grande ($k = 11$) la población permanece en el estado mixto predicho por el modelo de campo medio, para vecindarios más chicos ($k = 5$) se alcanza el estado homogéneo —en este caso, corresponde a la estrategia B que es la que tiene mayor ganancia cuando se enfrentan las dos estrategias—. Entre estos dos regímenes, la situación intermedia presenta ($k = 8$) grandes sectores de agentes contiguos que mantienen la estrategia dominante B durante largos intervalos.

Este comportamiento sugiere la existencia de una transición entre estados mixtos y puros en la evolución de estrategias, cuando el grupo de interacción disminuye en tamaño y la interacción se vuelve más localizada. En la siguiente sección caracterizaremos

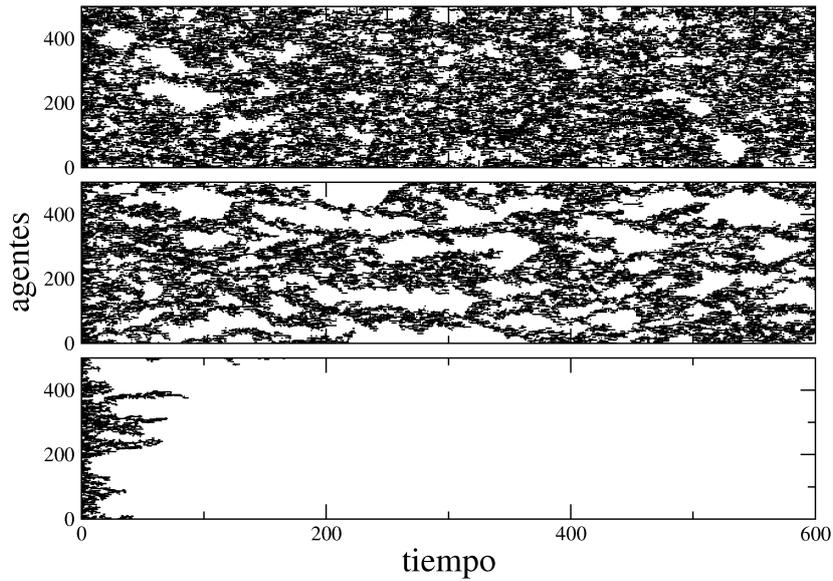


Figura 2.1: Distribución de la estrategia A (puntos) en 500 agentes de una población de $N = 10^4$ ubicados en una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas, como función del tiempo, para tres valores del tamaño del vecindario k . Panel superior: $k = 11$; panel intermedio: $k = 8$; panel inferior: $k = 5$. Los parámetros usados son $a = 1$, $b = 3$, y $w = 1$.

dicha transición.

2.4. Transición crítica entre estados mixtos y puros

Estudiamos la desestabilización de la fase de estado puro a medida que crece el tamaño del grupo de interacción por medio de simulaciones numéricas para poblaciones lo suficientemente grandes. Para lograr una variación continua del rango de interacción, se le permite al tamaño del vecindario para cada agente fluctuar a lo largo de la evolución, de manera tal que el promedio temporal sea igual al valor deseado —no necesariamente un número entero—. Para obtener un tamaño promedio de $2K$, donde K se encuentra entre dos enteros k y $k + 1$, elegimos en cada paso de tiempo para cada agente un vecindario de tamaño $2k$ con probabilidad $k + 1 - K$, y un tamaño $2(k + 1)$ con probabilidad $K - k$.

La figura 2.2 muestra los resultados de la fracción asintótica x_A de agentes con la estrategia A como función del rango de interacción K , para $a = 1$, $b = 3$ y $w = 1$. El tamaño de la población es $N = 10^4$ y como condición inicial cada agente adopta una de las dos estrategias con igual probabilidad. Para cada valor de K , se esperó un transitorio de $2 \times 10^4 N$ pasos de tiempo, para luego promediar x_A sobre los siguientes $2 \times 10^5 N$ pasos de tiempo. La línea horizontal punteada corresponde al punto fijo estable de campo medio, $x_A^* = (1 + b/a)^{-1} = 0,25$. Se puede observar, como era de esperarse, que x_A se aproxima a este valor límite a medida que K crece. Por otra parte, para valores pequeños de K , la fracción de la población que usa la estrategia

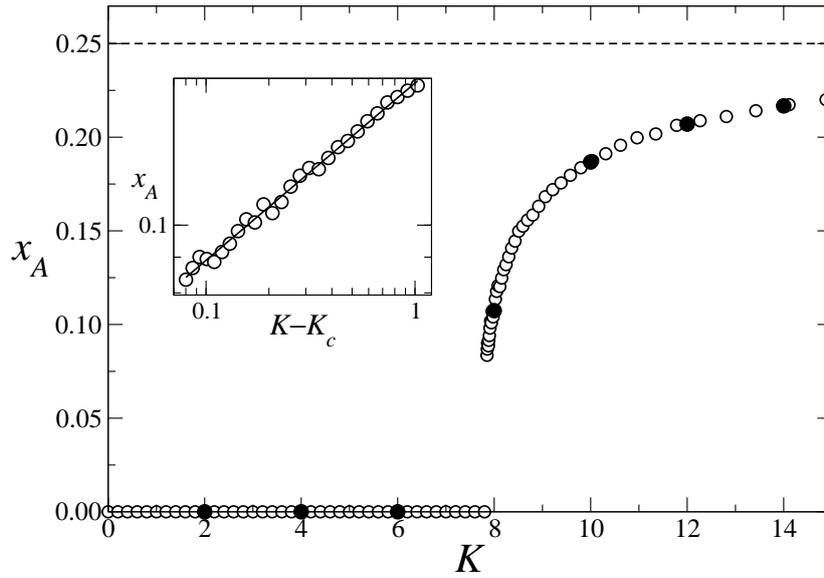


Figura 2.2: Fracción asintótica a tiempos largos de agentes con la estrategia A , x_A , como función del tamaño del vecindario K , el cual varía continuamente. El tamaño del sistema es $N = 10^4$, y se usaron los parámetros $a = 1$, $b = 3$, y $w = 1$. Los puntos llenos (vacíos) corresponden a valores enteros (no enteros) de K . La línea punteada indica el equilibrio de x_A en la versión de campo medio (equivalente al límite de K grande). El gráfico interior muestra en escalas logarítmicas x_A como función de $K - K_c$, donde $K_c = 7,77$. La pendiente de la recta es 0,25.

A x_A es exactamente cero. Una clara transición entre dos regímenes se observa para $K_c = 7,80 \pm 0,05$.

Varios aspectos de dicha transición sugieren que ésta pertenece a la clase de universalidad de percolación dirigida (DP, [37–39]). Uno de estos es que la transición se caracteriza por un parámetro de orden unidimensional (x_A) que pasa de un único estado absorbente ($x_A = 0$ para $K < K_c$) a un estado con fluctuaciones con un promedio bien definido ($x_A > 0$ para $K > K_c$). Además, las reglas dinámicas quedan determinadas para rangos de interacción finitos, y no hay desorden congelado. Finalmente, como $a \neq b$, el sistema no presenta simetrías dinámicas (para $a = b$, por el otro lado, se da la coexistencia de dos estados absorbentes equivalentes, $x_A = 0$ y $x_A = 1$).

Si esta transición pertenece a la clase de universalidad DP, se espera que cerca del punto crítico el parámetro de orden, dado por la fracción de agentes con estrategia A , se comporte como $x_A \sim |K - K_c|^\beta$, con $\beta \sim 0,277$. El gráfico interior de la figura 2.2 muestra en escalas logarítmicas x_A como función de $K - K_c$, con $K_c = 7,77$ (para la estimación de este punto crítico, ver más abajo). La pendiente obtenida a partir de un ajuste de cuadrados mínimos $0,25 \pm 0,01$, obtenida para $0,08 < K - K_c < 1$, está razonablemente cerca del exponente crítico β de la transición DP. De cualquier forma, debido al pequeño valor del exponente β , la transición es muy abrupta. De esta forma, en simulaciones numéricas aproximarse a la transición por arriba sin caer en el estado absorbente es bastante difícil, incluso para poblaciones muy grandes.

Una forma más eficiente de verificar que este proceso pertenece a la clase de univer-

salidad de DP está basada en un análisis de propagación de daño [39]. Dicho análisis consiste en estudiar la evolución de un estado donde toda la población se encuentra en el estado absorbente (estrategia B) excepto por un solo agente que posee la estrategia A . Dos cantidades son analizadas en función de tiempo, las cuales corresponden a la fracción $x_A(t)$ de individuos en la estrategia “defecto” y la probabilidad $P(t)$ de que al menos un agente con estrategia A sobreviva al tiempo t . Para grupos de interacción cuyo tamaño se encuentra por debajo del valor crítico, $K < K_c$, tanto $x_A(t)$ como $P(t)$ decrecen exponencialmente rápido a medida que pasa el tiempo, mientras que para $K > K_c$ alcanzan valores asintóticos finitos. En cambio en el punto crítico, se espera que tales cantidades se comporten como una función algebraica del tiempo,

$$x_A(t) \sim t^\theta, \quad P(t) \sim t^{-\delta}. \quad (2.5)$$

Mediante extensas simulaciones se ha mostrado que en un proceso DP unidimensional tales exponentes son $\theta \approx 0,314$ y $\delta \approx 0,159$ [39, 40]. A través de la detección del comportamiento crítico dado por la ecuación (2.5), no sólo se obtiene los exponentes críticos, sino también la posición precisa de la transición.

Para obtener los exponentes críticos θ y δ es útil calcular exponentes efectivos que dependen del tiempo,

$$\theta(t) = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_A(t)}{x_A(e^{-\mu t})} \quad (2.6)$$

y de forma análoga para $\delta(t)$. En esta expresión μ es el intervalo logarítmico de tiempo usado para estimar los exponentes efectivos. En el límite $t \rightarrow \infty$, los exponentes efectivos convergen a los valores de los exponentes críticos si en la estimación se usa el punto crítico K_c . Por debajo o por encima de K_c los exponentes efectivos convergen a cero o divergen a infinito.

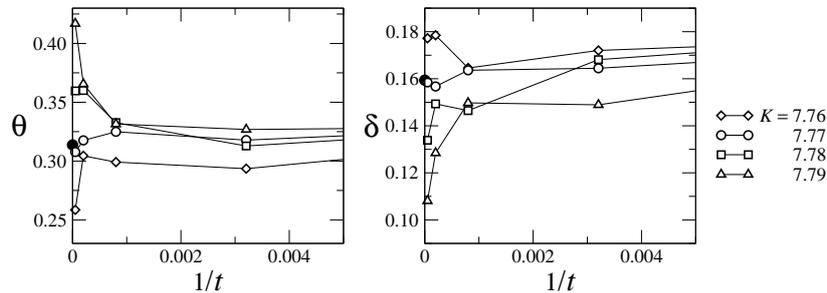


Figura 2.3: Evaluación numérica de los exponentes críticos θ y δ dados por la ecuación (2.5), caracterizando la propagación de la estrategia A a partir de un estado inicial con un solo agente en dicha estrategia. Los parámetros son los mismos que en la figura 2.2. El cambio de comportamiento para tiempos largos es usado para determinar el tamaño de vecindario crítico $K_c = 7,77$. Los puntos llenos en el eje vertical se encuentran posicionados en los valores aceptados de dichos exponentes para un proceso unidimensional de la clase de universalidad DP [40].

La figura 2.3 muestra los resultados numéricos de los exponentes efectivos $\theta(t)$ y $\delta(t)$ en función de $1/t$, para $K = 7,76$ hasta $7,79$. En ambos casos el comportamiento

para tiempos largos ($1/t \rightarrow 0$) cambia para $K = 7,77$, por lo que se obtuvo como punto crítico $K_c = 7,77 \pm 0,01$. Para este valor del tamaño de vecindario, nuestras estimaciones de los exponentes críticos son

$$\theta = 0,308 \pm 0,005 \quad \delta = 0,158 \pm 0,005, \quad (2.7)$$

las cuales difieren de los valores aceptados para un proceso DP unidimensional en menos de 2%. Los intervalos de confianza se obtuvieron a partir de las fluctuaciones de las sucesivas estimaciones de los exponentes efectivos θ y δ a medida que se consideran tiempos más grandes.

La coincidencia entre los exponentes observados para este sistema y aquellos correspondientes a percolación dirigida en una dimensión sugieren fuertemente que la transición en la distribución de estrategias al variar el tamaño del grupo de interacción es un nuevo miembro de la ya extensa clase de universalidad DP. Mientras no se espera que estos exponentes cambien con los parámetros del juego —siempre que $a \neq b$ —, el tamaño del vecindario crítico K_c en general va a depender de los valores particulares de a , b y w (ver tabla 2.1, y las ecuaciones (2.1) y (2.2)). Como ya dijimos en la sección 2.3, podemos fijar $a = 1$ y estudiar la variación de K_c como función de sólo b (con $b > 1$) y w .

El panel superior de la figura 2.4 muestra en símbolos el tamaño de vecindario crítico K_c encontrado numéricamente como función de w , para tres valores del parámetro b . Hay que notar que este gráfico, para cada valor de b , se puede interpretar como un diagrama de fase en el espacio de parámetros (K, w) , donde los puntos definen la frontera entre la región superior de estados mixtos y la inferior de estados puros. Si fijamos K , aumentar el valor de w induce la transición a un estado mixto. Como se discutió previamente, valores altos de w favorecen la imitación de estrategias con mayor ganancia lo cual lleva a la población a adoptar una distribución heterogénea de estrategias. Para valores fijos de K y w , si aumentamos b se favorece la adopción de la estrategia B , lo que equivale a promover la convergencia al estado absorbente $x_A = 0$. De esta forma la frontera de transición se mueve para arriba a medida que b crece.

A través de un simple argumento podemos entender cuantitativamente la dependencia del punto crítico K_c con los parámetros b y w , que al mismo tiempo logra mostrar la característica propia de un fenómeno de percolación que posee la propagación de estrategias. Consideremos al igual que antes un estado inicial donde toda la población se encuentra en la estrategia B excepto por un agente en A . Llamemos $P_1(N_A)$ la probabilidad de que el sistema alcance al menos una vez en cualquier momento futuro un estado con exactamente N_A agentes con la estrategia A . En particular, $P_1(0)$ es la probabilidad de caer en el estado absorbente. Para $K < K_c$, se espera que $P_1(0)$ sea mas grande que $P_1(N_A)$ para valores de N_A suficientemente grandes. Teniendo en cuenta

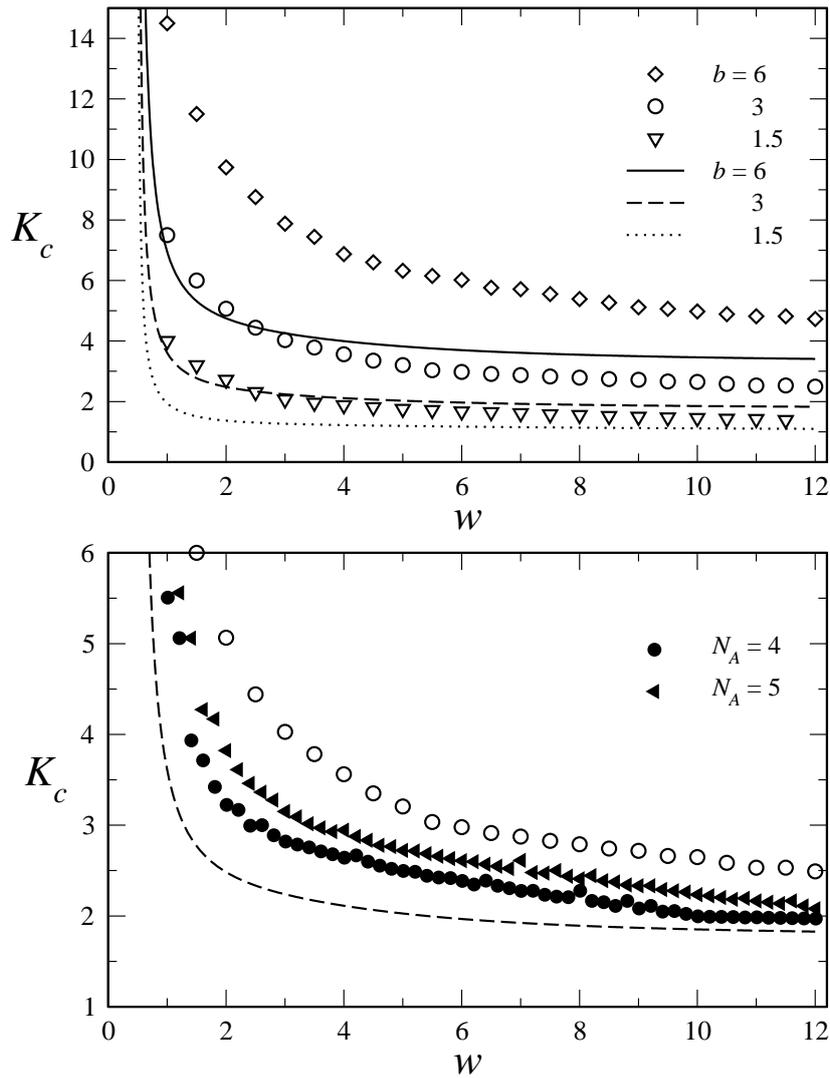


Figura 2.4: Panel superior: tamaño del vecindario crítico K_c encontrado numéricamente (símbolos vacíos) en una población de 10^4 agentes, como función de w para tres valores de b ($a = 1$). Las curvas corresponden a las aproximaciones analíticas discutidas en el texto para $N_A = 3$. Panel inferior: aproximación analítica evaluada numéricamente para $N_A = 4$ y $N_A = 5$ (símbolos llenos) para los mismos datos del panel superior correspondientes a $b = 3$ (símbolos vacíos). La línea punteada es la aproximación analítica para $N_A = 3$.

las condiciones bajo las cuales se produce una transición en percolación [41], podemos asumir que el tamaño del grupo de interacción crítico en nuestro sistema, para poblaciones infinitamente grandes, queda determinado por la condición $P_1(0) = P_1(N_A)$ para $N_A \rightarrow \infty$. En otros términos, la transición ocurre cuando la probabilidad de caer en el estado absorbente es igual a la probabilidad de que la estrategia A se propague a una fracción finita de la población.

Para valores finitos de N_A , la ecuación $P_1(0) = P_1(N_A)$ nos da una aproximación $K_c^{N_A}$ para el punto crítico, la cual mejorará a medida que N_A se haga más grande: $K_c^{N_A} \rightarrow K_c$ cuando $N_A \rightarrow \infty$. Al mismo tiempo, el cálculo de $P_1(N_A)$ se vuelve cada vez más difícil, pero para valores pequeños de N_A éste se puede hacer analíticamente.

Para $N_A = 2$, se obtiene $K_c^{(2)} = b/2a$. A pesar de que esta estimación no depende de w , ya muestra la tendencia correcta al variar b . Además, $K_c^{(2)}$ parece coincidir con el punto crítico para valores grandes de w . Esto es consistente con el hecho de que para $w \rightarrow \infty$ la imitación es determinista, por lo que pasar de un agente con estrategia A a dos agentes, alcanza para decir que la estrategia A se va a propagar a una parte finita de la población.

La dependencia con w aparece cuando consideramos $N_A = 3$. En este orden de aproximación, el punto crítico puede todavía ser hallado de forma analítica. Esta aproximación corresponde a las curvas en el panel superior de la figura 2.4 como función de w para los mismos valores de b que en el cálculo numérico de K_c . Aunque la diferencia entre los valores numéricos y analíticos aún es sustancial, ya se observa la dependencia cualitativa correcta. Para $N_A > 3$, no hay una forma cerrada para $K_c^{N_A}$ y la aproximación para el punto crítico se debe obtener de forma numérica. Los puntos llenos en el panel inferior de la figura 2.4 muestran la estimación para el punto de transición para $b = 3$, con $N_A = 4$ y 5. Se observa que la aproximación mejora, en relación al resultado de las simulaciones, al aumentar N_A .

Finalmente, consideremos brevemente el caso límite $a = b$. En esta situación A y B son completamente equivalentes. Las estrategias individuales cambian de acuerdo a las diferencias entre el número de agentes con ambas estrategias en cada vecindario, y la evolución lleva a la población hacia un balance entre dichas estrategias. La dinámica posee ahora dos estados absorbentes simétricos, y la desestabilización de estos puntos fijos no se espera que pertenezca a la clase de universalidad DP, sino a la clase DP2 [39]. Dominios de A y B siempre van a estar separados por interfases activas con fluctuaciones. La simetría entre las dos estrategias asegura que los dominios absorbentes compitan entre sí.

2.5. Discusión

Estudiamos la transición entre estados puros y mixtos en la distribución de estrategias de un juego evolutivo donde los agentes se encuentran distribuidos espacialmente. En dicho juego las estrategias cambian por imitación de agentes con ganancias más altas. En esta clase de juegos si la población está mezclada, es decir, dos agentes cualesquiera pueden interactuar, se alcanza un estado donde las estrategias coexisten. Por lo tanto en esta situación el juego promueve la diversidad. Por otro lado, cuando la interacción se da sólo en el vecindario de cada agente mostramos que el sistema cae en un estado donde toda la población posee la estrategia dominante. A diferencia de trabajos anteriores que se centran en el papel que juegan otros parámetros dinámicos, nuestro estudio está focalizado en los efectos del tamaño del grupo de interacción o vecindario en la distribución asintótica de estrategias.

En particular consideramos una población dispuesta en una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas, donde cada agente interactúa con cierto número de jugadores a la izquierda y a la derecha, lo que define su grupo de interacción. Ajustando de manera aleatoria el tamaño del vecindario a lo largo de la evolución, hemos logrado variar este parámetro de forma continua. La matriz de ganancia de nuestro juego junto a una componente aleatoria en la imitación de estrategias introducen dos parámetros independientes en el problema.

La transición observada entre estados puros y mixtos es abrupta pero continua. Varios elementos en la dinámica microscópica y colectiva sugieren que la transición en este sistema pertenece a la clase de universalidad de percolación dirigida. A través de evidencia numérica hemos probado que de hecho éste es el caso estimando tres exponentes críticos, los cuales corresponden a la fracción asintótica de agentes con la estrategia no dominante en la fase mixta, y a la probabilidad de supervivencia y el decaimiento de dicha estrategia a ambos lados de la transición. También se estudió como depende el tamaño crítico de vecindario de los parámetros dinámicos, obteniendo que tanto una disparidad mayor entre las ganancias de ambas estrategias como así también menos ruido favorecen el establecimiento del estado puro.

Mientras que estos resultados corresponden a una transición entre estados puros y mixtos como función del tamaño del vecindario, conjeturamos que este fenómeno crítico está más bien inducido por el cambio de *localización* de la interacción. En otras palabras, un vecindario chico pero deslocalizado —como, por ejemplo, en una red parcialmente desordenada (de mundo pequeño)— tendría el mismo efecto en el comportamiento colectivo de nuestro sistema que un vecindario grande. Esta conjetura es cualitativamente consistente con resultados previos para el dilema del prisionero en redes de mundo pequeño, que muestran la aparición de un comportamiento cooperativo a medida que se cambia el grado de localización [42]. Hemos obtenido resultados preliminares que muestran que en una población con grupos de interacción pequeños, donde todos los agentes adoptan la estrategia dominante a tiempos largos, el estado mixto puede ser recuperado si existen ocasionales (pero muy raras) interacciones con agentes distantes. El estudio sistemático de tal transición se deja para un trabajo futuro.

Finalmente, volviendo a la pregunta original formulada al comienzo de este capítulo, concluimos que el tamaño del grupo de interacción es un factor determinante para entender la dinámica de un juego evolutivo, ya que un cambio en este parámetro puede llevar al sistema de un estado de coexistencia de estrategias a uno homogéneo. Sin embargo, como argumentamos correspondientemente, es necesario no perder de vista la conexión que existe entre las diferentes variables del sistema —el tamaño del vecindario, el grado de localización de dicho vecindario, el ruido y la asimetría de las ganancias— a la hora de tener una visión completa del problema.

Capítulo 3

Interacción en triplete en juegos cíclicos

“Oh, meltdown. It’s one of those annoying buzzwords. We prefer to call it an unrequested fission surplus.”

— Charles Montgomery Burns

3.1. Motivación

En el capítulo anterior consideramos los efectos que se producen en el comportamiento colectivo de una población al cambiar el tamaño del grupo de agentes con los que se interactúa. En este capítulo, en cambio, nos preguntamos qué sucede con el comportamiento global del sistema si en la dinámica microscópica las interacciones dejan de ser de a dos y pasan a involucrar tres agentes. Es necesario destacar la diferencia entre ambas situaciones, ya que a pesar de que en el primer caso el vecindario o grupo de interacción cambia de tamaño, las interacciones microscópicas (juegos e imitaciones) siguen siendo de a pares. Por otro lado, en este capítulo deseamos considerar una situación donde los eventos microscópicos involucren tres agentes.

Naturalmente la gran mayoría de los sistemas físicos conocidos están bien entendidos a través de interacciones de a pares. Sin embargo, como argumentaremos pertinente-mente, esto no significa que en sistemas sociales tal descripción sea suficiente. Aún más, como se verá en el capítulo relativo al análisis del lenguaje, incluso en sistemas en que sabemos que los agentes interactúan de a dos, si no se tiene acceso a todas las variables relevantes es esperable que dicho sistema presente interacciones efectivas de mayor orden.

Esta generalización de interacciones en triplete amplía naturalmente las posibilidades en lo que se refiere a las reglas dinámicas que se pueden considerar. En ese

caso analizamos qué ocurre si agentes, que interactuando de a pares poseían una estrategia débil, cooperan para imponer su estado a agentes con una estrategia fuerte o dominante.

Con el propósito de poner dicha pregunta en un contexto más concreto, consideramos una dinámica cíclica de tres estrategias, conocida como el juego de piedra, papel o tijera. En este caso, cada estrategia domina a una de las otras dos y es dominada por la tercera. Veremos que la cooperación en triplete entre estrategias débiles sólo beneficia la posibilidad de supervivencia de dicha estrategia si el grado de cooperación supera determinado umbral.

3.2. Introducción

El uso de una red o grafo para representar un patrón de interacciones es un paradigma muy usado en muchas ramas de la ciencia. Esta representación, que asume interacciones de a pares, es útil para describir varios sistemas cuyas propiedades dinámicas se ven afectadas por las características estructurales del patrón de interacciones [43–45]. Sin embargo, existen sistemas donde las interacciones básicas ocurren en grupos de otros tamaños (tripletes, cuartetos, etc.) y no sólo en pares [46, 47]. Un ejemplo de tal situación es el proceso de formación de opinión o la toma de decisiones en grupos de personas, donde la evolución individual de opiniones esta determinada por el intercambio colectivo de perspectivas más que por las discusiones entre parejas, y se ve afectada no sólo por el tamaño del grupo sino también por su dinámica interna [48]. Mientras que una red de interacciones queda especificada a través de una lista de todos los pares de agentes que interactúan, una posible representación para este tipo de estructuras más complejas es una lista de todos los grupos de diferentes tamaños presentes en la población.

Estas interacciones que ocurren en grupos más grandes también aparecen naturalmente, por ejemplo, en un contexto económico como acuerdos o disputas entre empresas, que pueden ser modeladas usando herramientas de teoría de juegos (ver siguiente capítulo). En este sentido es importante entender los efectos de estas dependencias no binarias en el comportamiento colectivos de sistemas sociales y económicos donde es probable que sucedan estas alianzas, que dan acceso a los agentes involucrados a nuevas estrategias.

En este análisis nos centraremos en una población donde los agentes, que poseen una de tres posibles estrategias, interactúan en grupos de tres (tripletes), los que se encuentran distribuidos homogéneamente en la población. Las tres estrategias presentan una dominación cíclica, por lo que este tipo de dinámica es conocida como juego de piedra, papel o tijera [9, 10]. Tales interacciones cíclicas han sido observadas tanto en sistemas físicos [49] como biológicos, siendo uno de los ejemplos más conocidos

las estrategias de apareamiento de las lagartijas de turbera [50]. Otros casos son la competencia de comunidades de ciertos organismos marinos [51], la competencia entre cadenas mutantes de levadura [52], y posibles interacciones cíclicas entre genes egoístas (*outlaw*) [53].

Una característica especial de la dinámica de este tipo de juegos es la presencia de ciclos heteroclínicos estables [54, 55], que induce órbitas oscilatorias crecientes en tamaño al mismo tiempo que hace que el sistema permanezca cerca de los estados puros (donde toda la población posee la misma estrategia) por periodos cada vez más largos. En un sistema finito este comportamiento lleva a que eventualmente una estrategia se extinga; de las dos estrategias que quedan, alguna domina a la otra, así que finalmente sólo una sobrevive. Nosotros nos focalizamos en entender cómo la cooperación en tripletes afecta la probabilidad de supervivencia de determinada estrategia. En la siguiente sección presentamos nuestro modelo evolutivo para interacciones de a pares y de a tripletes. La sección 3.4 muestra simulaciones numéricas para la evolución temporal, las probabilidades de supervivencia y para la dependencia de las condiciones iniciales. En la sección 3.5 se estudia un enfoque de campo medio, mientras que la sección 3.6 proporciona una aproximación analítica de las probabilidades de supervivencia. Finalmente los diferentes resultados se discuten en la sección 3.7.

3.3. El modelo

En el juego de piedra, papel o tijera cada agente i adopta una de tres posibles estrategias ($s_i = 0, 1, 2$), las cuales se dominan cíclicamente (ver figura 3.1). Con esto queremos decir que la evolución temporal del sistema está gobernada por un proceso de invasión iterativo de las distintas estrategias entre agentes que interactúan. En el modelo tradicional con interacciones de a pares, se selecciona al azar dos agentes de toda la población. Como resultado, el par $\{0, 1\}$ ¹ se transforma en $\{0, 0\}$, $\{1, 2\}$ se vuelve $\{1, 1\}$, y $\{2, 0\}$ se transforma en $\{2, 2\}$.

En nuestra versión, por otro lado, los agentes interactúan en tripletes, lo cual nos permite explorar dinámicas más ricas además de la dominación cíclica entre las estrategias. En particular implementamos un proceso de cooperación en cada triplete, donde dos agentes con la misma estrategia pueden superar a un tercero incluso cuando este último adopta una estrategia más fuerte. De esta manera el tercer agente cambia de estrategia a la de los dos cooperadores. Para cada estrategia, introducimos la probabilidad de que los agentes formen alianzas, de forma tal que agentes con determinada estrategia son más susceptibles a cooperar que otros. En este nuevo contexto, estudiamos si la cooperación local resulta en un beneficio global para dicha estrategia, y como

¹Como no es relevante el orden, los pares $\{0, 1\}$ y $\{1, 0\}$ se consideran equivalentes.

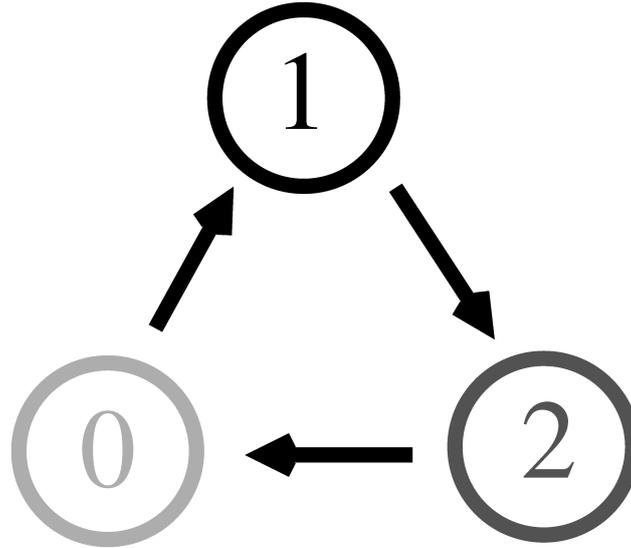


Figura 3.1: Diagrama de la dominación cíclica entre las tres estrategias. La estrategia 0 vence a la 1, la 1 vence a la 2, y la 2 vence a la 0.

la asimetría en la cooperación afecta el estado asintótico de la población.

Consideramos una población de tamaño N . En cada paso evolutivo elegimos tres agentes al azar. Si los tres agentes tienen la misma estrategia o tres estrategias diferentes, no se cambian tales estrategias. Si dos agentes poseen una estrategia que domina a la del tercer agente, este último adopta la estrategia de los dominantes. Por ejemplo, el triplete $\{1, 1, 2\}$ se transforma en $\{1, 1, 1\}$. Finalmente, si dos agentes que poseen una estrategia débil enfrentan a uno con estrategia dominante, los agentes débiles pueden cooperar con determinada probabilidad y vencer al agente fuerte. Por ejemplo, el triplete $\{1, 2, 2\}$ se transforma en $\{2, 2, 2\}$ con una dada probabilidad r_2 . En su defecto, uno de los agentes débiles es reemplazado por uno fuerte. De esta forma, las transiciones posibles son

$$\begin{aligned}
 \{0, 0, 1\} &\rightarrow \{0, 0, 0\} \text{ con } p_t = 1 \\
 \{0, 1, 1\} &\rightarrow \{0, 0, 1\} \text{ con } p_t = 1 - r_1 \\
 &\quad \{1, 1, 1\} \text{ con } p_t = r_1 \\
 \{1, 1, 2\} &\rightarrow \{1, 1, 1\} \text{ con } p_t = 1 \\
 \{1, 2, 2\} &\rightarrow \{1, 1, 2\} \text{ con } p_t = 1 - r_2 \\
 &\quad \{2, 2, 2\} \text{ con } p_t = r_2 \\
 \{2, 2, 0\} &\rightarrow \{2, 2, 2\} \text{ con } p_t = 1 \\
 \{2, 0, 0\} &\rightarrow \{2, 2, 0\} \text{ con } p_t = 1 - r_0 \\
 &\quad \{0, 0, 0\} \text{ con } p_t = r_0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde p_t se refiere a la probabilidad de transición. Este sistema posee simetría cíclica sólo cuando las probabilidades de cooperación son iguales.

3.4. Resultados numéricos

Se realizaron simulaciones numéricas del modelo con tripletes de acuerdo a las reglas de juego presentadas en la sección anterior. La figura 3.2 muestra la fracción n_i del total de la población (en este caso, $N = 900$) con cada una de las estrategias como función del tiempo, para dos elecciones representativas de las probabilidades de cooperación y para las mismas condiciones iniciales. Al representar fracciones de la población y al no permitirse mutaciones a otros tipos de estrategias, las variables n_i se encuentran restringidas al simplex $n_0 + n_1 + n_2 = 1$, $n_i \geq 0$. En las simulaciones, una unidad de tiempo corresponde a una interacción por agente en promedio.

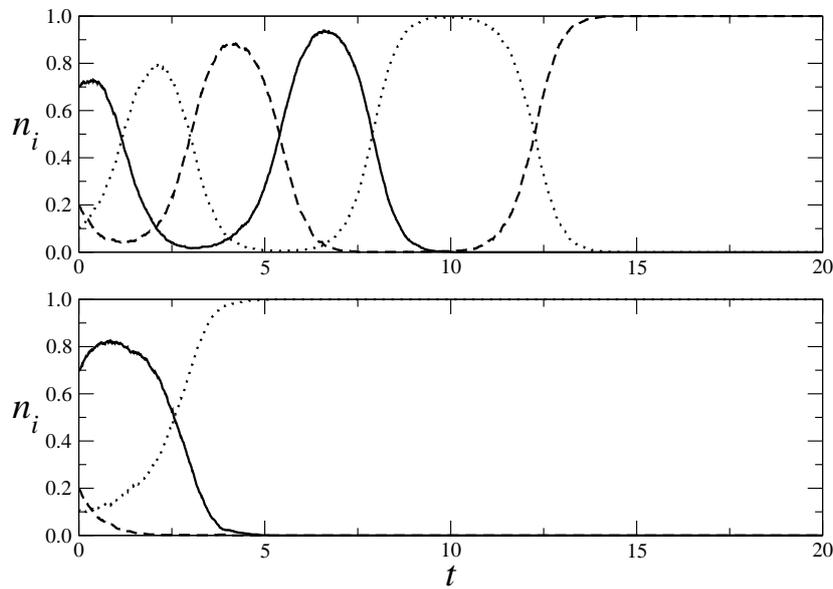


Figura 3.2: Fracciones de la población en cada una de las estrategias como función del tiempo (la estrategia 0 en línea punteada, la 1 en línea continua y la 2 en línea discontinua), mostrando dos comportamientos típicos del sistema. En el panel superior los parámetros son $r_0 = 0,12$, $r_1 = 0,09$ y $r_2 = 0,15$, mientras que en el panel inferior estos son $r_0 = 0,60$, $r_1 = 0,45$ y $r_2 = 0,75$. En ambos casos hemos considerado una población total de $N = 900$, y una condición inicial $n_0 = 0,1$, $n_1 = 0,7$ y $n_2 = 0,2$.

Los casos que se muestran en la figura 3.2 representan los dos comportamientos típicos observados en nuestro sistema. En el panel superior las fracciones n_i realizan oscilaciones de amplitud creciente, y eventualmente el sistema alcanza uno de los tres estados puros posibles, donde todos los agentes tienen la misma estrategia. Por otra parte, en el panel inferior la evolución lleva al sistema rápidamente a uno de los estados puros. Como veremos en la próxima sección, estos comportamientos corresponden en la versión continua del sistema a la presencia de un ciclo heteroclínico estable y a la existencia de uno o más estados puros estables, respectivamente. En las simulaciones numéricas el sistema termina en un estado absorbente en ambos casos. El estado puro final es observado en general para cualquier elección de las probabilidades de cooperación. La única excepción ocurre cuando $r_i = 0$ para todo i , en cuyo caso el sistema

realiza oscilaciones con una amplitud que depende de las condiciones iniciales.

Como se verá claramente de nuestro análisis de la versión continua del sistema (ver próxima sección) la caída del mismo en los estados absorbentes se debe, en las simulaciones numéricas, a fluctuaciones de tamaño finito. De esta forma es importante, para valores finitos de N , determinar la probabilidad de que el sistema termine en cada uno de los diferentes estados puros, como función de las probabilidades de cooperación y la condición inicial. En este sentido, mediremos la probabilidad de supervivencia de cada estrategia para un conjunto de condiciones iniciales obtenidas de todo el símplex.

Para explorar el espacio de las probabilidades de cooperación variamos éstas de forma conjunta, manteniendo los cocientes r_0/r_2 y r_1/r_2 fijos, y estudiamos la probabilidades de supervivencia como función de $r_2 = r \in [0, 1]$. Así, para diferentes valores de los cocientes r_0/r_2 y r_1/r_2 , analizamos los posibles comportamientos del sistema en todo el espacio de parámetros.

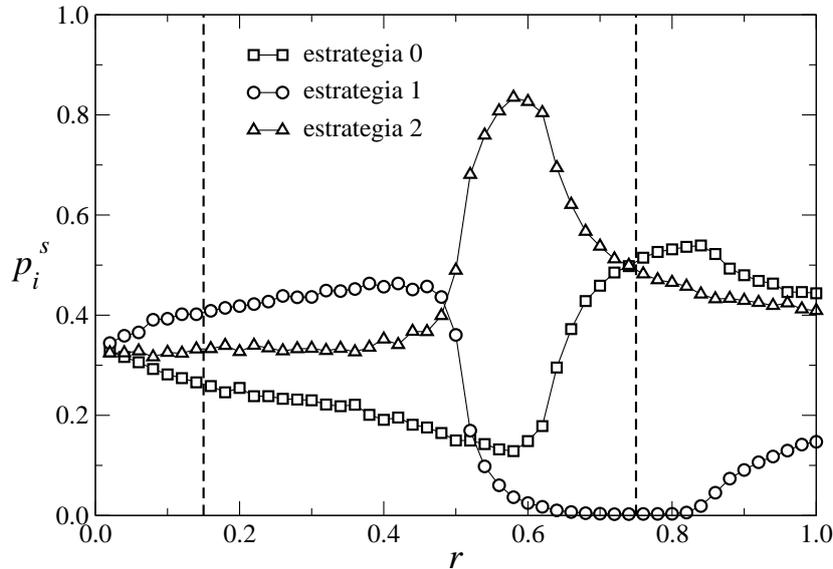


Figura 3.3: Probabilidades de supervivencia obtenidas de las simulaciones como función del parámetro de cooperación r con $r_0 = \frac{4}{5}r$, $r_1 = \frac{3}{5}r$, $r_2 = r$, y una población de $N = 9 \times 10^3$. Para cada valor de r , se consideraron 10^4 condiciones iniciales distribuidas de manera uniforme sobre el símplex. Las líneas discontinuas verticales representan los valores de las probabilidades de cooperación usadas en las simulaciones de la figura 3.2.

La figura 3.3 muestra los resultados de las simulaciones para las probabilidades de supervivencia p_i^s ($i = 0, 1, 2$) como función de r , con $r_0/r_2 = 4/5$ y $r_1/r_2 = 3/5$. En este caso los agentes que más cooperan son los que poseen la estrategia 2, seguidos por los de 0, y luego los que menos cooperan son los que tienen la estrategia 1. Para $0 \leq r \leq 1/2$, las probabilidades de supervivencia varían suavemente, desde la situación simétrica donde todas son iguales a $1/3$ para $r = 0$. En este rango de parámetros, de manera sorprendente, las estrategia con máxima cooperación (estrategia 2) nos es la que tiene la mayor probabilidad de supervivencia [56]. Es más bien la estrategia que domina a la más cooperadora (estrategia 1) la que tiene más posibilidades de convertirse en el

estado absorbente. El comportamiento cualitativo es de la misma clase que el observado en el panel superior de la figura 3.2, es decir, oscilaciones de amplitud creciente. Por otra parte para $r > 1/2$, el comportamiento del sistema es diferente, observándose una caída rápida hacia un estado absorbente al igual que en el panel inferior de la figura 3.2.

Otro aspecto que es necesario notar de la figura 3.3 es que las probabilidades de supervivencia para las estrategias 1 y 2 muestran un cambio abrupto para $r \approx 0,5$ ($r_2 \approx 0,5$), mientras que la estrategia 0 mantiene un comportamiento suave en la misma región. Este valor crítico de cooperación, por encima del cual la probabilidad de supervivencia de las estrategias 1 y 2 disminuye y aumenta, respectivamente, representa un umbral a partir del que las alianzas benefician la estrategia que coopera —en este caso, la estrategia 2—. Dentro de cada triplete, en este punto es más probable que dos agentes con estrategia 2 se unan para vencer a un agente con estrategia 1, a que no lo hagan. El mismo fenómeno es observado para las probabilidades de supervivencia de las estrategias 0 y 2 cuando $r \approx 0,63$ ($r_0 \approx 0,5$), y para las estrategias 0 y 1 cuando $r \approx 0,83$ ($r_1 \approx 0,5$). En general, entonces, lo que encontramos es que la probabilidad de supervivencia de i aumenta mientras que la de $(i-1)_3$ disminuye por encima de $r_i = 0,5$ ². Como veremos en la próxima sección, estos cambios abruptos en las probabilidades de supervivencia están asociados a la estabilización de un estado puro.

Además estudiamos las condiciones iniciales en el simplex que llevan a los diferentes estados absorbentes. La figura 3.4 muestra estos resultados para tres valores de r . El color de cada punto indica el estado puro alcanzado a partir de esa condición inicial (0 en marrón, 1 en gris y 2 en negro). Los parámetros usados son $r_0 = 0,8 r_2$, $r_1 = 0,6 r_2$, $N = 9 \times 10^3$, y se consideraron un total de 4×10^5 condiciones iniciales. Las diferentes regiones se encuentran separadas por curvas en forma de espiral. Sin embargo, debido a fluctuaciones de tamaño finito las fronteras de tales regiones son ruidosas. Este efecto de las fluctuaciones aumenta cuando el parámetro r disminuye y las probabilidades de cooperación se vuelven similares. En este caso las estrategias son cada vez más parecidas, y las regiones que llevan a los estados puros se vuelven más estrechas.

Para $r = 0,75$, lo que implica $r_0 = 0,6$ y $r_2 = 0,75$ (por encima del umbral de 0,5), encontramos que la mayoría de las condiciones iniciales termina en uno de dos estados puros, el 0 o el 2, dependiendo de donde se encuentra la condición inicial en el simplex. La evolución temporal de las simulaciones para $r = 0,75$ corresponde a una caída rápida a un estado absorbente.

²Dada la naturaleza cíclica de nuestro sistema, usamos la notación $(j \pm 1)_3$ para suma y resta módulo 3. El índice $(j + 1)_3$ se refiere a la estrategia 0 cuando $j = 2$, mientras que $(j - 1)_3$ se refiere a la estrategia 2 cuando $j = 0$.

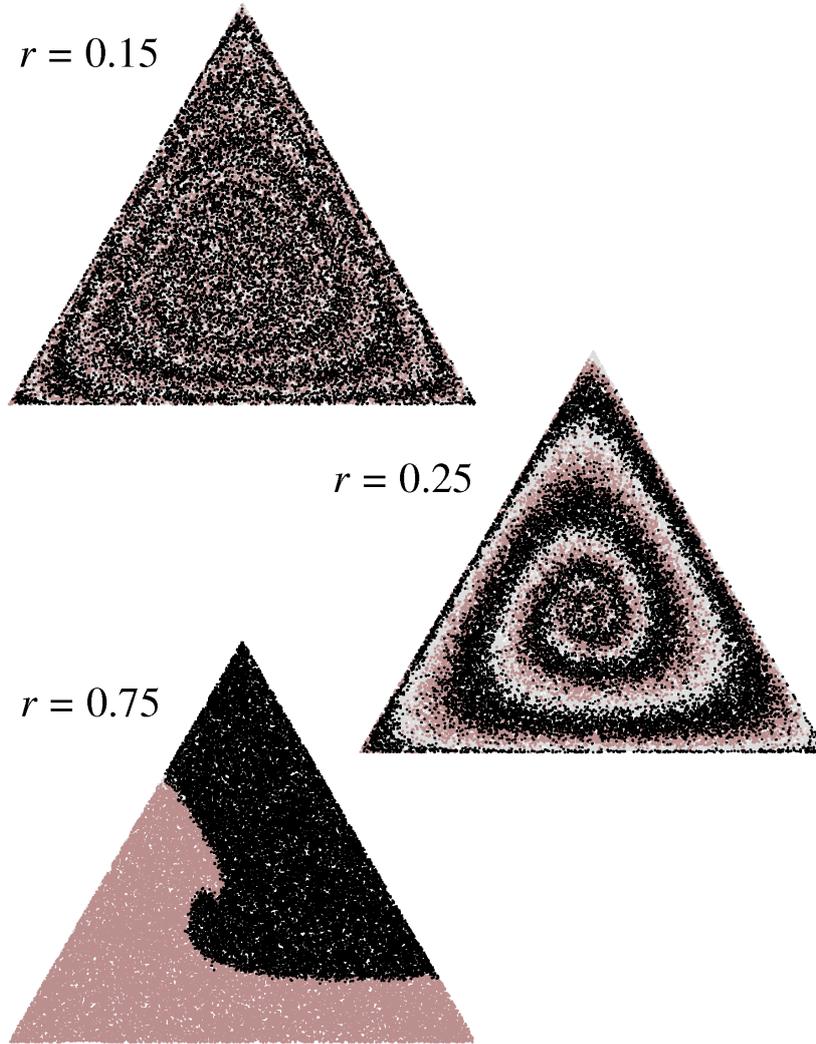


Figura 3.4: Condiciones iniciales en el simplex que llevan a cada uno de los estados puros finales (estado 0 en marrón, estado 1 en gris y estado 2 en negro). Los parámetros de cooperación son $r_0 = \frac{4}{5}r$, $r_1 = \frac{3}{5}r$ y $r_2 = r$. El tamaño de la población es $N = 9 \times 10^3$.

3.5. Estudio de campo medio

Antes de considerar el análisis de campo medio del sistema con tripletes, estudiemos lo que sucede cuando las interacciones son de a pares. Si el par $\{i, (i+1)_3\}$ se transforma en $\{i, i\}$ con una probabilidad $\gamma_i > 0$ por unidad de tiempo, las ecuaciones de evolución para las fracciones n_i de la población en cada estrategia son

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_0 &= \gamma_0 n_0 n_1 - \gamma_2 n_0 n_2 \\
 \dot{n}_1 &= \gamma_1 n_1 n_2 - \gamma_0 n_1 n_0 \\
 \dot{n}_2 &= \gamma_2 n_2 n_0 - \gamma_1 n_2 n_1
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

el cual se puede reducir a un sistema de dos ecuaciones, dado que $n_0 + n_1 + n_2 = 1$.

Este sistema dinámico posee cuatro puntos fijos: los tres vértices del símplex que corresponde a los estados puros, y un punto fijo interior localizado en (n_0^*, n_1^*, n_2^*) donde $n_i^* = \gamma_{(i+1)_3} / \sum_j \gamma_j$. Los vértices son puntos silla, mientras que el punto fijo interior tiene estabilidad marginal (sus autovalores son imaginarios puros). Las órbitas corresponden a ciclos alrededor del punto fijo interior, y el tamaño de tales ciclos depende de las condiciones iniciales.

Para el sistema con tripletes, si fijamos $\gamma_i = 1$ para todo i y además incluimos los parámetros de cooperación r_i , las ecuaciones para las fracciones n_i son

$$\begin{aligned}\dot{n}_0 &= n_0^2 n_1 + (1 - 2r_1)n_0 n_1^2 - (1 - 2r_0)n_0^2 n_2 - n_0 n_2^2 \\ \dot{n}_1 &= n_1^2 n_2 + (1 - 2r_2)n_1 n_2^2 - (1 - 2r_1)n_1^2 n_0 - n_1 n_0^2 \\ \dot{n}_2 &= n_2^2 n_0 + (1 - 2r_0)n_2 n_0^2 - (1 - 2r_2)n_2^2 n_1 - n_2 n_1^2.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Estas ecuaciones poseen siete puntos fijos. Tres de ellos son los vértices del símplex cuyas coordenadas, escritas como (n_0, n_1, n_2) , son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. El vértice que corresponde al estado puro i es estable si $r_i > 1/2$; si no, éste es un punto silla. Existen otros tres puntos que dependiendo de los parámetros caen sobre los lados del símplex, en cuyo caso son puntos silla, o sobre la prolongación de los lados, en cuyo caso son estables. Sin embargo, en esta última situación, tales puntos estables nunca se alcanzan si se empieza con una condición inicial dentro del símplex. Las coordenadas de estos puntos son

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2r_0}, 0, 1 - \frac{1}{2r_0}\right) \\ \left(1 - \frac{1}{2r_1}, \frac{1}{2r_1}, 0\right) \\ \left(0, 1 - \frac{1}{2r_2}, \frac{1}{2r_2}\right).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Finalmente existe un punto fijo interior que en general corresponde a un foco inestable (omitimos acá la complicada expresión analítica de sus coordenadas).

Si $r_i = 0$ para todo i , el sistema de ecuaciones diferenciales (3.3) es equivalente a las ecuaciones (3.2) (con $\gamma_i = 1$ para todo i), es decir, las órbitas son ciclos.

En general, el sistema dinámico definido por las ecuaciones (3.3) posee dos comportamientos típicos dependiendo de los parámetros de cooperación. Si $0 < r_i < 1/2$ para todo i , el sistema no tiene ningún punto estable en el símplex y presenta un ciclo heteroclínico estable, lo que implica que todas las órbitas son atraídas hacia este ciclo. Recordamos que un ciclo heteroclínico es una colección de trayectorias que une una serie de equilibrios a través de conexiones tipo silla, es decir, a través de las varieda-

des estables/inestables de tales equilibrios [10]. En nuestro caso, el ciclo heteroclínico coincide con el borde del simplex, de tal forma que está formado por los puntos silla en los vértices y los lados del simplex, que se encuentran a lo largo de las variedades estables/inestables de tales puntos silla. Las trayectorias se aproximan al borde y pasan tiempos cada vez más largos cerca de los vértices. Dichas trayectorias no pueden abandonar el simplex si empiezan con una condición inicial en su interior ³.

El otro comportamiento típico del sistema se observa cuando $r_i > 1/2$ para una o más estrategias. Cuando esto sucede, el estado puro i que se encuentra en el vértice se vuelve estable, y atrae las trayectorias que rápidamente caen en este estado absorbente. Al mismo tiempo, un punto silla aparece en el lado del simplex que conecta el vértice i con el vértice $(i - 1)_3$. La variedad inestable de este punto silla se encuentra a lo largo de dicho lado, y la cuenca de atracción del estado puro i aumenta de tamaño a costa de la del vértice $(i - 1)_3$. Cuando los parámetros de cooperación se encuentran en este rango, el sistema se comporta de forma diferente de acuerdo al número de estados puros estables. Si solamente una estrategia cumple que $r_i > 1/2$, entonces el correspondiente estado puro i es estable y la mayoría de las órbitas son atraídas hacia este vértice (hay tres regiones como esta, una por cada i). Si dos estrategias cumplen $r_i > 1/2$, dos vértices del simplex son estables y resulta poco probable observar la estrategia restante en el estado asintótico (de vuelta, hay tres regiones como esta). Finalmente, si $r_i > 1/2$ para todo i , los tres estados puros son estables y las probabilidades de terminar en cada estado puro cuando se toman condiciones iniciales al azar del simplex son proporcionales a las respectivas cuencas de atracción.

3.5.1. Relación con poblaciones finitas

En esta subsección comparamos los resultados de las simulaciones numéricas de una población de agentes con el análisis de las ecuaciones diferenciales del correspondiente modelo de campo medio. Como los tripletes en las simulaciones son elegidos de forma homogénea de la población, los resultados numéricos convergen a los obtenidos por medio del análisis de campo medio cuando el tamaño de la población tiende a infinito. Si consideramos, por otro lado, una población finita se espera que aparezcan ciertas diferencias entre ambos enfoques.

En particular, las oscilaciones de amplitud creciente en el sistema numérico están relacionadas con la presencia de un ciclo heteroclínico estable de las correspondientes ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en las simulaciones la órbita eventualmente alcanza el borde, es decir, una de las tres estrategias desaparece debido a las fluctuaciones y, de las estrategias que quedan, la dominante termina convirtiéndose en la

³A partir de las ecuaciones (3.3), se comprueba que $\partial_t(n_0 + n_1 + n_2) = 0$ y, por otra parte, el vector velocidad $(\dot{n}_0, \dot{n}_1, \dot{n}_2)$ no atraviesa los bordes del simplex.

única sobreviviente. Este efecto es observado en la figura 3.2 (panel superior), donde las oscilaciones de amplitud creciente alcanzan el borde del simplex, haciendo que la estrategia 1 se extinga. Siendo la estrategia 2 la dominante de las dos restantes, es la que sobrevive.

Otra conexión con las simulaciones estocásticas es la aparición de abruptos cambios en las probabilidades de supervivencia cuando $r_i \approx 0,5$, como se mostró en la figura 3.3. Del análisis de campo medio, vemos que estos cambios en $p_i^s(r)$ y $p_{(i-1)_3}^s(r)$ corresponden al cambio de estabilidad del estado puro $n_i = 1$ de un punto silla a un punto fijo estable, es decir, a la aparición de la cuenca de atracción de la estrategia i .

En la sección 3.4 calculamos las probabilidades de supervivencia para cada estrategia a través de simulaciones del modelo estocástico. Una forma alternativa de obtener estos resultados es realizar una integración numérica de las ecuaciones diferenciales dadas por (3.3). En primer lugar definimos un umbral c como la densidad debajo la cual una estrategia se considera extinta (en una población finita este parámetro debería ser igual a $1/N$). Desde una condición inicial integramos las ecuaciones hasta el momento en que, para algún i , se cumple que $n_i < c$, es decir, cuando la órbita se encuentra muy cerca del lado del simplex $\{(i-1)_3, (i+1)_3\}$. En ese punto declaramos la estrategia i extinta. Para decidir cuál de las dos estrategias restantes sobrevive, consideramos dos posibles escenarios. Si existe un punto silla en ese lado ($r_{(i-1)_3} > 1/2$) y si la órbita terminó en el segmento que une el punto silla con el vértice $(i-1)_3$ (lo que equivale a $n_{(i-1)_3} > 1/2r_{(i-1)_3}$), entonces la estrategia $(i-1)_3$ sobrevive. De otra manera, la estrategia $(i+1)_3$ será la que sobrevive, que es la dominante de las dos restantes.

Otro posible camino para obtener las probabilidades de supervivencia es usar una aproximación de la órbita cuando ésta se encuentra lo suficientemente cerca del borde del simplex. Esto se puede hacer cuando las trayectorias son atraídas hacia el borde, es decir, cuando el ciclo heteroclínico de las correspondientes ecuaciones de campo medio es estable. Estudiamos esta aproximación en la próxima sección, y la comparamos tanto con las simulaciones como con la integración numérica de la ecuación (3.3).

3.6. Aproximación analítica para las probabilidades de supervivencia

Como ya adelantamos, queremos averiguar analíticamente qué estrategia sobrevive en una población finita cuando el correspondiente sistema dinámico posee un ciclo heteroclínico estable. Como ya se observó previamente, las condiciones iniciales que terminan en los diferentes estados puros se encuentran típicamente muy mezcladas y, debido a las fluctuaciones estocásticas, el estado final para una condición inicial dada no es único. Por lo tanto, cuando usamos el correspondiente sistema dinámico

para calcular las probabilidades de supervivencia, asumimos que tales probabilidades se obtienen de la evolución de muchas condiciones iniciales tomadas al azar del simplex (más precisamente, distribuidas de manera uniforme en el simplex).

En primer lugar, para un caso específico graficamos la evolución del sistema dinámico cuando el ciclo heteroclínico es estable para ver qué relación existe entre el sistema finito y el correspondiente modelo de campo medio.

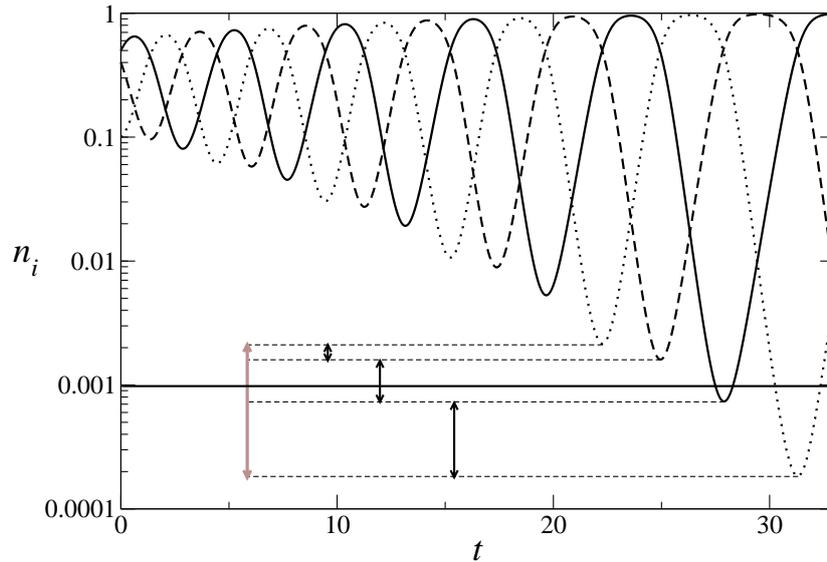


Figura 3.5: Fracciones de la población en cada una de las estrategias, en escala logarítmica, como función del tiempo obtenidas a partir de la evolución del sistema dinámico para una elección particular de los parámetros de cooperación. Se establece una conexión entre la probabilidad de extinción de cierta estrategia con la diferencia entre el logaritmo del mínimo de esa estrategia y el logaritmo del mínimo de la anterior estrategia que alcanzó un mínimo (con la normalización apropiada). La línea horizontal ubicada en $n_i = 10^{-3}$ corresponde al umbral para una población de $N = 10^3$. En este caso, la estrategia graficada en línea continua se extinguirá al ser la primera que cumple $n_i < 1/N$.

La figura 3.5 muestra las fracciones n_i de la población que adoptan cada una de las diferentes estrategias, en escala logarítmica, como función del tiempo obtenidas a partir de la evolución del sistema dinámico para una elección específica de los parámetros de cooperación. Supongamos que en el correspondiente sistema finito estamos trabajando con una población de tamaño N , de forma que cuando $n_i \approx 1/N$ la estrategia i se extinguirá debido a fluctuaciones (ver línea horizontal ubicada en $n_i = 10^{-3}$ en la figura 3.5). Por lo tanto, guiándonos a partir de estas ideas previas, vamos a asociar la probabilidad de extinción p_i^e de una estrategia, comenzando desde una condición inicial aleatoria, con la diferencia entre el logaritmo del mínimo de esa estrategia y el logaritmo del mínimo de la anterior estrategia que alcanzó un mínimo (con la normalización apropiada). Considerando cual de las dos estrategias restantes es la dominante, podemos calcular las probabilidades de supervivencia: $p_i^s = p_{(i-1)_3}^e$.

Suponemos que estamos en la región del espacio de parámetros donde la órbita da muchas vueltas antes de caer al borde del simplex por fluctuaciones, lo que en nuestro

caso es equivalente a pedir que los parámetros de cooperación r_i sean pequeños. Bajo esta condición la trayectoria puede ser aproximada tomando coordenadas locales en las direcciones de las variedades de los puntos silla, y linealizando el lado derecho de la ecuación (3.3) [10]. Si nos centramos en la parte que nos interesa, esta aproximación de la órbita establece que la distancia al borde del simplex x cambia a x^{σ_i} cuando la trayectoria pasa cerca del vértice i (lejos de los vértices, x cambia de forma lineal). El exponente corresponde a $\sigma_i = \mu_i/\lambda_i$, donde $-\mu_i$ es el autovector de la variedad estable del vértice i , que como ya dijimos es un punto silla, mientras que λ_i es el autovalor de la variedad inestable (en nuestro caso, $\sigma_i = 1/(1 - 2r_i)$).

Usando esta aproximación y considerando que al ir del vértice i al $(i - 1)_3$ (la evolución temporal tiene sentido opuesto de circulación en relación a la dominación entre las estrategias) la órbita alcanza un mínimo en la distancia al lado opuesto al vértice $(i + 1)_3$, o equivalentemente a un mínimo de $n_{(i+1)_3}$, procedemos a calcular las probabilidades de extinción. Empezamos con un mínimo de n_1 , luego pasamos por un mínimo de n_0 , después un mínimo de n_2 , y finalmente un nuevo mínimo de n_1 , de forma tal que la distancia al borde cambia como

$$x \rightarrow x^{\sigma_2} \rightarrow x^{\sigma_2\sigma_1} \rightarrow x^{\sigma_2\sigma_1\sigma_0}. \quad (3.5)$$

A partir de esta última ecuación observamos que la órbita se acerca al borde si $\sigma_2\sigma_1\sigma_0 > 1$, que es la condición de estabilidad del ciclo heteroclínico. La diferencia total entre los logaritmos de los mínimos de n_1 es $\Delta = \log x^{\sigma_2\sigma_1\sigma_0} - \log x = (\sigma_2\sigma_1\sigma_0 - 1) \log x$, de forma que cuando empezamos en un mínimo de n_1 las probabilidades de extinción son

$$\begin{aligned} p_0^{(1)} &= \frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_2\sigma_1\sigma_0 - 1} \\ p_2^{(1)} &= \frac{\sigma_2(\sigma_1 - 1)}{\sigma_2\sigma_1\sigma_0 - 1} \\ p_1^{(1)} &= \frac{\sigma_2\sigma_1(\sigma_0 - 1)}{\sigma_2\sigma_1\sigma_0 - 1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sin embargo, también podemos empezar por un mínimo de n_2 o de n_0 . Tomando un promedio sobre estos tres casos obtenemos las probabilidades de extinción p_i^e debido a fluctuaciones, que como ya se estableció están directamente conectadas a las probabi-

lidades de supervivencia p_i^s ,

$$\begin{aligned}
 p_0^e = p_1^s &= \frac{(1 + \sigma_0 + \sigma_0\sigma_1)(\sigma_2 - 1)}{3(\sigma_0\sigma_1\sigma_2 - 1)} \\
 p_1^e = p_2^s &= \frac{(1 + \sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)(\sigma_0 - 1)}{3(\sigma_1\sigma_2\sigma_0 - 1)} \\
 p_2^e = p_0^s &= \frac{(1 + \sigma_2 + \sigma_2\sigma_0)(\sigma_1 - 1)}{3(\sigma_2\sigma_0\sigma_1 - 1)}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Si $\sigma_i < 1$, al mismo tiempo que mantenemos $\sigma_2\sigma_0\sigma_1 > 1$, la estrategia $(i - 1)_3$ se extingue, y sólo las otras dos estrategias tienen una posibilidad de sobrevivir. En este último caso se deben calcular de vuelta las probabilidades de supervivencia, siendo necesarios sólo cambios menores (en nuestro modelo esto no es posible porque requiere que $r_i < 0$).

En general si consideramos que los parámetros de cooperación se varían de forma conjunta como hicimos antes (r_0/r_2 y r_1/r_2 fijos con $r_2 = r$), en el límite de $r \rightarrow 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 p_0^s &\approx \frac{r_1}{\sum_j r_j} + O(r) \\
 p_1^s &\approx \frac{r_2}{\sum_j r_j} + O(r) \\
 p_2^s &\approx \frac{r_0}{\sum_j r_j} + O(r),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

lo que implica que la probabilidad de supervivencia de una cierta estrategia está directamente asociada al parámetro de cooperación de la estrategia dominada por la primera. En nuestro caso equivale a que la estrategia 1 es la que tiene más posibilidades de sobrevivir ya que $r_2 = \max\{r_0, r_1, r_2\}$. Como se puede ver, cuando $r \rightarrow 0$, no recuperamos el caso simétrico donde todas las probabilidades son iguales ($p = 1/3$).

Para analizar como las ecuaciones dadas por (3.7) funcionan en un caso particular, como vinimos haciendo, vamos a variar los parámetros de cooperación manteniendo los cocientes fijos de forma que $r_0 = \frac{2}{3}r$, $r_1 = \frac{1}{3}r$ y $r_2 = r$. Con esta elección, las

probabilidades de supervivencia son

$$\begin{aligned}
 p_1^s &= \frac{27 - 24r + 8r^2}{54 - 66r + 24r^2} \approx \frac{1}{2} + \frac{r}{6} + \frac{7r^2}{54} \\
 p_2^s &= \frac{9 - 14r + 4r^2}{27 - 33r + 12r^2} \approx \frac{1}{3} - \frac{r}{9} - \frac{11r^2}{81} \\
 p_0^s &= \frac{9 - 14r + 8r^2}{54 - 66r + 24r^2} \approx \frac{1}{6} - \frac{r}{18} + \frac{r^2}{162}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Estas ecuaciones valen sólo para $0 < r < 1/2$, donde el ciclo heteroclínico es estable. Comparamos estos resultados con las simulaciones y con la integración numérica de las ecuaciones dadas por (3.3).

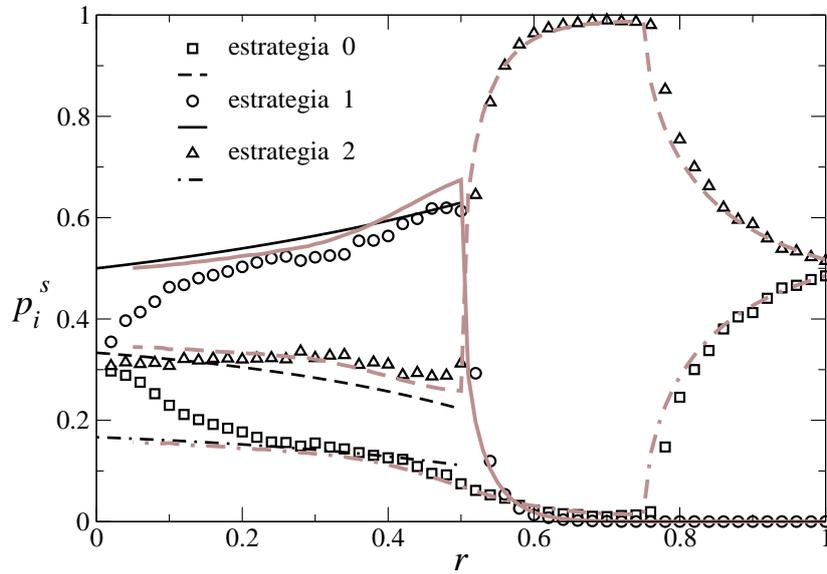


Figura 3.6: Probabilidades de supervivencia, como función de r , obtenidas a partir de las simulaciones (símbolos), a partir de la aproximación dada por (3.9) (líneas negras) y a partir de la integración de las ecuaciones de campo medio (líneas marrones). Usamos $r_0 = \frac{2}{3}r$, $r_1 = \frac{1}{3}r$, $r_2 = r$ y una población de $N = 9 \times 10^4$.

La figura 3.6 muestra las probabilidades de supervivencia como función de r , obtenidas a partir de las simulaciones, de la aproximación del ciclo heteroclínico dada por (3.9) y de la integración de las ecuaciones diferenciales de campo medio (3.3) para cada una de las estrategias. Se observa una buena correspondencia entre las simulaciones y la integración de campo medio, y también con la aproximación analítica (en el rango de r donde ésta es válida). En el límite de $r \rightarrow 0$, las simulaciones se desvían de las otras dos curvas yéndose hacia el caso simétrico donde todas las probabilidades son iguales ($p_i^s = 1/3$). Esto se puede entender si se considera que para valores chicos de r la diferencia entre los mínimos de $n_j(t)$ se vuelve más pequeña y cualquier fluctuación debida al tamaño finito de la población puede hacerla desaparecer (este efecto claramente no está considerado en la integración de campo medio ni en la aproximación analítica).

Se observan cambios abruptos en las probabilidades para $r = 0,5$ y para $r = 0,75$, que como ya estudiamos son causados por la aparición de un punto estable en el vértice del símplex y por el incremento de su cuenca de atracción.

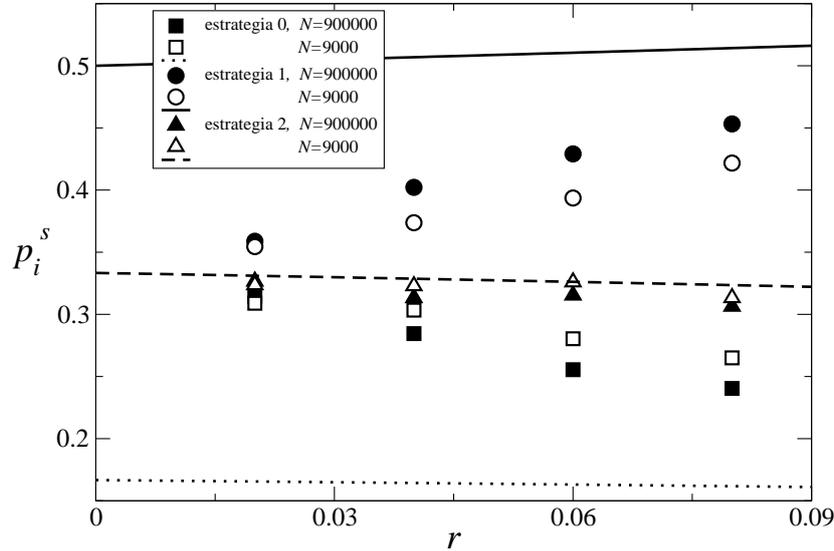


Figura 3.7: Probabilidades de supervivencia, como función de r , obtenidas a partir de las simulaciones (símbolos), a partir de la aproximación dada por (3.9) (líneas). Usamos $r_0 = \frac{2}{3}r$, $r_1 = \frac{1}{3}r$ y $r_2 = r$. Para analizar el efecto del tamaño de la población, consideramos $N = 9 \times 10^3$ y $N = 9 \times 10^5$. Para cada valor de r , se tomaron 10^4 condiciones iniciales (distribuidas de forma uniforme en el símplex).

La figura 3.7 muestra el efecto de aumentar el tamaño de la población (de $N = 9 \times 10^3$ a $N = 9 \times 10^5$) para valores pequeños del parámetro de cooperación r . Los puntos obtenidos a partir de las simulaciones se acercan a la aproximación analítica, pero la convergencia es lenta.

3.7. Discusión

Se estudió un sistema donde agentes, que adoptan una de tres posibles estrategias, interactúan en un juego cíclico. Las interacciones básicas ocurren en tripletes, lo que nos permite considerar la cooperación entre agentes débiles con lo misma estrategia al enfrentar un agente fuerte. Se analizó el sistema mediante simulaciones numéricas, y a través de un modelo de campo medio, el cual nos da una correcta descripción ya que los tripletes se encuentran distribuidos de forma homogénea en la población. Nos concentramos en estudiar las probabilidades de supervivencia de las diferentes estrategias como función de los parámetros de cooperación.

Un hecho interesante encontrado es que la cooperación en tripletes de agentes que poseen la misma estrategia resulta en beneficio de otra estrategia, en particular de aquella que domina a la primera. Sin embargo, esta conclusión es válida sólo para

bajos niveles de cooperación. Cuando la cooperación supera cierto umbral, suficiente para crear un estado puro estable, se vuelve beneficiosa para la estrategia que la adopta.

En segundo lugar, queremos remarcar la importancia de obtener las probabilidades de supervivencia de cada estrategia como función de las propiedades del ciclo heteroclínico del sistema dinámico correspondiente, en particular de los autovalores de los puntos fijos que forman dicho ciclo. A través de estas, podemos hacer predicciones del estado asintótico del sistema sólo a partir de los parámetros básicos de la dinámica, en este caso los parámetros de cooperación. No sólo eso, sino que además esta aproximación analítica es fácil de generalizar a otros sistemas con ciclos heteroclínicos planos. Poseer tales ciclos representa un comportamiento robusto en modelos biológicos y de teoría de juegos que poseen algún tipo de simetría o restricción.

Incluso cuando las interacciones en tripletes no son tan frecuentes con las de a pares, estas pueden jugar un importante papel. Por ejemplo si consideramos un juego de piedra, papel o tijera donde las interacciones se dan de a pares en una población homogénea, un modelo usado con frecuencia en sistemas biológicos, la respuesta colectiva corresponde a oscilaciones, como vimos en la sección 3.5. Pero si se introducen interacciones en tripletes que ocurren con una pequeña probabilidad, el sistema termina eventualmente en uno de los estados puros, es decir, existe un cambio cualitativo en el comportamiento de la población. De esta forma, despreciar estas interacciones complejas, por más que sean raras, nos puede llevar a conclusiones equivocadas.

Volviendo a la pregunta original que motivó este análisis respecto del efecto de interacciones en tripletes en dinámicas cíclicas, encontramos que dichas interacciones, incluso cuando son raras, introducen diferencias cualitativas en el comportamiento de un sistema. Como veremos en el capítulo relativo al lenguaje, no tener en cuenta una variable latente o no observable puede inducir interacciones de mayor orden. En sistemas biológicos, por ejemplo, es esperable que no se incluya en la descripción de un sistema variables ambientales, que varían en un escala más rápida. Así se inducirán dependencias múltiples entre las variables que analizamos que aun siendo pequeñas pueden tener efectos colectivos no despreciables, como sucede en el caso estudiado. De esta forma, dado un modelo con interacciones de a pares, concluimos que es un buen procedimiento estudiar qué tan robusto es el comportamiento de dicho sistema frente a perturbaciones que incluyan interacciones múltiples.

Capítulo 4

Juegos evolutivos de distribución de recursos

“Elementary chaos theory tells us that all robots will eventually turn against their masters and run amok...”

— Dr. J. Frink

4.1. Motivación

En muchos contextos, en especial en el marco económico, suceden situaciones donde los agentes que componen el sistema deben distribuir cierta cantidad de recursos —por ejemplo, dinero, energía, tiempo— para lograr determinado beneficio. Sin embargo, la forma en que se realiza dicha distribución de recursos está sujeta a que en la población existen otros agentes compitiendo por los mismos beneficios. El análisis de esta situación se enmarca naturalmente en la teoría de juegos.

La complejidad analítica de tal cuestión reside, fundamentalmente, en que las formas en que se pueden dividir cierta cantidad de recursos son infinitas. Este tipo de problema ha sido considerado en la literatura siempre dentro del campo de la teoría de juegos clásica. Por un lado nuestro principal objetivo en este capítulo es llevar este tipo de dinámica al marco evolutivo donde existe una población de agentes compitiendo y cuyas estrategias evolucionan de acuerdo al éxito de las mismas. Por otra parte, abordamos la pregunta de cómo debe actuar un agente cuando no está seguro sobre la cantidad de recursos que posee el adversario con el que va a competir. En particular, consideramos el caso en que los agentes sólo saben la probabilidad de competir contra alguien con igual cantidad de recursos y la probabilidad de hacerlo contra alguien con más o menos recursos.

Como veremos, dicha incertidumbre en la cantidad de recursos del adversario trae

aparejada la aparición de nuevas estrategias óptimas, cualitativamente diferentes a las ya conocidas. Estas dependen fuertemente de dos parámetros fundamentales: la relación de recursos y la probabilidad de competir con un agente con una cantidad diferente de recursos. Por ejemplo, se verá que si la asimetría de recursos o la probabilidad de enfrentarse contra alguien con igual cantidad de recursos son grandes, los agentes débiles o con menos recursos deben resignarse a competir entre ellos mismos y dar por perdidas las competencias con agentes fuertes.

A través de este nuevo ingrediente de incerteza en la dinámica, se pasa de competir contra un tipo de agente a una situación donde se interactúa aleatoriamente con dos clases de agentes. Observaremos que este cambio se ve reflejado en el comportamiento colectivo de la población en lo que se refiere a las nuevas estrategias que asumen los agentes, pero no en la dispersión de estrategias. Es decir, se conserva el hecho de que todos los agentes con igual cantidad de recursos poseen la misma estrategia una vez que la población alcanza el equilibrio.

Creemos que esta versión evolutiva de un juego de asignación de recursos es un primer paso para acercar este tipo de problemas a la comunidad estadística, y en especial al ámbito de la biología, dado que un espacio de estrategias más amplio ofrece la posibilidad de modelar una gama más grande de fenómenos. Por otra parte, este enfoque permite considerar todo un grupo de preguntas relevantes del ámbito estadístico en la problemática de distribución de recursos. Estos interrogantes corresponden, por ejemplo, al efecto del patrón de interacciones de la población en la dinámica colectiva, al impacto de cambiar las reglas microscópicas en el comportamiento asintótico de la población, entre otros. En este capítulo encararemos, luego de presentar el modelo evolutivo, algunas de estas preguntas de manera introductoria.

4.2. Introducción

La asignación de recursos es un ingrediente básico en una amplia clase de sistemas económicos, en los cuales los recursos son distribuidos entre diferentes componentes y/o etapas de un proceso con la expectativa de maximizar su rendimiento. La complejidad en la asignación de recursos tiene al menos dos orígenes, que involucran competencia en diferentes niveles. De forma interna al proceso, es necesario decidir cómo dividir y dónde asignar los recursos disponibles para mejorar la eficiencia lo máximo posible. Externamente, tal decisión puede estar modulada por la existencia de otros actores económicos realizando actividades similares, y por lo tanto compitiendo entre sí. Por ejemplo, con el objetivo de incrementar sus ganancias, una empresa que elabora un producto comestible —supongamos, hamburguesas— debe decidir si mejorar o bajar la calidad de la carne, o contratar mejor publicidad, o mejorar la red de distribución, y tal decisión necesariamente debe tener en cuenta las correspondientes estrategias de

otros productores de hamburguesas.

Sin embargo, el problema de asignación de recursos no se limita al dominio puramente económico. Sólo para dar un ejemplo familiar, el número de horas por semana que un científico decide dedicar a cada uno de sus proyectos de colaboración —tomando en cuenta que el tiempo disponible es finito, la dificultad intrínseca de cada proyecto, y el impacto esperado en la comunidad— es un problema de exactamente la misma clase. En un marco diferente, la evolución biológica optimiza el éxito reproductivo asignando recursos de un organismo, en la competencia con sus pares, ya sea incrementando la probabilidad de apareamiento mediante un cortejo más eficiente, o haciendo aumentar el número de descendientes, o intensificando la dedicación al cuidado paterno, entre muchas otras estrategias.

Debido al papel que juega la competencia en la asignación de recursos, la teoría de juegos provee un marco natural para darle al problema una formulación matemática. Un escenario clásico y bien estudiado es el juego del Coronel Blotto. En este juego de tipo subasta, dos jugadores deben distribuir el total de sus recursos entre un número fijo de ítems. Cada ítem es obtenido por el jugador que asigna una cantidad mayor por éste, y la ganancia total del jugador es el número total de ítems obtenidos. Un aspecto interesante de este juego es que permite considerar jugadores no idénticos, es decir, jugadores con una cantidad diferente de recursos totales, y así analizar cómo las estrategias óptimas se adaptan a la situación dispar de cada oponente. El excéntrico nombre de Coronel Blotto proviene de una disposición del juego en donde dos ejércitos deben distribuir sus fuerzas entre cierto número de campos de batalla.

Aparentemente, la primera versión del juego del Coronel Blotto fue formulada por el famoso matemático francés Émile Borel en 1921 [57], y él mismo junto a Ville encontraron las estrategias óptimas varios años después para el caso de tres ítems y jugadores idénticos [58]. En 1950, Gross y Wagner obtuvieron la solución para un número arbitrario de ítems y jugadores idénticos, y la solución para dos ítems y jugadores no idénticos [59]. Más recientemente, variantes del juego han sido resueltas en situaciones más generales [60], y aparecieron aplicaciones a problemas más realistas tales como campañas electorales [61–63]. Roberson encontró la primera solución completa al juego original del Coronel Blotto para un número arbitrario de ítems y jugadores no idénticos —que parcialmente repasamos en la sección 4.3.1— hace apenas unos años [64]. Golman y Page discutieron la posibilidad de alcanzar estrategias mixtas a través de aprendizaje dinámico, lo cual se implementaría numéricamente mediante la ecuación del replicador [65]. Estas, y algunas otras contribuciones adicionales [66, 67], fueron resumidas y reseñadas recientemente [68]. En el marco de teoría de juego con información incompleta, cabe destacar el trabajo de Adamo y Matros [69], en el que muestran un equilibrio para un juego donde existe una distribución aleatoria para los recursos de los jugadores.

Aquí, consideramos el juego del Coronel Blotto en el marco de la teoría de juegos

evolutiva. A diferencia de la teoría de juegos tradicional, su versión evolutiva contempla las estrategias optimizadas como resultado de un proceso donde los jugadores tienden a maximizar sus ganancias individuales modificando sus propias estrategias a medida que el proceso avanza [9, 10]. Este escenario está inspirado en la evolución biológica (al estilo de Darwin), donde las estrategias cambian de padres a hijos por mutaciones genéticas bajo la presión de la selección natural. La teoría de juegos evolutiva, de esta forma, tiene la ventaja de destacar el rol del cambio con adaptación, opuesto en algún sentido a la visión estática de optimización de estrategias dada por la teoría tradicional. De manera adicional, la teoría de juegos evolutiva nos lleva naturalmente a considerar toda una población de jugadores involucrada en un mismo juego —con una multitud de agentes capaces de adoptar diferentes estrategias, que compiten entre ellos— y por lo tanto se encuentra mejor adaptada para proveernos modelos más realistas de fenómenos sociales.

En la siguiente sección, repasamos resultados previos para las estrategias óptimas en el juego del Coronel Blotto con dos jugadores, tal como se presenta en la teoría de juegos tradicional. A continuación, generalizamos estos resultados a una población con jugadores de dos tipos, con una cantidad baja y alta de recursos totales, donde cada jugador puede enfrentar a un oponente de cualquier tipo. En la sección 4.4 introducimos el modelo evolutivo y presentamos resultados numéricos que validan las suposiciones del estudio analítico previo. Las simulaciones numéricas del proceso evolutivo hacen posible también determinar que estrategias son efectivamente adoptadas en el espacio de parámetros donde existe más de una solución analítica. En la sección 4.5 discutimos algunas generalizaciones —que refuerzan la robustez de nuestras conclusiones principales— y finalmente resumimos nuestra contribución.

4.3. Asignación óptima de estrategias en el juego del Coronel Blotto

4.3.1. Juego con dos jugadores

En la formulación tradicional del juego del Coronel Blotto [64], dos jugadores A y B poseen una cantidad total de recursos X_A y X_B , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, consideramos $X_A \leq X_B$. Ambos jugadores deben distribuir la totalidad de sus recursos entre m ítems. Los ítems son equivalentes, en el sentido en que los jugadores no tienen *a priori* preferencia respecto de a cual ítem asignar más recursos. Sean x_A^j y x_B^j los recursos asignados por cada jugador al ítem j ($j = 1, \dots, m$). Las ganancias de cada jugador, π_A y π_B , están respectivamente dadas por las fracción de

ítems tales que $x_A^j > x_B^j$ y por la fracción de ítems tales que $x_B^j > x_A^j$, es decir,

$$\pi_{A,B} = \frac{1}{m} \|\{j / x_{A,B}^j > x_{B,A}^j\}\|, \quad (4.1)$$

donde $\|\cdot\|$ indica cardinalidad. Como $x_{A,B}^j$ varía continuamente sobre el intervalo $[0, X_{A,B}]$ para todo j , los casos marginales $x_A^j = x_B^j$ pueden ignorarse. Como $\pi_A + \pi_B = 1$ para cualquier distribución de recursos, este es un juego de suma constante. Para esta clase de juego, los equilibrios de Nash coinciden con estrategias óptimas, donde la ganancia de cada jugador se maximiza dada la estrategia del oponente.

Si $X_B > mX_A$, el juego tiene un conjunto de estrategias óptimas triviales, donde $x_B^j = X_B/m$ para todo j . En esta situación, el jugador B gana siempre todos los ítems ($\pi_B = 1$). Por otro lado, cuando $X_B < mX_A$ los equilibrios de Nash no corresponden a estrategias puras, es decir, a estrategias donde se asigna una cantidad fija de recursos por cada ítem [64]. De hecho, bajo esta condición, cualquier estrategia pura es superada por otra estrategia pura para la cual se sacan recursos de un ítem y se los distribuyen en el resto. En este caso las estrategias óptimas son mixtas, y se asignan probabilidades a cada posible distribución de recursos para cada jugador.

Sea $P_i(x_i^1, \dots, x_i^m)$ la distribución de probabilidad para las fracciones de recursos $\{x_i^1, \dots, x_i^m\}$ asignados por el jugador $i \in \{A, B\}$. Denotamos como $P_i^j(x_i^j)$ la distribución de probabilidad marginal para los recursos asignados al ítem j ,

$$P_i^j(x_i^j) = \int dx_i^1 \cdots \int dx_i^{j-1} \int dx_i^{j+1} \cdots \int dx_i^m P_i(x_i^1, \dots, x_i^m), \quad (4.2)$$

y $F_i^j(x_i^j)$ la correspondiente distribución acumulada,

$$F_i^j(x_i^j) = \int_0^{x_i^j} dx P_i^j(x). \quad (4.3)$$

La contribución esperada a la ganancia de cada jugador proveniente del ítem j , $\pi_{A,B}^j$, es la probabilidad de que los correspondientes recursos asignados sean más grandes que aquellos del oponente, es decir,

$$\pi_{A,B}^j = \int_0^{X_{A,B}} dx P_{A,B}^j(x) \int_0^x dx' P_{B,A}^j(x') \equiv \int_0^1 F_{B,A}^j dF_{A,B}^j. \quad (4.4)$$

La ganancia total esperada es $\pi_{A,B} = m^{-1} \sum_j \pi_{A,B}^j$.

La maximización de $\pi_{A,B}$ con respecto a las distribuciones marginales $P_{A,B}^j(x)$, que determina los equilibrios de Nash, debe realizarse bajo la condición de que la suma de los recursos asignados sea igual a la cantidad total de recursos $X_{A,B}$. Expresada en

términos de la distribuciones,

$$X_{A,B} = \sum_j \int_0^{X_{A,B}} dx x P_{A,B}^j(x) \equiv \sum_j \int_0^1 x dF_{A,B}^j. \quad (4.5)$$

Si introducimos los multiplicadores de Lagrange $\lambda_{A,B}$, es posible escribir dos lagrangianos [60, 64]

$$\mathcal{L}_{A,B} = \frac{1}{m} \sum_j \int_0^1 F_{B,A}^j dF_{A,B}^j + \lambda_{A,B} \left(X_{A,B} - \sum_j \int_0^1 x dF_{A,B}^j \right), \quad (4.6)$$

cuya extremización conjunta con respecto al conjunto de distribuciones acumuladas F_A^j y F_B^j nos proporciona las estrategias óptimas, como soluciones de las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para $m \gg 1$ —un límite en el que nos mantendremos a partir de ahora— el resultado para las distribuciones de probabilidad marginal se puede expresar en una forma particularmente compacta introduciendo la variables reescaladas $u_{A,B}^j = (2X_B/m)^{-1} x_{A,B}^j$ y la relación de recursos totales $\alpha = X_A/X_B (\leq 1)$. Este se escribe como [64]

$$P_A(u_A) = (1 - \alpha)\delta(u_A) + \alpha U(u_A; 0, 1) \quad (4.7)$$

y

$$P_B(u_B) = U(u_B; 0, 1). \quad (4.8)$$

Debido a la equivalencia *a priori* de todos los ítems, estas distribuciones son las mismas para todo $j = 1, \dots, m$. De esta manera, para simplificar la notación hemos omitido el índice j . En las expresiones previas, $\delta(u)$ es la delta de Dirac y $U(u; u_1, u_2) = 1$ para $u \in (u_1, u_2)$ y 0 de otra forma.

En términos de las variables originales $x_{A,B}^j$, para recursos asignados distintos de cero —específicamente, para $x_A \neq 0$ — las dos distribuciones son planas, y difieren de cero hasta un umbral $x_{A,B} = 2X_B/m$. En la estrategia óptima, por lo tanto, cada posible valor de recursos asignados, hasta el máximo $2X_B/m$, es igualmente probable para cada jugador. Sin embargo, el primer término en forma de delta en la ecuación (4.7) representa una probabilidad finita de que el jugador A asigne cero recursos a uno o más ítems. Esto se debe a la desventaja relativa del jugador A , cuya cantidad total de recursos es menor que la de B , y que por lo tanto se ve forzado a resignar algunos de los ítems para maximizar su ganancia. La ganancia promedio de los dos jugadores son, respectivamente, $\langle \pi_A \rangle = \alpha/2 (\leq 1/2)$ y $\langle \pi_B \rangle = 1 - \alpha/2 (\geq 1/2)$. Como era de esperarse, $P_A \equiv P_B$ para $\alpha = 1$, es decir, cuando $X_A = X_B$ y ambos jugadores se vuelven indistinguibles entre sí.

4.3.2. El juego en una población

Nuestro objetivo es ahora extender los resultados previos para dos jugadores a una población formada por jugadores de dos tipos, A y B . Las cantidades totales de recursos por jugador son X_A y X_B , respectivamente, con $X_A \leq X_B$. A cada miembro de la población se le permite jugar contra un oponente de cualquier tipo. De esta forma, existen tres posibles clases de enfrentamientos: A vs. A , A vs. B y B vs. B . Para un jugador dado, denotamos como ϵ y $1 - \epsilon$ las probabilidades de que el oponente sea, respectivamente, del mismo tipo o de diferente tipo ¹. Las reglas del juego son las mismas que antes, es decir, la cantidad total de recursos de ambos jugadores se distribuye entre todos los ítems, y cada ítem es ganado por el jugador que le asigna más recursos.

Esta extensión, a su vez, puede interpretarse como incertidumbre en la cantidad de recursos del oponente. Los jugadores no conocen en principio los recursos del otro jugador, sino que sólo saben la probabilidad de que el oponente posea igual cantidad de recursos o una cantidad diferente. A pesar de que la incertidumbre es sólo entre dos valores conocidos, esta extensión representa un paso en la dirección de considerar juegos de distribución de recursos donde la información sobre los recursos del oponente es limitada.

Para encontrar las estrategias óptimas en este caso, sería en principio necesario considerar que cada jugador en la población puede poseer una estrategia diferente, descrita por su propia distribución de probabilidad marginal. Esto llevaría a un enorme problema de optimización simultánea con tantas estrategias como agentes en la población. En vez de encararlo de esta manera, en lo que sigue haremos una drástica simplificación del problema. La validez de esta se verificará luego por medio de simulaciones numéricas, como se explica en la sección 4.4.

Representamos toda la población por un conjunto de cuatro jugadores, A_1 , A_2 , B_1 y B_2 , los primeros dos pertenecientes al tipo A y los dos últimos al tipo B . La figura 4.1 esquematiza las posibles interacciones, con sus correspondientes probabilidades. Asignando distribuciones de probabilidad acumulada $F_{A_1}^j$, $F_{A_2}^j$, $F_{B_1}^j$, y $F_{B_2}^j$ para los recursos puestos por cada jugador al ítem j , es inmediato ver que los dos lagrangianos de la ecuación (4.6) son ahora reemplazados por cuatro lagrangianos, introduciendo

¹En la sección 4.5.1 se considerarán situaciones más generales en cuanto a este juego en una población con dos tipos de jugadores.

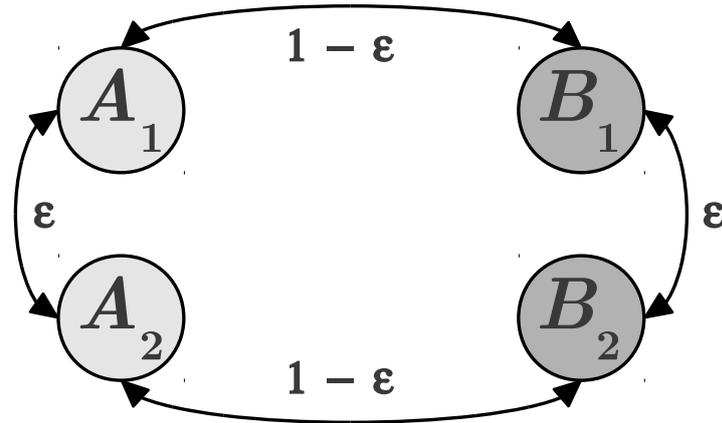


Figura 4.1: Representación esquemática de cuatro jugadores de la dinámica de toda la población. Cada jugador, del tipo A o B , enfrenta a un jugador del mismo tipo con probabilidad ϵ y a un jugador de diferente tipo con probabilidad $1 - \epsilon$.

cuatro multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_1, B_1} = & \frac{1}{m} \sum_j \int_0^1 [(1 - \epsilon)F_{B_1, A_1}^j + \epsilon F_{A_2, B_2}^j] dF_{A_1, B_1}^j \\ & + \lambda_{A_1, B_1} \left(X_{A, B} - \sum_j \int_0^1 x dF_{A_1, B_1}^j \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_2, B_2} = & \frac{1}{m} \sum_j \int_0^1 [(1 - \epsilon)F_{B_2, A_2}^j + \epsilon F_{A_1, B_1}^j] dF_{A_2, B_2}^j \\ & + \lambda_{A_2, B_2} \left(X_{A, B} - \sum_j \int_0^1 x dF_{A_2, B_2}^j \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser resueltas teniendo en cuenta las simetrías entre jugadores del mismo tipo. Estas producen tres diferentes soluciones, que se designan en lo que sigue como I, II y III. Al igual que en el juego de dos jugadores, el índice j puede omitirse debido a la equivalencia mutua entre los m ítems.

Usando nuevamente las variables reescaladas $u_{A, B} = (2X_B/m)^{-1}x_{A, B}$, la relación de recursos totales $\alpha = X_A/X_B (\leq 1)$, y la función $U(u; u_1, u_2)$ definida justo debajo de la ecuación (4.8), la distribución de probabilidad marginal en la solución I queda

como

$$P_A^I(u_A) = \frac{U[u_A; 0, \epsilon(1-\alpha)]}{\epsilon[1-\epsilon(1-\alpha)]} + \frac{[\alpha - \epsilon(1-\alpha)]U[u_A; \epsilon(1-\alpha), 1-\epsilon(1-\alpha)]}{[1-2\epsilon(1-\alpha)][1-\epsilon(1-\alpha)]} \quad (4.11)$$

y

$$P_B^I(u_B) = \frac{U[u_B; \epsilon(1-\alpha), 1-\epsilon(1-\alpha)]}{1-2\epsilon(1-\alpha)}. \quad (4.12)$$

Esta solución es no negativa para $2\alpha - 1 + \epsilon(1-\alpha) \geq 0$. Las ganancias promedio son $\langle \pi_A \rangle = 1 - 1/2[\alpha + \epsilon(1-\alpha)]$ y $\langle \pi_B \rangle = 1/2[\alpha + \epsilon(1-\alpha)]$.

La solución II está dada por

$$P_A^{II}(u_A) = \frac{U(u_A; 0, \alpha)}{\alpha} \quad (4.13)$$

y

$$P_B^{II}(u_B) = \frac{[2\alpha - 1 + \epsilon(1-\alpha)]U(u_B; 0, \alpha)}{\alpha[\alpha + \epsilon(1-\alpha)]} + \frac{U[u_B; \alpha, \alpha + \epsilon(1-\alpha)]}{\epsilon[\alpha + \epsilon(1-\alpha)]}. \quad (4.14)$$

Esta es no negativa para $2\alpha - 1 + \epsilon(1-\alpha) \geq 0$, y las ganancias promedio son $\langle \pi_A \rangle = 1 - 1/2[\alpha + \epsilon(1-\alpha)]$ y $\langle \pi_B \rangle = 1/2[\alpha + \epsilon(1-\alpha)]$.

Finalmente, la solución III es

$$P_A^{III}(u_A) = \frac{U(u_A; 0, \alpha)}{\alpha}, \quad P_B^{III}(u_B) = \frac{U(u_B; \alpha, 1-\alpha)}{1-2\alpha}. \quad (4.15)$$

Es positiva y está bien definida para $\alpha < 1/2$, y $\langle \pi_A \rangle = \epsilon/2$, $\langle \pi_B \rangle = 1 - \epsilon/2$.

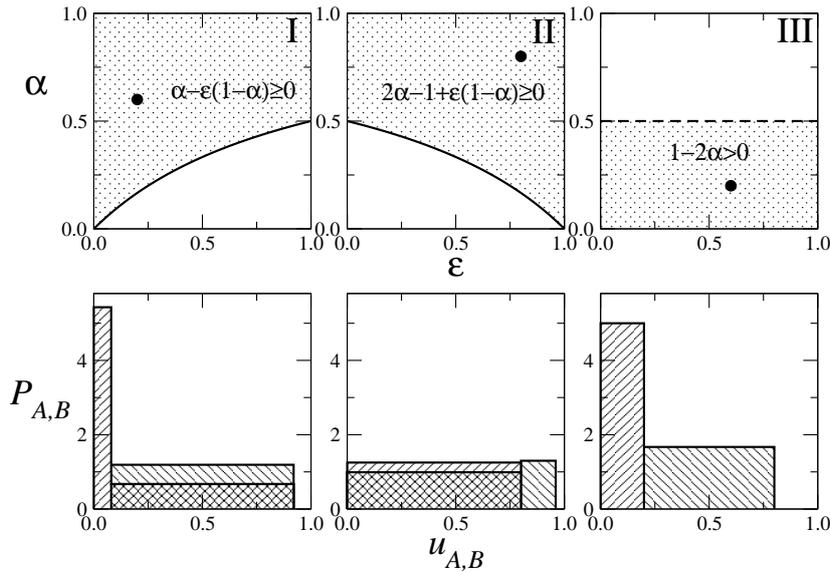


Figura 4.2: Paneles superiores: Las zonas sombreadas muestran los dominios en el espacio de parámetros (ϵ, α) donde las soluciones I, II, y III, dadas por las ecuaciones (4.11) a la (4.15), están respectivamente bien definidas. Paneles inferiores: Ejemplos de las correspondientes distribuciones de probabilidad marginal $P_A(u_A)$ (rayada-/) y $P_B(u_B)$ (rayada-\) para cada solución, en los puntos en el espacio de parámetros marcados con un punto en los paneles superiores.

Las distribuciones en las tres soluciones son constantes a trozos. Los paneles superiores de la figura 4.2 muestran los dominios en el espacio de parámetros (ϵ, α) donde cada solución está bien definida. Debemos notar que estos dominios se superponen entre sí sobre zonas relativamente grandes. Incluso, justo debajo de $\alpha = 1/2$ y para valores intermedios de ϵ hay una zona donde las tres soluciones coexisten. Los paneles inferiores de la misma figura muestran ejemplos de las tres soluciones para un conjunto particular de parámetros.

En las tres soluciones, las variables de recursos renormalizadas $u_{A,B}$ están divididas en dos rangos —el mismo para las dos variables— dentro del cual las dos distribuciones de probabilidad marginal $P_{A,B}$ son uniformes. La solución I se caracteriza por el hecho de que los jugadores tipo A asignan recursos tanto bajos como altos, mientras que los jugadores tipo B sólo asignan recursos altos. Para un jugador tipo A dado, una asignación baja de recursos es conveniente para maximizar la ganancia cuando se compite en contra de jugadores del mismo tipo, mientras que recursos más grandes son necesarios para enfrentarse a jugadores tipo B . Es interesante notar que la solución I reproduce las distribuciones obtenidas para dos jugadores en la sección 4.3.1 en los límites $\epsilon \rightarrow 0$ (cuando los oponentes son jugadores sólo de distinto tipo) y para $\alpha \rightarrow 1$ (cuando los dos tipos de jugadores se vuelven indistinguibles entre sí), pero no para $\epsilon \rightarrow 1$ (cuando los oponentes son siempre del mismo tipo).

La solución II es, en algún sentido, simétrica a la solución I. En este caso, los jugadores tipo A siempre eligen asignar bajos recursos. Los jugadores tipo B , por el otro lado, asignan tanto altos como bajos recursos. Los primeros optimizan sus ganancias cuando se enfrentan a jugadores tipo A , mientras que los últimos son necesarios cuando juegan entre ellos. Esta solución se aproxima a las distribuciones encontradas en la sección 4.3.1 para $\epsilon \rightarrow 1$, y para $\alpha \rightarrow 1$, pero no para $\epsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, en la solución III jugadores tipo A y B eligen respectivamente asignar sólo recursos bajos y altos. De esta forma los jugadores tipo A dan por perdidos todos los ítems en la competencia con jugadores tipo B pero, por otro lado, maximizan sus ganancias cuando juegan entre sí. La única situación en la cual la solución III se reduce a las distribuciones obtenidas en la sección 4.3.1 es para el límite trivial $\alpha \rightarrow 0$, que es cuando los jugadores tipo A no tienen nada de recursos.

Así, las soluciones corresponden a tres diferentes clases de estrategias globales, representando la conveniencia de asignar ya sea bajos o altos recursos en la competencia entre jugadores con la misma o diferente (más alta o más baja) cantidad total de recursos, con el propósito de maximizar la ganancia individual esperada. Que una estrategia sea más eficiente que otra depende tanto de la probabilidad de enfrentarse con un oponente del mismo tipo —lo cual está determinado por el parámetro ϵ — como de la relación entre la cantidad total de recursos —dada por α —. De esta forma surge la pregunta, para un dado conjunto de parámetros, sobre qué estrategia prevalece en

las regiones del espacio de parámetros donde coexisten dos o más soluciones.

Elegimos tratar dicha pregunta introduciendo un modelo dinámico para el juego del Coronel Blotto, donde las estrategias individuales evolucionan por imitación de los jugadores más exitosos y progresivamente se acercan a una etapa donde se maximizan las ganancias. Este modelo, que se define y estudia en la sección 4.4, tiene la ventaja conceptual de proporcionar una imagen evolutiva que va más allá de la representación estática de las estrategias óptimas como equilibrios de Nash. Al mismo tiempo, dado que las simulaciones numéricas hacen posible considerar grandes poblaciones, nos permiten validar la representación de cuatro jugadores usada en esta sección.

4.4. Evolución de estrategias: reglas dinámicas y simulaciones numéricas

En nuestro modelo evolutivo de una población involucrada en el juego del Coronel Blotto, consideramos un conjunto de N jugadores, N_A del tipo A y N_B del tipo B . Como antes, las respectivas cantidades totales de recursos son X_A y X_B para cada jugador. La estrategia del jugador n está caracterizada por la distribución de probabilidad $P_n(x, t)$ de asignar x recursos en cualquier ítem dado a tiempo t . El juego ocurre sucesivamente entre pares de oponentes seleccionados al azar y, como se explica abajo, las estrategias de los jugadores evolucionan en respuesta a las ganancias resultantes. Como en la sección 4.3.2, ϵ y $1 - \epsilon$ son la respectivas probabilidades de que el oponente de cualquier jugador sea del mismo o de diferente tipo.

En principio, la dinámica del juego ocurre en dos escalas de tiempo bien diferenciadas. En el corto plazo, se juegan muchos partidos y se recopila información acerca del éxito relativo de los jugadores con diferentes estrategias. En una escala más larga, esta información es usada para implementar cambios en las estrategias individuales, en un intento de mejorar el propio rendimiento y maximizar las ganancias. Como es costumbre en la teoría de juego evolutiva [10], pasamos de largo la escala de tiempo más corta haciendo que la evolución de las estrategias dependa de la comparación entre las ganancias esperadas por diferentes jugadores. Esta simplificación equivale a suponer que se juegan muchas partidas antes de que las estrategias tengan la posibilidad de cambiar, de forma que cualquier jugador está expuesto a una muestra representativa de todas las estrategias que hay en la población.

Las reglas dinámicas para la evolución de las estrategias están definidas a pasos discretos de tiempo. En cada paso t , se calcula la ganancia esperada promedio de cada

jugador como

$$\begin{aligned} \langle \pi_n(t) \rangle = & \frac{1-\epsilon}{N_{B,A}} \sum_{n_{B,A}} \int_0^{X_{A,B}} dx P_n(x,t) \int_0^x dx' P_{n_{B,A}}(x',t) \\ & + \frac{\epsilon}{N_{A,B}} \sum_{n_{A,B}} \int_0^{X_{B,A}} dx P_n(x,t) \int_0^x dx' P_{n_{A,B}}(x',t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde el primero y segundo subíndice corresponden para cuando n es de tipo A y B , respectivamente. El índice de la sumatoria $n_{A,B}$ corre sobre los jugadores de ambos tipos, pero saltea al jugador n .

Entonces, para cada jugador n , se selecciona un segundo jugador n' del mismo tipo al azar en la población y se comparan sus ganancias esperadas. Si $\langle \pi_n(t) \rangle < \langle \pi_{n'}(t) \rangle$, el jugador n adopta la estrategia del jugador n' , es decir, $P_n(x,t)$ es reemplazada por $P_{n'}(x,t)$. Si, por otro lado, $\langle \pi_n(t) \rangle \geq \langle \pi_{n'}(t) \rangle$ el jugador n no cambia su estrategia. La comparación se realiza, en promedio, una vez por jugador por paso de tiempo. Esto es un evento de imitación sin error o, en términos biológicos, de herencia sin mutaciones.

Independientemente de si haya ocurrido o no una imitación —para tener auténtica evolución, y permitir a la población explorar todo el espacio posible de estrategias— la estrategia del jugador n se somete además a un proceso de mutación. Este consiste en sumar a la distribución de probabilidad $P_n(x,t)$ una perturbación elegida convenientemente $\delta P_n(x,t)$. Para mantener la normalización de la probabilidad y para no modificar la cantidad total de recursos del jugador n , la perturbación debe cumplir

$$\int_0^{X_{A,B}} dx \delta P_n(x,t) = 0, \quad \int_0^{X_{A,B}} dx x \delta P_n(x,t) = 0. \quad (4.17)$$

Es más, debe asegurarse que la distribución perturbada sea no negativa, $P_n(x,t) + \delta P_n(x,t) \geq 0$. Debajo se explica cómo se realiza dicho proceso en las simulaciones numéricas.

Una vez que se ha especificado una condición inicial —dada por un conjunto de distribuciones de probabilidad $P_n(x,0)$ para $n = 1, \dots, N$ — se aplican sucesivamente imitaciones y mutaciones en cada paso de tiempo sobre toda la población. Con el fin de implementar estas reglas numéricamente, es necesario reducir la variable de recursos asignados x a un conjunto discreto de valores. Así, dividimos el intervalo $(0, 2X_B/m)$ en K partes iguales, y tomamos los puntos $x_k = 2X_B(k-1/2)/mK$ para $k = 1, 2, \dots$ como los posibles valores para dicha variable. Las integrales en la ecuación (4.16) son calculadas usando esta discretización. Sin embargo, trabajando con variables discretizadas existe ahora una probabilidad finita de que los recursos asignados por dos oponentes sean exactamente los mismos. De esta manera en tales partidas empatadas,

se calcula una ganancia promedio asumiendo que el ítem es ganado por cada jugador con probabilidad $1/2$.

Sobre la variable discretizada, aplicamos una perturbación δP_n usando dos algoritmos. En el primero, una cantidad $2q$ se sustrae de la probabilidad $P_n(x_k, t)$ de un valor x_k elegido al azar, y cantidades q son sumadas a las probabilidades de los dos valores más cercanos, $P_n(x_{k+1}, t)$ y $P_n(x_{k-1}, t)$. En el segundo, se realiza el proceso inverso: cantidades q son sustraídas de $P_n(x_{k+1}, t)$ y $P_n(x_{k-1}, t)$, y una cantidad $2q$ es añadida a $P_n(x_k, t)$. Para los dos algoritmos, que actúan sólo con la salvedad de que se preserve la no negatividad de las probabilidades, se puede mostrar de forma inmediata que satisfacen las condiciones de la ecuación (4.17). Cada uno de ellos se elige con igual probabilidad a cada paso de tiempo para cada jugador, intensificando así la aleatoriedad del proceso de mutación.

Hemos realizado extensas simulaciones numéricas del modelo, para diversos conjuntos de parámetros (ϵ, α) , con $N_A = N_B = 100$ ($N = 200$), $K = 40$, y $q = 1,25 \times 10^{-3}$. Se consideraron asimismo, varias condiciones iniciales para las distribuciones de probabilidad que describen las estrategias de cada jugador, incluyendo (i) distribuciones multinomiales sobre x_1, \dots, x_K ; (ii) $P_n(x_k, 0)$ elegida de una distribución uniforme para cada n , y para cada $k = 1, \dots, K$; y (iii) distribuciones concentradas en unos pocos valores intermedios de x_k . En todos los casos, las distribuciones se encontraban debidamente normalizadas y satisfacían la condición (4.5), que asegura la correcta representación estadística de la cantidad total de recursos de cada jugador. También probamos unas pocas condiciones iniciales que incluían probabilidades diferente de cero para valores de x_k con $k < K$, encontrando sin embargo ninguna diferencia cualitativa con el resto de las elecciones.

Dado que estamos interesados en la comparación entre simulaciones numéricas y los resultados analíticos obtenidos en la sección 4.3 para las estrategias óptimas, nos focalizamos en el comportamiento a tiempos largos de nuestro modelo evolutivo. Con el fin de evaluar hasta qué punto se alcanzó la etapa asintótica, estudiamos la dependencia con el tiempo de una serie de medidas globales definidas sobre el total de la población, tales como el promedio de las ganancias individuales esperadas y el promedio de la dispersión cuadrática media de las distribuciones de probabilidad individuales. En todos los casos y para todas las condiciones iniciales descritas previamente, encontramos que el sistema alcanza un estado asintótico, bien definido y de forma satisfactoria, después de un tiempo de 10^5 pasos.

Los puntos en la figura 4.3 representan los resultados numéricos para las distribuciones de probabilidad de cada tipo de jugador, para tres conjuntos de parámetros (ϵ, α) . Cada distribución numérica se obtuvo como un promedio de las distribuciones individuales de los jugadores de cada tipo, y sobre el tiempo. El promedio temporal fue realizado sobre 400 pasos temporales equidistantes a lo largo de un periodo de

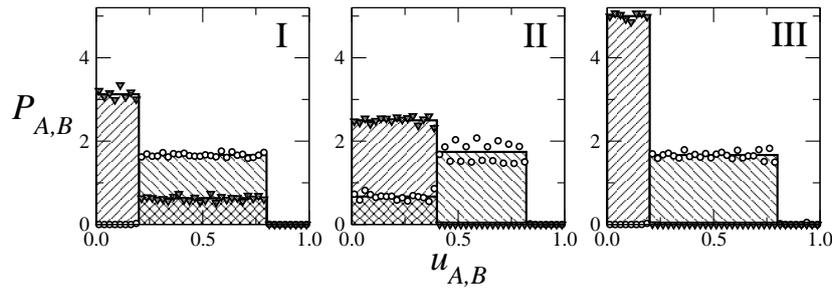


Figura 4.3: Resultados numéricos (puntos) para las distribuciones de probabilidad asintóticas en tres puntos del espacio de parámetros (ϵ, α) , de izquierda a derecha, $(0,4,0,5)$, $(0,7,0,4)$, y $(0,6,0,2)$. Además se muestra una de las tres distribuciones analíticas para cada conjunto de parámetros usando el mismo estilo de sombreado que en la figura 4.2, de izquierda a derecha, soluciones I, II y III.

$1,6 \times 10^5$ pasos, después de esperar un transitorio de $2,4 \times 10^5$ pasos desde la condición inicial. Hemos verificado que, para cada par (ϵ, α) , las distribuciones asintóticas son las mismas para todos los jugadores del mismo tipo y estas son independientes de la condición inicial.

Las líneas continuas en cada panel de la figura 4.3 representan una de las tres soluciones obtenidas en la sección 4.3.2 para el correspondiente par de parámetros (ϵ, α) —de izquierda a derecha, soluciones I, II y III—. Se observa una buena coincidencia entre los resultados numéricos y las soluciones analíticas, indicando que las distribuciones asintóticas de nuestro modelo evolutivo concuerdan con las estrategias óptimas obtenidas a través de la maximización conjunta de las ganancias individuales. Al mismo tiempo, esta coincidencia con los resultados numéricos para una población de $N = 200$ jugadores valida nuestra aproximación analítica de cuatro jugadores introducida en la sección 4.3.2. Hemos verificado que dicho acuerdo entre las soluciones analíticas y numéricas ocurre para varias elecciones de los parámetros, cubriendo los diferentes comportamientos del sistema.

La figura 4.4 muestra en el espacio de parámetros varios pares (ϵ, α) para los cuales se obtuvo una de las tres estrategias óptimas encontradas en la sección 4.3.2 como solución asintótica de nuestro modelo evolutivo. Los diamantes representan los conjuntos de parámetros donde la solución asintótica coincide con la solución III. Esto sucede donde la única estrategia óptima es precisamente la solución III, es decir, debajo de la curva $\alpha - \epsilon(1 - \alpha) = 0$ para $\epsilon < 1/2$ y debajo de la curva $2\alpha - 1 + \epsilon(1 - \alpha) = 0$ para $\epsilon > 1/2$. Por otro lado, en las zonas donde la solución III coexiste con otras soluciones, las estrategias evolutivas nunca alcanzan dicha solución asintóticamente. Por encima de las mismas curvas, las soluciones I y II representan las estrategias asintóticas para $\epsilon < 1/2$ (símbolos llenos) y para $\epsilon > 1/2$ (símbolos vacíos), respectivamente. Hay que notar que cada solución se obtiene como estrategia asintótica del modelo evolutivo en la zona del espacio de parámetros donde describe correctamente los casos límites $\epsilon \rightarrow 0$, 1 y $\alpha \rightarrow 0$, 1 , como se explicó en la sección 4.3.2.

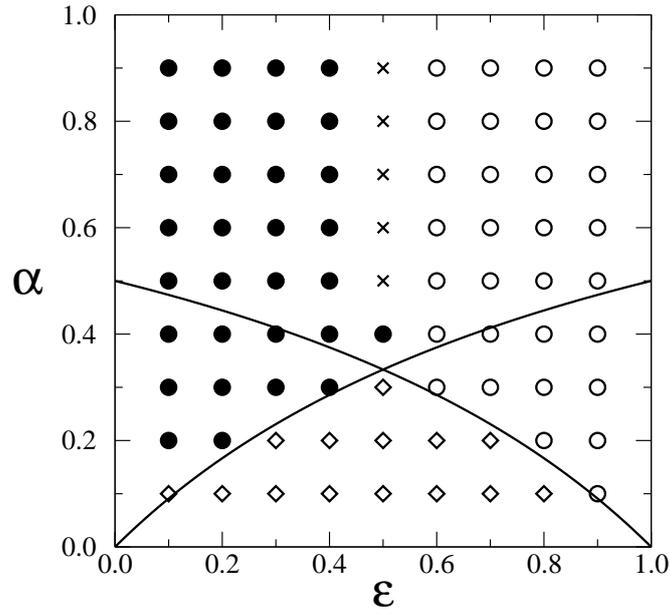


Figura 4.4: Soluciones asintóticas obtenidas numéricamente en diferentes puntos del espacio de parámetros. Símbolos llenos: solución I; símbolos vacíos: solución II; diamantes: solución III. Las cruces indican conjuntos de parámetros donde ninguna de las tres soluciones se alcanzó en el tiempo de simulación. Las curvas son las mismas que las primeras dos de los paneles superiores de la figura 4.2, es decir, $\alpha - \epsilon(1 - \alpha) = 0$ y $2\alpha - 1 + \epsilon(1 - \alpha) = 0$.

Para $\epsilon = 1/2$ y $\alpha \gtrsim 0,4$, no obtenemos distribuciones asintóticas bien definidas dentro de los tiempos de simulación considerados. Al final de las simulaciones, las distribuciones de probabilidad todavía son sumamente dependientes de las condiciones iniciales, y no se parecen ni a la solución I ni a la II. Dado que esta zona es la frontera entre los dominios de estabilidad de ambas soluciones, interpretamos esta falta de convergencia como una clase de desaceleración crítica asociada a la transición entre ambas soluciones.

Es interesante notar que las estrategias asintóticas obtenidas para cualquier par (ϵ, α) corresponden a la solución que minimiza la diferencia entre la ganancia esperada promedio de los dos tipos de jugadores, $\langle \pi_B - \pi_A \rangle$. Para cada una de las tres soluciones, esta cantidad equivale a

$$\begin{aligned} \langle \pi_B - \pi_A \rangle_I &= 1 - \alpha[1 - \epsilon(1 - \alpha)]^{-1}, \\ \langle \pi_B - \pi_A \rangle_{II} &= [\alpha + \epsilon(1 - \alpha)]^{-1} - 1, \\ \langle \pi_B - \pi_A \rangle_{III} &= 1 - \epsilon. \end{aligned} \tag{4.18}$$

De hecho, para valores fijos de ϵ y α , el mínimo entre estas tres funciones se obtiene para la solución que representa la distribución de probabilidad asintótica de nuestro modelo evolutivo en dicho punto del espacio de parámetros. Visto como un funcional de las distribuciones de probabilidad individual, la diferencia de ganancia promedio $\langle \pi_B - \pi_A \rangle$

puede interpretarse como una clase de potencial de no equilibrio, cuya minimización en el espacio de las distribuciones proporciona las estrategias óptimas para un dado conjunto de parámetros. Este potencial de no equilibrio puede ser usado para proponer un marco de tipo termodinámico para la evolución de estrategias en esta clase de juegos.

Parece sorprendente, sin embargo, que las estrategias óptimas —que son obtenidas a partir de la maximización conjunta de las ganancias de todos los jugadores— corresponden a la minimización de una función tal como $\langle \pi_B - \pi_A \rangle$ que disminuye cuando π_A crece pero que *aumenta* con π_B . La solución a este hecho aparentemente paradójico viene de que, siendo el Coronel Blotto un juego de suma constante, siempre tenemos $\langle \pi_B + \pi_A \rangle = 1$. Si tenemos en cuenta esta condición, y el hecho de que $\langle \pi_B - \pi_A \rangle \geq 0$ —ya que la cantidad total de recursos de los jugadores tipo B es mayor o igual que la de los jugadores tipo A — es inmediato verificar que

$$\langle \pi_B - \pi_A \rangle^2 = 1 - 4\langle \pi_A \rangle \langle \pi_B \rangle. \quad (4.19)$$

Esto implica que dicha minimización es a su vez equivalente a *maximizar* el producto $\langle \pi_A \rangle \langle \pi_B \rangle$, una función simétrica que crece con ambas ganancias.

4.5. Generalizaciones

Nuestro modelo evolutivo para estrategias de asignación de recursos en el juego del Coronel Blotto admite extensiones en muchas direcciones. Hemos implementado algunas generalizaciones —descriptas brevemente en lo que sigue— que incluyen (i) considerar diferentes probabilidades de interacción entre los dos tipos de jugadores; (ii) asignar un patrón de interacciones subyacente, es decir, una “estructura social” en la población; y (iii) relajar la naturaleza determinista de imitación de estrategias, agregando así un nuevo ingrediente estocástico a la evolución. En todos los casos, las soluciones analíticas y las simulaciones numéricas no muestran diferencias cualitativas con nuestros resultados previos, señalando la robustez de los mismos.

4.5.1. Probabilidades de interacción de acuerdo al tipo de jugador

Recordando el comienzo de la sección 4.3.2, observamos que la probabilidad de interacción de un jugador con otro de la misma clase —el parámetro ϵ en nuestro modelo— no tiene por qué ser la misma para ambos tipos de jugadores. Una evidente generalización del modelo es entonces introducir dos parámetros, ϵ_A y ϵ_B , que respectivamente dan dichas probabilidades para cada tipo. Las probabilidades correspondientes de enfrentar a un oponente del otro tipo son $1 - \epsilon_A$ y $1 - \epsilon_B$. Estos dos parámetros aparecen

naturalmente, por ejemplo, si las probabilidades de diferentes partidas quedan definidas en término de los pares de oponentes. De hecho, si γ_A y γ_B son las probabilidades de que se juegue una partida entre dos jugadores tipo A y dos jugadores tipo B , respectivamente —mientras que $1 - \gamma_A - \gamma_B$ es la probabilidad de que los jugadores sean de tipo diferente— encontramos que $\epsilon_A = \gamma_A / (1 - \gamma_B)$ y $\epsilon_B = \gamma_B / (1 - \gamma_A)$, que en general van a ser diferentes. Este caso incluye también la situación relevante donde los dos oponentes son elegidos al azar de una población, pero el número de jugadores de cada tipo no es el mismo. Si las respectivas fracciones de jugadores son ρ_A y $\rho_B = 1 - \rho_A$, encontramos que $\gamma_A = \rho_A^2$ y $\gamma_B = \rho_B^2$, y los parámetros resultan ser $\epsilon_A = \rho_A / (2 - \rho_A)$ y $\epsilon_B = \rho_B / (2 - \rho_B)$.

El problema analítico que surge de esta generalización es esencialmente el mismo que el de la sección 4.3.2 y, de forma correspondiente, su solución no muestra mayores diferencias con el caso $\epsilon_A = \epsilon_B$. Como antes, existen tres soluciones constantes a trozos para cada conjunto de parámetros. Tanto los dominios donde las tres distribuciones son constantes como las regiones en el espacio de parámetros donde las soluciones están bien definidas dependen de ϵ_A , ϵ_B , y α . El comportamiento asintótico del modelo debe ser estudiado en este caso en un espacio tridimensional. En el resto, las soluciones son cualitativamente las mismas que en el caso más simple de dos parámetros. De esta forma, aparte del parámetro extra, esta generalización no contribuye con ninguna considerable novedad al modelo.

4.5.2. El juego en redes de mundo pequeño

Las simulaciones numéricas hacen posible introducir una segunda y más importante generalización en lo que respecta a la estructura social de la población. De manera más específica, consideramos la posibilidad de que cada jugador pueda interactuar solamente con un subconjunto preestablecido de la población, lo que define el vecindario del jugador. Tal estructura se puede implementar convenientemente por medio de una red, cuyos nodos representan los jugadores y cuyos enlaces conectan jugadores que pueden enfrentarse en una partida. Esta generalización permite, en principio, considerar estructuras sociales complejas y situaciones donde cada jugador puede enfrentarse a una pequeña parte del total de la población, lo cual representa escenarios realistas fuera del alcance del estudio analítico.

En nuestras simulaciones, usamos redes de mundo pequeño construidas a partir de una red ordenada unidimensional con $N = 200$ y $N = 2000$ nodos, y con $z = 10$ vecinos por nodo (5 a cada lado) siguiendo al algoritmo de recableado de Watts y Strogatz [44]. Suponemos, como explicamos previamente, que los oponentes se seleccionan de los vecindarios individuales —de forma que el cálculo de la ganancia esperada de cada jugador sólo involucra las estrategias de los vecinos correspondientes— pero que

se imita a cualquiera de la población. Esto introduce el interesante ingrediente de que una estrategia que es exitosa en un dado vecindario, con un número específico de jugadores de cada tipo, puede llegar a no ser conveniente en otros entornos. Los resultados numéricos muestran, de hecho, que existe una correlación moderada entre la estrategia asintótica alcanzada por cada jugador y la composición del vecindario local. Medimos el coeficiente de correlación de Pearson r entre la ganancia individual promedio y la fracción local de jugadores de cada tipo, obteniendo valores alrededor de $r \approx 0,2$. Sin embargo, las simulaciones sugieren que las distribuciones de probabilidad observadas a tiempos largos son de la misma clase que aquellas que se obtienen en los cálculos analíticos. Es más, los resultados no son sensibles al grado de desorden de la red de mundo pequeño, medido a través del parámetro de recableado. Concluimos que, al menos para este tipo de red, nuestros resultados previos son robustos ante cambios en la estructura social de la población.

4.5.3. Imitación estocástica

Finalmente, con el objetivo de incrementar la aleatoriedad en la evolución, la imitación de estrategias entre los jugadores puede generalizarse admitiendo que —en vez de depender de forma determinista de la comparación de las ganancias promedio— la adopción de la estrategia de otro jugador está controlada por una probabilidad. En nuestra generalización de la imitación, consideramos que el jugador n adopta la estrategia del jugador n' con una probabilidad $p(\Delta)$, que depende de la diferencia de ganancias promedio $\Delta = \langle \pi_{n'} \rangle - \langle \pi_n \rangle$. Más específicamente, si tal diferencia es negativa la imitación se rechaza: $p(\Delta < 0) = 0$. Para Δ positivo, por otra parte, asumimos $p(\Delta > 0) = 1 - \exp(-w\Delta)$, de forma que la imitación se hace más probable a medida que Δ crece. El parámetro positivo w define qué tan rápido varía la probabilidad con Δ . El algoritmo determinista presentado en la sección 4.3.2 corresponde al límite $w \rightarrow \infty$. Realizamos simulaciones para $w = 0,1$ y 1 , y no encontramos diferencias esenciales con respecto al caso determinista, excepto por la esperada desaceleración de la dinámica en general a medida que w —y por lo tanto la probabilidad de imitación fijado Δ — disminuye.

Una generalización en la misma línea podría ser admitir que hay una probabilidad distinta de cero de que un jugador n adopte la estrategia de un jugador n' incluso cuando la imitación implica una disminución en la ganancia ($\Delta < 0$). Una implementación estándar de este procedimiento es el algoritmo de Metropolis [70], el cual considera $p(\Delta < 0) = \exp(\Delta/T)$ y $p(\Delta > 0) = 1$. La “temperatura” T mide el grado de aleatoriedad del proceso. El algoritmo de imitación introducido en la sección 4.3.2 corresponde a temperatura cero. Como en otros problemas estadísticos, la introducción de una temperatura puede prevenir que el sistema se quede estancado en equilibrios

metaestables. En nuestro caso, sin embargo, no hay evidencia de la existencia de tales estados.

4.6. Discusión

Las estrategias para la asignación de recursos son un ingrediente básico en la administración económica y financiera, y se vuelven cada vez más cruciales a medida que la complejidad de los sistemas involucrados y la presión por la competencia crecen. También juegan un papel importante en la organización social y en la evolución biológica. Como implica directamente la maximización de beneficios para cierta inversión, la asignación de recursos es un problema que se adapta naturalmente para su tratamiento dentro del marco de la teoría de juegos. El juego del Coronel Blotto que se estudia aquí es sólo uno de una clase de modelos que explotan la teoría de juegos en esa dirección.

Aquí, nuestro principal objetivo ha sido enmarcar el juego del Coronel Blotto en la teoría de juego evolutiva. Dicho juego considera la competencia entre dos jugadores con una cantidad diferente de recursos los que deben ser distribuidos entre un conjunto de ítems. Cada ítem es obtenido por el jugador que asigna más recursos por él. Comenzamos nuestro análisis tratando, dentro de la teoría tradicional, un juego generalizado donde un jugador dado puede enfrentarse con un oponente con la misma o diferente cantidad de recursos. Tal generalización puede ser interpretada, asimismo, como incertidumbre en la cantidad de recursos del oponente. Esta situación fue convenientemente representada por una población de cuatro jugadores, dos de ellos con bajos recursos y dos con altos recursos. Para esta versión simplificada de una población más grande hemos sido capaces de obtener las estrategias óptimas por medio de la maximización de un lagrangiano para las ganancias. Obtuvimos tres soluciones que, coexistiendo parcialmente en el espacio de parámetros, describen estrategias que favorecen formas dispares en la distribución de recursos en la competencia con jugadores con igual o diferente cantidad de recursos. En una de ellas, común a ambos tipos, las estrategias apuestan a distribuir recursos sobre todo el rango. En el otro comportamiento, por el contrario, jugadores con bajos y altos recursos concentran sus estrategias respectivamente en la parte inferior y superior del mismo rango.

Dichas soluciones representan equilibrios novedosos para el juego del Coronel Blotto, respecto de lo ya realizado en la literatura. De esta forma el nuevo ingrediente de incerteza en la cantidad de recursos del oponente tiene como principal consecuencia la aparición de dos tipos de modalidades de asignación de recursos u ofertas por los ítems: bajas y altas. La relación de recursos y la probabilidad de interactuar con agentes con la misma cantidad de recursos determinan la estrategia óptima en cuanto a que tipo de ofertas, si bajas, o altas, o ambas, se debe realizar.

Luego definimos reglas evolutivas para las estrategias, basadas —al igual que en la evolución biológica— en la acción combinada de la imitación y la variación por fluctuaciones estocásticas. En este marco dinámico, se espera encontrar las estrategias óptimas en una etapa asintótica a tiempos largos de una población evolutiva. Hemos realizado extensas simulaciones numéricas en poblaciones de unos pocos cientos de jugadores y encontramos que, efectivamente, las estrategias asintóticas coinciden con aquellas obtenidas mediante la maximización del lagrangiano. Estos resultados validan nuestra representación de cuatro jugadores usada en nuestros cálculos analíticos. Aún más relevante, las simulaciones numéricas nos permiten identificar, en las zonas del espacio de parámetros donde existen más de una solución analítica, cual de ellas es en realidad la que se adopta a tiempos largos. Comparando las ganancias esperadas en promedio para cada solución, concluimos que la estrategia preferida es aquella que maximiza el producto de las ganancias de los dos tipos de jugadores. Este producto, por lo tanto, actúa con una clase de potencial de no equilibrio para el proceso evolutivo.

Finalmente, verificamos que nuestras principales conclusiones son robustas ante una serie de generalizaciones del modelo, tanto en las reglas del juego como en el proceso evolutivo. Estas incluyen relajar algunas de las simetrías entre los jugadores de la versión original, considerar una población con una estructura local heterogénea —representada por una red de mundo pequeño— e incluir ingredientes estocásticos extras en la imitación de estrategias. En todos los casos no observamos cambios significativos en el comportamiento en conjunto de nuestro sistema.

Trabajos anteriores formularon y analizaron el juego del Coronel Blotto dentro de la teoría de juegos tradicional, y por lo tanto se encontraban limitados a proveer un escenario estático en la asignación óptima de recursos. La teoría de juego evolutiva, por el otro lado, establece un marco dinámico con la participación de una población de agentes, donde las estrategias óptimas son el resultado de la evolución misma. Como tal, proporciona una imagen más realista de los sistemas socio-económicos (o biológicos), cuya naturaleza es inherentemente dinámica.

En cuanto a los interrogantes que hemos venido planteando a lo largo de esta tesis sobre que características de la dinámica microscópica o del patrón de interacciones determinan el comportamiento colectivo a tiempos largos, concluimos que en esta clase de problemas la relación de recursos y la probabilidad de enfrentarse a agentes con diferente cantidad de recursos son los parámetros relevantes que determinan el estado asintótico de la población. Observamos, por ejemplo, que la red de interacciones cambia los equilibrios sólo en tanto cambia dichos parámetros. También vimos que parámetros que afectan el grado de ruido en la imitaciones no modifican el estado asintótico, si no que sólo perturban la dinámica temporal para llegar a dicho estado, haciendo que se tarde más en llegar a los equilibrios en medida que las fluctuaciones aumentan. Tal robustez de los equilibrios en relación a ciertas perturbaciones en las reglas de la

dinámica nos señala el camino en cuanto a que futuros estudios se pueden realizar en el marco del problema de asignación de recursos, siendo la falta de información en los recursos del oponente un punto vital a considerar dado la variabilidad que produce en dichos equilibrios.

Capítulo 5

Interacciones en tripletes: ejemplo en lenguaje escrito

“Hah! Attempted murder? Now honestly, what is that? Do they give a Nobel prize for attempted chemistry? Do they?”

— Dr. Robert Underdunk Terwilliger

5.1. Motivación

En los capítulos anteriores nos dedicamos a ver como el patrón de interacciones y las reglas microscópicas de la dinámica determinan el estado colectivo de una población de agentes. En esta ocasión, deseamos invertir dicho problema: dado cierto estado de un grupo de agentes o variables, nos preguntamos cuál es la estructura de interacciones subyacente y qué podemos concluir a partir de ésta. En principio debemos considerar que la respuesta puede no ser única, y que la estructura dependa del estado en que se encuentre el sistema.

La complejidad de dicho interrogante proviene fundamentalmente de dos orígenes. Por un lado, dado el estado de una población de agentes es necesario definir qué quiere decir que determinado grupo de agentes interactúen. En nuestras consideraciones previas, dicha problemática no existía ya que nosotros definíamos las reglas dinámicas de interacción. Por otro lado, considerando el estado o evolución temporal de ciertas variables o agentes, puede darse la situación de que no estemos midiendo o no tengamos acceso a todas las variables relevantes del sistema, de forma tal que las dependencias que midamos van a estar influenciadas por lo que no observemos. Entender el efecto de tales variables *latentes* es fundamental a la hora de estudiar interacciones.

El marco teórico que elegimos para analizar dichas cuestiones es la teoría de la información, que no sólo cuenta con la rigurosidad necesaria para estudiar diferentes tipos

de variables, sino también que ha mostrado ser durante las últimas décadas un área con una gran capacidad para adaptarse a diferentes campos, incluyendo la lingüística, la genética, la neurociencia, entre otros.

Para validar las propuestas de como extraer dependencias proponemos en este trabajo utilizar como ejemplo el lenguaje escrito. En primer lugar, a pesar de que el lenguaje presenta una disposición simple en forma de cadena unidimensional de símbolos –estos son, claramente, las palabras– representa una proyección de la mente humana y de toda la complejidad que tal hecho conlleva. En segundo lugar y no menos importante, las bases de datos de lenguaje escrito son fácilmente accesibles y disponen de grandes volúmenes de datos.

Como métodos para estudiar las interacciones en grupos de variables –que en nuestro caso harán referencia a ocurrencia de palabras– se propondrán dos caminos, cada uno con diferentes ventajas y objetivos. El primero estudia la interacción entre grupos de palabras considerando las diferentes partes de un texto como muestras. Para este enfoque, en el que nos centraremos, proponemos un análisis en triplete o tríos de variables lo que permite tanto encontrar interacciones puras de a tres como detectar interacciones de a pares que se explican a través de una tercera variable. Por otro lado el segundo método, que sólo repasaremos brevemente, hace hincapié en la dependencia entre partes de un texto y palabras o grupos de palabras.

5.2. Introducción

Entender la relación que existe entre símbolos ordenados en secuencias complejas y cómo estas secuencias se forman, ha sido una pregunta central en el estudio de sistemas discretos [23, 25, 71, 72].

En particular estudiar interacciones en grupos más grandes que dos ha probado ser una tarea difícil, y tantos los conceptos de dependencia entre muchas variables como las cantidades dedicadas a medir tales interacciones no gozan de un consenso general dentro de la comunidad científica [15, 16, 20, 21, 73–78]. Dentro del marco de la teoría de la información el trabajo de Amari [21], unificando conceptos de análisis de datos categóricos y técnicas de máxima entropía, presenta una descomposición de una distribución de probabilidad en relación a los diferentes órdenes de dependencia. Tal enfoque expande naturalmente la idea de información mutua, y representa una base para este trabajo.

Uno de los campos donde el problema de interacciones múltiples ha sido más estudiado es el análisis de la respuesta de una población de neuronas, a través de los correspondientes disparos del potencial de membrana. Muchos interrogantes han surgido de este marco, por ejemplo cómo se codifica o decodifica un estímulo recibido en la respuesta de una población de neuronas, o cómo las interacciones entre neuronas

afectan este proceso de codificación, o hasta qué orden de dependencias es necesario considerar para modelar fehacientemente el comportamiento de cierto grupo de neuronas [15, 79, 80].

Otro campo en donde ha sido necesario considerar la problemática de dependencias múltiples es en la inferencia de redes de interacciones biológicas, por ejemplo redes de regulación genética o de proteínas [13, 81]. Esto sucede debido a que los mecanismos celulares son sumamente cooperativos, y frecuentemente requieren el efecto conjunto de muchas moléculas.

En este trabajo estudiaremos, como ya adelantamos, el caso del lenguaje escrito. La complejidad de la mente humana se proyecta a través del lenguaje en una secuencia de símbolos, que corresponden a las palabras. La forma en que estos símbolos interactúan entre ellos —teniendo en cuenta la interacción efectiva generada por la persona que escribe— debe ser tal que una variedad de ideas y conceptos se pueden expresar a través de ellos. Esto se debe realizar considerando además que el mensaje final tiene que ser entendido y decodificado por un destinatario.

En particular, un libro consiste en un mensaje acotado donde el autor está tratando de transmitir algunas ideas o contar una historia. Con el fin de lograr esta tarea, el autor no puede poner las palabras al azar si no que tiene que darles una estructura especial que represente lo que él está pensando. Entonces aparte de las restricciones gramaticales y funcionales, que ya reducen la forma en que se muestran las palabras, existen conexiones semánticas entre las palabras que están relacionadas con las ideas del autor. Entender estas interacciones ilumina el mensaje inmerso en el libro.

Así encararemos la tarea de encontrar interacciones entre variables, en particular en variables que hacen referencia a la ocurrencia de palabras en un determinado libro, y para dicho objetivo propondremos dos métodos. El primero, sobre el cual entraremos más en detalle, estudia dependencias entre símbolos de una secuencia por medio de un análisis de tripletes, considerando las partes de la secuencia como muestras de una distribución de probabilidad conjunta. El segundo método, que repasaremos brevemente, está basado en estudiar la distribución de grupos de símbolos a lo largo de una secuencia, midiendo la dependencia entre símbolos y partes de la secuencia. Con estos objetivos en mente, definiremos y mediremos interacciones usando conceptos de la teoría de la información [23, 25, 72].

Enfoques estadísticos y de teoría de la información han probado ser herramientas útiles para entender las estructuras del lenguaje. Shannon, en uno de sus primeros trabajos de teoría de la información [82], propuso una manera de medir la entropía del inglés escrito a través de la predicción de caracteres. En trabajos posteriores, la entropía del lenguaje escrito se estimó usando programas de compresión [83], mientras que se midió la información mutua entre diferentes letras mostrando la existencia de correlaciones de largo alcance en textos escritos [84]. Más recientemente se encontró,

usando la información mutua entre partes de un libro y las palabras, la presencia de una escala semántica característica en libros [85].

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 5.3 se presentan las definiciones de una dependencia pura de tres variables, junto a la conexión que hay con técnicas de máxima entropía. La sección 5.4 muestra un análisis en tripletes de las interacciones de a pares, lo que en particular permite detectar dependencias de a dos mediadas por una tercera variable. En la sección 5.7 se discuten los efectos de marginalización, no sólo de variables medidas si no también de aquellas no observadas o latentes, en la estructura de interacciones. La sección 5.8 presenta una aplicación del análisis propuesto en tripletes a textos escritos. Finalmente, en la sección 5.10 se muestra de forma breve el segundo método que estudia la dependencia entre partes del texto, consideradas como variables, y grupos de palabras. Los diferentes resultados se discuten en la sección 5.11.

5.3. Dependencias triples

Desde una perspectiva probabilística, la información mutua de Shannon representa una medida única de dependencia entre dos variables aleatorias [23, 25]. Sean X e Y variables aleatorias con una distribución de probabilidad $p(x, y)$, entonces su información mutua corresponde a

$$I(X; Y) = \sum_{x, y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \geq 0 \quad (5.1)$$

de forma que

$$I(X; Y) = 0 \iff p(x, y) = p(x)p(y), \quad \forall x, y \quad (5.2)$$

es decir, las variables son independientes si y sólo si su información mutua es nula.

Sin embargo, no hay una medida con un consenso general dentro de la comunidad científica que de cuenta de las interacciones triples puras. Un intento dentro del marco de la teoría de la información es la cantidad simétrica $I(X; Y; Z)$, más tarde llamada co-información [25, 75], definida como

$$\begin{aligned} I(X; Y; Z) &= I(X; Y) - I(X; Y|Z) \\ &= I(X; Z) - I(X; Z|Y) \\ &= I(Y; Z) - I(Y; Z|X). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Esta mide el cambio en la información mutua cuando se condiciona en una tercera variable. Una característica de esta cantidad, que ha desfavorecido su uso, es que puede ser tanto positiva como negativa. Un valor positivo de la co-información suele estar

asociado a la redundancia en un grupo de tres variables, que corresponde a una disminución en la información mutua condicionada. En el caso opuesto, un incremento en la información mutua condicionada, se relaciona con el concepto de sinergia, es decir el efecto conjunto de tres variables. A pesar de su falta de popularidad para la medición de dependencias múltiples, vamos a mostrar en este trabajo que dicha magnitud está íntimamente relacionada con otras definiciones más rigurosas.

Amari [21] en su trabajo sobre jerarquías de distribuciones de probabilidad presenta una descomposición de una distribución de N variables en una suma ortogonal de interacciones de en pares, en tríos y en sucesivos órdenes de dependencia. Los principios detrás de esta descomposición se encuentran muy relacionados con modelos logarítmicos lineales [15, 20], y con conceptos de máxima entropía, tal como los presentados por Jaynes [24, 72].

Dadas las variables aleatorias X_1, \dots, X_N , definamos en primer lugar la distribución de probabilidad $p^{(k)}(x_1, \dots, x_N)$ como aquella que posee máxima entropía y es compatible con todas las distribuciones marginales de orden k . Esto se puede escribir bajo el formalismo de multiplicadores de Lagrange, en donde se busca una distribución de probabilidad $p'(x_1, \dots, x_N)$ que maximice la entropía $H[p']$ y cuyas marginales de k variables coincidan con las dadas. La maximización de la entropía bajo tales condiciones lineales presenta una solución única [86]. En este contexto, las interacciones de orden k , que denotamos como $D^{(k)}$, corresponden a la disminución de entropía de $p^{(k-1)}$ a $p^{(k)}$, lo que se puede expresar como una divergencia de Kullback-Leibler

$$\begin{aligned} D^{(k)} &= D[p^{(k)} : p^{(k-1)}] \\ &= H_{max}^{(k-1)} - H_{max}^{(k)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

El hecho que esta divergencia sea equivalente a la diferencia de entropías se deduce directamente del teorema de Pitágoras generalizado para distribuciones, mostrado por Amari [21]. Estas cantidades se relacionan con la interacción total dentro de un grupo de N variables, magnitud conocida como multi-información $\Delta(X_1, \dots, X_N)$ [74], la cual se define como la divergencia de Kullback-Leibler entre la distribución de probabilidad conjunta y la aproximación independiente. De esta forma, la multi-información se separa naturalmente en la suma de los diferentes órdenes de interacción,

$$\begin{aligned} \Delta_{12\dots N} &= D[p(x_1, \dots, x_N) : p(x_1)\dots p(x_N)] \\ &= \sum_{k=2}^N D^{(k)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Para dos variables, toda la interacción esta dada por $D^{(2)}$, que coincide con la

información mutua

$$\begin{aligned}
 D_{12}^{(2)} &= D[p^{(2)}(x_1, x_2) : p^{(1)}(x_1, x_2)] \\
 &= D[p(x_1, x_2) : p(x_1)p(x_2)] \\
 &= I(X_1; X_2),
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

dado que la distribución de máxima entropía compatible con las marginales de orden uno es la aproximación independiente $p^{(1)}(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2)$.

Si sólo tenemos tres variables, X_1 , X_2 y X_3 , la cantidad $D_{123}^{(3)}$ representa la magnitud de la interacción entre tres variables que no se puede explicar por interacciones de a dos. Se define como

$$\begin{aligned}
 D_{123}^{(3)} &= D[p(x_1, x_2, x_3) : p^{(2)}(x_1, x_2, x_3)] \\
 &= H_{max}^{(2)} - H_{123}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Recordar que al tener sólo tres variables se cumple que $p^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)$. Podemos pensar a $p^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$ como el modelo más probable que podemos adivinar para el comportamiento de las tres variables si sólo conocemos las dependencias de a dos [24]. Si la distribución de probabilidad verdadera $p(x_1, x_2, x_3)$ es la misma, entonces no hay interacciones de tercer orden. Esta cantidad $D_{123}^{(3)}$, a la que denotamos como información triple, es la medida que elegimos para detectar dependencias entre tres variables, dado que creemos que representa la expansión natural del concepto de información mutua. Al igual que la información mutua esta manera de medir dependencias tiene la característica de incluir interacciones tanto directas como indirectas. Es decir, si tres variables sólo se relacionan a través de una cuarta, podemos en principio medir una interacción triple distinta de cero. El efecto de la marginalización se discutirá en más profundidad en la sección 5.7.

Por simplicidad, introducimos una nueva notación para las distribuciones de probabilidad de máxima entropía y para tales entropías máximas. Sea p_{V_1, V_2, \dots, V_k} la distribución de probabilidad de máxima entropía H_{V_1, V_2, \dots, V_k} que satisface las restricciones marginales V_1, V_2, \dots, V_k . En esta notación tenemos que

$$\begin{aligned}
 p^{(2)}(x_1, x_2, x_3) &= p_{12,13,23} \\
 p^{(1)}(x_1, x_2, x_3) &= p_{1,2,3}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Respectivamente, las entropías máximas son $H_{12,13,23}$ y $H_{1,2,3} = H_1 + H_2 + H_3$.

Ahora vamos a mostrar una cota en la información triple $D_{123}^{(3)}$. Como imponer más restricciones sólo puede hacer disminuir la entropía, esto implica que $H_{12,13,23} \leq H_{12,13}$,

y usando el hecho de que $H_{12,13} = H_{12} + H_{13} - H_1$ (ver subsección 5.3.2), se deduce a partir de la ecuación (5.7)

$$D_{123}^{(3)} \leq H_{12,13} - H_{123} \quad (5.9)$$

$$D_{123}^{(3)} \leq I_{23|1}.$$

Esto se puede hacer quitando cualquiera de las restricciones $V \in \{12, 13, 23\}$. Entonces podemos asegurar

$$D_{123}^{(3)} \leq \min\{I_{12|3}, I_{13|2}, I_{23|1}\} \quad (5.10)$$

$$D_{123}^{(3)} \leq \min\{I_{12}, I_{13}, I_{23}\} - I_{123},$$

donde I_{123} es la co-información. De la ecuación (5.10) también se deduce que $D_{123}^{(3)} \leq \min\{H_1, H_2, H_3\}$.

5.3.1. La compuerta *XOR* y las interacciones triples

Llegados a este punto, consideremos el ejemplo paradigmático de interacciones triples, que usualmente se asocia a la compuerta lógica *XOR*. Examinemos, para variables binarias $X_i \in \{1, -1\}$, la siguiente probabilidad conjunta

$$p_0(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x_1 x_2 x_3 = -1 \\ 0 & \text{si } x_1 x_2 x_3 = 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Para no perder de vista la simetría que posee, preferimos no mirarla como una compuerta si no simplemente como esta probabilidad conjunta. Es trivial ver que todas las probabilidades marginales de segundo orden son $p(x_i, x_j) = 1/4$. La probabilidad de máxima entropía compatible con estas marginales es la uniforme $p^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = 1/8$. Entonces para este ejemplo tenemos que la información triple es

$$\begin{aligned} D_{123}^{(3)} &= H_{12,13,23} - H_{123} \\ &= 3 \text{ bits} - 2 \text{ bits} = 1 \text{ bit}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

y $D_{123}^{(3)} = \Delta_{123}$, es decir, todas las interacciones son de a tres y la información triple alcanza el máximo valor permitido para variables binarias. Evidentemente si invertimos las probabilidades de forma que $p(\mathbf{x}) = 1/4$ cuando $\prod_i x_i = 1$, tendremos un comportamiento análogo y el mismo valor para la información triple.

Consideremos ahora tres variables binarias $X_i \in \{1, -1\}$ de forma que las probabi-

lidades están dadas por

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3) &= \exp(\theta x_1 x_2 x_3 - \psi) \\ &= \frac{1}{8} \left[1 + \left(\prod_i x_i \right) \tanh(\theta) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde ψ es la constante de normalización. Como mostró Amari [21], en un modelo logarítmico lineal el coeficiente de $x_1 x_2 x_3$, en este caso θ , es diferente de cero si y sólo si $D^{(3)} \neq 0$. Podemos ver en este ejemplo que llevando el parámetro θ de cero a $-\infty$ las probabilidades van de la uniforme, $p_u(\mathbf{x}) = 1/8$, a las probabilidades exactas de la *XOR*. En el medio, la desviación de la distribución uniforme $p(\mathbf{x}) - p_u(\mathbf{x}) = (\prod_i x_i) \tanh(\theta)/8$ se asemeja al comportamiento de una *XOR*, considerando que los mismos estados son exaltados o atenuados en la misma magnitud.

Podemos ir más allá afirmando que en general la desviación del modelo de máxima entropía de segundo orden $p^{(2)}$, que se obtiene a partir de mirar las dependencias de a dos, siempre cumple $p(\mathbf{x}) - p^{(2)}(\mathbf{x}) = \delta(\prod_i x_i)$ (ver siguiente subsección), de forma que el comportamiento tipo *XOR* no es sólo un ejemplo, sino que resulta ser la forma canónica en que tres variables binarias interactúan de a tres.

5.3.2. Solución para el modelo de máxima entropía

El problema de encontrar la distribución de probabilidad que maximiza la entropía bajo restricciones lineales, tales como fijar algunas marginales, presenta una única solución [86]. A pesar de que esta solución en general no posee una forma cerrada, existen algunos procedimientos –por ejemplo, el ajuste proporcional iterativo– que convergen a ella.

En algunos casos especiales se puede encontrar una forma analítica. Por ejemplo, fijar las marginales de primer orden da como resultado el producto de dichas marginales. Otro caso es cuando buscamos el modelo de máxima entropía de tres variables $\hat{p}(x_1, x_2, x_3)$ que cumple las restricciones marginales $p(x_1, x_2)$ y $p(x_2, x_3)$. Expresando el problema de maximización a través de multiplicadores de Lagrange, obtenemos una solución de la forma

$$\hat{p}(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2) f_2(x_2, x_3). \quad (5.14)$$

Si además imponemos las condiciones marginales y la normalización, llegamos a

$$\hat{p}(x_1, x_2, x_3) = \frac{p(x_1, x_2) p(x_2, x_3)}{p(x_2)}, \quad (5.15)$$

lo que se conoce como la aproximación de pares. Dada esta distribución, su entropía es

$$H[\hat{p}(\mathbf{x})] = H_{12,23} = H_{12} + H_{23} - H_2. \quad (5.16)$$

Ahora vamos a mostrar la solución $p^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$ para el caso especial de tres variables binarias, es decir, $X_i = \pm 1$. Dicha solución, satisfaciendo las restricciones marginales de segundo orden $p(x_1, x_2)$, $p(x_1, x_3)$ y $p(x_2, x_3)$, posee máxima entropía. En principio, tenemos ocho variables a determinar, una por la probabilidad de cada estado, pero al considerar la normalización y las restricciones marginales sólo nos quedamos con una variable libre. Como se mostró en trabajos previos [15, 21], tal problema se reduce a encontrar la raíz de una ecuación cúbica. Considerando que las marginales provienen de una probabilidad conjunta observada $p(x_1, x_2, x_3)$, una forma conveniente y conceptualmente esclarecedora para la solución $p^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$, como en el trabajo de Martignon, es

$$p^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3) - \delta \prod_i x_i, \quad (5.17)$$

donde el valor de δ debe ser tal que las probabilidades permanezcan en el simplex, es decir, $p^{(2)}(\mathbf{x}) \in [0, 1]$. Así se obtiene para las marginales

$$\begin{aligned} p^{(2)}(x_i, x_j) &= p^{(2)}(x_i, x_j, 1) + p^{(2)}(x_i, x_j, -1) \\ &= p(x_i, x_j, 1) + p(x_i, x_j, -1) - \delta + \delta \\ &= p(x_i, x_j). \end{aligned} \quad (5.18)$$

El valor de δ se obtiene a partir de

$$\prod_{\mathbf{x}/\prod_i x_i=1} p^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \prod_{\mathbf{x}/\prod_i x_i=-1} p^{(2)}(x_1, x_2, x_3), \quad (5.19)$$

condición que asegura que el coeficiente en el modelo logarítmico lineal que de cuenta de las interacciones de a tres se anule [21]. La ecuación (5.19) se reduce a la ecuación cúbica en δ mencionada previamente.

Si la solución es $\delta = 0$, entonces la probabilidad $p(\mathbf{x})$ es aquella que tiene máxima entropía. En cualquier otro caso, la probabilidad $p(\mathbf{x})$ se desvía de $p^{(2)}(\mathbf{x})$, el modelo de máxima entropía obtenido a partir de las dependencias de a dos, asemejándose al comportamiento de la *XOR* o a su opuesto, como previamente destacamos.

5.4. Análisis en tripletes de interacciones de a pares

Un estudio en tripletes de las interacciones de a pares resulta esclarecedor en dos aspectos fundamentales. En primer lugar podemos ver cual es la diferencia entre las informaciones mutuas medidas a partir de las probabilidades $p(x_i, x_j)$ y las interacciones

de a pares en el triplete dadas por $D^{(2)}$. Por otra parte, un análisis en tripletes es capaz de detectar casos en donde toda la interacción que observamos entre dos variables está mediada a través de una tercera variable.

5.5. Comparación entre información mutua e interacciones de a pares en un triplete

Como vimos previamente, dadas tres variables aleatorias X_1 , X_2 y X_3 , la multiinformación da cuenta de todas las interacciones entre las mismas, y se puede descomponer como

$$\Delta_{123} = D_{123}^{(2)} + D_{123}^{(3)}, \quad (5.20)$$

es decir, las interacciones de a pares y de a tres.

La magnitud de las interacciones de a dos $D_{123}^{(2)}$ dentro del triplete en general no es igual a la suma de las informaciones mutuas entre los pares. A partir de la ecuación (5.20), las dependencias de segundo orden $D_{123}^{(2)}$ se pueden expresar como

$$\begin{aligned} D_{123}^{(2)} &= \Delta_{123} - D_{123}^{(3)} \\ &= I_{12} + I_{13} + I_{23} - I_{123} - D_{123}^{(3)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Así, dependiendo del signo de $D_{123}^{(3)} + I_{123}$, las interacciones de a pares que medimos mirando las tres variables, $D_{123}^{(2)}$, pueden ser más o menos que aquellas que observamos al mirar a los pares individualmente, $\sum I_{ij}$. Cuando no existe una dependencia de a tres ($D_{123}^{(3)} = 0$), el signo de la co-información determina en que situación nos encontramos, ya que

$$I_{123} = I_{12} + I_{13} + I_{23} - D_{123}^{(2)}. \quad (5.22)$$

Por supuesto que cuando $D_{123}^{(3)} > 0$, necesitamos mirar ambas cantidades para ver si $\sum I_{ij} - D_{123}^{(2)}$ es positivo o negativo. En las siguientes secciones veremos que existe una cercana relación entre la información triple y la co-información.

5.6. Interacciones de a dos mediadas por una tercera variable

Como previamente mencionamos, deseamos determinar que interacciones de a dos detectadas por información mutua se explican a través de una tercera variable. Es evidente que si queremos ver si determinada dependencia se explica por medio de otras variables, es necesario una medida que incluya dichas variables. De esta forma,

necesitamos un nuevo punto de vista.

Así vamos a partir del concepto de interacción irreducible, planteado por Nemenman [76, 81]. Siguiendo estas ideas, deseamos detectar si una interacción observada a partir de las probabilidades marginales de un grupo de variables V se puede explicar por otro camino $\Omega = \{U_1, \dots, U_2\}$, donde las U_i hacen referencia a otras probabilidades marginales que incluyen a las variables de V . Tomando el marco de máxima entropía, una forma de hacer esto es mediante la cantidad Δ_Ω^V que mide la interacción de V en relación a Ω , definida como

$$\begin{aligned}\Delta_\Omega^V &= D[p_{\Omega \cup V} : p_\Omega] \\ &= H_\Omega - H_{\Omega \cup V}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Estamos usando la notación descripta en la sección anterior, de forma que p_Ω es la distribución de probabilidad de máxima entropía que satisface todas las restricciones contenidas en Ω . Si esta interacción es cero, entonces $p_{\Omega \cup V} = p_\Omega$, y la distribución de probabilidad marginal de las variables V se puede deducir a partir de Ω . Veamos algunos ejemplos de esta cantidad

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2}^{12} &= D[p_{12} : p_{1,2}] = I_{12} \\ \Delta_{13,23}^{12} &= D[p_{12,13,23} : p_{13,23}] = H_{13,23} - H_{12,13,23} \\ \Delta_{12,13,23}^{123} &= D[p_{123} : p_{12,13,23}] = D_{123}^{(3)}.\end{aligned}\tag{5.24}$$

donde se consideró, en lo que respecta a la unión de marginales, que por ejemplo $\{12, 13, 23\} \cup \{123\} = \{123\}$, ya que las primeras marginales están incluidas en la última. En el segundo caso, estamos viendo si la dependencia entre X_1 y X_2 se explica por un camino a través de la variable X_3 .

La interacción en V se mide en relación a unas restricciones Ω , el set de referencia. Entonces la interacción irreducible en V se define como el mínimo sobre todos los sets de Δ_Ω^V [76],

$$\Delta^V = \min_{\Omega} \{\Delta_\Omega^V\},\tag{5.25}$$

tal que si existe un set Ω_0 que explica completamente la interacción de V , estas variables no interactúan.

Un inconveniente de este enfoque es que para obtener el valor de una interacción debemos medir la entropía de todos los posibles sets Ω , cuyo número crece exponencialmente con N , de forma que ocurre un gran problema con la dimensionalidad del asunto.

En este trabajo proponemos usar este marco para estudiar las dependencias de a pares, pero considerando sets de referencia que no incluyan más de tres variables, de manera que medimos interacciones que no pueden ser explicadas a través de una tercera variable. Un análisis similar, aunque dentro de un marco teórico diferente, ha probado ser útil para desambiguar enlaces entre sistemas oscilatorios [19]. En este sentido, definimos la interacción entre dos variables X_i y X_j como

$$\begin{aligned}\Delta^{ij} &= \min \left\{ \Delta_{i,j}^{ij}, \min_k \{ \Delta_{ik,jk}^{ij} \} \right\} \\ &= \min \left\{ I_{ij}, \min_k \{ \Delta_{ik,jk}^{ij} \} \right\},\end{aligned}\tag{5.26}$$

donde

$$\Delta_{ik,jk}^{ij} = H_{ik,jk} - H_{ij,ik,jk}.\tag{5.27}$$

El índice k se refiere a cualquier variable tal que $k \neq i, k \neq j$. Podemos observar que esta cantidad es siempre positiva, ya que corresponde a una divergencia de Kullback-Leibler. Por otro lado, es siempre menor o igual a la información mutua, es decir, $\Delta^{ij} \leq I_{ij}$. Desarrollando la ecuación (5.27),

$$\begin{aligned}\Delta_{ik,jk}^{ij} &= H_{ik} + H_{jk} - H_k - H_{ij,ik,jk} \\ &= H_{ik} + H_{jk} - H_k - H_{ijk} + H_{ijk} - H_{ij,ik,jk} \\ &= I_{ij|k} - D_{ijk}^{(3)}.\end{aligned}\tag{5.28}$$

donde $I_{ij|k}$ es la información mutua entre X_i y X_j , condicionada a X_k . Vemos que, si no existen interacciones de a tres entre las N variables, entonces Δ^{ij} corresponde a condicionar la información mutua entre i y j con cada posible variable k , y buscar el mínimo. La ecuación (5.26) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\Delta^{ij} &= I_{ij} - \Theta \left(\max_k \{ I_{ijk} + D_{ijk}^{(3)} \} \right) \\ &= I_{ij} - \Theta \left(\max_k \{ I_{ij} + I_{ik} + I_{jk} - D_{ijk}^{(2)} \} \right)\end{aligned}\tag{5.29}$$

donde $\Theta(x)$ es la función de Heaviside. Así en relación a los conceptos desarrollados previamente, buscamos un triplete para el cual $\sum I - D^{(2)}$ sea lo más grande posible.

Finalmente, queremos enfatizar que si existen dos variables X_1 y X_2 que sólo se

encuentran relacionadas a través de una tercera variable X_3 , lo que significa

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{p(x_1, x_3)p(x_2, x_3)}{p(x_3)}, \quad (5.30)$$

entonces $p_{13,23} = p_{12,13,23} = p_{123}$, de forma que la interacción irreducible entre X_1 y X_2 es cero. Es decir, la manera en que se construyó esta medida implica que si hay dos variables relacionadas entre sí por una cadena de Markov, entonces su interacción es nula.

5.7. Marginalización y variables latentes

Ahora que ya definimos la forma en que medimos interacciones, queremos dar una clara razón por la que esperamos encontrar estas dependencias de a tres en lenguaje escrito, y en cualquier sistema en general.

Cuando medimos las interacciones de ciertas variables por medio de sus probabilidades marginales, todas las variables que no consideramos pueden afectar tal interacción. Las variables sobre las que marginalizamos pueden ser o bien algunas de las que medimos, o bien pueden ser variables que no medimos, comúnmente llamadas variables latentes. Estas variables latentes pueden incluso no ser accesibles.

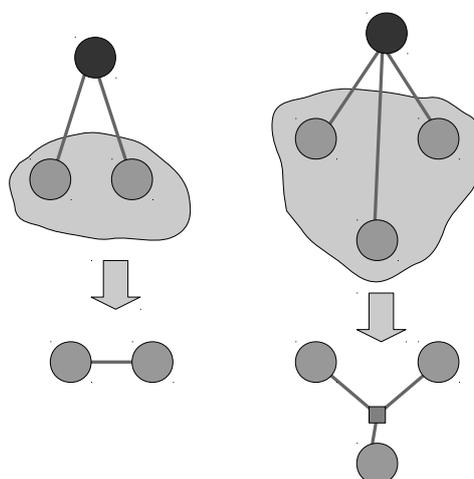


Figura 5.1: Representación esquemática de los efectos de marginalización tanto sobre pares de variables, como también sobre tríos de variables.

La figura 5.1 muestra un esquema de algunas de las ideas que deseamos expresar. Si, por ejemplo, tenemos dos variables sólo relacionadas por una tercera, la interacción medida a través de la probabilidad marginal va a mostrar en general una dependencia distinta de cero. Si la tercera variables es una de las que medimos, podemos desambiguar

tal situación usando la interacción irreducible definida previamente. Pero si la tercera es una variable latente, en general vamos a detectar una interacción entre tales variables.

La misma situación puede ocurrir entre tres variables que sólo interactúan a través de una cuarta. Cuando marginalizamos sobre esta cuarta variable, se pueden llegar a medir interacciones de a pares y triples entre las tres variables, incluso en el caso en que las dependencias con la cuarta variable sean de a dos (ver ejemplo en la siguiente subsección).

Este hecho tiene una fuerte implicación en el análisis de un sistema. Es decir, incluso en el caso en que creemos que nuestro sistema se encuentra bien representado sólo a través de interacciones de a dos, debido por ejemplo a la estructura física, si no medimos todas las variables relevantes, la estadística de nuestro sistema puede estar mal representada si no consideramos dependencias triples y de órdenes superiores.

En el caso de lenguaje escrito, y en particular si pensamos en la ocurrencia de palabras en un libro, es evidente que existen variables latentes que influyen diferentes grupos de palabras. Las diferentes ideas o temas que el autor tiene en mente a la hora de escribir son claros candidatos para estas variables latentes, a las que evidentemente no tenemos acceso. Entonces si queremos inferir alguna propiedad de estas variables latentes en término de las ocurrencias de palabras, un análisis que incluya estadísticas de mayor orden va a proveer un mejor entendimiento de tales temas.

Como una hipótesis de trabajo, podemos imaginar que cada uno de estos temas afectan la ocurrencia de un subgrupo de todas las palabras. Como vimos, al marginalizar sobre estos temas, se inducen muchas interacciones dentro de los distintos subgrupos de palabras. Si dichos temas no se superponen demasiado, a partir de la red de interacciones podemos ser capaces de identificar comunidades de palabras muy conectadas relacionadas con determinados temas. Por supuesto, cualquier descripción que hagamos acerca de los temas va a estar dada en función de las variables que medimos.

5.7.1. Ejemplo de los efectos de marginalización

Consideremos cuatro variables binarias $X_i = \pm 1$, a las que podemos pensar como espines, tal que existen interacciones ferromagnéticas de a dos entre X_4 y cada una de las otras variables. Además, esta cuarta variable tiende a estar en el estado negativo. La probabilidad de dicho sistema se puede expresar a través del correspondiente modelo logarítmico lineal [20, 21] como

$$\begin{aligned} \log p(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \beta x_4 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4 - \psi \\ &= (\beta + x_1 + x_2 + x_3) x_4 - \psi \end{aligned} \tag{5.31}$$

donde $\beta < 0$ es el campo que actúa sobre X_4 , y ψ es la constante de normalización. Al marginalizar sobre X_4 , obtenemos

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{\cosh(\beta + x_1 + x_2 + x_3)}{\sum_{\mathbf{x}'} \cosh(\beta + x'_1 + x'_2 + x'_3)}. \quad (5.32)$$

Con esta probabilidad ya podemos calcular las interacciones Δ_{123} , $D_{123}^{(2)}$ y $D_{123}^{(3)}$ como función de β .

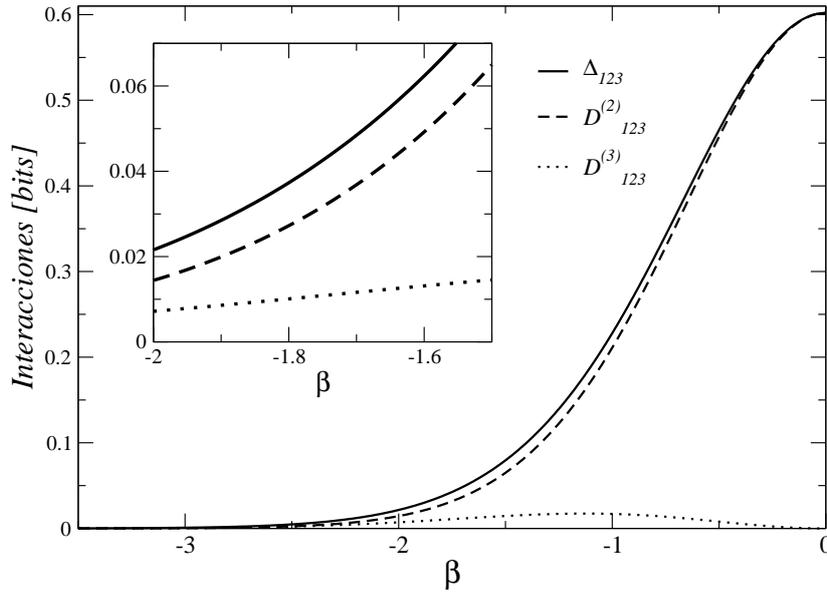


Figura 5.2: Interacciones Δ_{123} , $D_{123}^{(2)}$ y $D_{123}^{(3)}$ como función de β , el campo que actúa sobre X_4 .

La figura 5.2 muestra la multi-información Δ_{123} , la magnitud de las interacciones de a dos en el triplete $D_{123}^{(2)}$, y la información triple $D_{123}^{(3)}$ como función de β , el campo que actúa sobre X_4 . Como ya establecimos, $\Delta_{123} = D_{123}^{(2)} + D_{123}^{(3)}$. Todas estas cantidades se obtienen a partir de las probabilidades marginales $p(x_1, x_2, x_3)$ dadas por la ecuación (5.32). Cuando el campo es muy fuerte ($\beta \rightarrow -\infty$) no hay ninguna interacción, y tal situación corresponde a todos los espines estando hacia abajo. Podemos ver que para pequeños valores del campo, existe una fuerte interacción que se explica casi totalmente por dependencias de a pares.

Sin embargo, para valores intermedios del campo (ver gráfico interior de la figura 5.2), lo que corresponde al cuarto espín en el estado negativo la mayor parte del tiempo, la información triple es crucial para entender las dependencias entre estas variables. Creemos que en el caso de lenguaje escrito es plausible que los temas o variables latentes que afectan la ocurrencia de palabras presenten el mismo tipo de comportamiento, es decir, tiendan a no estar actuando la mayor parte del tiempo.

5.8. Ocurrencia de palabras en un libro

En un texto o libro, la coocurrencia de palabras no se debe sólo a restricciones gramaticales, sino más bien a conexiones semánticas. Entender las diferentes formas en que las palabras interactúan aporta claridad a la estructura semántica embebida en el libro.

Dado un libro de longitud M , lo dividimos en P partes de igual tamaño $s = M/P$. Para un grupo determinado de K palabras w_1, \dots, w_K , cuya estadística queremos analizar, definimos las siguientes variables

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la palabra } w_i \text{ aparece en la parte} \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Acá, nos focalizamos en palabras con frecuencia intermedia. Es decir, descartamos las palabras más frecuentes –que incluyen artículos, pronombres, etc.– y también las palabras menos frecuentes, que sólo aparecen unas pocas veces en todo el libro.

Las diferentes partes se consideran como muestras de una probabilidad conjunta $p(x_1, x_2, \dots, x_K)$, pero ya que en el formalismo presentado sólo estamos interesados en las propiedades de triplete, vamos a trabajar con las distribuciones marginales de tres variables $p(x_i, x_j, x_k)$.

A pesar de que estamos ignorando un montón de información contenida en los datos y analizando una pequeña parte, vamos a mostrar que con sólo esto podemos inferir una parte importante de la estructura del libro. En otro tipo de datos, esta clase de información puede llegar a ser todo lo que tenemos para estudiar un fenómeno.

Antes de la división en partes, los libros se procesan de la siguiente manera. Hacemos una lista ordenada de todas las palabras, descartando espacios y signos de puntuación, y llevamos todas las letras a minúsculas. Para cada palabra de la lista, buscamos su forma básica sin declinar usando la función WordData del programa Mathematica [87]. Esta permite considerar una palabra y su plural como una sola, y también unifica conjugaciones verbales. Con esta lista final procedemos a hacer la partición de forma que terminamos trabajando con una matriz de tamaño $\{K, P\}$ llena de elementos ± 1 .

A lo largo de este capítulo trabajamos con dos libros, *On the Origin of Species* (OS) por Charles Darwin y *The Analysis of Mind* (AM) por Bertrand Russell, ambos obtenidos del sitio del Proyecto Gutenberg [88]. Consideramos una partición de $P = 512$ partes, lo que en el libro OS corresponde a partes de tamaño $s = 295$ y para el libro AM a $s = 175$. El tamaño de la partición debe ser realizada de forma que las partes sean lo suficientemente grandes para que podamos ver las interacciones semánticas, pero a la vez el número de partes no debe ser demasiado chico para hacer las estimaciones necesarias.

En ambos libros, analizamos $K = 400$ palabras de forma que corresponden a aquellas con frecuencias intermedias. Para el libro OS las frecuencias globales n_i de las palabras analizadas satisfacen $33 \leq n_i \leq 112$, mientras que para el libro AM estas se encuentran en el rango $21 \leq n_i \leq 136$.

Trabajamos con el estimador de máxima verosimilitud, ya que el número de muestras es mucho más grande que el número de estados. Podemos detectar diferencias de entropía de 0,01 *bits*, con una significación de $\alpha = 0,1\%$ (ver sección 5.9.1 para un análisis de significación). Además realizamos un análisis bayesiano del error de nuestras medidas, considerando las fluctuaciones debidas a muestreo finito. Con este enfoque obtenemos que el error se encuentra entre 0,005 *bits* y 0,01 *bits*, dependiendo de la magnitud de la interacción (ver sección 5.9.2).

5.8.1. Entropía y ráfagas de palabras

En primer lugar, antes de estudiar las interacciones entre palabras, analicemos la dinámica individual de la ocurrencia de palabras. Un posible interrogante en este sentido es qué tan diseminada o extendida se encuentra una palabra a lo largo del texto, y dentro del marco de la teoría de la información una medida natural de diseminación es la entropía. Un modelo nulo estándar para estudiar este tipo de comportamiento es la distribución de Poisson.

La distribución marginal $p(x_i)$ se encuentra determinada por la probabilidad p_i de encontrar la palabra en una parte, de forma que la entropía se obtiene como

$$H_i = -(1 - p_i) \log_2(1 - p_i) - p_i \log_2 p_i. \quad (5.34)$$

Si una palabra aparece n_i veces en total, asumir que su comportamiento es poissoniano implica que el número de veces k que la palabra aparece en una parte está dado por la probabilidad

$$P_i(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (5.35)$$

donde $\lambda = n_i/P$. Entonces en este caso, la probabilidad de no aparecer en una parte es $1 - \hat{p}_i = \exp(-n_i/N)$. Finalmente la entropía esperada dada la hipótesis nula es

$$H_i^{poiss} = -e^{-n_i/N} \log_2(e^{-n_i/N}) - (1 - e^{-n_i/N}) \log_2(1 - e^{-n_i/N}). \quad (5.36)$$

Por supuesto que podríamos medir y comparar con el modelo nulo, la entropía del número de veces que ocurre cada palabra en una parte en vez de la entropía de la variable binaria X_i , que sólo capta si una palabra aparece o no en una parte. Sin embargo, dadas las frecuencias totales de las palabras consideradas, estos valores de entropía son similares. Y por el otro lado, como vamos a medir interacciones de a pares

y de a tres a partir de las variables X_i , es necesario conocer los valores de tales entropías ya que representan cotas en el tamaño de las dependencias, es decir,

$$\Delta^{ij} \leq I_{ij} \leq \min\{H_i, H_j\}$$

$$D_{ijk}^{(3)} \leq \min\{H_i, H_j, H_k\}.$$
(5.37)

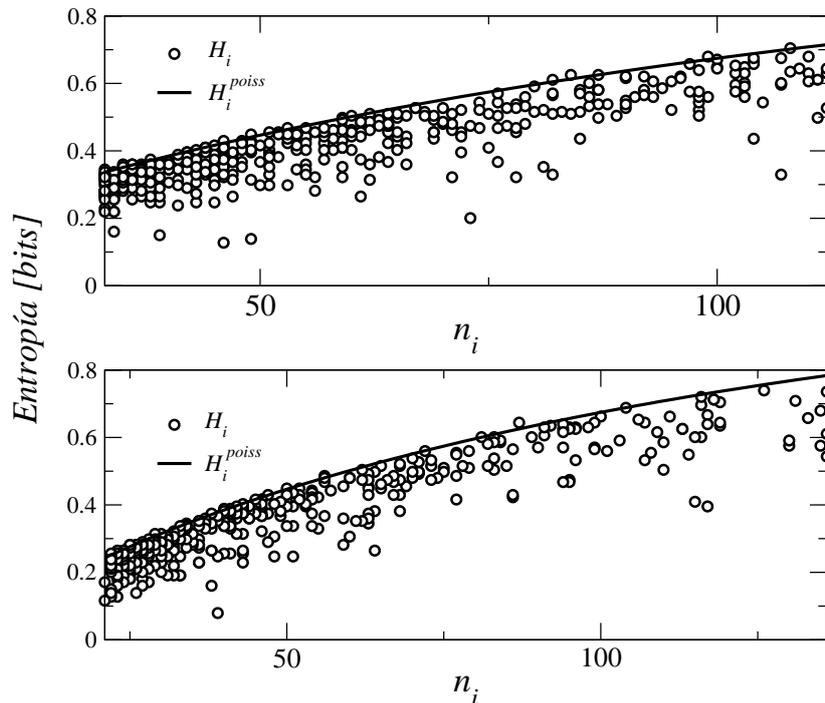


Figura 5.3: Entropía (símbolos), y entropía esperada para un comportamiento poissoniano (línea), para las diferentes palabras como función de la frecuencia total. El panel superior corresponde al libro OS, mientras que el panel inferior al libro AM.

La figura 5.3 muestra las entropías H_i y H_i^{poiss} como función de la frecuencia total n_i . Tal gráfico muestra que a pesar de que la entropía de muchas palabras se encuentra bien descrita por el modelo nulo, existen algunas palabras cuya entropía es mucho menor que la esperada entropía poissoniana. Este es un fenómeno conocido en lenguaje escrito, asociado al concepto de ráfagas, en donde ciertas palabras presentan alta frecuencia en algunas partes del libro y después no aparecen en el resto de las partes. La mayoría de estas corresponden a palabras con alto contenido semántico, en general sustantivos, cuyo significado está relacionado a las partes en las que aparecen.

La tabla 5.1 muestra la lista de palabras con valores altos en la diferencia de entropías $\Delta H_i = H_i^{poiss} - H_i$ para los dos libros analizados.

Tabla 5.1: Palabras con valores altos en la diferencia de entropías $\Delta H_i = H_i^{poiss} - H_i$, para el libro OS (izquierda) y para el libro AM (derecha). Las unidades corresponden a *bits*.

Palabra (OS)	ΔH_i	Palabra (AM)	ΔH_i
bee	0.369	proposition	0.335
cell	0.365	appearance	0.315
slave	0.302	box	0.299
stripe	0.295	datum	0.258
pollen	0.275	animal	0.240
sterility	0.266	objective	0.215
pigeon	0.252	star	0.211
fertility	0.248	content	0.206
nest	0.242	emotion	0.205
rudimentary	0.234	consciousness	0.204

5.8.2. Información triple en palabras

Para las $K = 400$ variables consideradas, hay del orden de 10^6 tripletes. De todos estos tripletes, analizamos dos tipos de subgrupos: los que están por encima del nivel de significación de aproximadamente 0,01 *bits* para la magnitud en la que estamos interesados, y una muestra aleatoria de 10^4 tripletes.

En primer lugar, la información triple, $D_{ijk}^{(3)}$, es comparada con las interacciones de a pares en el triplete, $D_{ijk}^{(2)}$, con el fin de determinar que tan importante son las interacciones de a tres para describir las dependencias entre palabras.

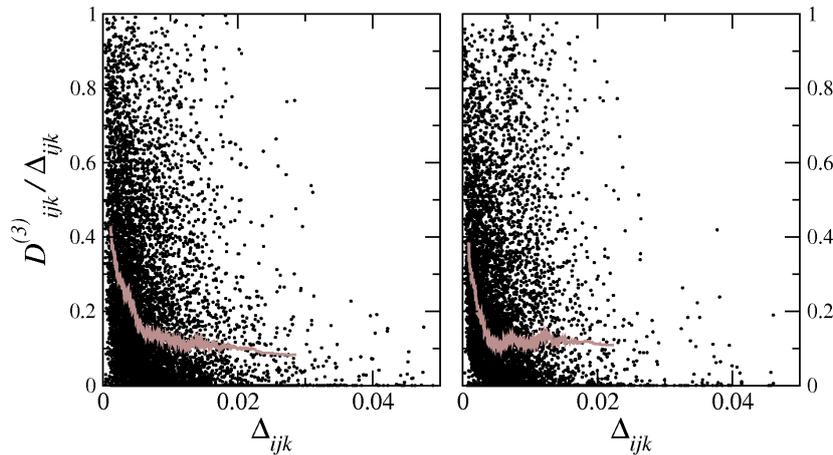


Figura 5.4: Fracción de la dependencia dentro de un triplete que corresponde a interacciones puras de a tres, $D_{ijk}^{(3)}/\Delta_{ijk}$, como función de la interacción total Δ_{ijk} , para grupos de 10^4 tripletes tomados al azar. El panel de la izquierda corresponde al libro OS, mientras que el de la derecha al libro AM. Las líneas marrones muestran las medias móviles, para 500 puntos.

La figura 5.4 muestra la fracción de la interacción que se explica por dependencias de a tres, $D_{ijk}^{(3)}/\Delta_{ijk} = 1 - D_{ijk}^{(2)}/\Delta_{ijk}$, como función de la interacción total o multiinformación Δ_{ijk} para 10^4 tripletes tomados al azar, para ambos libros. Considerando las cotas dadas por la ecuación (5.37) y las entropías de la figura 5.3, observamos que

Tabla 5.2: Palabras con alta información triple $D_{ijk}^{(3)}$. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Cuando $\theta_{123} < 0$ ($\theta_{123} > 0$) el comportamiento del triplete se asemeja al de la compuerta *XOR* (a su opuesto). Los valores están dados en *bits*.

i	j	k	$D_{ijk}^{(3)}$	I_{ijk}	$D^{(3)}/\Delta$	$\text{sgn}(\theta_{123})$
america	south	north	0.065	0.005	0.16	-1
inherit	occasional	appearance	0.040	-0.040	0.96	1
action	wide	branch	0.036	-0.036	0.93	1
europe	perhaps	chapter	0.036	-0.036	0.90	1
climate	expect	just	0.035	-0.035	0.97	1
speak	causation	appropriate	0.041	-0.041	0.93	1
sense	perception	natural	0.033	-0.033	0.90	1
since	actual	wholly	0.033	-0.033	0.90	1
wish	me	connection	0.033	-0.033	0.95	1
consist	should	life	0.033	-0.033	0.92	1

los máximos valores alcanzables para la información triple, para un triplete al azar, serían del orden de $0,2 - 0,3$ *bits*, de forma que en comparación a las dependencias observadas en la figura 5.4 no son tan pequeñas. Las medias móviles, en color marrón, muestran que para los tripletes con interacciones significativas alrededor de $10 - 20\%$ de esta se explica por dependencias puras de a tres. A pesar de que las interacciones de a tres entre palabras son más chicas que las de a pares, como es de esperarse, estas no son despreciables si tenemos la intensión de poseer una imagen clara de la estructura de dependencias.

Tal porcentaje se obtiene como cálculo del valor medio, de forma que existen tripletes para los cuales $D_{ijk}^{(3)}/\Delta_{ijk} \sim 1$. Para estos tripletes de palabras, la desviación de la aproximación independiente se asemeja al comportamiento de una *XOR* o al opuesto. Es decir, las palabras tienden a ocurrir de a dos pero no las tres juntas, o si se asemejan al comportamiento opuesto de la *XOR*, tienen a aparecer las tres juntas o solas.

La tabla 5.2 muestra las palabras con valores altos para la información triple, para los dos libros analizados. En primer lugar, hay que notar que las interacciones encontradas están bien por encima del nivel de significación de $0,01$ *bits*, de forma que no se pueden explicar a través de eventos raros de la hipótesis nula.

Mirando las tres primeras palabras de la lista, *america*, *south* y *north*, es esperable que hayan instancias del libro en las que estas palabras se usan de a dos. Es decir, podemos escribir algo sobre *south* y *north* sin involucrar a *america*, y así sucesivamente. Consideremos ahora un grupo menos intuitivo de palabras que presenten una interacción triple, como $\{\textit{since}, \textit{actual}, \textit{wholly}\}$ en el libro AM. Este triplete se comporta como el opuesto de una *XOR*¹, de forma que las palabras tienden a observarse las

¹Para ver si el comportamiento corresponde a una compuerta *XOR* o a su opuesta, basta ver el signo del coeficiente θ_{123} del desarrollo logarítmico lineal de la probabilidad $p(x_1, x_2, x_3)$ [21]. Esto a su vez es equivalente a comprobar que $\prod_{\mathbf{x}/\prod_i x_i = -1} p(\mathbf{x}) > \prod_{\mathbf{x}/\prod_i x_i = 1} p(\mathbf{x})$ para el comportamiento

tres juntas, pero no de a dos. Si comprobamos en el libro las instancias en que dichas palabras se encuentran juntas, observamos que se encuentran unidas en una estructura semántica-gramatical, donde la palabra *since* es siempre usada como una conjunción. El contexto semántico está relacionado a la representación de un objeto o evento real (*actual*), y como esta representación está parcial o totalmente (*wholly*) determinada por ciertas características. La conjunción *since* introduce la diferenciación entre la representación y el objeto real. Por supuesto, tal interacción triple es característica del estilo de escritura del autor en este libro en particular.

También se puede observar, al menos para la mayoría de los tripletes, una conexión entre la información triple y la co-información, más específicamente $D_{ijk}^{(3)} \sim -I_{ijk}$. Además, para los tripletes que cumplen esta relación, la mayor parte de la interacción —es decir, de Δ_{ijk} — es de a tres. En lo que sigue analizaremos esta relación y sus implicaciones con más profundidad.

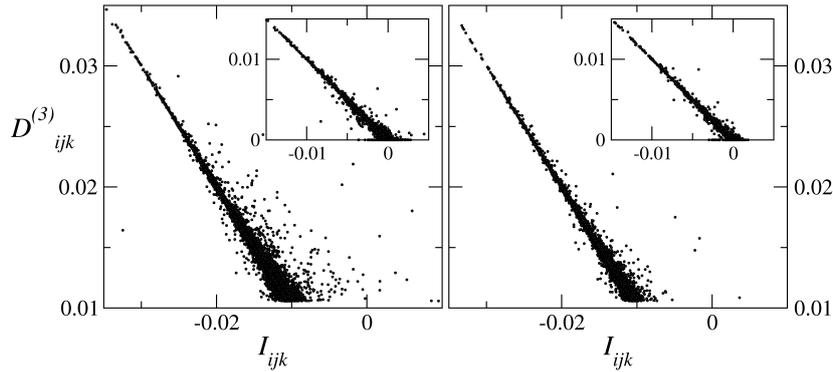


Figura 5.5: Información triple $D_{ijk}^{(3)}$ como función de la co-información I_{ijk} para todos los tripletes que cumplen $D_{ijk}^{(3)} > 0,01$. El panel de la izquierda corresponde al libro OS y el panel de la derecha al libro AM. Los recuadros interiores muestran las mismas gráficas, pero sólo para una muestra aleatoria de 10^4 tripletes (independientemente de si la información triple está por encima del umbral).

La figura 5.5 muestra la información triple $D_{ijk}^{(3)}$ como función de la co-información I_{ijk} para tripletes que se encuentran por encima del nivel de significación para ambos libros. Una clara correlación se observa entre dichas magnitudes, de forma que

$$D_{ijk}^{(3)} \sim \begin{cases} -I_{ijk} & \text{si } I_{ijk} < 0 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \quad (5.38)$$

y esta relación vale también para una muestra aleatoria (ver recuadro interior de la

tipo *XOR*, y la desigualdad inversa para el comportamiento opuesto.

figura 5.5). Recordando que

$$-I_{ijk} = H \left[\frac{p_{ij}p_{ik}p_{jk}}{p_i p_j p_k} \right] - H_{ijk} \quad (5.39)$$

$$D_{ijk}^{(3)} = H [p_{ij,ik,jk}] - H_{ijk},$$

dicha correlación nos está señalando que el modelo de máxima entropía de segundo orden, $p_{ij,ik,jk}$, se encuentra cerca de la siguiente distribución

$$p_{ij,ik,jk} \sim \frac{p_{ij}p_{ik}p_{jk}}{p_i p_j p_k}, \quad (5.40)$$

en términos similares a una divergencia de Kullback-Leibler. Si cualquiera de las informaciones mutuas se anula, por ejemplo $I_{jk} = 0$, entonces ambas probabilidades coinciden y son iguales a $p_{ij}p_{ik}/p_i$, lo que se conoce como la aproximación de pares.

Ahora si observamos la ecuación (5.21) tenemos que, para los tripletes que se encuentran cerca de la diagonal, la suma de las informaciones mutuas está cerca de las interacciones de segundo orden en el triplete, es decir, $I_{ij} + I_{ik} + I_{jk} \sim D_{ijk}^{(2)}$. Los tripletes que están por encima de la diagonal cumplen que $I_{ij} + I_{ik} + I_{jk} > D_{ijk}^{(2)}$, de forma que existe cierta redundancia en las interacciones de a dos que se detectan con la información mutua respecto de las interacciones que se detectan con $D_{ijk}^{(2)}$. Los tripletes que están debajo de la diagonal se encuentran en la situación opuesta. En los dos libros analizados encontramos que hay muy pocos tripletes que satisfacen $\sum I_{ij} - D^{(2)} < -0,01 \text{ bits}$, del orden de ~ 10 , mientras que por otro lado existen muchos tripletes redundantes, del orden de ~ 300 (es decir, aquellos que cumplen $\sum I_{ij} - D^{(2)} > 0,01 \text{ bits}$). Los tripletes que se encuentran lejos de la diagonal corresponden, en ambos casos, a aquellos que poseen un alto valor de multi-información ($\Delta \gtrsim 0,1 \text{ bits}$).

La tabla 5.3 muestra palabras con altos valores para la diferencia $I_{ij} + I_{ik} + I_{jk} - D_{ijk}^{(2)}$.

Por otro lado, esta correlación también se encuentra relacionada con la interacción irreducible entre pares de palabras. Teniendo en cuenta la ecuación (5.29), vemos que la intensidad de la interacción irreducible entre dos variables Δ^{ij} se ve disminuida a través de tripletes que están por encima de la diagonal, es decir, tripletes para los que $D_{ijk}^{(3)} > -I_{ijk}$.

Finalmente, considerando casos de mayor dimensión donde la obtención del modelo de segundo orden requiere el uso de un algoritmo iterativo, esta correlación nos indica que la co-información es buen candidato para una búsqueda inicial de interacciones triples ya que el cálculo en estos casos es más sencillo.

Concluimos que la correlación entre la información triple y la co-información, $D_{ijk}^{(3)} \sim \Theta(-I_{ijk})$, es importante no sólo por lo que implica para los tripletes que la cumplen, si no también para los tripletes que se desvían de este comportamiento.

Tabla 5.3: Palabras con redundancia en las informaciones mutuas respecto de las interacciones de pares medidas en el triplete, es decir, aquellas que poseen altos valores de $D_{ijk}^{(3)} + I_{ijk} = I_{ij} + I_{ik} + I_{jk} - D_{ijk}^{(2)}$. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Los valores están dados en *bits*.

i	j	k	$D_{ijk}^{(3)} + I_{ijk}$
bee	cell	wax	0.089
america	south	north	0.070
glacial	southern	northern	0.065
mountain	glacial	northern	0.062
male	female	sexual	0.057
leave	door	window	0.061
stimulus	response	accuracy	0.039
mnemonic	phenomena	causation	0.038
truth	false	falsehood	0.036
place	2	1	0.027

5.8.3. Interacciones de dos mediadas por una tercera palabra

Como discutimos previamente, un análisis en triplete es capaz de distinguir casos en los que la interacción observada entre dos variables se explica a través de una tercera. Dados los conceptos presentados, la interacción irreducible Δ^{ij} se compara de forma natural con la información mutua I_{ij} , teniendo en cuenta que la última siempre es una cota para la primera, es decir, $\Delta^{ij} \leq I_{ij}$.

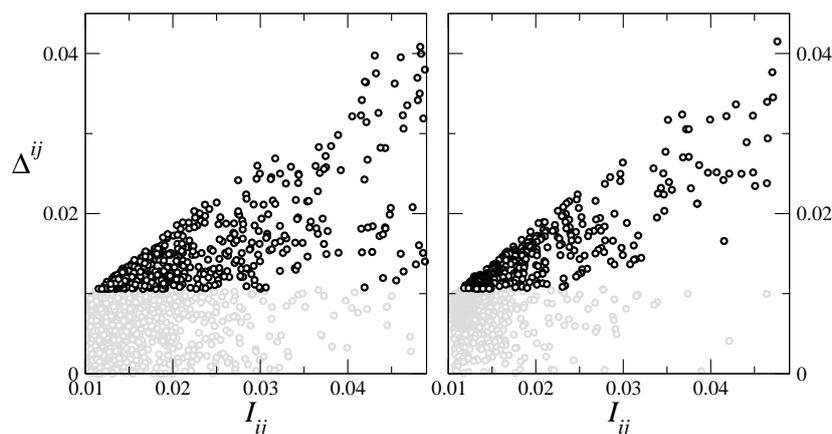


Figura 5.6: Interacción irreducible Δ^{ij} como función de la información mutua I_{ij} . El panel de la izquierda corresponde al libro OS y el panel de la derecha al libro AM. Los símbolos grises corresponden a aquellos pares cuya interacción irreducible se encuentra debajo del nivel de significación de 0,01 *bits*.

La figura 5.6 muestra la interacción irreducible Δ^{ij} como función de la información mutua I_{ij} , para ambos libros. En primer lugar, buscamos pares de palabras que presenten una información mutua que esté por encima del nivel de significación, y para esos pares le medimos su interacción irreducible. Observamos que existen muchos pares que poseen un bajo valor de la interacción irreducible, lo que implica que la dependencia

Tabla 5.4: Pares de palabras con alta interacción irreducible. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Los valores están dados en *bits*.

i	j	I_{ij}	Δ^{ij}	k_{med}
male	female	0.242	0.185	sexual
america	south	0.210	0.140	north
system	reproductive	0.152	0.125	sterility
distribution	geographical	0.097	0.078	migration
deposit	bed	0.109	0.075	accumulate
2	1	0.191	0.164	place
upon	depend	0.107	0.102	account
consciousness	conscious	0.089	0.077	introspection
truth	falsehood	0.110	0.074	false
response	accuracy	0.107	0.069	stimulus

observada en la información mutua puede ser entendida por un camino que pasa por una tercera variable X_k , tal que

$$p(x_i, x_j) \simeq \sum_{x_k} \frac{p(x_i, x_k)p(x_k, x_j)}{p(x_k)}. \quad (5.41)$$

En estas situaciones, con sólo mirar la dependencia entre $\{X_i, X_k\}$ y la de $\{X_j, X_k\}$ podríamos predecir cual es el comportamiento de $\{X_i, X_j\}$.

En principio, se puede estudiar la interacción irreducible con grupos más grandes de variables para los sets de referencia, por ejemplo cuartetos. Es decir, nos fijaríamos si la dependencia observada entre dos variables puede o no ser explicada a través de otras dos variables. En ese caso, en vez de analizar todos los posibles pares de variables, sólo debemos mirar aquellos que poseen una interacción irreducible –encontrada usando triplete– distinta de cero.

Aparte de medir interacciones de a dos que son o no mediadas por una tercera variable, identificamos cuales son estas palabras que explican interacciones entre pares de palabras. Estas palabras que actúan como mediadores no son cualesquiera sino un grupo específico. Aparte de tener un fuerte contenido semántico, estos mediadores son capaces de establecer un contexto donde otras palabras se relacionan entre sí.

La tabla 5.4 muestra pares de palabras con los más altos valores de interacción irreducible, junto a la palabra que hace de mediadora de parte de la dependencia observada por información mutua. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM.

La tabla 5.5 muestra pares de palabras, que teniendo alta información mutua, poseen baja interacción irreducible. Este es el tipo de conexiones al que hicimos referencia previamente, en el que la dependencia se explica a través de una tercera palabra.

Si buscamos cuantas conexiones hay que posean una información mutua significativa

Tabla 5.5: Pares de palabras, que teniendo alta información mutua, poseen baja interacción irreducible. La mitad superior corresponde al libro OS, mientras que la mitad inferior al libro AM. Los valores están dados en *bits*.

i	j	I_{ij}	Δ^{ij}	k_{med}
bee	wax	0.093	0.003	cell
south	north	0.071	0.001	america
continent	south	0.032	0.001	america
lay	wax	0.032	0.000	cell
southern	arctic	0.031	0.001	northern
phenomena	causation	0.042	0.004	mnemic
stimulus	accuracy	0.039	0.000	response
place	2	0.028	0.000	1
proposition	falsehood	0.024	0.002	truth
proposition	door	0.022	0.000	window

($I_{ij} > 0,01$ *bits*) pero que sean explicadas en al menos un 90 % por una tercera palabra ($\Delta^{ij}/I_{ij} < 0,1$), observamos que el libro OS tiene muchos más de este tipo de enlaces (108) que el libro AM (sólo 19). De las 108 conexiones del libro OS, hay 16 que se explican a través de la palabra *cell*, 12 a través de *america*, 8 a través de *northern*, 6 a través de *glacial*, 6 a través de *sterility*, y así sucesivamente. Se ve que, aparte de tener un contenido semántico fuerte, estas palabras son conceptos claves y relevantes en el libro de Darwin.

5.9. Significación y errores para el estudio en triplete

En esta sección mostraremos de qué manera se determinaron los niveles de significación de las medidas de dependencias y, por otra parte, cómo se obtuvieron los errores para estas mismas magnitudes.

5.9.1. Análisis de significación

Aquí, deseamos testear si la distribución de probabilidad de tres variables $p(\mathbf{x})$ se explica o no por el modelo más simple de máxima entropía $p^{(2)}(\mathbf{x})$, obtenido después de medir sólo las probabilidades marginales de a dos. Es decir, tomando el modelo de máxima entropía como hipótesis nula H_0 , y considerando como hipótesis alternativa H_1 la que posee una interacción triple, queremos ver qué tan probable es la distribución $p(\mathbf{x})$. Una forma usual en estadística de comparar dos modelos, uno de los cuales está anidado en el otro, es un test de cociente de verosimilitud.

Si tomamos N muestras, el cociente de verosimilitud λ está dado por

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N | H_1)}{P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N | H_0)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}_i)}{\prod_{i=1}^N p^{(2)}(\mathbf{x}_i)}.\end{aligned}\tag{5.42}$$

Considerando $N \rightarrow \infty$ y usando el teorema de Sanov [25], tenemos que

$$\log(\lambda) = ND[p : p^{(2)}].\tag{5.43}$$

Por otro lado, el resultado de Wilks [89] nos dice que, excepto en términos de orden $N^{-1/2}$,

$$2\log(\lambda) = \chi_d^2,\tag{5.44}$$

es decir, el logaritmo del cociente de verosimilitud tiende a una distribución chi-cuadrado, donde el número de grados de libertad d es igual a la diferencia en el número de parámetros entre ambos modelos. Juntando estos dos resultados, tenemos que bajo la hipótesis nula se cumple

$$D[p : p^{(2)}] = \frac{\chi_1^2}{2N},\tag{5.45}$$

donde la distribución chi-cuadrado tiene un grado de libertad. Tomando un nivel de significación de $\alpha = 0,1\%$ y $N = 512$, esto implica que si $D[p : p^{(2)}] \gtrsim 0,01$ *bits* tenemos que rechazar la hipótesis nula.

Un análisis similar se realiza para evaluar la significación de $D[p_{ij,ik,jk} : p_{ik,jk}]$, obteniendo el mismo resultado.

5.9.2. Estimación del error

La estimación del error de nuestras medidas se realiza a través de un enfoque bayesiano [90]. Dado que tenemos muchas más muestras que estados, los inconvenientes en la estimación de las magnitudes que nos interesan van a estar dominados por problemas de muestreo finito en las probabilidades de los diferentes estados.

Por un lado tenemos la verdadera probabilidad \mathbf{q} gobernando el resultado del experimento, cuyas coordenadas se refieren a los S posibles estados del sistema (en nuestro caso a los ocho estados para tres variables binarias). Luego tenemos la frecuencia \mathbf{f} donde f_i se obtiene al dividir el número de veces que el estado i ocurre, n_i , sobre el número total de medidas N . La probabilidad de medir \mathbf{f} dado que los datos están distribuidos

de acuerdo a \mathbf{q} es la probabilidad multinomial

$$p(\mathbf{f}|\mathbf{q}) = N! \prod_i \frac{q_i^{n_i}}{n_i!} = N! \prod_i \frac{q_i^{Nf_i}}{(Nf_i)!}. \quad (5.46)$$

Sin embargo, no tenemos conocimiento sobre \mathbf{q} sino sobre \mathbf{f} . Entonces nos podemos preguntar cuál es la probabilidad de que la verdadera distribución sea \mathbf{q} dado que medimos \mathbf{f} , es decir, la densidad de probabilidad $P(\mathbf{q}|\mathbf{f})$. A partir de la regla de Bayes,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{q}|\mathbf{f}) &= \frac{p(\mathbf{f}|\mathbf{q})P(\mathbf{q})}{p(\mathbf{f})} \\ &= \frac{\exp(-ND[\mathbf{f} : \mathbf{q}]) P(\mathbf{q})}{Z} \end{aligned} \quad (5.47)$$

donde $P(\mathbf{q})$ es la distribución de probabilidad a priori para \mathbf{q} , y Z es la normalización sobre el dominio de \mathbf{q} . Para la estimación del error, y en el límite de un número de muestras grande, el resultado no depende de la elección de la prior, como mostraremos.

Entonces si estamos interesados en medir alguna función de las probabilidades $W(\mathbf{q})$, su varianza está dada por

$$\sigma_W^2 = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2, \quad (5.48)$$

donde el promedio es sobre $P(\mathbf{q}|\mathbf{f})$. En nuestro caso, estamos interesados en la información triple $W(\mathbf{q}) = D[\mathbf{q} : \mathbf{q}^{(2)}]$, donde $\mathbf{q}^{(2)}$ es la probabilidad de máxima entropía compatible con las marginales de segundo orden.

A partir de [90] se deduce que, en el límite de $N \gg S$ y en primer orden en $1/N$,

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 &\simeq \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 \Big|_f \frac{f_i(1-f_i)}{N} - 2 \sum_i \sum_{j<i} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \Big|_f \frac{f_i f_j}{N} + O(N^{-2}) \\ &= \nabla_q W^t \cdot \Sigma \cdot \nabla_q W, \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde la matriz de covarianza de las probabilidades Σ es

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \frac{f_i(1-f_i)}{N} & \text{si } i = j \\ -\frac{f_i f_j}{N} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.50)$$

El muestreo finito afecta la varianza de las probabilidades. El resultado de la ecuación (5.49) nos indica que, para calcular la varianza σ_W^2 , sólo necesitamos la matriz de covarianza y el gradiente $W(\mathbf{q})$ evaluado en \mathbf{f} , y eso nos permite saber como la varianza

en las diferentes direcciones del simplex se transforman en varianzas en W .

Es importante observar que el error en W es del orden de $1/\sqrt{N}$, lo que significa que si queremos reducir el error a la mitad, vamos a necesitar el cuádruple de muestras.

En nuestro caso el gradiente $\nabla_q W$ es difícil de calcular analíticamente, pero podemos obtener el resultado de forma numérica a partir de la ecuación (5.49). Dadas las frecuencias \mathbf{f} , primero calculamos los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza Σ , dada por la ecuación (5.50). Esto producirá un autovector ortogonal al simplex con autovalor cero, y luego diferentes autovectores \mathbf{v}_k sobre el simplex con sus correspondientes autovalores positivos σ_k^2 , que son las varianzas en tales direcciones. Finalmente, haciendo un pequeño cambio ϵ de las frecuencias a lo largo de esas direcciones, obtenemos la variación $\Delta W_k = W(\mathbf{f} + \epsilon \mathbf{v}_k) - W(\mathbf{f})$, de forma que

$$\sigma_W^2 = (\Delta W)^2 \simeq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{S-1} \Delta W_k^2 \sigma_k^2, \quad (5.51)$$

donde cada σ_k^2 es del orden de $1/N$.

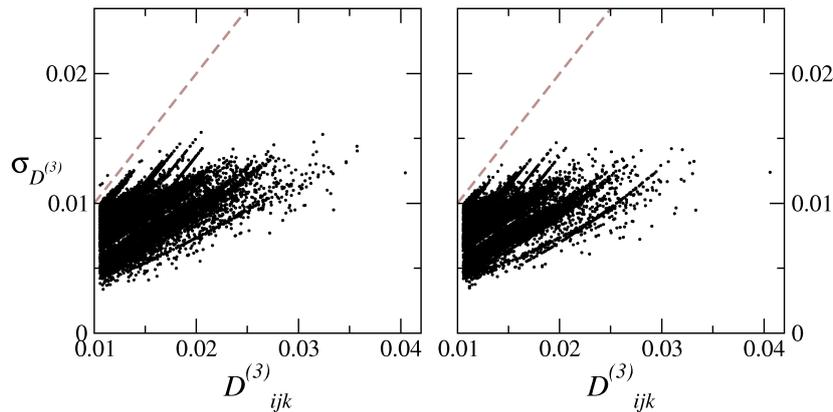


Figura 5.7: Desviación estándar de la información triple $D_{ijk}^{(3)}$ como función de $D_{ijk}^{(3)}$, para los tripletes que satisfacen $D_{ijk}^{(3)} > 0,01$ bits. El panel de la izquierda corresponde al libro OS, mientras que el panel de la derecha al libro AM. La línea discontinua corresponde a la identidad.

La figura 5.7 muestra la desviación estándar de la información triple $D_{ijk}^{(3)}$ obtenida a partir de este método como función de $D_{ijk}^{(3)}$, para tripletes que satisfacen $D_{ijk}^{(3)} > 0,01$ bits, para ambos libros. Se observa que el error se encuentra entre 0,005 bits y 0,01 bits.

5.10. Información mutua entre grupos de palabras y partes de un texto

En esta sección repasaremos de forma breve un método alternativo para estudiar dependencias entre palabras. Dicho método se encuentra basado en analizar como cambia la información mutua entre partes de un texto y pares de palabras extraídas de un

parte, en relación a la misma medida realizada en un texto mezclado. En primer lugar repasaremos resultados de trabajos previos [85] en los que estas ideas se basan. En tales trabajos, midiendo la dependencia entre partes y palabras individuales, se encontró la presencia de una escala semántica característica.

5.10.1. Dependencia entre palabras individuales y partes de un texto

Consideremos un texto de largo M dividido en P partes de tamaño $s = M/P$. Se toma una palabra de una parte al azar, y queremos evaluar si la palabra nos dice de qué parte viene, o al revés, qué palabras debemos esperar de tal parte. Tomando la variable J que hace referencia a las distintas partes, $j \in \{1, \dots, P\}$, y la variable W que representa las palabras, $w \in \{1, \dots, K\}$ (K es el tamaño del vocabulario), una forma de medir su dependencia es por medio de la información mutua

$$\begin{aligned} I(J; W) &= H(J) - H(J|W) \\ &= \sum_{w=1}^K p(w) \sum_{j=1}^P p(j|w) \log_2 \left(\frac{p(j|w)}{p(j)} \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde $p(j) = 1/P$, ya que las partes poseen el mismo tamaño. La probabilidad condicionada $p(j|w)$ se obtiene usando la regla de Bayes

$$p(j|w) = \frac{p(w|j)p(j)}{p(w)} \quad (5.53)$$

donde $p(w|j) = n_w^{(j)}/s$, siendo $n_w^{(j)}$ el número de veces que la palabra w aparece en la parte j . La normalización corresponde a

$$p(w) = \sum_{i=1}^P p(w|i)p(i) = n_w/N, \quad (5.54)$$

es decir, a la frecuencia de la palabra en todo el texto. Finalmente tenemos que

$$p(j|w) = n_w^{(j)}/n_w. \quad (5.55)$$

Entonces ya somos capaces de medir la información mutua entre palabras y partes para determinada escala s . Sin embargo, ya que queremos ver cómo la construcción de la secuencia de palabras –es decir, el texto– difiere de una mezcla aleatoria de las mismas, vamos a restarle a esta información mutua la correspondiente a un texto mezclado ($\hat{I}(J; W)$), donde el promedio está hecho sobre todas las posibles mezclas.

Entonces al medir tal diferencia $\Delta I_1(s) = I(J; W) - \langle \hat{I}(J; W) \rangle$, estamos tomando como referencia una versión mezclada del texto donde aún existe información debido a las fluctuaciones en la distribución de las palabras.

La cantidad $\Delta I_1(s)$ se separa de forma natural en las contribuciones de las diferentes palabras como $\Delta I_1(s) = \sum_w \Delta I_{\{w\}}(s)$. Cada término, para una escala y una palabra específica, puede ser tanto positivo si la palabra presenta mayor heterogeneidad que en el texto mezclado, como también negativo si tiene más homogeneidad. Otra posible forma para esta expresión es

$$\Delta I_1(s) = \sum_{w=1}^K p(w) \left(\langle \hat{H}(J|w) \rangle - H(J|w) \right), \quad (5.56)$$

donde la entropía de las partes para una palabra dada w es

$$H(J|w) = - \sum_{j=1}^P p(j|w) \log_2(p(j|w)). \quad (5.57)$$

El cálculo de entropía para el texto mezclado $\langle \hat{H}(J|w) \rangle$ se encuentra en el apéndice A.

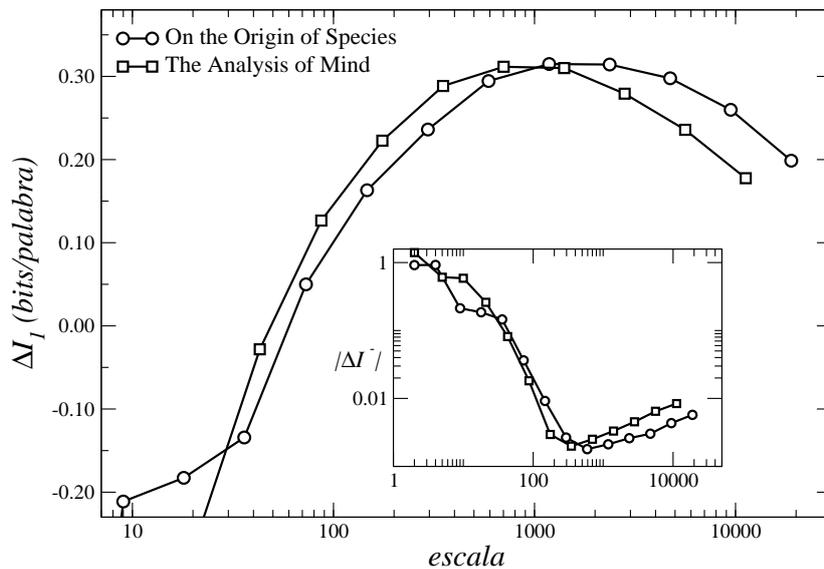


Figura 5.8: Diferencia de información mutua entre partes y palabras como función de la escala s . El recuadro interior muestra un gráfico logarítmico del valor absoluto de la componente negativa de $\Delta I_1(s)$.

La figura 5.8 muestra la diferencia de información mutua para los dos libros considerados como función de la escala s . Las curvas presentan un máximo alrededor de $s \sim 1000$, escala relacionada con la estructura semántica del texto, y se vuelven negativas cerca de $s \sim 50$. El máximo se explica suponiendo que existen palabras cuyas distribución se encuentra concentrada en bloques de tamaño $\sim 10^3$. Entonces el significado que se le asigna a esta escala corresponde al largo en palabras en el que el autor

del libro tiende a escribir sobre un mismo tema en promedio [85].

Además, se puede comprobar que las palabras que más contribuyen al máximo son en su gran mayoría palabras de alto contenido semántico en el libro. Sin entrar demasiado en detalles, pasaremos a la generalización considerada en este trabajo.

5.10.2. Dependencia entre pares de palabras y partes de un texto

En vez de tomar una palabra de una parte del texto, podemos tomar dos palabras y realizar las mismas preguntas que antes, respecto de cuánta información nos dan estas palabras acerca de la parte que fueron extraídas. Por supuesto que vamos a considerar tales interrogantes siempre en relación a la versión mezclada del texto. Vamos a ver que haciendo esto podemos encontrar conexiones entre palabras cuyas distribuciones se relacionan de una forma específica.

Las definiciones analíticas son similares a las del caso anterior. La diferencia de información mutua corresponde a

$$\begin{aligned}\Delta I_2(s) &= \sum_{v,w=1}^K \Delta I_{\{v,w\}}(s) \\ &= \sum_{v,w=1}^K p(\{v,w\}) \left[\langle \hat{H}(J|\{v,w\}) \rangle - H(J|\{v,w\}) \right]\end{aligned}\tag{5.58}$$

donde el par $\{v,w\}$ identifica las dos palabras. La entropía de las partes para un par dado $\{v,w\}$ es

$$H(J|\{v,w\}) = - \sum_{j=1}^P p(j|\{v,w\}) \log_2(p(j|\{v,w\})),\tag{5.59}$$

donde al igual que antes podemos usar la regla de Bayes para calcular $p(j|\{v,w\})$,

$$p(j|\{v,w\}) = \frac{p(\{v,w\}|j)p(j)}{\sum_i p(\{v,w\}|i)p(i)}.\tag{5.60}$$

Para calcular la probabilidad de extraer el par $\{v,w\}$ de la parte j consideramos que

lo hacemos sin reemplazo, de forma que

$$p(\{v, w\}|j) = \begin{cases} \frac{2n_v^{(j)}n_w^{(j)}}{s(s-1)} & \text{si } v \neq w \\ \frac{n_v^{(j)}(n_v^{(j)}-1)}{s(s-1)} & \text{si no.} \end{cases} \quad (5.61)$$

En el caso en que las palabras son diferentes, combinando las ecuaciones (5.60) y (5.61) obtenemos

$$p(j|\{v, w\}) = \frac{n_v^{(j)}n_w^{(j)}}{\sum_{i=1}^P n_v^{(i)}n_w^{(i)}}. \quad (5.62)$$

Observamos que la probabilidad $p(j|\{v, w\})$ usada en la entropía es proporcional al producto de las ocurrencias de ambas palabras, de forma que va a ser diferente de cero sólo cuando ambas palabras aparezcan en la parte j . Esto significa, considerando las ecuaciones (5.58) y (5.59), que si las palabras están distribuidas de forma homogénea en m partes donde ambas aparecen, la entropía de las partes dado el par será $H(J|\{v, w\}) \sim \log_2(m)$. Entonces básicamente, $\Delta I_{\{v, w\}}(s)$ está midiendo si las palabras ocurren juntas en más o menos partes que en un texto mezclado, pesando dicha magnitud con la frecuencia del par $\{v, w\}$. La entropía del texto mezclado $\langle \hat{H}(J|\{v, w\}) \rangle$ se calcula de forma similar al caso anterior (ver apéndice A). La probabilidad marginal del par, si tomamos las palabras sin reemplazo, es

$$p(\{v, w\}) = \frac{2}{N(s-1)} \sum_{i=1}^P n_v^{(i)}n_w^{(i)}. \quad (5.63)$$

Aquí consideramos sólo pares con palabras diferentes, habiendo comprobado que la componente de ΔI_2 para pares con la misma palabra representa menos del 1% de tal magnitud.

La figura 5.9 muestra la información codificada entre partes y pares de palabras $\Delta I_2(s)$ como función de la escala, para los dos libros OS y AM. Notamos que las curvas tienen una forma similar a las de $\Delta I_1(s)$, ya que presentan un máximo cerca de $s \sim 1000$ y se hacen negativas para $s \sim 50$ ². Dicha similitud no es casualidad, y está asociada a pares de palabras compuestos por una palabra muy frecuente y otra que aporta de forma significativa a $\Delta I_1(s)$ (es decir, que tiene un valor alto de $\Delta I_w(s)$). Haciendo un análisis cuidadoso [91], se puede ver que la componente negativa de ΔI_2 para $s \sim 100$ no está dominada por este efecto, si no que los pares de palabras que

²Como diferencia, en relación con las curvas de $\Delta I_1(s)$, hay que notar que en este caso las informaciones son más grande, lo que es esperable ya que dichas magnitudes son en relación a pares de símbolos. Es decir, tomar más símbolos hace más fácil identificar la parte de la que provienen.

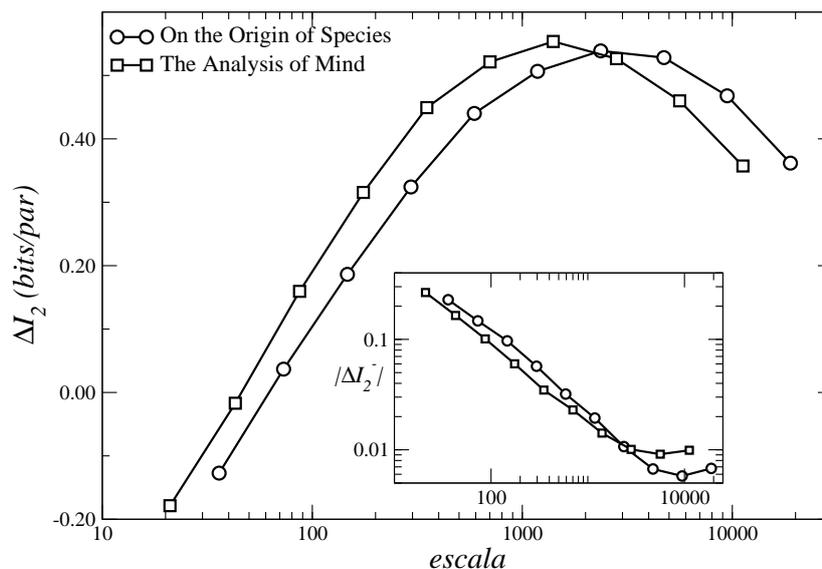


Figura 5.9: Diferencia de información mutua entre partes y pares de palabras como función de la escala s . El recuadro interior muestra un gráfico logarítmico del valor absoluto de la componente negativa de $\Delta I_2(s)$.

Tabla 5.6: Conexiones obtenidas a partir de la componente negativa de la diferencia de información entre partes y pares de palabras, ΔI_2^- , para escalas $s = 175$ y $s = 147$ para los libros AM y OS, respectivamente.

Libro <i>The Analysis of Mind</i>	Libro <i>On the Origin of Species</i>
door - window	selection - natural
more - than	organic - beings
plato - socrates	pollen - flower
left - window	and - but
door - left	water - fresh

aportan a esta componente son palabras semánticamente conectadas.

La tabla 5.6 muestra tales pares de palabras, es decir, aquellos que más aportan a la componente negativa de ΔI_2 para $s \sim 100$. Se observan enlaces que ocurren porque las palabras se usan juntas, y otros porque dichas palabras comparten el mismo contexto semántico.

Para esta escala el texto está dividido en $P \sim 10^3$ partes, de forma que estas palabras, que poseen una frecuencia $n_w \lesssim 10^2$, están ausentes de la mayoría de las partes. Así las palabras aparecen juntas en más partes de las que aparecerían en una mezcla del texto. Y naturalmente, el hecho de que el par se encuentre en más partes es equivalente a poseer menos información acerca de la parte de la que proviene, lo que hace que $\Delta I_{v,w}(s) < 0$.

Un inconveniente de este enfoque, en especial si tratamos de determinar interacciones de mayor orden, es que existe un efecto heredado del análisis de órdenes menores, que de alguna manera es necesario filtrar para ver las dependencias propias del orden mayor. El primer método estudiado en este capítulo no posee este problema, aunque sin

embargo utiliza las partes como muestras, es decir, de alguna forma ignora las dependencias a partir de cierto tamaño. En este enfoque, por otro lado, se hace hincapié en la distribución global de las palabras a lo largo del texto. Otra desventaja que tiene este último método respecto del primero, es la falta de un análisis de significación de las medidas obtenidas. Creemos que dicho análisis debería pasar por calcular o simular los percentiles de la distribución de entropías del texto mezclado, tanto para valores positivos como negativos de la diferencia de información mutua.

Este último método está diseñado para secuencias unidimensionales de símbolos, y no hay una clara generalización para secuencias múltiples, por ejemplo registros temporales de disparos de varias neuronas. Una posible forma de implementarlo sería, previa discretización de los datos, considerar como nuevas palabras a las combinaciones de símbolos de las distintas secuencias, es decir, pasar de palabras a vectores de palabras. Sin embargo, esto naturalmente hace que la probabilidad de que determinado vector se repita disminuya drásticamente a medida que el número de secuencias aumenta, por lo que habría que elegir cuidadosamente la forma en que se definen las palabras. En particular, creemos que el método se podrá aplicar en el régimen donde aún se observan distribuciones de probabilidad de las palabras asimétricas, por ejemplo leyes de potencia tipo Zipf.

5.11. Discusión

En este capítulo estudiamos dos métodos para detectar interacciones. El primero, en el que nos focalizamos, se basa en el estudio en triplete de variables, mientras que el último en la dependencia entre partes de una secuencia de símbolos y la ocurrencia de los diferentes símbolos. Ambos métodos se consideraron para el ejemplo particular de lenguaje escrito.

El análisis de tripletes nos permite lograr dos objetivos. En primer lugar, podemos detectar dependencias puras de a tres que no podríamos ser capaces de detectar mirando las variables de a dos. Por otro lado, podemos comprobar si las interacciones de a dos se explican a través de una tercera variable. Es más, poseemos una nueva caracterización para variables que son mediadores comunes entre pares, es decir, variables que explican otras dependencias. En el caso de lenguaje, nos permite encontrar palabras que cumplen el rol de constructoras de contexto, ya que a través de las mismas, otras palabras se relacionan.

En el marco de este primer método, el análisis fue realizado usando variables binarias, es decir, variables que sólo pueden tomar dos estados, que en el caso del lenguaje se refieren a la ocurrencia de palabras en partes del libro. A pesar que se puede argumentar que haciendo esto se pierden detalles de la dependencia entre palabras, estamos ganando mucho en la simplificación de las medidas y de los estimadores, especialmente

si consideramos que el número de tripletes crece como la potencia cúbica del tamaño del sistema.

Otra importante ventaja de trabajar con variables binarias es que la interpretación conceptual de una interacción triple permanece clara y sencilla. Las variables que presentan una interacción triple se desvían del modelo de máxima entropía de segundo orden, que es el que se obtiene de las marginales de a dos, asemejándose al comportamiento de una compuerta *XOR* o a su opuesto. Refiriéndonos al ejemplo de las palabras, en el primer caso cuando se comportan como una *XOR*, estas tienden a aparecer de a dos pero no las tres juntas. En el segundo caso, las palabras tienden a ocurrir solas o las tres juntas.

Encontramos que entre el 10 % y 20 % de la interacción en grupos de tres palabras es pura de a tres. Esto nos indica que, a pesar de que las dependencias de a tres son más débiles que las de a pares, estas no son despreciables a la hora de entender la estructura de interacciones. En particular, creemos que para lenguaje escrito tales interacciones triples se deben principalmente a la marginalización sobre temas o variables latentes en el libro.

Mostramos que existe una correlación entre la información triple y la co-información entre palabras, de forma que el valor de la información triple se encuentra cercano a menos la co-información cuando esta última es negativa. Creemos que tal relación es más general, y está asociada al hecho de que el modelo de máxima entropía de segundo orden se aproxima bien en muchas situaciones por la probabilidad dada por la ecuación (5.40). Esta correlación también implica que, si trabajamos con variables de mayor dimensión, la co-información es una candidata para una búsqueda inicial de interacciones triples ya que su cálculo es más simple que el de la información triple en estos casos. Por otro lado, los tripletes que se apartan de esta relación son relevantes en el sentido que son aquellos que desambiguan interacciones de a dos que se explican por una tercera variable.

Como mencionamos en las secciones previas, estos conceptos se pueden generalizar. Interacciones puras de a cuatro y otras de mayor orden se definen de manera análoga. También la desambiguación de interacciones se puede hacer usando sets de referencia de mayor tamaño, en vez de tripletes. Otro punto relevante sería considerar dependencia temporal, por ejemplo, mirando la ocurrencia de palabras en una parte condicionada a la ocurrencia en partes previas. Naturalmente, todas estas propuestas están limitadas por la cantidad de muestras que tengamos para realizar las correspondientes estimaciones.

Como método alternativo para detectar interacciones entre palabras, presentamos un análisis basado en la dependencia entre símbolos de una secuencia y partes de dicha secuencia. Si bien dicho método permite encontrar interacciones entre los símbolos, presenta el inconveniente de que se hace necesario separar efectos de órdenes inferiores

en las dependencias. Aún así, encarando tales problemas cuidadosamente, se pueden encontrar relaciones desde una perspectiva diferente que principalmente se refiere a la capacidad de los símbolos para identificar una parte de la secuencia.

Con los métodos presentados, por ejemplo a partir de una lista de interacciones irreducibles de a dos que superen determinado umbral, es posible construir un red conectando con enlaces las palabras que cumplan dicha condición. En este sentido, un camino que se puede explorar es el análisis de tal red de dependencias. Se debe prestar una especial atención al estudio de comunidades en la red y su relación con las variables latentes. Otro punto a analizar en esta dirección es cómo cambia el patrón de interacciones para las distintas escalas temporales –en este caso, si se varía el tamaño de las partes– ya que es plausible que las dependencias mediadas por variables latentes presenten una escala temporal diferente a aquella de las dependencias directas. En particular en el lenguaje, esperamos que las conexiones semánticas tengan un mayor alcance que las gramaticales, por lo que un estudio *spectral* puede ayudar a diferenciarlas.

Como ya mencionamos, creemos que otros tipos de datos se adaptan a este estudio de dependencias. Uno de estos es el análisis de registros de disparos de neuronas, donde se originaron gran parte de estas ideas, pero otras áreas como la climatología o comportamiento social son también buenos candidatos. En estos campos es usual considerar estados binarios, tal como la temperatura abajo o encima de la media histórica o la opinión de las personas acerca de determinado tema. Sería interesante ver si, por ejemplo, se puede encontrar un comportamiento tipo *XOR* en esta clase de datos, y a qué se relaciona.

Una conclusión que podemos extraer en conexión con lo realizado en capítulos anteriores es que no siempre va a ser necesario hacer un análisis de como las interacciones de mayor orden afectan el comportamiento del sistema en conjunto, o al menos no considerando todos los agentes del sistema. Pensemos que pueden llegar a existir agentes cuya dinámica esta totalmente determinada por su comportamiento individual, por ejemplo desaparecen muy rápido y no llegan a interactuar con otros agentes. En el lenguaje, este caso hace referencia a palabras que sólo aparecen un par de veces en todo el libro, de forma que no podemos decir nada de sus dependencias. Entonces para que sean relevantes las interacciones –de a pares o de mayor orden– los comportamientos individuales de los agentes no lo deben ser, o deben presentar variaciones en una escala temporal mucho más grande.

Capítulo 6

Conclusiones

“Science is like a blabbermouth who ruins the movie by telling you how it ends. Well, I say there are some things we don’t want to know. Important things.”

— Ned Flanders

A lo largo de esta tesis, nos hemos preguntado en repetidas ocasiones qué propiedades microscópicas determinan el comportamiento global de un sistema, y hemos obtenido respuestas altamente dependientes del contexto analizado. En algunos casos, el factor determinante se encuentra asociado al patrón de interacciones —ya sea el tamaño del grupo de interacción, o bien la localización de la misma, o la interacción en tripletes— y en otros casos, el comportamiento colectivo depende fuertemente de los parámetros dinámicos, tales como la asimetría entre las ganancias o recursos, el nivel de ruido, la incertidumbre, entre otros.

En cuanto a las interacciones múltiples, hay dos aspectos que queremos destacar. El primero se refiere a la presencia de este tipo de dependencias tanto en la medición del estado de diferentes sistemas, como en su correspondiente modelado. Si creemos que nuestro sistema puede estar influenciado por variables ocultas, es entonces esperable que aparezcan interacciones múltiples y, si modelamos dicho sistema, entonces debemos comprobar su estabilidad estructural respecto de perturbaciones que incluyen tales interacciones. El segundo aspecto corresponde a la relevancia de las dependencias múltiples para describir determinado comportamiento. Para que sean relevantes en cuanto a la descripción de cierto fenómeno, es necesario comprobar que tal fenómeno no está completamente determinado por la dinámica individual de los agentes ni por sus interacciones de a pares, ya que en ese caso un modelo que no incluya las interacciones múltiples —y por ende, más simple— es preferible.

A continuación presentamos un repaso de las conclusiones individuales por capítulo, y finalmente una breve reseña de posibles extensiones de algunos de los resultados obtenidos.

6.1. Sumario de resultados

En el capítulo 2 estudiamos un juego evolutivo de dos estrategias, donde la población se encuentra distribuida en el espacio. El interrogante fundamental planteado en este caso hace referencia al efecto del tamaño del vecindario de interacción en el estado asintótico de toda la población. Así, se observó que si se pasa de un grupo de interacción grande a uno pequeño, el estado colectivo pasa de uno en el que las estrategias coexisten, de forma que se fomenta la diversidad, a un estado homogéneo donde todos los agentes tienen la misma estrategia. Variando de forma continua el tamaño del grupo de interacción o vecindario, se comprobó que se produce una transición que pertenece a la clase de percolación dirigida. También se estudió como depende dicha transición de otros parámetros dinámicos, obteniendo que el establecimiento del estado homogéneo se favorece con una mayor disparidad en las ganancias y con menos ruido. De esta manera, establecimos que el tamaño del grupo de interacción es un factor determinante al momento de entender el estado asintótico del sistema. Sin embargo, no hay que perder de vista la relación de tal parámetro con otras variables del sistema —el grado de localización de los vecindarios, la asimetría de las ganancias y el ruido— al abordar este tipo de problemática.

A continuación, en el capítulo 3, estudiamos un juego cíclico de tres estrategias. La pregunta central en este capítulo fue cómo se ve afectada la dinámica de la población si se consideran interacciones múltiples, es decir, no sólo de a pares. De esta forma, introduciendo interacciones básicas que ocurren en tripletes, donde permitimos que dos agentes débiles le hagan frente a un agente fuerte, observamos que el sistema pasa de tener oscilaciones globales a la extinción de dos de las estrategias. Así, en el sistema sólo sobrevive una estrategia. Estudiando las probabilidades de supervivencia en función de los parámetros de cooperación, se comprobó sorprendentemente que la cooperación sólo beneficia a la estrategia que la adopta cuando supera cierto umbral. Respecto de las interacciones múltiples, concluimos que es un buen procedimiento estudiar que tan robusto es el comportamiento de un sistema respecto de perturbaciones que incluyan este tipo de interacciones, en especial en sistemas donde las dependencias de a pares presentan ciertas simetrías con el caso estudiado. Por otra parte, teniendo en cuenta la discusión respecto de la generación de interacciones múltiples al marginalizar variables latentes (en capítulo 5), creemos que tales perturbaciones no son sólo probables sino usuales.

En el capítulo 4 estudiamos un problema de asignación de recursos —el juego del Coronel Blotto— en un marco evolutivo, y nos preguntamos cómo cierto grado de incertidumbre en los recursos de los agentes con los que se compete afecta la distribución asintótica de estrategias de la población. En el juego del Coronel Blotto, dos jugadores distribuyen sus recursos en una serie de ítems, de forma que el jugador que más re-

curso asigna por un ítem se lo queda. La introducción de una versión evolutiva de tal problema es un ingrediente novedoso y se basa, al igual que la evolución biológica, en la combinación de imitación y variación por fluctuaciones. Al mismo tiempo que estudiamos la versión evolutiva del problema en una población, consideramos bajo el marco tradicional —mediante la maximización de ganancias— un modelo reducido. A través de ambos enfoques, obtuvimos tres tipos de equilibrios que, como rasgo sobresaliente, dan lugar a una separación en dos del rango de recursos a asignar u ofertar. Así, las distintas estrategias favorecen formas dispares en la asignación de recursos: utilizan todo el rango, o sólo hacen ofertas bajas, o sólo hacen ofertas altas. Como ventaja, el marco evolutivo nos permitió identificar cual solución se adopta en las zonas del espacio de parámetros donde existen varias soluciones analíticas. Analizando diversas características, como el nivel de ruido o cambios en el patrón de interacciones, obtuvimos que la relación de recursos y la probabilidad de enfrentar a un oponente con diferente cantidad de recursos —es decir, el factor de incertidumbre— son los parámetros relevantes que determinan el estado asintótico de la población.

En el capítulo 5 nos planteamos cómo encontrar relaciones entre los elementos de un sistema a partir de determinado estado global del mismo, es decir, un interrogante inverso al considerado en los capítulos anteriores. En particular, tomando como ejemplo el lenguaje escrito, nos preguntamos por las dependencias entre palabras dada la distribución que poseen a lo largo de un libro. Con tal fin, se propusieron dos metodologías, ambas enmarcadas en teoría de la información. La primera, en la que nos focalizamos, considera diferentes partes del libro como muestras de una distribución conjunta para la ocurrencia de palabras. Así, este método encuentra interacciones entre las palabras a partir de un estudio en tripletes de variables con técnicas de máxima entropía. Analizando tríos de variables, somos capaces de no sólo encontrar dependencias puras de a tres, sino también detectar interacciones de a pares que se explican a través de una tercera variable, como en una cadena de Markov. Mostramos que las interacciones de a tres para variables binarias se asemejan en su comportamiento al de una compuerta *XOR* o a su opuesto. Además se analizó de forma preliminar el efecto de marginalizar sobre variables latentes, indicando que así se pueden inducir interacciones efectivas de mayor orden, incluso en sistemas cuyos elementos presenten sólo interacciones de a pares. El segundo método, que repasamos brevemente, estudia la dependencia entre partes de una secuencia —consideradas como variables— y los símbolos que componen dicha secuencia, es decir, mide la capacidad que tienen los símbolos para apuntar a la parte de la que provienen. Cuando los símbolos son pares de palabras, dicho estudio permite encontrar relaciones entre palabras que tienden a aparecer juntas o no, en diferentes escalas.

6.2. Extensiones

En relación a los resultados del capítulo 3, creemos que vale la pena estudiar en más profundidad el tema de extinciones de especies en modelos cuyo sistema de campo medio presente un ciclo heteroclínico estable. Para modelos con simetría o ciertas restricciones, la aparición de tal ciclo heteroclínico es un comportamiento robusto [92]. El estudio realizado en dicho capítulo provee una conexión analítica entre el fenómeno de extinción y las reglas dinámicas entre agentes, más allá de las condiciones iniciales. De particular interés, son los modelos de poblaciones biológicas cuyo sistema de campo medio se encuentra cerca de la estabilización de un ciclo heteroclínico, ya que sería posible decir —en el sentido probabilístico— cual de las poblaciones puede desaparecer.

Dados los resultados que se obtuvieron en la dinámica de asignación de recursos, presentada en el capítulo 4, un aspecto a explorar es cómo se modifican los equilibrios cuando existe mayor incertidumbre respecto de los recursos del oponente. Como vimos, este es un factor determinante que cambia de forma sustancial las soluciones obtenidas. Así, podemos plantear el problema de un jugador con altos recursos que se enfrenta con uno de menores recursos, tal que la cantidad total de estos no es conocida. Dicha situación se puede modelar por medio de una distribución de probabilidad para la cantidad total de recursos del jugador débil. En el ámbito económico, por ejemplo en licitaciones, tal modelo representaría un escenario cercano al monopolio donde una empresa grande se enfrenta eventualmente con una entre muchas empresas pequeñas.

Respecto del análisis del patrón de interacciones con métodos de máxima entropía, aplicado a lenguaje escrito en el capítulo 5, vimos que un punto interesante a examinar es la relación entre el estudio de comunidades de la red resultante y el efecto de las variables latentes o temas. En el caso de lenguaje escrito, también se propone analizar las dependencias en diferentes escalas —cambiando el tamaño de las partes— con el fin de distinguir conexiones semánticas de aquellas que son gramaticales. Tal estudio puede ser relevantes en otros campos si lo que se pretende es diferenciar enlaces directos de aquellos mediados por variables latentes.

Apéndice A

Entropías promedio de secuencias mezcladas

“Since the beginning of time, man has yearned to destroy the sun.”

— Charles Montgomery Burns

La entropía media para las partes dada una palabra $\langle \hat{H}(J|w) \rangle$ es el promedio de la entropía de una secuencia mezclada, sobre todas las mezclas. Es posible obtener una fórmula analítica relativamente simple en este caso [85]. Recordando las ecuaciones (5.55) y (5.57), podemos expresar la entropía de la mezcla como

$$\hat{H}(J|w) = - \sum_{j=1}^P \frac{m_j}{n_w} \log_2 \left(\frac{m_j}{n_w} \right) \quad (\text{A.1})$$

donde m_j es el número de veces que la palabra w aparece en la parte j en la mezcla y n_w es la frecuencia total. Tomando el promedio sobre todas las posibles mezclas,

$$\langle \hat{H}(J|w) \rangle = - \sum_{m_1 + \dots + m_P = n_w, m_j \leq M/P} p(m_1, \dots, m_P) \sum_{j=1}^P \frac{m_j}{n_w} \log_2 \left(\frac{m_j}{n_w} \right) \quad (\text{A.2})$$

Marginalizando en cada término de la suma interior, esta ecuación se reduce a

$$\langle \hat{H}(J|w) \rangle = -P \sum_{m=1}^{\min\{n_w, M/P\}} p(m) \frac{m}{n_w} \log_2 \left(\frac{m}{n_w} \right) \quad (\text{A.3})$$

donde $p(m)$ es la probabilidad marginal de encontrar m instancias de la palabra w en

una parte y $M/P - m$ instancias de palabras que no son w ,

$$p(m) = \frac{\binom{n_w}{m} \binom{M - n_w}{M/P - m}}{\binom{M}{M/P}}. \quad (\text{A.4})$$

Si el tamaño del texto M y el número de partes P están fijos, $\langle \hat{H}(J|w) \rangle$ es sólo función de n_w . Para $n_w \gg P$, las palabras se encuentran distribuidas de forma homogénea en las partes, de forma que $\langle \hat{p}(j|w) \rangle \approx 1/P$, y la entropía corresponde a

$$\langle \hat{H}(J|w) \rangle \simeq \log_2(P). \quad (\text{A.5})$$

Por otra lado, para $n_w \ll P$ sólo hay algunas partes que poseen una instancia de la palabra, de forma que para esas partes $\langle \hat{p}(j|w) \rangle = 1/n_w$ y

$$\langle \hat{H}(J|w) \rangle \simeq \log_2(n_w). \quad (\text{A.6})$$

La fórmula analítica para la entropía de las partes dadas dos palabras $\langle \hat{H}(J|\{v, w\}) \rangle$ es mucho más complicada, y no es posible hacer la marginalización. Recordando las ecuaciones (5.59) y (5.62),

$$\hat{H}(J|\{v, w\}) = - \sum_{j=1}^P \frac{m_v^{(j)} m_w^{(j)}}{\sum_i m_v^{(i)} m_w^{(i)}} \log_2 \left[\frac{m_v^{(j)} m_w^{(j)}}{\sum_i m_v^{(i)} m_w^{(i)}} \right], \quad (\text{A.7})$$

donde $m_v^{(j)}$ y $m_w^{(j)}$ son las frecuencias de las palabras en las diferentes partes del texto mezclado.

La fórmula analítica para el promedio es poco práctica ya que involucra a la probabilidad conjunta $p(m_v^{(1)}, \dots, m_v^{(P)}, m_w^{(1)}, \dots, m_w^{(P)})$. Sin embargo, el promedio se puede estimar numéricamente realizando mezclas de una secuencia compuesta por n_v símbolos de un tipo, n_w símbolos de otro tipo y $M - n_v - n_w$ símbolos de un tercer tipo. Incluso, esta estimación se puede simplificar considerando partes de un tamaño específico, por ejemplo $s_0 \sim 20$. Si fueran necesarios tamaños más grandes para las partes, eso significaría que $n_v \gg P$ y la distribución para tal palabra se puede considerar como uniforme en las partes, dada la distribución aleatoria realizada. Entonces para estos casos, podemos considerar $m_v^{(j)} \simeq n_v P^{-1}$, de forma que se comprueba que

$$\langle \hat{H}(J|\{v, w\}) \rangle \simeq \langle \hat{H}(J|w) \rangle. \quad (\text{A.8})$$

De esta manera podemos considerar sólo $s_0 P - n_v - n_w$ símbolos del tercer tipo. Para

un valor fijo de P , $\langle \hat{H}(J|\{v, w\}) \rangle$ es sólo función de n_v y n_w , y podemos almacenar los valores de dicha función en tablas. Comprobamos que una correcta estimación se obtiene utilizando $s_0 = 32$ y tomando 500 mezclas, con errores por debajo del 1%.

Bibliografía

- [1] Bailey, N. T. J. The mathematical theory of infectious diseases and its applications. Charles Griffin & Company, 1975. 2
- [2] Anderson, R. M., May, R. M. Infectious diseases of humans, tomo 1. Oxford University Press, 1991. 2
- [3] Broadbent, S. R., Hammersley, J. M. Percolation processes. En: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, tomo 53, págs. 629–641. Cambridge University Press, 1957. 2
- [4] Newman, M. E. Spread of epidemic disease on networks. *Physical review E*, **66** (1), 016128, 2002. 2
- [5] Kuramoto, Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. En: International symposium on mathematical problems in theoretical physics, págs. 420–422. Springer, 1975. 2
- [6] Strogatz, S. H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **143** (1), 1–20, 2000. 2
- [7] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., Zhou, C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, **469** (3), 93–153, 2008. 2
- [8] Murray, J. D. Mathematical Biology I: An Introduction, 2002. 2
- [9] Smith, J. M. Evolution and the Theory of Games. Cambridge University Press, 1982. 2, 8, 9, 20, 40
- [10] Hofbauer, J., Sigmund, K. Evolutionary games and population dynamics. Cambridge University Press, 1998. 2, 8, 9, 20, 28, 31, 40, 47
- [11] Szabó, G., Fath, G. Evolutionary games on graphs. *Physics Reports*, **446** (4), 97–216, 2007. 2, 8

- [12] Roca, C. P., Cuesta, J. A., Sánchez, A. Evolutionary game theory: Temporal and spatial effects beyond replicator dynamics. *Physics of Life Reviews*, **6** (4), 208–249, 2009. 2, 8
- [13] Friedman, N. Inferring cellular networks using probabilistic graphical models. *Science*, **303** (5659), 799–805, 2004. 3, 61
- [14] Margolin, A. A., Nemenman, I., Basso, K., Wiggins, C., Stolovitzky, G., Favera, R. D., *et al.* ARACNE: an algorithm for the reconstruction of gene regulatory networks in a mammalian cellular context. *BMC bioinformatics*, **7** (Suppl 1), S7, 2006. 3
- [15] Martignon, L., Deco, G., Laskey, K., Diamond, M., Freiwald, W., Vaadia, E. Neural coding: higher-order temporal patterns in the neurostatistics of cell assemblies. *Neural Computation*, **12** (11), 2621–2653, 2000. 3, 60, 61, 63, 67
- [16] Schneidman, E., Still, S., Berry, M. J., Bialek, W., *et al.* Network information and connected correlations. *Physical Review Letters*, **91** (23), 238701, 2003. 60
- [17] Bullmore, E., Sporns, O. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature Reviews Neuroscience*, **10** (3), 186–198, 2009. 3
- [18] Skudlarski, P., Jagannathan, K., Calhoun, V. D., Hampson, M., Skudlarska, B. A., Pearlson, G. Measuring brain connectivity: diffusion tensor imaging validates resting state temporal correlations. *Neuroimage*, **43** (3), 554–561, 2008. 3
- [19] Kralemann, B., Pikovsky, A., Rosenblum, M. Reconstructing effective phase connectivity of oscillator networks from observations. *New Journal of Physics*, **16** (8), 085013, 2014. 70
- [20] Agresti, A. Categorical data analysis. John Wiley & Sons, 2014. 60, 63, 72
- [21] Amari, S.-I. Information geometry on hierarchy of probability distributions. *Information Theory, IEEE Transactions on*, **47** (5), 1701–1711, 2001. 60, 63, 66, 67, 72, 78
- [22] Schreiber, T. Measuring information transfer. *Physical Review Letters*, **85** (2), 461, 2000. 3
- [23] Shannon, C. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal, The*, **27** (3), 379–423, 1948. 3, 60, 61, 62
- [24] Jaynes, E. T. On the rationale of maximum-entropy methods. *Proceedings of the IEEE*, **70** (9), 939–952, 1982. 63, 64

- [25] Cover, T. M., Thomas, J. A. Elements of information theory. John Wiley & Sons, 2012. 3, 60, 61, 62, 84
- [26] Nowak, M. A., May, R. M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, **359** (6398), 826–829, 1992. 8
- [27] Herz, A. V. Collective phenomena in spatially extended evolutionary games. *Journal of Theoretical Biology*, **169** (1), 65–87, 1994.
- [28] Lindgren, K., Nordahl, M. G. Evolutionary dynamics of spatial games. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **75** (1), 292–309, 1994.
- [29] Nakamaru, M., Matsuda, H., Iwasa, Y. The evolution of cooperation in a lattice-structured population. *Journal of Theoretical Biology*, **184** (1), 65–81, 1997.
- [30] Abramson, G., Kuperman, M. Social games in a social network. *Physical Review E*, **63** (3), 030901, 2001. 8
- [31] Hauert, C., Doebeli, M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature*, **428** (6983), 643–646, 2004. 8, 9
- [32] Szabó, G., Vukov, J., Szolnoki, A. Phase diagrams for an evolutionary prisoner's dilemma game on two-dimensional lattices. *Physical Review E*, **72** (4), 047107, 2005. 8
- [33] Ohtsuki, H., Nowak, M. A. Evolutionary stability on graphs. *Journal of Theoretical Biology*, **251** (4), 698–707, 2008. 8
- [34] Jun, T., Sethi, R. Neighborhood structure and the evolution of cooperation. *Journal of Evolutionary Economics*, **17** (5), 623–646, 2007. 9
- [35] Számadó, S., Szalai, F., Scheuring, I. The effect of dispersal and neighbourhood in games of cooperation. *Journal of Theoretical Biology*, **253** (2), 221–227, 2008. 9
- [36] Kojima, F., Takahashi, S. Anti-coordination games and dynamic stability. *International Game Theory Review*, **9** (04), 667–688, 2007. 9
- [37] Janssen, H.-K. On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **42** (2), 151–154, 1981. 13
- [38] Grassberger, P. On phase transitions in Schlögl's second model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **47** (4), 365–374, 1982.

- [39] Hinrichsen, H. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, **49** (7), 815–958, 2000. 13, 14, 17
- [40] Jensen, I. Low-density series expansions for directed percolation: I. A new efficient algorithm with applications to the square lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32** (28), 5233, 1999. 14
- [41] Sornette, D. Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools. Springer Science & Business, 2006. 16
- [42] Vukov, J., Szabó, G., Szolnoki, A. Evolutionary prisoner’s dilemma game on Newman-Watts networks. *Physical Review E*, **77** (2), 026109, 2008. 18
- [43] Albert, R., Barabási, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, **74** (1), 47, 2002. 20
- [44] Watts, D. J., Strogatz, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, **393** (6684), 440–442, 1998. 53
- [45] Newman, M. E. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, **45** (2), 167–256, 2003. 20
- [46] Johnson, J. Multidimensional events in multilevel systems. En: The Dynamics of Complex Urban Systems, págs. 311–334. Springer, 2008. 20
- [47] Starkey, K., Barnatt, C., Tempest, S. Beyond networks and hierarchies: Latent organizations in the UK television industry. *Organization Science*, **11** (3), 299–305, 2000. 20
- [48] Zanette, D. H. Beyond networks: opinion formation in triplet-based populations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **367** (1901), 3311–3319, 2009. 20
- [49] Kerr, B., Riley, M. A., Feldman, M. W., Bohannan, B. J. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock–paper–scissors. *Nature*, **418** (6894), 171–174, 2002. 20
- [50] Sinervo, B., Lively, C. M. The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies. *Nature*, **380** (6571), 240–243, 1996. 21
- [51] Buss, L. Competitive intransitivity and size-frequency distributions of interacting populations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **77** (9), 5355–5359, 1980. 21

- [52] Paquin, C., Adams, J. Relative fitness can decrease in evolving asexual populations of *S. cerevisiae*. *Nature*, **306** (5941), 368, 1983. 21
- [53] Sigmund, K. Games of life: explorations in ecology, evolution and behaviour. Oxford University Press, 1993. 21
- [54] May, R. M., Leonard, W. J. Nonlinear aspects of competition between three species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **29** (2), 243–253, 1975. 21
- [55] Hofbauer, J. Heteroclinic cycles in ecological differential equations. *Equadiff* 8, págs. 105–116, 1994. 21
- [56] Frean, M., Abraham, E. R. Rock–scissors–paper and the survival of the weakest. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, **268** (1474), 1323–1327, 2001. 24
- [57] Borel, E. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **173** (1304-1308), 58, 1921. 39
- [58] Borel, É., Ville, J. Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard. J. Gabay, 1938. 39
- [59] Gross, O., Wagner, R. A continuous Colonel Blotto game. Inf. téc., DTIC Document, 1950. 39
- [60] Baye, M. R., Kovenock, D., De Vries, C. G. The all-pay auction with complete information. *Economic Theory*, **8** (2), 291–305, 1996. 39, 42
- [61] Myerson, R. B. Incentives to cultivate favored minorities under alternative electoral systems. *American Political Science Review*, **87** (04), 856–869, 1993. 39
- [62] Laslier, J.-F., Picard, N. Distributive politics and electoral competition. *Journal of Economic Theory*, **103** (1), 106–130, 2002.
- [63] Sahuguet, N., Persico, N. Campaign spending regulation in a model of redistributive politics. *Economic Theory*, **28** (1), 95–124, 2006. 39
- [64] Roberson, B. The colonel blotto game. *Economic Theory*, **29** (1), 1–24, 2006. 39, 40, 41, 42
- [65] Golman, R., Page, S. E. General Blotto: games of allocative strategic mismatch. *Public Choice*, **138** (3-4), 279–299, 2009. 39
- [66] Kvasov, D. Contests with limited resources. *Journal of Economic Theory*, **136** (1), 738–748, 2007. 39

- [67] Hart, S. Discrete Colonel Blotto and general lotto games. *International Journal of Game Theory*, **36** (3-4), 441–460, 2008. 39
- [68] Kovenock, D., Roberson, B. Conflicts with multiple battlefields. Inf. téc., CESifo working paper: Empirical and Theoretical Methods, 2010. 39
- [69] Adamo, T., Matros, A. A blotto game with incomplete information. *Economics Letters*, **105** (1), 100–102, 2009. 39
- [70] Newman, M., Barkema, G. Monte Carlo Methods in Statistical Physics chapter 1-4. Oxford University Press, 1999. 54
- [71] Kolmogorov, A. N. Three approaches to the quantitative definition of information. *Problems of Information Transmission*, **1** (1), 1–7, 1965. 60
- [72] Jaynes, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, **106** (4), 620, 1957. 60, 61, 63
- [73] Darroch, J. N. Interactions in multi-factor contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, págs. 251–263, 1962. 60
- [74] McGill, W. J. Multivariate information transmission. *Psychometrika*, **19** (2), 97–116, 1954. 63
- [75] Bell, A. J. The co-information lattice. En: Proceedings of the Fifth International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation. Citeseer, 2003. 62
- [76] Nemenman, I. Information theory, multivariate dependence, and genetic network inference. *ArXiv preprint q-bio/0406015*, 2004. 69
- [77] Vitányi, P. M. Information distance in multiples. *Information Theory, IEEE Transactions on*, **57** (4), 2451–2456, 2011.
- [78] Griffith, V., Koch, C. Quantifying synergistic mutual information. En: Guided Self-Organization: Inception, págs. 159–190. Springer, 2014. 60
- [79] Zohary, E., Shadlen, M., Newsome, W. Correlated Neuronal Discharge Rate and Its Implications for Psychophysical Performance. *Nature*, **370** (6485), 140–143, 1994. 61
- [80] Schneidman, E., Berry, M. J., Segev, R., Bialek, W. Weak pairwise correlations imply strongly correlated network states in a neural population. *Nature*, **440** (7087), 1007–1012, 2006. 61

- [81] Margolin, A. A., Wang, K., Califano, A., Nemenman, I. Multivariate dependence and genetic networks inference. *IET Systems Biology*, **4** (6), 428–440, 2010. 61, 69
- [82] Shannon, C. E. Prediction and entropy of printed English. *Bell System Technical Journal*, *The*, **30** (1), 50–64, 1951. 61
- [83] Grassberger, P. Estimating the information content of symbol sequences and efficient codes. *Information Theory, IEEE Transactions on*, **35** (3), 669–675, 1989. 61
- [84] Ebeling, W., Pöschel, T. Entropy and long-range correlations in literary English. *Europhysics Letters*, **26** (4), 241, 1994. 61
- [85] Montemurro, M. A., Zanette, D. H. Towards the quantification of the semantic information encoded in written language. *Advances in Complex Systems*, **13** (02), 135–153, 2010. 62, 87, 89, 99
- [86] Csiszár, I. I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *The Annals of Probability*, págs. 146–158, 1975. 63, 66
- [87] URL reference.wolfram.com/language/note/WordDataSourceInformation.html. 74
- [88] Project Gutenberg. URL www.gutenberg.org. 74
- [89] Wilks, S. S. The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, **9** (1), 60–62, 1938. 84
- [90] Samengo, I. Estimating probabilities from experimental frequencies. *Physical Review E*, **65** (4), 046124, 2002. 84, 85
- [91] Hernández, D. G. Information approach to co-occurrence of words in written language, 2014. Submitted. 90
- [92] Abramson, G., Zanette, D. H. Statistics of extinction and survival in Lotka-Volterra systems. *Physical Review E*, **57** (4), 4572, 1998. 98

Publicaciones asociadas

1. Hernández, D. G., and Zanette, D. H. Critical transition induced by neighbourhood size in evolutionary spatial games. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **82.3** (2011): 361-366.
2. Hernández, D. G., and Zanette, D. H. Evolutionary Dynamics of Resource Allocation in the Colonel Blotto Game. *Journal of Statistical Physics*, **151.3-4** (2013): 623-636.
3. Hernández, D. G., and Zanette, D. H. Cooperation within triplets in the rock-paper-scissors game. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **87.1** (2014): 1-7.
4. Hernández, D. G. Information Approach to Co-occurrence of Words in Written Language, *enviado* (2014).
5. Hernández, D. G., Samengo, I., and Zanette, D. H. Information-theoretical analysis of the statistical dependencies between three variables: Applications to written language, *en preparación*.

