

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**HOLOGRAFÍA E IRREVERSIBILIDAD DEL GRUPO DE
RENORMALIZACIÓN**

Matias Ginzburg

Gonzalo Torroba
Director

Miembros del Jurado

Marina Huerta [†], Roberto Trincherro[†], David Blanco ^{*}

[†] Instituto Balseiro, ^{*} Universidad de Buenos Aires

Noviembre de 2021

Partículas y Campos - Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov - CAB)

Índice de contenidos

Índice de contenidos	i
Resumen	ii
Abstract	iii
1. Introducción	1
2. Configuración holográfica	5
2.1. Flujo de renormalización holográfico	6
2.2. Entropía de Ryu Takayanagui	9
3. Superficies mínimas	11
3.1. Casos resolubles explícitamente	11
3.2. Dimensiones mayores	13
3.2.1. Expansión en R grande	13
3.2.2. Expansión para z grande	14
3.2.3. Empalmando soluciones	16
3.3. Escalas y aproximaciones	17
4. Estructura geométrica de la entropía	20
4.1. Expansión de la entropía	20
4.2. Irreversibilidad	21
4.3. Tercer término geométrico de la entropía	23
5. Conclusiones	25
A. Área de la superficie mínima	27
B. Derivada de la entropía	29
C. Cuentas...	30
Bibliografía	34

Resumen

En esta tesis se estudian teorías cuánticas de campos utilizando la entropía de entrelazamiento de esferas en el vacío. La motivación general es encontrar propiedades no perturbativas del grupo de renormalización. Cerca de los puntos fijos del flujo de renormalización, la entropía de una esfera en el vacío tiene una expansión en potencias del radio de la esfera, con el término dominante proporcional al área. En el régimen en que el radio es mayor a las escalas infrarrojas, calculamos los primeros tres coeficientes de esta expansión y probamos que, en valor absoluto, son siempre mayores en la teoría ultravioleta que en la teoría con el flujo de renormalización. Cantidades que tienen esta propiedad de que su cambio entre el UV y el IR tiene un signo definido se llaman irreversibles.

En la prueba se asumió que la teoría tiene un dual holográfico para usar la conjetura AdS/CFT, que el dual gravitatorio es semiclásico y que satisface la condición de energía nula. La irreversibilidad fue probada anteriormente para los primeros dos coeficientes utilizando la subaditividad fuerte de la entropía de entrelazado. Nuestro resultado principal, la irreversibilidad del tercer coeficiente, motiva a probar desigualdades más fuertes para la entropía en teorías cuánticas de campos y a probar la irreversibilidad de todos los coeficientes de la expansión de la entropía.

Abstract

In this thesis, we study quantum field theories using the entanglement entropy of spheres in the vacuum. The general motivation is to find non-perturbative properties of the renormalization group. Near the fixed points of the RG flow, the entropy of a sphere in the vacuum has an expansion in powers of the radius of the sphere, with the leading term proportional to the area. In the regime of the radius bigger than the IR scale, we calculate the first three coefficients of this expansion and show that, in absolute value, they are always bigger in the UV theory compared with the theory with the RG flow. Quantities whose change between the UV and IR theories have a definite sign are called irreversible.

In the proof, we assume that the theory has a holographic dual theory so we can use the AdS/CFT correspondence, that the gravity theory is semi-classical and satisfy the null energy condition. The irreversibility has been proved previously for the first two coefficients using the strong subadditivity of the entanglement entropy. Our main result, the irreversibility of the third coefficient motivates to find stronger inequalities of the entanglement entropy in quantum field theories and to prove the irreversibilities of all the terms in the entropy expansion.

Capítulo 1

Introducción

La cantidad central de esta tesis es la entropía de entrelazamiento en teorías de campos. Dadas dos regiones espaciales complementarias, la entropía de entrelazado mide la cantidad de correlaciones entre ellas [1]. Esta cantidad es infinita debido a que en un campo continuo la cantidad de grados de libertad es infinita. Es necesario regularizar la entropía para extraer información relevante. Para una región espacial escalable Σ de tamaño R , en d dimensiones espacio-temporales, utilizando un regulador ϵ , la entropía toma la siguiente estructura geométrica de divergencias en el límite del continuo $\epsilon \rightarrow 0$

$$S^\Sigma = \begin{cases} a_1 \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_3 \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-4} + \dots + a_{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{R}{\epsilon}\right) + a_u + a_{\frac{d+1}{2}} \frac{\epsilon}{R} + \dots & d \text{ impar} \\ a_1 \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_3 \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-4} + \dots + a_{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^2 + a_u \ln \left(\frac{R}{\epsilon}\right) + a_{\frac{d+1}{2}} \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^2 + \dots & d \text{ par} \end{cases} \quad (1.1)$$

El término dominante es proporcional al área de Σ , reproduce la ley de área [2, 3]. Los siguientes términos decrecen en potencias de a dos hasta llegar a un término constante o logarítmico, dependiendo si d es impar o par. Los coeficientes de estos términos, a_u , se llaman términos universales y son independientes de la regularización. Los últimos términos '...' son tales que se anulan en el límite al continuo o que se anulan para los puntos fijos de la teoría. Para más detalles sobre esta expansión se pueden ver las referencias [4, 5]. En esta tesis siempre vamos a considerar que la región Σ es una esfera.

A partir de esta estructura geométrica se puede extraer información sobre la teoría y sobre el estado. Por ejemplo, para la entropía de entrelazado de una esfera en el vacío, el coeficiente del término logarítmico en dimensión par es proporcional a la anomalía de traza del tensor de energía impulso. Esta propiedad resulta central en los teoremas de irreversibilidad.

Teorema de irreversibilidad: *Dadas dos teorías conformes, unitarias e invariantes de Lorentz conectadas por el flujo del grupo de renormalización, existe una cantidad intrínseca a cada teoría que es mayor en el UV que en el IR.*

La motivación es encontrar propiedades no perturbativas del flujo de renormalización. Este teorema restringe las posibles teorías que pueden estar conectadas por el flujo y en particular prohíbe flujos cíclicos. Hay una versión más fuerte que establece la existencia de una función definida en todo el flujo y que en los puntos fijos coincide con la cantidad intrínseca.

Diferentes formas de este teorema de irreversibilidad fueron presentadas en trabajos anteriores. La primera demostración la realizó Zamolodchikov [6] en 2 dimensiones y luego Komargodski y Schwimmer [7] lo demostraron en 4 dimensiones. En ambos casos la cantidad intrínseca era la anomalía de traza del tensor de energía-impulso. La anomalía solo existe en dimensiones pares, impidiendo buscar una generalización directa a dimensiones arbitrarias. Myers y Shina demostraron el teorema en dimensión arbitraria para teorías holográficas [8]. Mostraron que la cantidad monótona es el término universal de la entropía de una esfera en el vacío. Esto motivó la demostración entrópica de Casini y Huerta en 2 y 3 dimensiones [9, 10] y la posterior generalización para $d \leq 4$ [11].

Las demostraciones entrópicas usan fuertemente la subaditividad fuerte de la entropía, la invariancia de Lorentz y la unitariedad. Aplicando estas propiedades a la intersección de esferas en dimensión arbitraria demuestran la siguiente desigualdad para la variación de la entropía con el radio R de la esfera

$$(R\partial_R - (d-2))R\partial_R\Delta S \leq 0 \quad (1.2)$$

donde $\Delta S = S - S_{UV}$ es la entropía menos la entropía de la teoría UV. Esta relación es válida para toda dimensión, para $d \leq 4$ permite extraer el término universal de la entropía y demostrar los teoremas de irreversibilidad. Para hacer como ejemplo el caso de $d = 4$ elegimos evaluar la entropía en el IR

$$\Delta S_{IR} = \Delta a_1 \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^2 - 4\Delta A \ln \frac{R}{\epsilon} \quad (1.3)$$

Usamos la forma $a_u = -4A$ para hacer explícita la aparición de la anomalía A .

Aplicar $R\partial_R$ reemplaza el término logarítmico por una constante y multiplica el término cuadrático por 2. Aplicar $(R\partial_R - 2)$ cancela el término cuadrático. Por lo tanto el término universal y su desigualdad se puede obtener de evaluar (1.3) en (1.2).

$$(R\partial_R - (d-2))R\partial_R\Delta S_{IR} = 8\Delta A = 8(A_{IR} - A_{UV}) \leq 0. \quad (1.4)$$

En dimensiones mayores, podemos reemplazar (1.1) y obtener un teorema de irreversibilidad para el coeficiente a_3

$$(R\partial_R - (d-2))R\partial_R\Delta S_{IR} = -\Delta a_3 2(d-4) \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-4} + \mathcal{O}\left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-6} \quad (1.5)$$

De aquí se deduce que en el límite de R grande $-\Delta a_3 \leq 0$.

Este término no es universal, en el sentido de que depende del flujo de renormalización y no se puede escribir como una diferencia de cantidades intrínsecas a los puntos fijos, como sí es posible en la ecuación (1.4) para Δa_u . Para el término de área sí se conoce una expresión integral monótona [3] y en [12] lo escriben holográficamente.

Para tener una intuición de lo que queremos calcular podemos pensar en teoría de perturbaciones. Partimos de una acción conforme UV perturbada por un operador relevante \mathcal{O} de dimensión $\Delta < d$ y un acoplamiento g de dimensión $d - \Delta$

$$I \sim I_{UV} + \int d^d x g \mathcal{O} \quad (1.6)$$

Suponemos que esta acción tendrá un flujo que lleva a otra acción conforme en el IR. el flujo cerca del IR va a estar dominado por algún operador irrelevante $\tilde{\mathcal{O}}$ de dimensión $\tilde{\Delta} > d$

$$I \sim I_{IR} + \int d^d x \tilde{g} \tilde{\mathcal{O}} \quad (1.7)$$

Cuando el radio de la esfera es pequeño, comparamos la entropía en la teoría conforme UV con la entropía en la teoría perturbada. En la teoría conforme vamos a tener la expansión divergente (1.1). Estos términos también van a estar en el cálculo de la teoría perturbada, porque a distancias cortas ambas teorías tienen la misma acción I_{UV} . Pero van a haber correcciones a los coeficientes que vienen de la escala de la perturbación. Es usual que la primera corrección en teoría de perturbaciones sea de orden g^2 , luego por análisis dimensional el término n -ésimo en la teoría perturbada es

$$S^{(d-1-n)} = \left(\frac{a_n}{\epsilon^{d-1-n}} + g^2 \epsilon^{2(d-\Delta)-(d-1-n)} + \dots \right) R^{d-1-n} \quad (1.8)$$

Vemos que la corrección es finita en el continuo si $\Delta < \frac{d+1+n}{2}$. Cuando el radio de la esfera es grande $R \gg \tilde{g}^{\frac{1}{(d-\tilde{\Delta})}}$ vamos a tener nuevamente una expansión de la forma (1.1) con las correcciones (1.8) más correcciones que vienen de todas las escalas entre el UV y el IR.

Con esta motivación, nos dedicamos a estudiar los coeficientes a_n de la ecuación (1.1) de forma no perturbativa. La idea es demostrar la irreversibilidad de los coeficientes de la entropía, es decir definir el signo de cada uno de los términos

$$\Delta S^{(d-1-n)} = \Delta \mu_n R^{d-1-n} \quad (1.9)$$

La ecuación (1.2) utilizada en las demostraciones entrópicas tiene dos derivadas, por lo tanto no se puede utilizar para extraer coeficientes menores al a_3 . Para teorías holográficas, Myers y Shina, mostraron la irreversibilidad del término universal en todas dimensiones. Esto nos motiva a buscar la irreversibilidad de más términos utilizando

holografía. En estas teorías la entropía de entrelazado se calcula como un área mínima dada la fórmula de Ryu Takayanagi [4]. Esto simplifica el problema al cálculo de geodésicas en el dual gravitatorio. Vamos a tomar como hipótesis la condición de energía nula (NEC) y de ella vamos a obtener la desigualdad necesaria para demostrar la irreversibilidad. El capítulo 2 es un repaso de las herramientas de AdS/CFT que utilizamos, haciendo énfasis en el flujo de renormalización holográfico, las consecuencias de la NEC y la fórmula de Ryu Takayanagi. En el capítulo 3 se tratan las ecuaciones de las geodésicas. Estas ecuaciones no lineales no son resolubles genéricamente excepto para los casos particulares de un espacio AdS puro (correspondiente a que no haya flujo de renormalización) o el caso $d = 2$. Luego de presentar estos casos nos dedicamos a resolver las ecuaciones en una expansión para R grande en comparación a las escalas de renormalización. Finalmente en el capítulo 4 se utiliza la expansión en R para obtener los coeficientes de la entropía y analizar su irreversibilidad en el régimen de R grande. Se prueba la irreversibilidad de los primeros tres coeficientes. Destacamos que la prueba de irreversibilidad del tercer coeficiente es conceptualmente importante porque va más allá de lo que se puede mostrar con la SSA y motiva a encontrar desigualdades con más derivadas de la entropía por lo menos en el régimen de R grande.

Capítulo 2

Configuración holográfica

El objetivo de este capítulo es introducir las herramientas holográficas que utilizaremos más adelante. Empezamos dando un breve resumen de AdS/CFT, para el caso en que en el lado gravitatorio hay un campo no masivo. Este caso es dual a una perturbación marginal en la teoría de campos conforme. Luego describiremos el caso de un campo escalar con un potencial con dos puntos críticos, este caso es dual a un flujo de renormalización. Y motiva las expresiones de la métrica que vamos a utilizar en el trabajo. Al final del capítulo resumimos la propuesta de Ryu y Takayanagui para el cálculo holográfico de entropía de entrelazamiento y la aplicamos al caso de una esfera en el vacío. La solución de las ecuaciones la dejamos para el próximo capítulo.

La correspondencia AdS/CFT establece una relación entre teorías gravitatorias en un espacio AdS y una teoría conforme de una dimensión menos que vive en el borde de AdS. Fue presentada por primera vez por Maldacena [13] en el caso particular de una teoría SYM(N=4) y una teoría de gravedad en AdS_5 por un espacio compacto S^5 . Witten [14] hizo más precisa esta conjetura. En adelante, siguiendo a Witten, no vamos a escribir el espacio compacto ya que no es necesario para describir el límite semiclásico.

La métrica de AdS_{d+1} es

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} (dz^2 - (dx^0)^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-2}^2) \quad (2.1)$$

En estas coordenadas el borde corresponde a $z \rightarrow 0$. Es un borde asintótico porque la métrica diverge en este límite. Dado un campo no masivo en AdS, su función de partición depende de la condición de borde $\phi|_{z=0} = \phi_0$. La propuesta es que ϕ_0 se corresponde con una fuente en la teoría conforme de dimensión d y va a estar acoplada a un operador \mathcal{O} de dimensión conforme d a través de un término en la acción $\int \phi_0 \mathcal{O}$. Para reproducir los mismos valores de expectación en ambas teorías, la propuesta dice que ambas funciones de partición son iguales $Z_{CFT_d}[\phi_0] = Z_{AdS_{d+1}}[\phi_0]$.

Este diccionario resulta útil si alguna de las teorías es más simple de calcular. En

esta tesis utilizamos el límite clásico de gravedad descrito por las ecuaciones de Einstein, es decir que aproximamos la función de partición por la acción evaluada en la solución clásica $\ln Z_{AdS_{d+1}} = -S_{AdS_{d+1}}^{On-shell}[\phi_0]$. Esto es válido en el límite N grande propuesto por t'Hooft. Llamaremos teorías holográficas a aquellas teorías de campos que admitan un dual holográfico de este tipo.

2.1. Flujo de renormalización holográfico

La descripción anterior derivó en un operador \mathcal{O} marginal. Si queremos obtener un operador relevante compatible con un flujo de renormalización que uno dos puntos fijos debemos modificar la geometría de AdS. Con este propósito se propone la geometría de una pared de dominio asintóticamente AdS [15].

La configuración más general que respeta invariancia de Poincare es

$$ds^2 = \frac{\ell_{UV}^2}{z^2} \left(\frac{dz^2}{f(z)} - (dx^0)^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-2}^2 \right), \phi = \phi(z) \quad (2.2)$$

Para $f(z) = 1$ coincide con la métrica de AdS de radio ℓ_{UV} . El campo ϕ esta acoplado con la métrica y solo puede depender de z para no romper la invariancia de Poincare en el borde. Si asumimos gravedad clásica, debemos resolver las ecuaciones de movimiento para encontrar $f(z)$ y $\phi(z)$.

En el ejemplo de un campo escalar la acción gravitatoria viene dada por la acción de Einstein Hilbert más el término de borde de Gibbons Hawking

$$S = \int d^d x dz \sqrt{g} (R - g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - V(\phi)) - 2 \int d^d x \sqrt{\gamma} K \quad (2.3)$$

Agregamos un potencial $V(\phi)$ para el campo escalar. Las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2} g_{MN} [(\partial\phi)^2 + V(\phi)] \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \phi) - \frac{1}{2} \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.5)$$

Si el potencial tiene un punto crítico $\frac{dV}{d\phi}(\phi_c) = 0$, $V(\phi_c) = \frac{-d(d-1)}{2\ell_c^2}$ una solución es AdS con radio ℓ_c

$$f(z) = \frac{\ell_{UV}}{\ell_c}, \phi(z) = \phi_c \quad (2.6)$$

Como mencionamos antes, esto se corresponde con una teoría conforme en el borde. Para representar una flujo general entre dos teorías necesitamos que ϕ varíe dentro del bulk y modifique la métrica. Esto se logra si el potencial tiene dos puntos críticos en

ϕ_{UV} y ϕ_{IR} tal que $V(\phi_c) = -\frac{d(d-1)}{2\ell_c^2}$, donde $c = UV, IR$. Ver figura 2.1.

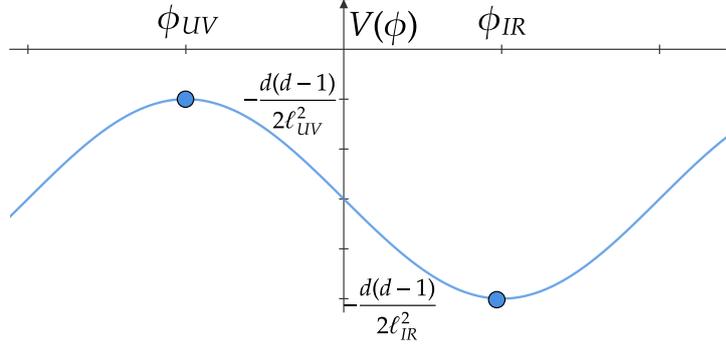


Figura 2.1: El potencial para el campo en el bulk modela cuales son las configuraciones posibles. Los puntos fijos del potencial, donde vale $-\frac{d(d-1)}{2\ell_c^2}$, dan lugar a soluciones asintóticamente AdS de radio ℓ_c . Para describir el flujo de renormalización entre dos teorías conformes el potencial debe tener dos puntos críticos.

Reemplazando la métrica (2.2) en las ecuaciones de movimiento (2.4) y (2.5)¹ y combinándolas obtenemos dos ecuaciones independientes

$$\phi''(z) - \left(\frac{d-1}{z} - \frac{f'}{2f} \right) \phi'(z) - \frac{\ell_{UV}^2}{2z^2 f} \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d-1}{z} \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\phi'(z)^2 \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones no se pueden resolver para un potencial genérico. Para obtener información vamos a expandirlas cerca de los puntos críticos. Si miramos cerca del punto fijo UV vamos a poder expandir el potencial como

$$V(\phi) \approx -\frac{d(d-1)}{2\ell_{UV}^2} + m^2 \phi^2 + \dots \quad (2.9)$$

En esta aproximación, las ecuaciones se pueden resolver orden a orden. Empezamos con el orden cero $f = 1$. Reemplazando en (2.7) tenemos una ecuación para ϕ con solución

$$\phi(z) \approx \phi_{UV} z^{d-\Delta} + \phi_{\Delta} z^{\Delta}, \quad m^2 \ell_{UV}^2 = \Delta(\Delta - d) \quad (2.10)$$

Por la correspondencia ϕ_{Δ} esta relacionado al valor de expectación del campo en el vacío, y lo fijamos a cero. ϕ_{UV} es dual² a la fuente de la QFT acoplada al operador \mathcal{O} . Ahora reconocemos Δ como la dimensión conforme del operador y vemos que depende de m^2 . Como estamos describiendo el flujo cerca del punto fijo UV, el operador debe

¹Para la métrica (2.2) $R_{zz} = \frac{d}{2} \frac{-2f+zf'}{z^2 f}$, $R_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{-2df+zf'}{2z^2}$

²Cualquier campo masivo debe anularse en el borde asintótico. La relación precisa entre la condición de contorno y la fuente ϕ_0 en la QFT esta dada por la ecuación (2.10), solo en el caso de $m^2 = 0$ podemos escribir $\phi(z=0) = \phi_0$.

ser relevante, $m^2 = \Delta(\Delta - d) < 0$. Esto justifica dibujar este punto crítico como un máximo en la figura 2.1.

Integramos la ecuación (2.8) con la condición $f(0) = 1$ y encontramos la primer corrección

$$f(z) \approx 1 + \frac{d - \Delta}{d - 1} \phi_{UV}^2 z^{2(d-\Delta)} \quad (2.11)$$

Para realizar el mismo procedimiento en el punto fijo IR elegimos coordenadas tales que $\phi(z \rightarrow \infty) = \phi_{IR} z^{d-\tilde{\Delta}}$ por lo tanto $z \rightarrow \infty$ corresponde al otro borde asintótico. Al aproximar el potencial en este punto crítico, los coeficientes de la expansión son distintos, por lo tanto obtenemos diferentes dimensiones de escaleo correspondientes a un operador irrelevante de dimensión $d - \tilde{\Delta} < 0$. El orden cero es $f(\infty) = \ell_{UV}^2 / \ell_{IR}^2$.

Este análisis justifica la aproximación que vamos a utilizar para f cerca de los bordes

$$f(z) \approx \begin{cases} 1 + (\mu z)^{2\alpha} & UV \\ \frac{\ell_{UV}^2}{\ell_{IR}^2} \left(1 - \frac{1}{(\tilde{\mu} z)^{2\tilde{\alpha}}}\right) & IR \end{cases} \quad (2.12)$$

$\alpha = d - \Delta$ y $\tilde{\alpha} = \tilde{\Delta} - d$ son positivos. μ y $\tilde{\mu}$ son escalas de masa dadas por los parámetros del potencial, ϕ_{UV} y ϕ_{IR} . Estas escalas determinan la zona UV ($\mu z \ll 1$) y la zona IR ($\tilde{\mu} z \gg 1$). Si bien vamos a usar estas escalas como referencia, no nos va a importar la forma explícita. En la QFT, estas escalas son proporcionales al acoplamiento de la perturbación de la acción (1.6) $\mu^{d-\Delta} \sim \phi_{UV} \sim g$ y su equivalente en el IR.

En el ejemplo del campo escalar, dado que el punto fijo UV corresponde a un máximo del potencial y el punto fijo IR corresponde a un mínimo, es claro que $\ell_{UV} > \ell_{IR}$. Para mostrar esta propiedad de manera más general necesitamos imponer una hipótesis extra.

La condición de energía nula (NEC) establece que $T_{MN}\eta^M\eta^N \geq 0$ para todo vector nulo η . Usando la métrica (2.2), el vector nulo está definido por

$$0 = g_{MN}\eta^M\eta^N \implies (\eta^0)^2 = \frac{1}{f(z)}(\eta^z)^2 + (\vec{\eta})^2 \quad (2.13)$$

La NEC se escribe como

$$\begin{aligned} T_{MN}\eta^M\eta^N &= \frac{\ell_{UV}^2}{z^2} \left(\frac{1}{f(z)} T_z^z (\eta^z)^2 - T_0^0 (\eta^0)^2 + T_i^i (\vec{\eta})^2 \right) \\ &= \frac{\ell_{UV}^2}{z^2} \left(\frac{1}{f(z)} (T_z^z - T_0^0) (\eta^z)^2 + (T_i^i - T_0^0) (\vec{\eta})^2 \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

Lo que implica $T_z^z - T_0^0 \geq 0$. Utilizando las ecuaciones de Einstein

$$\kappa_{d+1}^2 (T_z^z - T_0^0) = R_z^z - R_0^0 = \frac{z^2}{\ell_{UV}^2} (f(z) R_{zz} + R_{00}) = (d-1) \frac{z f'(z)}{2 \ell_{UV}^2} \geq 0 \quad (2.15)$$

Como $f(0) = 1$ y $f(\infty) = \ell_{UV}/\ell_{IR}$ la NEC implica que

$$\begin{aligned} 1 &\leq f(z) \leq \frac{\ell_{UV}}{\ell_{IR}} \\ 0 &\leq f'(z) \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.2. Entropía de Ryu Takayanagui

La entropía de entrelazado de una región Σ de una QFT de dimensión d está definida como $S_\Sigma = Tr \rho_\Sigma \ln \rho_\Sigma$, donde ρ_Σ es la matriz densidad reducida de Σ . Esta fórmula resulta muy complicada de usar. Para calcular la entropía utilizamos la fórmula propuesta por Ryu Takayanagui [4] que establece que la entropía es proporcional al área de la superficie extremal σ en el bulk de AdS anclada a la región de interés

$$S_\Sigma = \frac{\text{Área}(\sigma)}{4G} \quad (2.17)$$

G es la constante de Newton.

Ryu y Takayanagui mostraron que esta ecuación aplicada a una esfera en el vacío de AdS puro ($f(z) = 1$) lleva a la estructura de divergencias (1.1) con

$$\begin{aligned} a_1/\gamma &= (d-2)^{-1}, & a_u/\gamma &= (2\pi)^{-1}\Gamma(d/2)\Gamma((1-d)/2) \text{ si } d \text{ impar} \\ a_3/\gamma &= -(d-3)/2(d-4), & a_u/\gamma &= (-)^{(d-1)/2}(d-3)!!/(d-2)!! \text{ si } d \text{ par} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Definimos $\gamma = \frac{Vol(S_{d-2})\ell_{UV}^{d-1}}{4G}$ y lo usaremos para reducir la notación.

La misma fórmula aplica cuando la geometría no es AdS puro, la única condición es que valga el límite clásico de gravedad. La usaremos para calcular los coeficientes de las divergencias de la entropía en el caso general de un flujo de renormalización dado por la configuración (2.2). A diferencia de (2.18), en este caso esperamos que los coeficientes tengan una dependencia con las escalas del grupo de renormalización.

Para simplificar el cálculo de la superficie mínima usamos que la métrica (2.2) es diagonal, la simetría esférica y que como la región es espacial, la coordenada x_0 no tiene ningún rol. La superficie extremal tiene $d-1$ dimensiones, la parametrizamos con $d-2$ ángulos y una función radial $\rho(z)$, ver la figura 2.2 para un esquema y el apéndice A para el cálculo detallado. El área es igual a la integral de la métrica inducida sobre la superficie, luego la entropía se escribe como

$$S = \gamma \int_\epsilon^{z_t} dz \frac{\rho^{d-2}}{z^{d-1}} \sqrt{\rho'(z)^2 + \frac{1}{f(z)}} \quad (2.19)$$

Como se dijo en [Introducción](#) la entropía de entrelazado en teorías de campos es infinita. Usamos un regulador ϵ para regularizar las divergencias UV. Este regulador es

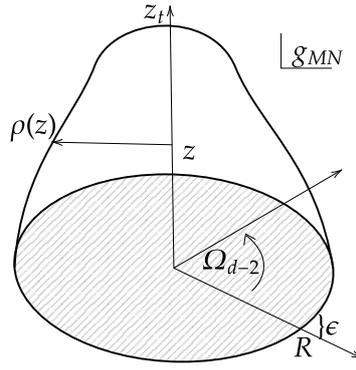


Figura 2.2: Esquema de la fórmula de Ryu-Takayanagui. La CFT es dual al borde $z \rightarrow 0$. La entropía de la esfera de radio R es proporcional al área de la superficie extremal parametrizada por $d - 2$ ángulos y la función $\rho(z)$. Para regularizar se corta el espacio en $z = \epsilon$, respetando invariancia de Poincare en el borde.

muy adecuado para cualquier regularización UV en teorías holográficas ya que respeta la invariancia de Poincare en el borde. La variable ρ es positiva por definición, debido a la simetría esférica sabemos que en $\rho = 0$ hay un punto máximo de z , que llamamos z_t . Las condiciones de borde son

$$\rho(\epsilon) = R, \quad \rho(z_t) = 0, \quad \rho'(z_t) = -\infty \quad (2.20)$$

Estas son tres ecuaciones pero $\rho(z_t) = 0$ es la definición de z_t , por lo que quedan dos condiciones de contorno efectivas para ρ . Debemos evaluar el ρ que minimiza el área, para esto debemos resolver la ecuación de Euler Lagrange

$$\rho z^{d-1} \sqrt{\rho'^2 + \frac{1}{f}} \left(\frac{\rho'}{z^{d-1} \sqrt{\rho'^2 + \frac{1}{f}}} \right)' - \frac{d-2}{f} = 0 \quad (2.21)$$

Es una ecuación de segundo orden no lineal. No se puede resolver genéricamente salvo en los casos de AdS puro o $d = 2$.

Capítulo 3

Superficies mínimas

Para calcular la superficie mínima debemos resolver la ecuación de Euler Lagrange (2.21) con las condiciones de contorno (2.20). Esta ecuación no se puede resolver genéricamente salvo para AdS puro o para $d = 2$. Empezamos por estos casos más simples resolviendo las ecuaciones, calculando el término logarítmico de la entropía y utilizando el resultado para probar el teorema de irreversibilidad en 2 dimensiones. Luego mostramos que para dimensiones mayores ρ admite una expansión en potencias inversas de R .

3.1. Casos resolubles explícitamente

AdS Puro

En este caso f es constante, y por lo tanto no hay ningún flujo de renormalización. Tomemos el caso $f = 1$, correspondiente a la teoría UV. La solución de la ecuación (2.21) es

$$\rho_{UV} = \sqrt{z_t^2 - z^2} \quad (3.1)$$

y satisface las condiciones de contorno si $z_t^{UV} = \sqrt{R^2 + \epsilon^2}$.

Si la teoría es la del IR, entonces $f = \ell_{UV}^2/\ell_{IR}^2$ y la solución

$$\rho_{IR} = \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \sqrt{z_t^2 - z^2} \quad (3.2)$$

satisface las condiciones de contorno para $z_t^{IR} = \sqrt{\frac{\ell_{UV}^2}{\ell_{IR}^2} R^2 + \epsilon^2}$.

Para calcular la entropía en el UV evaluamos la ecuación (2.19) para esta solución de ρ

$$S = \gamma \int_{\epsilon}^{z_t} \frac{dz}{z} \frac{\sqrt{1 - (z/z_t)^2}^{d-3}}{(z/z_t)^{d-1}} = \gamma \int_{\epsilon/z_t}^1 d\chi \frac{\sqrt{1 - \chi^2}^{d-3}}{\chi^{d-1}} \quad (3.3)$$

La divergencia UV viene del borde inferior de integración. Si solo nos interesan las divergencias podemos expandir la integral para $\epsilon/z_t \ll 1$, en este límite podemos reemplazar z_t por R .

$$S_{div} = \gamma \left[\left(\frac{R}{\epsilon} \right)^{d-2} \frac{1}{d-2} - \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^{d-4} \frac{d-3}{2(d-4)} + \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^{d-6} \frac{(d-3)(d-5)}{8(d-6)} - \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{d-2} - \frac{d-3}{2(d-4)} + \frac{(d-3)(d-5)}{8(d-6)} - \dots \right] \quad (3.4)$$

Obtuvimos la estructura de divergencias de la ecuación (1.1). Para dimensión par, uno de los términos con R/ϵ y uno de los términos finitos tienen un cero en el denominador, usando el límite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1-x^a}{a} = \ln(x) \quad (3.5)$$

recuperamos el término universal logarítmico de dimensiones pares.

Dimensión 2 y el teorema c

Este caso se simplifica porque no hay dependencia con ρ en la ecuación (2.19) y la ecuación de Euler Lagrange tiene un momento conservado. La solución es

$$\rho(z) = R - \int_{\epsilon}^z dz \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \frac{1}{\sqrt{(z_t/z)^2 - 1}} \quad (3.6)$$

Con el z máximo dado por la condición de contorno

$$\rho(z_t) = 0 \Rightarrow R = \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \frac{1}{\sqrt{(z_t/z)^2 - 1}} \quad (3.7)$$

Como mostramos en el capítulo anterior, $f(z) > 1$, usando esto obtenemos la siguiente desigualdad

$$R < \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{1}{\sqrt{(z_t/z)^2 - 1}} = \sqrt{z_t^2 - \epsilon^2} \quad (3.8)$$

Se puede hacer el mismo análisis para el caso IR y llegamos a que $z_t^{UV} < z_t < z_t^{IR}$.

La primera derivada de S respecto al radio R se puede escribir en función de ρ y ρ' evaluados en ϵ usando la ecuación (B.4) del apéndice [Derivada de la entropía](#). Esta ecuación es válida en toda dimensión. Evaluando el caso particular de $d = 2$

$$R \frac{dS}{dR} = \frac{\rho^{d-2}}{z^{d-1}} \frac{-\partial_z \rho}{\sqrt{(\partial_z \rho)^2 + \frac{1}{f(z)}}} \Big|_{z=\epsilon} = \gamma \frac{R}{z_t} \quad (3.9)$$

El teorema c sale de comparar (3.9) con su valor en el UV

$$R \frac{d\Delta S}{dR} = R \frac{dS}{dR} - R \frac{dS^{UV}}{dR} = \gamma R \left(\frac{1}{z_t} - \frac{1}{z_t^{UV}} \right) < 0 \quad (3.10)$$

En el límite de R grande la solución se aproxima a la solución IR, $z_t \approx \frac{\ell_{UV}}{\ell_{IR}} R$ y esta ecuación extrae el coeficiente universal

$$R \frac{d\Delta S}{dR} \Big|_{\tilde{\mu}R \gg 1} = \frac{\ell_{UV}}{2G} \left(\frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} - 1 \right) = \frac{c_{IR} - c_{UV}}{3} \quad (3.11)$$

Donde identificamos la carga central holográfica $c = \frac{3\ell}{2G}$ [8].

3.2. Dimensiones mayores

En dimensión arbitraria $\frac{dS}{d\rho}$ no es una cantidad conservada y no podemos integrar como hicimos en $d = 2$. Vamos a seguir un cálculo similar al realizado por Liu y Mezei [5]. La idea es escribir dos expansiones para $\rho(z)$, la primera en potencias de R , donde cada coeficiente depende de z . Esta expansión es válida cerca de $z = 0$ y no es adecuada cerca del máximo de z . No podemos aplicar la segunda condición de contorno (2.20) y por lo tanto todos los coeficientes de la expansión van a tener un parámetro libre. La segunda expansión se realiza en potencias de $\tilde{\mu}z$ y también tiene parámetros libres. En el límite en que ambos R y z son grandes, convertimos las expansiones en una doble expansión en R y z , igualando los coeficientes obtenemos los parámetros libres que nos interesan. Solo vamos a calcular los términos relevantes a la estructura geométrica, para que la cuenta sea más transparente que en el trabajo de Liu y Mezei. Para ver como se obtienen el resto de los términos se puede leer su trabajo.

3.2.1. Expansión en R grande

Consideramos que ρ es una función de R y z . La primer propuesta que podemos hacer para expandir en potencias de R es

$$\rho(z, R) = R - \frac{\rho_1(z)}{R^a} \quad (3.12)$$

Esta propuesta satisface la condición de borde UV si $\rho_1(\epsilon) = 0$. El signo negativo es una elección porque esperamos que ρ decrezca con z , como se grafica en la figura (2.2). Si reemplazamos esta propuesta en la ecuación de Lagrange (2.21) y la linealizamos, obtenemos la siguiente ecuación para ρ_1

$$\frac{z^{d-1}}{\sqrt{f}} \left(\frac{\sqrt{f}}{z^{d-1}} \rho_1' \right)' = -\frac{d-2}{f} R^{a-1} \quad (3.13)$$

Para satisfacer que ρ_1 solo dependa de z tenemos que elegir $a = 1$. Luego integramos la ecuación para obtener la primer corrección

$$\rho_1(z) = b_1 \int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} + (d-2) \int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_u^{\infty} dv \frac{1}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \quad (3.14)$$

La zona de validez de esta propuesta es $\frac{\rho_1(z)}{R^2} \ll 1$. La condición de contorno $\rho(z_t) = 0$ no se encuentra en esta zona y por eso tenemos el parámetro b_1 indeterminado.

Para encontrar las siguientes correcciones, debemos agregar más términos de la forma $-\rho_n/R^n$. La ecuación para cada término se obtiene expandiendo la ecuación de Lagrange al orden R^n . Todas las funciones pares se anulan, las ecuaciones para los términos impares se pueden escribir como

$$\frac{z^{d-1}}{\sqrt{f}} \left(\frac{\sqrt{f}}{z^{d-1}} \rho'_n \right)' = s_n(z) \quad (3.15)$$

s_n es la fuente para ρ_n , depende de los ρ_m anteriores. Los primeros valores son

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{(d-2)}{f} \\ s_3 &= -\rho_1 \frac{(d-2)}{f} - (d-2)\rho_1^2 + \frac{d-1}{z} f \rho_1^3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para encontrar la solución completa tenemos que agregar potencias fraccionarias de R que satisfacen la solución homogénea. Estos son términos no geométricos, contribuyen a la estructura no local de la entropía. Por esta razón no los vamos a calcular.

La expansión completa para R grande empieza con un término lineal en R y sigue con las potencias inversas impares, más términos con potencias inversas fraccionarias ¹

$$\rho(z) = R - \frac{\rho_1(z)}{R} - \frac{\rho_3(z)}{R^3} - \dots - \frac{\rho_\nu(z)}{R^\nu} - \dots \quad (3.17)$$

Las correcciones pueden calcularse orden a orden integrando la ecuación (3.15)

$$\rho_n(z) = b_n \int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} - \int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_u^{\infty} dv \frac{\sqrt{f(v)}}{v^{d-1}} s_n(z) \quad (3.18)$$

3.2.2. Expansión para z grande

Ahora miramos la forma de la solución en la zona IR, con z grande nos referimos a $\tilde{\mu}z \gg 1$. Como ρ está definido para $z < z_t$, en este régimen también vale $\tilde{\mu}z_t \gg 1$.

¹En el resto del trabajo no vamos a escribir la contribución de ρ_ν .

En la zona IR esperamos que la solución sea similar a la obtenida en AdS puro. A esta solución le agregamos una corrección que esperamos que esté suprimida por $\tilde{\mu}z$.

$$\rho = \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \sqrt{z_0^2 - z^2} + \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \sigma_1(z) \quad (3.19)$$

Reemplazamos f por su aproximación IR (2.12) y linealizamos la ecuación (2.21) para encontrar una ecuación para la primer corrección

$$\begin{aligned} \sqrt{z_0^2 - z^2} \left((d-2 + \tilde{\alpha}) z_0^2 z - (\tilde{\alpha} - 1) z^3 \right) \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} = \sigma_1(z) (d-2) z_0^2 z + \\ \sigma_1'(z) (2z^4 + (d-3) z_0^2 z^2 - (d-1) z_0^4) + \sigma_1''(z) (z^5 + z z_0^4 - 2z^3 z_0^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

La solución a esta ecuación es una integral de funciones hypergeométricas, pero para simplificar las cuentas no vamos a usar esta expresión. Recordemos que nos interesa la solución para R grande. Lo primero que observamos de la ecuación es que σ_1 es de orden $(\tilde{\mu}z)^{-2\tilde{\alpha}}$. El valor de z_t se obtiene a este orden de aproximación como

$$z_0^2 = z_t^2 + \sigma_1^2(z_t) \quad (3.21)$$

Por lo tanto $z_0 \sim z_t$ más correcciones de orden $(\tilde{\mu}z_t)^{-2\tilde{\alpha}}$. Por analogía con el caso de AdS esperamos que $z_t \sim R$, esto se hará evidente después de encontrar la solución. La expansión correcta es entonces para z_0 grande. Si expandimos la ecuación (3.20) obtenemos la ecuación lineal aproximada para σ_1 a orden z_0^{-1}

$$\frac{z(d-2 + \tilde{\alpha})}{z_0} \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} = -(d-1)\sigma_1'(z) + z\sigma_1''(z) \quad (3.22)$$

La solución es ²

$$\sigma_1 = c_0 + \frac{1}{z_0} \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{(\tilde{\alpha} + d - 2)z^2}{2(\tilde{\alpha} - 1)(2\tilde{\alpha} + d - 2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z_0^2}\right) \quad (3.23)$$

Reemplazamos esta solución en (3.19) y también expandimos la raíz para llegar a la expresión que buscábamos

$$\rho(z) = \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} z_0 - \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \frac{1}{z_0} \frac{z^2}{2} \left(1 - \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{(\tilde{\alpha} + d - 2)}{(\tilde{\alpha} - 1)(2\tilde{\alpha} + d - 2)} + \dots \right) + c_0 + \dots \quad (3.24)$$

Los primeros '...' se refieren a potencias mayores de $(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}$ y los segundos '...' son términos con potencias mayores de $1/z_0$. Ambos dependen de correcciones de ordenes

²No consideramos la solución homogénea debido a que se corresponde a los términos de potencias fraccionarias de R .

más altos de la ecuación (3.19).

3.2.3. Empalmando soluciones

La corrección ρ_n tiene el parámetro libre b_n . Para obtener estos valores necesitamos información de la zona IR. Debemos expandir las integrales (3.15) para $\tilde{\mu}z \gg 1$ usando la aproximación (2.12) para $f(z)$.

La primera corrección (3.14) tiene dos términos. Para expandir el primero partimos la integral en algún valor dentro de la zona IR $\tilde{\mu}Z \gg 1$. En el intervalo (z, Z) podemos usar la aproximación IR. El resultado es independiente de Z a orden $(\tilde{\mu}Z)^{-2\tilde{\alpha}}$, por lo tanto al final de la cuenta tomamos $Z \rightarrow \infty$. Aproximamos la integral como

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} &\approx \int_{\epsilon}^Z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} + \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \int_Z^z du u^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(\tilde{\mu}u)^{-2\tilde{\alpha}} + \dots \right) \\ &\approx \Sigma + \frac{z^d}{d} \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \left(1 + \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{d}{2(d-2\tilde{\alpha})} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde definimos

$$\Sigma = \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^Z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} - \frac{Z^d}{d} \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \left(1 + \frac{1}{(\tilde{\mu}Z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{d}{2(d-2\tilde{\alpha})} + \dots \right) \quad (3.26)$$

Usamos el mismo método para expandir el segundo término

$$\begin{aligned} &-(d-2) \int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_{\infty}^u dv \frac{1}{v^{d-1}\sqrt{f(v)}} \\ &\approx -(d-2) \int_{\epsilon}^Z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_{\infty}^u dv \frac{1}{v^{d-1}\sqrt{f(v)}} \\ &+ (d-2) \frac{\ell_{IR}^2}{\ell_{UV}^2} \int_Z^z du u^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2(\tilde{\mu}u)^{2\tilde{\alpha}}} \right) \int_{\infty}^u dv v^{1-d} \left(1 + \frac{1}{2(\tilde{\mu}v)^{2\tilde{\alpha}}} \right) \\ &= \Gamma + \frac{\ell_{IR}^2}{\ell_{UV}^2} \frac{z^2}{2} \left(1 - \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{(\tilde{\alpha} + d - 2)}{(\tilde{\alpha} - 1)(2\tilde{\alpha} + d - 2)} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

definiendo

$$\begin{aligned} \Gamma &= \lim_{Z \rightarrow \infty} -(d-2) \int_{\epsilon}^Z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_{\infty}^u \frac{dv}{v^{d-1}\sqrt{f(v)}} \\ &\quad - \frac{\ell_{IR}^2}{\ell_{UV}^2} \frac{Z^2}{2} \left(1 - \frac{1}{(\tilde{\mu}Z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{(\tilde{\alpha} + d - 2)}{(\tilde{\alpha} - 1)(2\tilde{\alpha} + d - 2)} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como resultado tenemos la siguiente expansión

$$\rho(z) = R - \frac{1}{R} \left[b_1 \Sigma + \Gamma + \frac{\ell_{IR}^2 z^2}{\ell_{UV}^2} \left(1 - \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{(\tilde{\alpha} + d - 2)}{(\tilde{\alpha} - 1)(2\tilde{\alpha} + d - 2)} + \dots \right) + b_1 \frac{\ell_{IR} z^d}{\ell_{UV} d} \left(1 + \frac{1}{(\tilde{\mu}z)^{2\tilde{\alpha}}} \frac{d}{2(d - 2\tilde{\alpha})} + \dots \right) \right] + \dots \quad (3.29)$$

Ahora que tenemos ambas expansiones (3.29) y (3.24) en la misma forma podemos igualar los coeficientes para obtener su valor

$$R = \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} z_0, \quad b_1 = 0, \quad c_0 = -\frac{\Gamma}{R} \quad (3.30)$$

Vemos que $z_0 \sim R$, como era esperado. Esto comprueba que la expansión en z_0 era la correcta.

Observemos que en (3.29) la corrección con la primer potencia de R tiene dos términos z^2 y z^d . El parámetro b_1 es el coeficiente de $\frac{z^d}{R}$. Realizando el mismo procedimiento para las siguientes correcciones, esquemáticamente tenemos la siguiente forma

$$\rho(z) = R - \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \frac{z^d}{d} \left(\frac{b_1}{R} + \frac{b_3}{R^3} + \dots \right) - \frac{z^2}{R} \# - \frac{z^4}{R^3} \# - \dots \quad (3.31)$$

Para obtener los parámetros b_n tenemos que identificar las potencias de z^d/R^n en la expansión de z grande (3.19). σ es de orden $(\tilde{\mu}z)^{-2\tilde{\alpha}}$ por lo que solo tenemos que expandir la raíz.

$$\frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \sqrt{z_0^2 - z^2} = \frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \frac{z^{2k}}{z_0^{2k-1}} \quad (3.32)$$

De aquí leemos los coeficientes

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \neq d - 1 \\ -d(-1)^{d/2} \binom{1/2}{d/2} \left(\frac{\ell_{IR}}{\ell_{UV}} \right)^{d-1} & n = d - 1, d = \text{par.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Para no considerar el caso especial $n = d - 1$, vamos a trabajar con dimensión fraccionaria, donde todos los b_n son nulos. Tomado el límite a la dimensión entera vamos a recuperar el resultado correcto.

3.3. Escalas y aproximaciones

Este es un buen punto para resumir todas las escalas y consideraciones. En la figura 3.1 se dibuja esquemáticamente $\rho(z)$ y las escalas que estamos teniendo en cuenta.

El objetivo final es calcular los coeficientes de la estructura geométrica de la entropía para una esfera en el vacío (1.1). La entropía es proporcional al área de la superficie

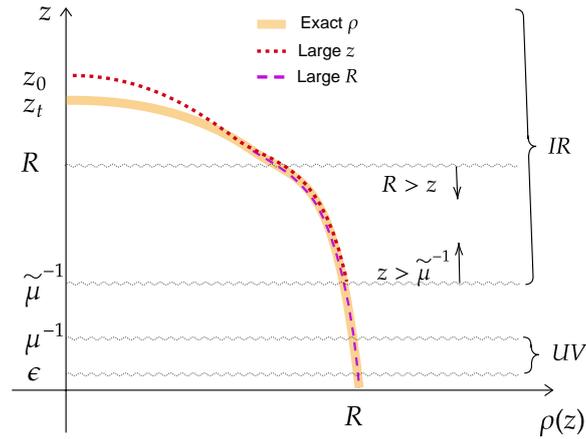


Figura 3.1: En el eje z se muestran todas las escalas relevantes. Se graficaron esquemáticamente la solución exacta de $\rho(z)$ en línea ancha, la expansión de R grande dada por la ecuación (3.29) en línea de trazos largos y la expansión de z grande a primer orden en z_0^{-1} dada por ecuación (3.24) en línea de trazos cortos.

extremal parametrizada por $\rho(z)$. Esta área es infinita porque la métrica (2.2) diverge en $z \rightarrow 0$. Para regularizarla utilizamos un regulador ϵ . Por definición ϵ es la escala más chica. Las divergencias que nos interesan vienen de tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

El espacio de bulk tiene dos zonas que identificamos de la ecuación (2.12). La zona UV corresponde a valores $\mu z \ll 1$. Si todas las escalas están en esta zona, cualquier cantidad podemos calcularla usando la teoría UV. En el otro lado tenemos $\tilde{\mu} z \gg 1$, en este caso cualquier cantidad se puede calcular utilizando la teoría IR. Cantidades universales como a_u en la ecuación (1.1) son independientes de la regularización. Por lo tanto en el régimen IR podríamos usar tanto ϵ o $\tilde{\mu}$ como regulador y su valor no cambia. Por el otro lado, los términos no universales dependen de todo el flujo de renormalización. Para obtener cantidades físicas debemos comparar estos términos con la teoría UV utilizando el mismo regulador ϵ . En nuestro caso de una esfera en el vacío, la escala es R . Para testear la teoría IR debemos tomar R grande, mas precisamente $\tilde{\mu} R \gg 1$.

Al expandir $\rho(z)$ encontramos la forma (3.17) para el rango $\rho_1(z) \ll R^2$. Vemos en la ecuación (3.29) que $\rho_1 \sim z^2$ para $\tilde{\mu} z \gg 1$. Por lo tanto la expansión de R grande es valida para $R \gg z$, ver la figura 3.1. En esta expansión tenemos un parámetro libre, para encontrar su valor empalmamos con una nueva expansión. La expansión (3.24) para z grande es válida en la zona IR. La solución completa de σ es muy complicada. Como solo nos interesa empalmar en la zona $R > z$, expandimos para z_0 grande. Así llegamos a la solución de σ_1 a orden z_0^{-1} dada en la ecuación (3.23). Esta expansión para z grande no se anula en z_t , pero esto está bien porque nos interesa aproximar en la zona $R < z < \tilde{\mu}^{-1}$. En esta zona ambas aproximaciones son validas y podemos encontrar los parámetros libres igualando los coeficientes.

Luego de empalmar las expansiones tenemos una expansión de ρ para R grande.

No solucionamos el problema completo pero tenemos la información suficiente para reemplazar ρ en la entropía y calcular los términos geométricos.

Capítulo 4

Estructura geométrica de la entropía

El capítulo anterior estaba dedicado a derivar la expansión de la superficie mínima en el régimen $\tilde{\mu}R \gg 1$. Ahora evaluamos los términos geométricos de la entropía de Ryu Takayanagi usando esta expansión y calculamos los coeficientes en el régimen IR. Los resultados para la teoría UV se obtienen simplemente reemplazando $f = 1$. De esta forma vamos a comparar las entropías calculadas en las dos teorías y vamos a mostrar la irreversibilidad de los primeros tres términos.

4.1. Expansión de la entropía

Para hacer más claro la dependencia con R escribimos la ecuación (2.19) sacando R^{d-2} fuera de la integral

$$S = \gamma R^{d-2} \int_{\epsilon}^{z_t} \frac{dz}{z^{d-1}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{d-2} \sqrt{\rho'^2 + \frac{1}{f(z)}} \quad (4.1)$$

Ambos términos (ρ/R) y ρ' solo contienen potencias inversas impares de R . La expansión del integrando en el límite de R grande reproduce la estructura (1.1). La integral también depende de R a través del límite superior de integración, sin embargo esto no contribuye a los términos geométricos y por lo tanto no vamos a calcular esta contribución. Podemos ver que no contribuye porque z_t es a primer orden proporcional a R . Cuando el factor z^{d-1} se evalúa en el límite superior, se compensa con el factor R^{d-2} fuera de la integral. En el régimen R grande podemos reemplazar el límite superior de integración por $z_t \rightarrow \infty$.

El primer término de esta expansión reproduce la ley de área

$$S^{(d-2)} = \gamma R^{d-2} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \quad (4.2)$$

El segundo término depende de ρ_1 y debe ser evaluado en la solución (3.14)

$$\begin{aligned} S^{(d-4)} &= \gamma R^{d-4} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \left(\frac{1}{2} f(z) \rho_1'^2 - (d-2) \rho_1 \right) \\ &= -\gamma R^{d-4} \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \sqrt{f(z)} \rho_1'^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

En la segunda igualdad se usa la ecuación de Lagrange para ρ_1 para ver que ambos términos son proporcionales

$$\int_{\epsilon}^{\infty} dz \rho_1 \frac{-(d-2)}{z^{d-1} \sqrt{f}} = \int_{\epsilon}^{\infty} dz \rho_1 \left(\frac{\sqrt{f} \rho_1'}{z^{d-1}} \right)' = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \sqrt{f} \rho_1'^2 + \underbrace{\rho_1 \frac{\sqrt{f} \rho_1'}{z^{d-1}} \Big|_{\epsilon}^{\infty}}_{=0} \quad (4.4)$$

Observar que si minimizamos $S^{(d-4)}$ respecto a ρ_1 , obtenemos las mismas ecuaciones que habíamos encontrado en (3.15) expandiendo la ecuación completa para ρ (2.21). Esta es otra forma de obtener las ecuaciones para las correcciones ρ_n .

4.2. Irreversibilidad

Para obtener el cambio en los coeficientes geométricos le restamos a los términos $S^{(d-2)}$ y $S^{(d-4)}$ de la sección anterior su valor en la teoría UV. El primer coeficiente es

$$\Delta\mu_1 = \frac{\Delta S^{(d-2)}}{R^{d-2}} = \gamma \left(\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \right) < 0 \quad (4.5)$$

Sabemos que $f(z) > 1$ por la NEC. Como $f(z)$ está en el denominador, la contribución UV es mayor. Esto prueba la irreversibilidad del primer coeficiente geométrico. Este resultado fue obtenido en [16]¹ utilizando la función de dos puntos del tensor de energía impulso.

Para analizar mejor el resultado podemos integrar por partes la primera integral. El término de borde se cancela con la segunda integral usando que $f(\epsilon) = 1$. La expresión final es

$$\Delta\mu_1 = \gamma \frac{1}{d-2} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-2}} \frac{-f'(z)}{2f(z)^{3/2}} \quad (4.6)$$

Aproximando la integral cerca del límite inferior de integración, usando la aproximación UV de (2.12), vemos que la contribución que viene de distancias cortas es de orden $\Delta\mu_1 \sim \mu^{2(d-\Delta)} \epsilon^{d-2-2(d-\Delta)}$, como calculamos en (1.8) a partir de análisis dimensional

¹Ellos utilizan otras coordenadas. Para utilizar su notación hay que realizar el cambio de variables $A(r) = -\ln(z/\ell_{UV})$, $A'(r) = \sqrt{f(z)}/\ell_{UV}$

en teoría de perturbaciones.

La ecuación (4.5) prueba la irreversibilidad en todas las dimensiones, sin embargo hay una diferencia conceptual en $\Delta\mu_1$ para $d = 2$ y $d > 2$ que se observa en (4.6). En dimensiones mayores, el cambio se escribe como una integral sobre todo z . El cambio depende de todas las escalas del flujo de renormalización. Esta cantidad puede ser diferente para sistemas que tienen los mismos puntos fijos. Para el caso $d = 2$ el integrando se convierte en una derivada total por lo que solo depende de los bordes de integración, es decir que depende de cantidades intrínsecas de los puntos fijos. El factor $1/(d-2)$ combinado con R^{d-2} forma un logaritmo, al igual que mostramos en el caso AdS puro usando el límite (3.5). El cambio del término de área para dimensión dos es

$$\Delta\mu_1|_{d=2} = \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{f(\infty)}} - \frac{1}{\sqrt{f(\epsilon)}} \right) = \frac{\ell_{IR} - \ell_{UV}}{2G} \quad (4.7)$$

Como mostramos en (3.11) utilizando la solución explícita de $d = 2$.

Ahora seguimos el mismo procedimiento para el término siguiente. Reemplazando ρ_1 en su valor extremal y restando la contribución UV

$$\Delta\mu_3 = -\frac{\gamma}{2} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z^{d-1}}{\sqrt{f}} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1}} \frac{d-2}{\sqrt{f}} \right)^2 - \int_{\epsilon}^{\infty} dz z^{d-1} \left(\int_z^{\infty} dv \frac{d-2}{v^{d-1}} \right)^2 \right] > 0 \quad (4.8)$$

Otra vez podemos definir el signo utilizando la NEC. Para este término la diferencia es positiva. Pero el coeficiente es negativo. Es decir que en modulo el coeficiente decrece. Esta vez es más tedioso reordenar la integral por partes, lo realizamos en el apéndice C, la expresión final es

$$\begin{aligned} \Delta\mu_3 = & \frac{3\gamma}{4(d-4)} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-4}} \frac{f'(z)}{f(z)^{5/2}} + \frac{\gamma}{4} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z}{f(z)} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-2}} \frac{f'(v)}{f(v)^{3/2}} \right) \\ & + (d-2) \frac{\gamma}{4} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z^{d-1}}{\sqrt{f(z)}} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1} f(v)^{1/2}} \right) \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-2}} \frac{f'(v)}{f(v)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para $d > 4$ el cambio depende en todo el flujo. Para el caso $d = 4$ tenemos que diferenciar el primer término de los otros dos. Los últimos dos no tienen el factor $1/(d-4)$, por lo tanto contribuyen al término constante. La primera integral es la que contribuye al término universal logarítmico. Vemos que si la evaluamos obtenemos la diferencia de las anomalías de los puntos fijos

$$\Delta\mu_3|_{d=4} = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{f(\infty)^{3/2}} - \frac{1}{f(\epsilon)^{3/2}} \right) = -4(a_{IR} - a_{UV}) \quad (4.10)$$

Usamos la anomalía holográfica en 4 dimensiones $a = \frac{\pi \ell^3}{8G}$.

La demostración entrópica utilizando la SSA, mostraba que este término es irreversible. Sin embargo no había una expresión para calcular el cambio de este coeficiente. Hasta ahora no había ninguna prueba de la irreversibilidad de los siguientes términos, en la siguiente sección vamos a mostrar el caso del tercer coeficiente.

4.3. Tercer término geométrico de la entropía

Siguiendo con la expansión de la entropía podemos calcular el tercer término

$$S^{(d-6)} = \gamma R^{d-6} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \left(\frac{1}{2}(d-3)(d-2)\rho_1(z)^2 - (d-2)\rho_3(z) - \frac{1}{2}(d-2)\rho_1(z)f(z)\rho_1'(z)^2 - \frac{1}{8}f(z)^2\rho_1'(z)^4 + f(z)\rho_1'(z)\rho_3'(z) \right) \quad (4.11)$$

Debemos evaluar la integral en la solución extremal que satisface las ecuaciones (3.15). Estas ecuaciones las podemos obtener como ecuaciones de Lagrange para $S^{(d-6)}$ como funcional de ρ_1 y ρ_3 . Observemos que ρ_3 solo aparece linealmente, la ecuación de Lagrange respecto de ρ_3 es la misma ecuación (3.15) para ρ_1 . Si llamamos $\mathcal{L}^{(d-6)}$ al integrando

$$\partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(d-6)}}{\partial \rho_3'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^{(d-6)}}{\partial \rho_3} = \partial_z \left(\frac{\sqrt{f(z)}}{z^{d-1}} \rho_1'(z) \right) + \frac{(d-2)}{z^{d-1}\sqrt{f(z)}} = 0 \quad (4.12)$$

Usamos esta ecuación adentro de la integral para cancelar todos los términos con ρ_3 .

$$S^{(d-6)} = \gamma R^{d-6} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \left(\frac{1}{2}(d-3)(d-2)\rho_1(z)^2 - \frac{1}{2}(d-2)\rho_1(z)f(z)\rho_1'(z)^2 - \frac{1}{8}f(z)^2\rho_1'(z)^4 \right) \quad (4.13)$$

En el apéndice C, usando la forma explícita de ρ_1 y su ecuación de Lagrange, luego de un montón de álgebra e integraciones por partes reescribimos la integral como

$$\begin{aligned}
S^{d-6} = & R^{d-6} \frac{\gamma_d}{8} \frac{1}{3(d-2)} \left[(d-10) \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z^{3(d-1)}}{\sqrt{f(z)}} \left(\int_z^{\infty} dv \frac{(d-2)}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \right)^4 \right. \\
& + 8(d-1)(d-4) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^d} \left(\int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_u^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1}} \frac{d-2}{\sqrt{f(v)}} \right) \\
& \left. \times \left(z^{d-1} \int_z^{\infty} dv \frac{(d-2)}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \right)^3 \right] \quad (4.14)
\end{aligned}$$

En el caso $d > 10$ esta expresión es explícitamente positiva. Reemplazando $f = 1$, utilizando la NEC y observando que todas las f están en el denominador probamos que la contribución UV es mayor.

Para el otro rango de dimensiones $6 \leq d < 10$, utilizamos otra expresión de la misma integral derivada en el apéndice C

$$\begin{aligned}
S^{d-6} = & \frac{\gamma_d}{8} \frac{R^{d-6}}{3(d-2)} \left[9(d-2)(d-4) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^d} \left(\int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_u^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1}} \frac{d-2}{\sqrt{f(v)}} \right) \right. \\
& \quad \times \left(z^{d-1} \int_z^{\infty} dv \frac{(d-2)}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \right)^3 \\
& + \frac{3}{2}(d-2)(d-10) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z} \left(\int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_u^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1}} \frac{d-2}{\sqrt{f(v)}} \right) \\
& \quad \left. \times \left(z^{d-1} \int_z^{\infty} dv \frac{(d-2)}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \right)^2 \int_z^{\infty} dw \frac{1}{w^{d-2}} \frac{f'(w)}{f(w)^{3/2}} \right] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

El primer término es positivo y el segundo negativo. Como el segundo término tiene adentro $f'(w)$, se anula en la teoría UV. Utilizando otra vez que $f(z) > 1$ el primer término se convierte en negativo luego se sustraer la contribución UV. De esta forma concluimos la demostración, para toda dimensión en el rango de interés $d \geq 6$, de la irreversibilidad del tercer término geométrico.

$$\Delta\mu_5 = \frac{\Delta S^{(d-6)}}{R^{d-6}} < 0 \quad (4.16)$$

Como se comentó en la sección anterior la irreversibilidad de este término va más allá de la SSA, y para demostrarla solo tuvimos que asumir la NEC. Esto motiva a buscar desigualdades más fuertes que la SSA que impliquen mayor cantidad de derivadas. En este trabajo siempre asumimos que R era grande, por esta razón no se necesitaron utilizar derivadas de la entropía y alcanzó con mirar los coeficientes de la expansión.

Capítulo 5

Conclusiones

Motivados en generalizar los teoremas de irreversibilidad para los términos geométricos de la entropía, utilizamos herramientas holográficas para calcular la entropía de una esfera en el vacío para una teoría con dos puntos fijos, el UV y el IR. Holográficamente la entropía es proporcional al área de la superficie mínima anclada a la esfera en el borde. La ecuación de esta superficie mínima es no lineal y en general no se puede escribir una solución explícita. Se resolvió la ecuación en una expansión para R grande y se utilizó la solución para expandir la entropía y obtener los términos geométricos. Viendo cada término de la expansión por separado se demostró la irreversibilidad de los primeros 3 coeficientes y se encontró una expresión holográfica para ellos.

Ya había una demostración previa para la irreversibilidad de los primeros dos coeficientes. Esta demostración, utilizaba la SSA para regiones espacio-temporales y derivaba una desigualdad para derivadas de la entropía. Esta desigualdad tiene hasta dos derivadas y es por eso que no se puede utilizar para mostrar la irreversibilidad de los siguientes órdenes. La fórmula de Ryu Takayanagui cumple con la SSA de regiones espaciales. Para que cumpla con la SSA en regiones espacio-temporales, hay que asumir la NEC [17]. En la demostración realizada en esta tesis no se tuvo que asumir nada más que la NEC. Esto ya es una muestra de que para teorías holográficas, esta propiedad es más fuerte que la SSA. Como la irreversibilidad se derivó para el régimen R grande, motiva a buscar desigualdades que impliquen mayor cantidad de derivadas de la entropía en este régimen.

Por otro lado, haber mostrado la irreversibilidad del tercer término motiva a generalizar la irreversibilidad a todos los términos. No se pudo ver un patrón que generalice directamente a todos los términos, pero sí se vieron algunas regularidades que podrían indicar por donde encarar el problema. Los signos de los coeficientes van alternando, y siempre la contribución UV es mayor en modulo. También resulta útil utilizar las ecuaciones de Lagrange de cada corrección para reducir la integral hasta que su contribución UV tenga una signo definido. Esperamos poder reportar estos resultados en

un trabajo futuro.

Apéndice A

Área de la superficie mínima

La fórmula de la entropía de Ryu Takayanagui es proporcional al área de una superficie extremal, a continuación escribiremos en general como se calcula un área en un espacio curvo y lo aplicaremos a la región de interés para llegar a la ecuación (2.19).

Dado un espacio curvo $d + 1$ dimensional, con una métrica g_{MN} en las coordenadas x^M , y una superficie σ de n dimensiones parametrizada por $x^M(\sigma^a)$, el intervalo invariante sobre la superficie se escribe como

$$ds_\sigma^2 = g_{MN} \frac{dx^M}{d\sigma_a} \frac{dx^N}{d\sigma_b} d\sigma^a d\sigma^b = h_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \quad (\text{A.1})$$

donde se definió la métrica inducida h_{ab} .

El área de σ se calcula como la integral de la medida de integración invariante

$$\text{Área}(\sigma) = \int d^n \sigma \sqrt{\det(h)} \quad (\text{A.2})$$

En nuestro caso la superficie tiene $d - 1$ dimensiones. Elegimos las coordenadas del bulk y la métrica dadas por (2.2). Sabemos que sobre el borde del espacio coincide con la esfera de radio R . La esfera tiene dos propiedades que simplifican los cálculos.

Es una región espacial a tiempo $x_0 = 0$. Como la métrica es invariante ante traslaciones temporales, la superficie mínima no puede salir del plano $x_0 = 0$. Por lo tanto $\frac{dx^0}{d\sigma_a} = 0$. La esfera y la métrica tienen simetría de rotación, por lo tanto la superficie mínima y la métrica inducida sobre ella van a ser invariantes rotacionales, es decir que podemos usar como parámetros los ángulos y sabemos que las coordenadas ρ y z no se van a mezclar con ellos. Esto ya nos fija $d - 2$ parámetros. Elegimos como parámetro restante la componente z . La única función que nos falta definir para encontrar la superficie mínima es $\rho(z)$. Para calcularla escribimos el área con la ecuación (A.2) y se minimiza utilizando la ecuación de Euler Lagrange. Observar que en general para minimizar una superficie de $d - 1$ dimensiones hacen falta $d - 1$ ecuaciones, pero gracias a las simetrías las redujimos a una sola.

La métrica es diagonal, entonces se simplifica la medida de integración

$$d^n \sigma \sqrt{\det(h)} = \prod_a d\sigma^a \sqrt{h_{aa}} = \prod_a d\sigma^a \sqrt{\sum_M g_{MM} \frac{dx^M}{d\sigma_a} \frac{dx^M}{d\sigma_b}} \quad (\text{A.3})$$

Por cada ángulo vamos a tener un factor de $(\ell_{UV} \rho(z)/z)$ y la integral de todos los ángulos la notamos como

$$\int d\Omega_{d-2} = \text{Vol}(S^{d-2}) \quad (\text{A.4})$$

De la dependencia con el parámetro z tenemos las contribuciones de la coordenada z y la coordenada ρ , calculamos que

$$g_{MN} \frac{dx^M}{dz} \frac{dx^N}{dz} = \frac{\ell_{UV}^2}{z^2} \left(\frac{1}{f(z)} + \rho'(z)^2 \right) \quad (\text{A.5})$$

Juntando todo, el área se escribe como

$$\text{Área}(\sigma) = \text{Vol}(S_{d-2}) \ell_{UV}^{d-1} \int_0^{z_t} dz \frac{\rho^{d-2}}{z^{d-1}} \sqrt{\rho'(z)^2 + \frac{1}{f(z)}} \quad (\text{A.6})$$

El límite de integración superior está definido como el punto máximo de z , que por la simetría esférica sabemos que va a ocurrir en $\rho(z_t) = 0$. dividiendo por el factor de $4G$ obtenemos la ecuación (2.19).

Apéndice B

Derivada de la entropía

Aún sin resolver las ecuaciones para ρ , es posible calcular la derivada de la entropía. Queremos derivar

$$S = \gamma \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{\rho^{d-2}}{z^{d-1}} \sqrt{(\partial_z \rho)^2 + \frac{1}{f(z)}} \quad (\text{B.1})$$

respecto al radio R . S depende de R a través de z_t , ρ y ρ' . Para reducir la notación llamamos \mathcal{L} al integrando y utilizamos primas para referirnos a la derivada parcial respecto a z .

$$\frac{dS}{dR} = \mathcal{L} \Big|_{z_t} \frac{dz_t}{dR} + \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{d\mathcal{L}}{dR} \quad (\text{B.2})$$

El segundo término se puede simplificar con las ecuaciones de Lagrange $\partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}$.

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{d\mathcal{L}}{dR} &= \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial R} \\ &= \int_{\epsilon}^{z_t} dz \frac{\partial \rho}{\partial R} \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} \partial_z \frac{\partial \rho}{\partial R} = \int_{\epsilon}^{z_t} dz \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho}{\partial R} \Big|_{z_t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho}{\partial R} \Big|_{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

De la forma explícita de \mathcal{L} , usando la condición de borde $\rho(z_t) = 0$, los términos evaluados en z_t se anulan. La otra condición de borde es $\rho(\epsilon) = R$. Tomando la derivada parcial vemos que $\frac{\partial \rho}{\partial R} \Big|_{\epsilon} = 1$. Ahora podemos escribir la derivada de la entropía como

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'} \Big|_{\epsilon} = -\gamma \frac{\rho^{d-2}}{z^{d-1}} \frac{\partial_z \rho}{\sqrt{(\partial_z \rho)^2 + \frac{1}{f(z)}}} \Big|_{z=\epsilon} \quad (\text{B.4})$$

Apéndice C

Cuentas...

Integrales $S^{(d-4)}$

Partimos de la forma (4.3)

$$S^{(d-4)} = -\frac{\gamma}{2} R^{d-4} \int_{\epsilon}^{zt} \frac{dz}{z^{d-1}} \sqrt{f(z)} \rho_1'^2 = -\gamma(d-2)^2 \int_{\epsilon}^{zt} dz \frac{z^{d-1}}{\sqrt{f(z)}} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(v)}} \right)^2. \quad (\text{C.1})$$

Adentro de la integral elevada al cuadrado escribimos $\frac{1}{v^{d-1}} = \left(\frac{-1}{d-2} \frac{1}{v^{d-2}}\right)'$, integramos por partes y expandimos el cuadrado

$$S^{(d-4)} = -\frac{\gamma}{2} R^{d-4} \int_{\epsilon}^{zt} \frac{dz}{z^{d-3}} \frac{1}{f(z)^{3/2}} + \frac{\gamma}{2} R^{d-4} \int_{\epsilon}^{zt} dz \frac{z}{f(z)} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-2}} \frac{f'(v)}{f(v)^{3/2}} \right) - \frac{\gamma}{8} R^{d-4} \int_{\epsilon}^{zt} dz \frac{z^{d-1}}{\sqrt{f(z)}} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-2}} \frac{f'(v)}{f(v)^{3/2}} \right)^2. \quad (\text{C.2})$$

Adentro de la primer integral escribimos $\frac{1}{z^{d-3}} = \left(\frac{-1}{d-4} \frac{1}{v^{d-4}}\right)'$ e integramos por partes

$$S \Big|_{R^{d-4}} = \frac{\gamma}{(d-4)} \left(-\frac{1}{\epsilon^{d-4}} + \frac{3}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-4}} \frac{f'(z)}{f(z)^{5/2}} \right) + \frac{\gamma}{2} \int_{\epsilon}^{zt} dz \frac{z}{f(z)} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-2}} \frac{f'(v)}{f(v)^{3/2}} \right) + \frac{\gamma}{2} (d-2) \int_{\epsilon}^{zt} dz \frac{z^{d-1}}{\sqrt{f(z)}} \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1} f(v)^{1/2}} \right) \left(\int_z^{\infty} \frac{dv}{v^{d-2}} \frac{f'(v)}{f(v)^{3/2}} \right). \quad (\text{C.3})$$

Cuando evaluamos la expresión (4.8) el término $-\frac{1}{\epsilon^{d-4}}$ se cancela con la contribución UV para llegar a la expresión final 4.9.

Integrales $S^{(d-6)}$

Partimos de la ecuación (4.13)

$$\begin{aligned} S^{(d-6)} &= \gamma R^{d-6} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \left(\frac{1}{2}(d-3)(d-2)\rho_1(z)^2 - \frac{1}{2}(d-2)\rho_1(z)f(z)\rho_1'(z)^2 - \frac{1}{8}f(z)^2\rho_1'(z)^4 \right) \\ &= R^{d-6} \frac{\gamma}{8} (4(d-3)I_1 - 4I_2 - I_3) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Nombramos las siguientes integrales

$$I_1 = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} \frac{d-2}{\sqrt{f}} \rho_1^2, \quad I_2 = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} (d-2)\sqrt{f}\rho_1\rho_1'^2, \quad I_3 = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} f^{3/2}\rho_1'^4 \quad (\text{C.5})$$

Reemplazando $\frac{d-2}{z^{d-1}\sqrt{f(z)}} = -\partial_z \left(\rho_1'(z) \frac{\sqrt{f(z)}}{z^{d-1}} \right)$ en I_1 e integrando por partes vemos que

$$I_1 = \frac{2}{d-2} I_2 \quad (\text{C.6})$$

Utilizando el mismo reemplazo en I_2 e integrando por partes

$$I_2 = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{d-1}} f^{3/2}(z)\rho_1'(z)^4 + \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{\rho_1(z)}{z^{d-1}} \left(\sqrt{f(z)}f'(z)\rho_1'(z)^3 + 2f(z)^{3/2}\rho_1'(z)^2\rho_1''(z) \right) \quad (\text{C.7})$$

Identificando $\sqrt{f(z)}f'(z)\rho_1'(z)^3 + 2f(z)^{3/2}\rho_1'(z)^2\rho_1''(z) = \left(\frac{2}{3}f(z)^{3/2}\rho_1'(z)^3 \right)'$ e integrando por partes llegamos a

$$I_2 = \frac{I_3}{3} + \frac{2}{3}(d-1)I_4 \quad (\text{C.8})$$

donde definimos

$$I_4 = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^d} f^{3/2}\rho_1\rho_1'^3 \quad (\text{C.9})$$

Escribimos (C.4) reemplazando I_1, I_2 por I_3 e I_4 y reemplazamos sus valores explícitos

$$\begin{aligned}
S^{(d-6)} &= R^{d-6} \frac{\gamma}{8} \frac{1}{3(d-2)} [(d-10)I_3 + 8(d-1)(d-4)I_4] \\
&= R^{d-6} \frac{\gamma}{8} \frac{1}{3(d-2)} \left[(d-10) \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z^{3(d-1)}}{\sqrt{f(z)}} \left(\int_z^{\infty} dv \frac{(d-2)}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \right)^4 \right. \\
&\quad \left. + 8(d-1)(d-4) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^d} \left(\int_{\epsilon}^z du \frac{u^{d-1}}{\sqrt{f(u)}} \int_u^{\infty} \frac{dv}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \frac{d-2}{\sqrt{f(v)}} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(z^{d-1} \int_z^{\infty} dv \frac{(d-2)}{v^{d-1} \sqrt{f(v)}} \right)^3 \right] \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Para $d > 10$, utilizando la NEC se demuestra que $\Delta S^{(d-6)} < 0$.

Para llegar a la forma (4.15) conviene usar que

$$I_3 = -2(d-1)I_4 + 3I_2 \tag{C.11}$$

Dentro de I_2 podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^{d-2} f(z)^{1/2}} &= - \int_z^{\infty} dw \partial_w \left(\frac{1}{w^{d-2} f(w)^{1/2}} \right) \\
&= \int_z^{\infty} dw \left(\frac{d-2}{w^{d-1} f(w)^{1/2}} + \frac{1}{2w^{d-2}} \frac{f'(w)}{f(w)^{3/2}} \right) \tag{C.12}
\end{aligned}$$

El primer término forma una integral proporcional a I_4 , entonces

$$I_3 = (d-4)I_4 + \frac{3}{2}(d-2) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z} \rho_1(z) \rho_1'(z)^2 f(z) \int_z^{\infty} dw \frac{1}{w^{d-2}} \frac{f'(w)}{f(w)^{3/2}} \tag{C.13}$$

Reemplazamos esta expresión en (C.10) llegamos a la ecuación (4.15).

$$\begin{aligned}
S^{d-6} &= R^{d-6} \frac{\gamma d}{8} \frac{1}{3(d-2)} \left[9(d-2)(d-4)I_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}(d-2)(d-10) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z} \rho_1(z) \rho_1'(z)^2 f(z) \int_z^{\infty} dw \frac{1}{w^{d-2}} \frac{f'(w)}{f(w)^{3/2}} \right] \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Para ver el signo de $\Delta S^{(d-6)}$ observamos que la integral con $f'(w)$ se anula en la contribución UV y que la contribución UV viene de reemplazar $f = 1$ en I_4

$$\begin{aligned}
\Delta S \Big|_{R^{d-6}} &= R^{d-6} \frac{\gamma d}{8} \frac{1}{3(d-2)} \left[9(d-2)(d-4)(I_4^f - I_4^{f=1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}(d-2)(d-10) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z} \rho_1(z) \rho_1'(z)^2 f(z) \int_z^{\infty} dw \frac{1}{w^{d-2}} \frac{f'(w)}{f(w)^{3/2}} \right] \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Como I_4 tiene todos los $f(z)$ en el denominador y $f(z) > 1$, entonces $I_4 - I_4^{f=1} < 0$.

En el rango $6 \leq d < 10$ el segundo término también es negativo. por lo tanto toda la expresión es negativa.

Bibliografía

- [1] Headrick, M. Lectures on entanglement entropy in field theory and holography, 2019. [1](#)
- [2] Srednicki, M. Entropy and area. *Physical Review Letters*, **71** (5), 666–669, 8 1993. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.666>. [1](#)
- [3] Casini, H., Mazzitelli, F., Testé, E. Area terms in entanglement entropy. *Physical Review D*, **91** (10), 5 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.104035>. [1](#), [3](#)
- [4] Ryu, S., Takayanagi, T. Aspects of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, **2006** (08), 045–045, 8 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2006/08/045>. [1](#), [4](#), [9](#)
- [5] Liu, H., Mezei, M. A refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom. *Journal of High Energy Physics*, **2013**, 02 2012. [1](#), [13](#)
- [6] Zamolodchikov, A. B. Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.*, **43**, 730–732, 1986. [2](#)
- [7] Komargodski, Z., Schwimmer, A. On renormalization group flows in four dimensions. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (12), 12 2011. URL [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2011\)099](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2011)099). [2](#)
- [8] Myers, R. C., Sinha, A. Holographic c-theorems in arbitrary dimensions. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (1), 1 2011. URL [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2011\)125](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2011)125). [2](#), [13](#)
- [9] Casini, H., Huerta, M. A c -theorem for entanglement entropy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **40**, 11 2006. [2](#)
- [10] Casini, H., Huerta, M. Renormalization group running of the entanglement entropy of a circle. *Physical Review D*, **85** (12), 6 2012. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.125016>. [2](#)

-
- [11] Casini, H., Torroba, G., Testé, E. The a-theorem and the markov property of the cft vacuum. 2017. 2
- [12] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Holographic rg flows, entanglement entropy and the sum rule. *Journal of High Energy Physics*, **2016** (3), Mar 2016. URL [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2016\)033](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2016)033). 3
- [13] Maldacena, J. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, **38** (4), 1113–1133, 1999. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1026654312961>. 5
- [14] Witten, E. Anti-de sitter space and holography. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, **2**, 253–291, 1998. URL <https://arxiv.org/abs/hep-th/9802150>. 5
- [15] Freedman, D. Z., Van Proeyen, A. Supergravity. Cambridge University Press, 2012. 6
- [16] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Holographic rg flows, entanglement entropy and the sum rule. *Journal of High Energy Physics*, **2016** (3), 3 2016. URL [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2016\)033](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2016)033). 21
- [17] Wall, A. C. Maximin surfaces, and the strong subadditivity of the covariant holographic entanglement entropy. *Classical and Quantum Gravity*, **31** (22), 225007, 11 2014. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/31/22/225007>. 25