

TESIS DE LA CARRERA: MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS

**TEORÍA DE CAMPOS EN VARIEDADES CON
SINGULARIDADES Y DEPENDENCIA TEMPORAL:
EFECTOS DE BORDE Y CREACIÓN DE PARES.**

Lic. Agustín Silva
Maestrando

Dr. César D. Fosco
Director

Miembros del Jurado

Dr. Gerardo Aldazabal (Instituto Balseiro)
Dr. Francisco Diego Mazzitelli (Instituto Balseiro)
Dr. Luis Esteban Oxman (Universidad Federal Fluminense)

1 de Febrero de 2022

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov - CAB)

A mi familia,
Y a quienes me acompañaron durante el trayecto,
Apoyando o contribuyendo a su manera.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Herramientas para el estudio de efectos de borde	3
1.2.1. Jacobiano de la transformación axial	3
1.2.2. Desacoplamiento con el campo de gauge	7
1.2.3. Paredes perfectas e imperfectas	9
1.3. Herramientas para el estudio de efectos disipativos	10
1.3.1. Geometría diferencial linealizada	10
1.3.2. Expansión de Magnus	11
2. Energías de Casimir Fermiónicas - Comparación entre tipos de bordes	13
2.1. Paredes Perfectas	14
2.2. Paredes Imperfectas	16
2.3. Algunos Comentarios	18
3. Bosonización en presencia de singularidades	19
3.1. Bosonización en 1 + 1 dimensiones - Modelo de Schwinger modificado	21
3.2. Singularidades Planas y Estáticas	29
3.3. Algunos Comentarios	30
4. Anomalía Quiral - Singularidad Plana y Estática	33
4.1. Condición de Bag Model - Regularización tipo Heat-Kernel	34
4.1.1. 1+1 dimensiones	37
4.1.2. 3+1 dimensiones	38
4.2. Paredes imperfectas - Regularización tipo Point-splitting	39
4.2.1. Independencia de la anomalía en presencia del defecto	39

4.2.2. Propagador de Dirac en $d + 1$ dimensiones	43
4.2.3. Tensor de Polarización de Vacío en $1 + 1$ dimensiones	45
4.3. Algunos Comentarios	46
5. Propagador de Dirac - Singularidad Con Curvatura	49
5.1. Desarrollo en derivadas	50
5.1.1. Resultados generales a todo orden en derivadas	51
5.2. Caso particular: Aproximaciones de curvatura y monotonía	54
5.3. Algunos Comentarios	57
6. Efectos Disipativos Inerciales	59
6.1. Acción efectiva - Cociente de determinantes	62
6.1.1. Naturaleza no perturbativa del efecto disipativo	63
6.1.2. Expansión de Magnus al menor orden no trivial	64
6.2. Acción efectiva a 1-loop	67
6.3. Efecto disipativo - Campo sin masa - $d + 1$	69
6.4. Efecto disipativo - Campo masivo - $2 + 1$	75
6.5. Algunos Comentarios	78
7. Conclusiones	81
A. Magnitudes de Geometría Diferencial - Implementación en Mathematica	85
Bibliografía	87
Publicaciones asociadas	93
Agradecimientos	95

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de un sistema de 3 dimensiones espaciales, confinado entre dos planos.	14
3.1. Representación gráfica del proceso de bosonización. A la izquierda se encuentran una partícula y su anti-partícula, ambas fermiónicas, con quiralidades opuestas. A la derecha, el modelo equivalente describiendo un bosón de espín cero y carga cero.	20
3.2. Esquema de una Juntura de Josephson. Consta de dos superconductores separados por una pared delgada, que permite correlaciones no nulas entre los pares de Cooper a ambos lados de la misma.	30
4.1. Ejemplo de un diagrama de Feynman de 1-loop del decaimiento del pión neutro a dos fotones. Las líneas con flechas representan propagadores fermiónicos.	34
5.1. Ejemplo de una variedad de dos dimensiones espaciales que satisface las hipótesis y aproximaciones realizadas en este apartado.	55
5.2. Imagen de malformaciones en una hoja de grafeno. Las malformaciones están destacadas en forma de una cadena con tonalidad más oscura que el resto de la red, en el cuadro de abajo a la derecha. Imagen tomada de [1].	58
6.1. Ejemplo de un posible montaje experimental para analizar efectos disipativos inerciales y el DCE. El mismo consta de dos esferas, una fija y la otra anclada a un muelle oscilante con constante elástica conocida. Imagen tomada de [2].	61
6.2. Esquema de dilataciones y contracciones que varían con el tiempo, desfasadas 90 una de la otra. Esto podría ser el efecto del modelo dado por 6.52.	79

Resumen

En este trabajo de Tesis de Maestría, realizamos cálculos de efectos de borde en teorías de campos en presencia de paredes perfectas e imperfectas. Comparamos los resultados de calcular Energías de Casimir en presencia de este tipo de paredes, obteniendo que las paredes imperfectas generalizan a las paredes perfectas.

También, estudiamos la posible dependencia de la Anomalía Quiral ante la introducción de paredes, tanto perfectas como imperfectas. Concluimos que la misma es independiente en ambos casos. Además, se obtuvieron resultados para observables, como el tensor de polarización de vacío, valores de expectación de corrientes de gauge y el propagador de Dirac en $1 + 1$ dimensiones.

Estos resultados para el propagador se generalizaron a paredes curvas en $d + 1$ dimensiones, utilizando un desarrollo en derivadas de la variedad que define la pared. Mas aún, estudiamos los efectos de introducir este tipo de paredes en la bosonización de un modelo de Schwinger modificado, obteniendo resultados compatibles con un modelo de Sine-Gordon modificado.

Por último, estudiamos las amplitudes de probabilidad de creación de pares en teorías de campos definidas en el interior de paredes (variedades) con dependencia temporal, un proceso que produce efectos disipativos inerciales. Comparamos dos métodos para el cálculo de los efectos disipativos inerciales: la expansión habitual de 1-loop de la acción efectiva y la expansión Magnus. Realizamos estos cálculos para un campo escalar acoplado no-minimalmente a la curvatura, tanto en el caso con masa como en el caso sin masa.

Palabras clave: BORDES - DEFECTOS - EFECTOS DISIPATIVOS - CREACIÓN DE PARES - CASIMIR - ANOMALÍA QUIRAL - BOSONIZACIÓN

Capítulo 1

Introducción

“The most incomprehensible thing about the Universe is that it is comprehensible.”

— Albert Einstein, 1936

1.1. Motivación

La teoría de campos tiene sus orígenes en ideas de Michael Faraday, al generalizar y extrapolar algunos fenómenos del electromagnetismo. En adelante surgieron formalizaciones matemáticas de la definición de campo clásico, las que fueron luego el fundamento sobre el que se introdujo el concepto de campo cuántico. El tratamiento de estos últimos es notablemente complicado ya que requiere la manipulación de distribuciones operatoriales, o alternativamente de integrales de camino. Ambos formalismos tienen sus propias ventajas y desventajas. En ambos, el tratamiento de los campos se facilita si se considera a los campos definidos sobre variedades diferenciales no compactas (espacio-tiempo infinito) y sin introducción de vínculos sobre los mismos. Cuando uno introduce vínculos, o restricciones sobre el dominio de los campos, o introduce interacciones de los campos con variables clásicas (impurezas o paredes sin dinámica), se dice que la teoría tiene “bordes”.

Existen variadas situaciones en las que una teoría de campos con bordes puede resultar de utilidad: En materia condensada, suele confinarse la región espacio temporal de definición de los campos para introducir una temperatura finita y una región limitada del espacio de un material [3]; dentro de la misma rama de estudio, modificaciones en la acción de los campos se utilizan para representar interacciones con impurezas en el material; En física de partículas y campos, agregar interacciones de los campos con paredes en su región de definición lleva a la aparición de fuerzas de Casimir. En esta misma rama la existencia de paredes en la definición de los campos es de relevancia en

teorías gravitatorias y en teorías de cuerdas.

Lo anterior hace de la introducción de bordes en la teorías de campos una rama de interés, y será, en parte, el objeto de estudio de este trabajo.

Trabajar con teorías de campos en presencia de bordes, implica imponer condiciones de borde sobre los campos. En este trabajo utilizaremos la integral de caminos como herramienta para analizar la presencia de paredes en el dominio de los campos. Cuando uno piensa en paredes, se imagina objetos bidimensionales embebidos en un espacio tridimensional. En el caso de teorías de campos esto no siempre es así, ya que muchos modelos físicos requieren de menos o más dimensiones espaciales que 3, además de una dimensión temporal. En este trabajo analizaremos modelos en $d + 1$ dimensiones espacio-temporales, particularizando en algunos casos la dimensión de análisis por simplicidad en los cálculos, o por razones técnicas.

Como se verá más adelante, imponer paredes “imperfectas”, requiere de la introducción de interacciones de los campos con potenciales singulares, o singularidades, como las llamaremos de ahora en mas. Este tipo de interacciones, podrían tener como origen el límite de masa grande de grados de libertad definidos dentro de estas paredes imperfectas. Si estas paredes tienen alguna dependencia temporal, entonces podrían aparecer otros fenómenos dinámicos, como el Efecto Casimir Dinámico, o efectos disipativos inerciales. Los mismos son relevantes en cualquier situación en donde los campos estén en presencia de paredes con dependencia temporal, y por ende son un objeto de estudio activo en la actualidad. En este trabajo nos centramos en estudiar efectos disipativos inerciales, que están asociados con la creación de pares de partículas dentro de la pared.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: En lo que sigue de este Capítulo se introducen algunas de las herramientas utilizadas en los cálculos realizados en este trabajo. Las mismas se separan en herramientas para cálculos en teorías con bordes y herramientas para cálculos disipativos. En el Capítulo 2 se realizan cálculos de energías de Casimir fermiónicas utilizando integrales de camino. En el mismo se compara el uso de paredes perfectas e imperfectas. Además, se introducen los primeros resultados asociados a singularidades, y se concluye que las paredes imperfectas generalizan las paredes perfectas. En el Capítulo 3, se bosoniza un Modelo de Schwinger modificado, donde se incluyeron interacciones con potenciales singulares. En el mismo también se explica en detalle la importancia del cálculo de magnitudes como el propagador y los mecanismos de desacoplamiento de campos de gauge. En el Capítulo 4, se realizan cálculos explícitos para un efecto asociado puramente a la naturaleza cuántica de los campos, llamado Anomalía Quiral, en presencia de paredes planas y estáticas, tanto perfectas como imperfectas. Además se muestran los resultados para el propagador de Dirac y el tensor de Polarización de Vacío en presencia de estas paredes. En el Capítulo 5 se generalizan los resultados obtenidos en el Capítulo 4 para el propagador de Dirac en

presencia de paredes imperfectas, que se suponen con dependencia espacio-temporal no trivial. Se introduce un método conocido como “Desarrollo en derivadas”, y se obtienen resultados cuantitativos a todo orden en potencias de la pared, en términos generales y para casos particulares. En el Capítulo 6 se estudian efectos disipativos asociados a campos definidos sobre paredes con dependencia temporal. Más en general, se los estudió definidos sobre variedades con dependencia temporal, utilizando la “Expansión de Magnus” y también la usual expansión a 1-loop de la acción efectiva para la métrica de la variedad. En el Capítulo 7 se exponen las conclusiones de este trabajo, y las posibles formas de continuar el mismo. Los resultados de este trabajo pretenden ser un compendio de efectos de borde en diferentes áreas de investigación, así como una introducción al cálculo de efectos disipativos de naturaleza cuántica.

1.2. Herramientas para el estudio de efectos de borde

1.2.1. Jacobiano de la transformación axial

Esta sección pretende ser una introducción al cambio de variables en integrales funcionales de campos fermiónicos. En este trabajo estos cambios de variables jugaron un rol fundamental para el cálculo de las integrales realizadas, ya que mediante su utilización es posible desacoplar campos de gauge de los campos fermiónicos. Esto permite separar integrales funcionales de campos interactuantes en productos de integrales funcionales de campos libres, lo que simplifica los cálculos.

En este trabajo, se analizaron variantes del modelo de Schwinger, que tiene una acción euclídea de la forma (de ahora en más se llamará “acción” a la acción euclídea)

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^d x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(x) (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + i \gamma_{\mu} A_{\mu}(x) + m) \psi(x) \right], \quad (1.1)$$

donde Ω es una subvariedad del espacio tiempo euclídeo, m es la masa de los fermiones, A_{μ} es un campo de gauge de $U(1)$ y $F_{\mu\nu}$ su respectivo tensor de campo. En los distintos problemas analizados en este trabajo se tomaron como variantes de este modelo hacer $m = 0$ o $m = m(x)$. También se estudiaron modelos que no contenían término cinético para el campo vectorial o con más de un campo vectorial acoplado.

Cabe destacar que en todo lo que sigue se utilizó la signatura espacio temporal euclídea para simplificar los cálculos, sin tener en cuenta la posición de los índices de los tensores que aparecen a lo largo del desarrollo del trabajo. A no ser que se diga lo contrario, esta será la signatura de la métrica utilizada en los cálculos. Además, en todo el trabajo se utilizó la convención de suma de Einstein para la contracción de

tensores, salvo expresa indicación de lo contrario.

Para la obtención de todos los resultados expuestos en este trabajo se utilizaron cambios de variable en la teoría fermiónica que permitieron calcular las funciones de partición de la teoría. Estos cálculos se hicieron a partir de la acción modificada que incluía términos asociados al jacobiano de cambio de variables.

En particular, se realizaron los cálculos del jacobiano para una transformación axial de los campos de Dirac ψ y $\bar{\psi}$. Este método para desacoplar campos de gauge de los campos fermiónicos se debe a Fujikawa [4], y el mismo requiere de una regularización, como se verá más adelante. El cambio corresponde a hacer, en el espacio tiempo de Minkowski

$$\psi \rightarrow e^{-i\gamma^5\phi}\psi \doteq \chi, \quad (1.2)$$

donde γ^5 es la “quinta matriz” gamma, y ϕ es una variable real de tipo bosónica. Utilizando la hermiticidad de la matriz γ^5 y el hecho de que anticonmute con el resto de las matrices gamma se obtiene que $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\gamma^5\phi} \doteq \bar{\chi}$. Este mismo cambio de variables en la signatura Euclídea corresponde a

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-\gamma^5\phi}\psi \doteq \chi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}e^{-\gamma^5\phi} \doteq \bar{\chi}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

en lugar de 1.2.

Esta transformación produce la aparición de un jacobiano J_ϕ distinto de la identidad en la medida de integración $D\psi D\bar{\psi}$ resultando

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow J_\phi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi}. \quad (1.4)$$

En esta subsección se explicará el método de regularización utilizado para el cálculo del jacobiano de la transformación 1.3 en la integral de caminos fermiónica. El nombre “Heat-Kernel” para el tipo de regularización que utilizaremos proviene de que originalmente se usó en ecuaciones de difusión de calor, y los valores que tomaba el operador utilizado para regularizar, eran una suma de exponenciales de auto energías del operador de calor [5]. La idea para regularizar una integral usando este método, es usar una forma particular de expresar la identidad 1.5 para luego insertarla dentro de la integral e intercambiar límite con operador integral

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-tO}, \quad (1.5)$$

donde O es un operador de tipo Laplace [6]. Así, la integral regularizada por este

método queda de la forma

$$\int_{\Omega} d^d x \sum_i \varphi^\dagger_i(x) f(x) \varphi_i(x) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} d^d x \sum_i \varphi^\dagger_i(x) f(x) e^{-tO} \varphi_i(x), \quad (1.6)$$

donde φ_n es una base que diagonaliza al operador O y f puede ser una función matricial, por ejemplo una función escalar multiplicando una matriz gamma si el operador es un operador de Dirac.

En este trabajo nos limitamos por simplicidad a estudiar dominios Ω de integración que no tengan curvatura ni en su interior ni en sus bordes. En este caso, los operadores de tipo Laplace deben tener la forma:

$$O = -(\nabla_\mu \nabla^\mu + E), \quad (1.7)$$

donde $\nabla_\mu = \partial_\mu + w_\mu$ es una derivada covariante, w_μ es una conexión de gauge, y E es un endomorfismo de un fibrado tangente a Ω [7].

Más en particular, se estudiaron los casos en que Ω es todo el espacio tiempo euclídeo, y también se estudiaron regiones donde se confinaba una de las coordenadas espaciales un semi-espacio.

El cálculo exacto de este jacobiano puede hacerse pensando en transformaciones como las de 1.3 pero que en su exponente se les agregue un factor multiplicativo α que tome valores entre 0 y 1. Así, la transformación total se puede obtener por iteración de transformaciones infinitesimales considerando α pequeño. En efecto, definimos el operador de la transformación como $U_\Gamma(\alpha) \doteq e^{\alpha\Gamma\phi}$ y también

$$A(\alpha) \doteq U_\Gamma(\alpha) A U_\Gamma(\alpha) - i U_\Gamma(\alpha) \not{D} U_\Gamma(\alpha), \quad (1.8)$$

$$\not{D}(\alpha) \doteq U_\Gamma(\alpha) \not{D} U_\Gamma(\alpha) = \not{D} + i A(\alpha), \quad (1.9)$$

$$\not{D}(\alpha) \varphi_n(x, \alpha) \doteq \lambda_n(\alpha) \varphi_n(x, \alpha), \quad (1.10)$$

donde en la ec. 1.10 se definió una nueva base $\varphi_n(x, \alpha)$ que diagonaliza el operador transformado $\not{D}(\alpha)$ y tal que $\varphi_n(x, \alpha = 0) = \varphi_n(x)$. Además, de 1.8 se pueden definir

$$A_\mu(\alpha) \doteq A_\mu - i\alpha \partial_\mu \phi \Gamma \mathbf{y} \quad (1.11)$$

$$F_{\mu\nu}(\alpha) \doteq \partial_\mu A_\nu(\alpha) - \partial_\nu A_\mu(\alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

donde se asumió en el último paso que $\partial_\mu \partial_\nu \phi = \partial_\nu \partial_\mu \phi$. Estas definiciones son necesarias para entender los resultados que se presentarán a continuación.

En este trabajo no se detallará el proceso de cálculo del jacobiano, ya que el mismo no aporta al entendimiento de los cálculos realizados en esta tesis. El resultado para el

el jacobiano de la transformación axial se define a partir de su regularización

$$J_\phi \doteq e^{-2 \int_0^1 d\alpha \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_\Omega d^d x \sum_i \varphi \dagger_i(x, \alpha) \phi(x) \gamma^5 e^{-t \mathbb{D}_\alpha^2} \varphi_i(x, \alpha)}, \quad (1.13)$$

en donde se utilizó el operador regulador $O = \mathbb{D}_\alpha^2$, el cual fue definido en 1.9. Para poner \mathbb{D}_α^2 en la forma de 1.7 se requiere una tediosa deducción de la cual se expondrán solo sus resultados, ya que la misma tampoco aporta al entendimiento del trabajo realizado. Los resultados de esta deducción fueron

$$E = -\frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

$$w_\mu = iA_\mu. \quad (1.15)$$

El siguiente paso para poder encajar este método de regularización con el trabajo realizado previamente por matemáticos sobre trazas de operadores [8], es observar que la integral que se desea regularizar no es más que una traza sobre el espacio de Hilbert del operador del exponente, que de ahora en más la denotaremos como en 1.16.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_\Omega d^d x \sum_i \varphi \dagger_i(x, \alpha) \phi(x) \gamma^5 e^{-t \mathbb{D}_\alpha^2} \varphi_i(x, \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Tr}(\phi(x) \gamma^5 e^{-t \mathbb{D}_\alpha^2}). \quad (1.16)$$

El siguiente paso de la regularización es hacer un desarrollo en serie de potencias de t de la traza de la exponencial que se utilizó para regularizar, de la forma 1.17, para valores pequeños de t . Existe una gran cantidad de resultados sobre este tipo de desarrollos para distintos operadores O sobre diferentes tipos de dominios. En nuestro caso, serán necesarios los casos más simples, ya que se estudiaron regiones no acotadas y en los casos de estudio con región acotada se tomaron bordes planos y sin singularidades.

$$\text{Tr}(\phi(x) \gamma^5 e^{-t \mathbb{D}_\alpha^2}) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} t^{\frac{k-d}{2}} a_k(\phi \gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2), \quad (1.17)$$

donde $a_k(\phi \gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2)$ son coeficientes operatoriales que dependen de $\phi \gamma^5$ y de E y de w_μ definidos en 1.14 y 1.15 respectivamente.

El cálculo de los coeficientes del desarrollo es una tarea compleja, pero ya fue abarcada por matemáticos y físicos en los últimos 40 años para los casos de interés en este trabajo. Se deja la referencia [9], en donde estos coeficientes son calculados para casos algo más generales que los abarcados en este trabajo, pero que particularizando para las condiciones aquí usadas, se reducen a los coeficientes que se expondrán a continuación. Este trabajo ya fue realizado en [9], donde se obtuvieron los coeficientes

1.18, ya particularizados para el caso de estudio de este trabajo

$$\begin{aligned}
a_0(\phi\gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2) &= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\int_\Omega d^d x \text{Tr}(\phi(x)\gamma^5) \right), \\
a_1(\phi\gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2) &= \frac{1}{4} (4\pi)^{-\frac{(d-1)}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} d^{d-1} x \text{Tr}(\chi\phi(x)\gamma^5) \right), \\
a_2(\phi\gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2) &= \frac{1}{6} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\int_\Omega d^d x \text{Tr}(6\phi(x)\gamma^5 E(x)) + \int_{\partial\Omega} d^{d-1} x \text{Tr}(3\chi\partial_n\phi(x)\gamma^5) \right), \\
a_3(\phi\gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2) &= \frac{1}{384} (4\pi)^{-\frac{(d-1)}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} d^{d-1} x \text{Tr}(\phi(x)\gamma^5(96\chi E(x)) + 24\chi\partial_n\partial_n\phi(x)\gamma^5) \right), \\
a_4(\phi\gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2) &= \frac{1}{360} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\int_\Omega d^d x \text{Tr}(\phi(x)\gamma^5(60\partial_i\partial_i E(x) + 180E^2(X) - 30F_{\mu\nu}^2)) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\Omega} d^{d-1} x \text{Tr}(\phi(x)\gamma^5((240\Gamma_+ - 120\Gamma_-)\partial_n E(x)) \right. \\
&\quad \left. + \partial_n\phi(x)\gamma^5(180\chi E(x)) + 30\partial_i\partial_i\partial_n\phi(x)\gamma^5\chi) \right), \tag{1.18}
\end{aligned}$$

donde d es la dimensión de Ω , $\chi \doteq \Gamma_+ - \Gamma_-$, ∂_n denota derivación con respecto a la dirección normal interna del borde $\partial\Omega$ y ∂_i derivación con respecto al resto de las coordenadas exceptuando la asociada a la dirección \vec{n} , que en nuestro caso será $\pm\vec{x}_d$. En las expresiones que aparecen en 1.18, n es el único índice que no está sujeto a la notación de Einstein.

Los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 que se observan en 1.18 tienen validez incluso en casos en donde el operador \mathbb{D}_α tiene campos de gauge de tipo delta de Dirac [7]. Esto será utilizado para estudiar un caso particular de la bosonización del modelo de Schwinger con interacciones de tipo delta, y para el cálculo de energías de Casimir. Además, todos los coeficientes en 1.18 también son válidos para el caso de un dominio sin bordes, en donde las condiciones de borde se vuelven irrelevantes porque la frontera de Ω está en el infinito.

1.2.2. Desacoplamiento con el campo de gauge

El método de Fujikawa para el cálculo del jacobiano de la transformación quirral de variables sirve para desacoplar campos de gauge de los campos fermiónicos. Es importante destacar que el desacoplamiento es posible si los campos tienen un acoplamiento de tipo minimal, si fuese distinto, este método podría no funcionar. En este apartado se demuestra como desacoplar campos de gauge. Esto será de utilidad en el cálculo de Energías de Casimir en el Capítulo 2 y en la bosonización del modelo de Schwinger modificado, que se realizará en el Capítulo 3. Además, también será utilizado para calcular la anomalía quirral con condiciones de borde de tipo Bag-Model en el Capítulo 4.

Dado un campo de gauge A_μ , es posible utilizar el teorema de descomposición de

Helmholtz en 1 + 1 dimensiones para escribir al campo como [10]

$$A_\mu = -\partial_\mu \xi + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (1.19)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita en dos dimensiones. Además se introdujeron nuevos campos escalares reales ξ y ϕ que representan las partes de gauge y rotacional del campo A_μ respectivamente.

Contrayendo con el tensor $\epsilon_{\mu\nu}$ se puede ver que:

$$\epsilon_{\mu\nu} \partial^2 \phi = F_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Usando esta descomposición, podemos elegir hacer una transformación de las variables fermiónicas de la forma:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-\gamma^5 \phi - i\xi} \psi \doteq \chi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-\gamma^5 \phi + i\xi} \doteq \bar{\chi}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Esta transformación produce el mismo jacobiano en la medida de integración que 1.3, ya que el único cambio fue agregar una fase compleja que produce un jacobiano igual a la identidad.

Esto es todo lo que se necesita para desacoplar los dos campos, ya que haciendo estas transformaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)(\not{\partial} + i\not{A}(x))\psi(x) &= \bar{\chi}(x)(\not{\partial} + i\not{A}(x))\chi(x) + \bar{\chi}(x)\gamma_\mu(\gamma^5 \phi + i\xi)\chi(x) \\ &= \bar{\chi}(x)(\not{\partial} - i(\partial_\mu \xi(x) - \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)))\chi(x) \\ &\quad + \bar{\chi}(x)\gamma_\mu(\gamma^5 \phi(x) + i\xi(x))\chi(x), \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde si usamos la identidad $\gamma^5 \gamma_\mu = i\epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu$ se observa que :

$$\bar{\psi}(x)(\not{\partial} + i\not{A}(x))\psi(x) = \bar{\chi}(x)\not{\partial}\chi(x). \quad (1.23)$$

Hay que tener en cuenta que el cambio de variables 1.19 produce un cambio de jacobiano en la medida de integración de los campos A_μ de forma tal que usando 1.20 se puede ver que [11]:

$$\mathcal{D}A_\mu = \text{Det}(\partial^2) \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\phi, \quad (1.24)$$

pero este jacobiano es independiente de los campos, por lo que puede ser absorbido en la normalización de las integrales.

1.2.3. Paredes perfectas e imperfectas

Como se mencionó anteriormente, la existencia de paredes implica la imposición de condiciones de borde. De hecho, la misma imposición de una condición de borde es lo que define el tipo de pared que se está incluyendo en una teoría. Específicamente, a lo que se hace referencia cuando se dice que hay una pared, es a la región del espacio-tiempo sobre la cual se impuso un vínculo sobre los campos. Las paredes pueden ser planas, si por ejemplo uno impone condiciones sobre una coordenada espacial fija, digamos x_i , pero las mismas pueden ser variedades espacio-temporales con dependencia no trivial en las coordenadas. El tratamiento de estas paredes se vuelve notoriamente más complicado cuando las mismas no tienen formas estándar, como planos, cilindros, esferas, etc.

En este apartado se va a mostrar como se imponen condiciones de borde perfectas e imperfectas sobre campos en la integral de caminos. En particular, se introducirá la noción de paredes en teorías fermiónicas, que será a las cuales se le impondrán condiciones en esta tesis.

Primero, es necesario recordar que un vínculo es una ecuación homogénea que satisfacen los campos y sus derivadas sobre un cierto dominio Σ de dimensión k . Esta ecuación tiene la forma $F(\psi(y), \bar{\psi}(y), \partial_\mu \psi(y), \partial_\mu \bar{\psi}(y)) = 0$, para el caso de un vínculo sobre campos fermiónicos ψ , que serán los campos tratados en este trabajo. En mecánica clásica estos vínculos se tratan introduciendo nuevas variables λ que comúnmente se denominan “multiplicadores de Lagrange”. Estas nuevas variables se introducen multiplicando función F en el Lagrangiano de la teoría y su ecuación de movimiento determina la ecuación de vínculo.

En teoría de campos el mecanismo es análogo, solo que como este multiplicador de Lagrange es un nuevo grado de libertad del Lagrangiano, el mismo debe ser integrado de igual forma que el resto de los campos de la teoría. Para ser más específico, si se quiere introducir una ecuación de vínculo de la forma F mencionada anteriormente a la integral de caminos sobre los campos ψ y $\bar{\psi}$ lo que se debe hacer es [10]:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int d^d x S(\psi, \bar{\psi})} \rightarrow \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\lambda e^{-S(\psi, \bar{\psi}) + i \int_\Sigma d^k y \lambda(y) F(\psi(y), \bar{\psi}(y), \partial_\mu \psi(y), \partial_\mu \bar{\psi}(y))}. \quad (1.25)$$

Con esta introducción del nuevo campo auxiliar λ , la integral total es equivalente a integrar solamente sobre los campos ψ y $\bar{\psi}$ que satisfacen la ecuación de vínculo dada por F . Esta introducción es el análogo para integrales de camino a la delta de Dirac de una función F . Este tipo de condiciones de borde, determinadas por una ecuación de vínculo y por la introducción de un parámetro auxiliar de integración se denominan “condiciones de borde perfectas”, o introducción de “paredes perfectas”.

En contraste con este tipo de paredes, están las que se denominan “paredes imper-

fectas". Una condición de borde imperfecta ocurre cuando se introduce una interacción de los campos con un potencial singular, definido sobre una región del espacio de codimensión 1, que es lo que se entiende usualmente por pared. Este tipo de condiciones, como veremos, pueden generalizar las condiciones de borde perfectas, ya que determinados valores de la constante de acoplamiento con este potencial singular dan lugar a los mismos resultados que las condiciones de borde perfectas. Para ilustrar el concepto, y adelantar parte del trabajo que se va a realizar en los Capítulos 2, 3 y 4, se puede considerar la siguiente pared imperfecta

$$\mathcal{S}(\bar{\psi}, \psi; A) = \int d^{d+1}x \bar{\psi}(x) [\not{D} + g\delta(x_d)] \psi(x), \quad (1.26)$$

donde g es una constante de acoplamiento con el potencial singular en la coordenada x_d .

De la acción 1.26, se puede ver que este tipo de potencial impone una discontinuidad de los campos en el borde. Siguiendo [12], se puede reemplazar esta discontinuidad por la condición

$$\gamma_d(\psi(x_{\parallel}, \epsilon) - \psi(x_{\parallel}, -\epsilon)) + \frac{g}{2}(\psi(x_{\parallel}, \epsilon) + \psi(x_{\parallel}, -\epsilon)) = 0, \quad (1.27)$$

con ϵ un parámetro real positivo y pequeño.

Se puede ver que imponiendo $g = 2$, esta discontinuidad equivale a anular la componente normal de la corriente a la pared [12]. Esto significa que esta condición de borde es equivalente a la condición de Bag-Model cuando $g = 2$. En el Capítulo 2 se verá que variando el coeficiente de acoplamiento g se pueden obtener diferentes condiciones de borde, ya que variaciones en esta constante modifican la Energía de Casimir fermiónica obtenida. Esto será utilizado para generalizar algunos resultados sobre la independencia de la anomalía quiral en el Capítulo 4 cuando se introducen paredes, y para calcular valores de expectación de observables.

1.3. Herramientas para el estudio de efectos disipativos

1.3.1. Geometría diferencial linealizada

Este apartado no pretende ser una explicación detallada de cálculo en variedades diferenciales, sino más bien un compendio de las magnitudes utilizadas en este trabajo. Ver [13] para más información sobre cálculo en variedades. Para el cálculo de magnitudes en gravedad linealizada se utilizan las ecuaciones de Einstein al menor orden no trivial, es decir se desprecia cualquier magnitud que sea de orden superior al cuadrado

de la métrica [14]. Este tipo de aproximaciones son de utilidad en cálculos de efectos de ondas gravitacionales, donde la curvatura es débil. En este trabajo utilizaremos las mismas aproximaciones realizadas en Relatividad General, y obtendremos efectos disipativos inerciales asociados a pequeñas fluctuaciones de la métrica en el tiempo. En efecto, se sabe que dada una métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci puede representarse de la forma

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,a}^a - \Gamma_{a\mu,\nu}^a + \Gamma_{ab}^a \Gamma_{\mu\nu}^b - \Gamma_{ab}^a \Gamma_{\mu\nu}^b, \quad (1.28)$$

y a su vez, la curvatura escalar se define como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu,b}^a$ es la derivada parcial respecto de la coordenada x^b del símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^a$.

Si ahora suponemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, entonces, al menor orden no trivial en $h_{\mu\nu}$, se tiene que

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2} \left[\partial_\gamma \partial_\mu h_\nu^\gamma + \partial_\gamma \partial_\nu h_\mu^\gamma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} \right], \quad (1.31)$$

donde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ y $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ [14].

De la misma forma, se tiene que

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \quad (1.32)$$

Las ecuaciones 1.31 y 1.32 serán utilizadas en este trabajo para realizar cálculos en variedades con curvaturas pequeñas. La utilidad de realizar este tipo de cálculos linealizando la geometría es que se pueden utilizar herramientas como la transformada de Fourier, ya que al estar trabajando al menor orden no trivial, la medida de integración puede aproximarse como la medida del espacio de Minkowski. Esto permite resolver problemas con mayor facilidad que en espacios con curvaturas grandes.

Para más información sobre estas aproximaciones ver [15].

1.3.2. Expansión de Magnus

La expansión de Magnus lleva su nombre por su creador Wilhem Magnus [16]. Esta expansión provee una solución de forma exponencial para una ecuación diferencial lineal de primer orden de un operador lineal. En este trabajo, la utilizaremos para calcular el operador evolución de un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo.

Esta expansión permite resolver ecuaciones de la forma

$$\dot{U}(t) = H(t)U(t), \quad (1.33)$$

donde $U(t)$ y $H(t)$ son operadores lineales.

La expansión de Magnus propone que la solución a 1.33 es de la forma

$$U(t) = e^{A(t,t_0)}U(t_0), \quad (1.34)$$

donde A tiene una expansión de la forma

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t). \quad (1.35)$$

Estos A_k pueden calcularse explícitamente a todo orden utilizando un análogo continuo de el desarrollo de Baker-Campbell-Hausdorff [17]. En lo que a nosotros respecta, solo nos interesará el primer término de esta expansión. Esto se debe a que utilizaremos esta expansión en una aproximación al menor orden no trivial en potencias del exponente, por lo que en definitiva solo usaremos el primer término. Por completitud, se muestran el primer y segundo término de esta expansión

$$A_1 = \int_{-\infty}^t dt_1 H(t_1) \quad (1.36)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 [H(t_1), H(t_2)]. \quad (1.37)$$

La expansión de Magnus ha sido ampliamente utilizada en mecánica cuántica, y muchas otras ramas de investigación [16]. En física, suele utilizarse para estudiar sistemas cuánticos abiertos, que generan un hamiltoniano con dependencia temporal. Una de las ventajas de esta expansión es que preserva las simetrías del hamiltoniano, y por ende del sistema, a todo orden en la expansión [18], lo que la hace especialmente útil para la física.

Esta herramienta será utilizada para calcular una de las componentes del operador evolución en la representación de interacción, de un oscilador con una perturbación dependiente del tiempo en su frecuencia. Esta componente está relacionada con la parte imaginaria de la acción efectiva, que como veremos más adelante, está asociada a la creación de pares de partículas, debido a modificaciones en el tiempo de la métrica espacio-temporal.

Más detalles sobre esta expansión se pueden ver en extensas referencias sobre el tema, como [19].

Capítulo 2

Energías de Casimir Fermiónicas - Comparación entre tipos de bordes

*“Nature uses only the longest threads to weave her patterns,
so that each small piece of her fabric reveals the organization
of the entire tapestry.”*

— Richard Feynman, 1964

Como se mencionó en la Introducción 1, existen dos formas de imponer condiciones de borde, y esto es imponiendo paredes perfectas o paredes imperfectas. En este apartado, mostraremos una comparativa de la metodología de imponer ambos tipos de paredes en el cálculo de energías de Casimir.

En este apartado, mostraremos cálculos de la energía de Casimir Fermiónica en $1 + 1$, para campos sin masa confinados entre dos paredes planas y separadas una distancia L .

El efecto Casimir consiste en la aparición de fuerzas sobre bordes u objetos macroscópicos debido a las fluctuaciones de vacío de los campos en una región del espacio acotada. Se le llama así por el físico Hendrik Casimir quien predijo el efecto para campos electromagnéticos en 1948. Si los bordes imponen vínculos en los campos, estas fuerzas pueden ocurrir incluso si los bordes no son cargados, ya que su origen se debe a la discretización de los modos de oscilación de los campos entre esos bordes, y no debido a una interacción entre cargas. La forma en que se discretizan estos modos depende de la geometría de los bordes, por lo que las fuerzas que aparecen también lo hacen. Este efecto recobró interés en los últimos 20 años gracias a su comprobación experimental [20].

El cálculo de estas fuerzas en realidad depende del tamaño de los bordes macroscópicos, por lo que en la teoría se calcula la energía de interacción con los bordes, que es independiente del tamaño de los mismos. Esta energía se llama energía de Casimir.

Para obtenerla, es necesario conocer la energía total del sistema sin la introducción de los bordes y la energía total incluyendo los bordes, luego tomar la diferencia y de ahí obtener la energía asociada exclusivamente a la presencia de los bordes. Esta energía es una firma de la geometría de sistema, y depende de los parámetros que caractericen a la misma.

El cálculo de la energía de un sistema cuántico puede obtenerse a partir de su función de partición. Para ello, siguiendo a [21], se puede ver que es necesario calcular

$$E_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma_{ef}}{T} \right), \quad (2.1)$$

donde T es la extensión del intervalo de tiempo imaginario y Γ_{ef} es la acción efectiva de las paredes, luego de integrar el campo fermiónico. Estos cálculos serán realizados utilizando integrales de camino. Ver [22] para más detalles en estos cálculos.

2.1. Paredes Perfectas

Para obtener energías de Casimir imponiendo paredes perfectas, se pueden utilizar integrales de camino con introducción de vínculos. En este apartado impondremos condiciones de Dirichlet en la componente perpendicular a las paredes de la corriente fermiónica, sobre dos paredes planas separadas una distancia L , en $1 + 1$ dimensiones.

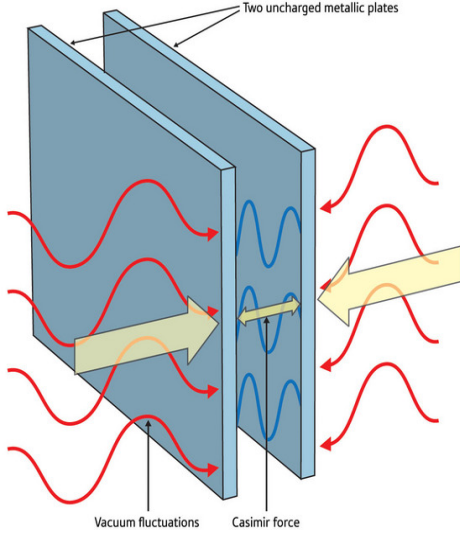


Figura 2.1: Ejemplo de un sistema de 3 dimensiones espaciales, confinado entre dos planos.

En la Fig. 2.1 se puede ver un esquema de un sistema tridimensional, similar al analizado en este caso.

Así, se obtendrá una energía de Casimir fermiónica con condiciones de Bag-Model. Una vez esquematizado este procedimiento, se darán los lineamientos para hacer los mismos cálculos imponiendo paredes imperfectas, y se expondrán sus resultados.

En el caso de la pared perfecta, como las condiciones de borde se aplican sobre la corriente, se puede imponer la condición usando una delta funcional de la forma

$$\delta_{J_1} \doteq \int \mathcal{D}s_1^l \mathcal{D}s_1^r e^{i \int d^2x (\delta(x_1) s_1^l(x_2) + \delta(x_1 - L) s_1^r(x_2)) J_1(x)}. \quad (2.2)$$

El exponente de la delta funcional puede ser escrito de otra manera definiendo

$$S_\mu(x) \doteq S_\mu^l(x) + S_\mu^r(x) \doteq \delta_{\mu,1} \delta(x_1) s_1^l(x_2) + \delta_{\mu,1} \delta(x_1 - L) s_1^r(x_2), \quad (2.3)$$

donde el supra índice l o r denota el campo asociado a la delta en $x_1 = 0$ o en $x_1 = L$ respectivamente. Esto hace que la delta funcional pueda escribirse como

$$\delta_{J_1} = \int \mathcal{D}s_1^l \mathcal{D}s_1^r e^{i \int d^2x S_\mu(x) J_\mu(x)}. \quad (2.4)$$

Esta forma de escribir a la delta funcional hace que su exponente tenga la forma de un acoplamiento minimal entre los campos fermiónicos y un campo de gauge 2.3. Esto puede usarse para desacoplar a S_μ y poder integrar la delta funcional con facilidad usando integrales gaussianas. Con estas definiciones, la integral funcional a calcular para obtener la función de partición es

$$Z(\psi, \bar{\psi}) = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}s_1^l \mathcal{D}s_1^r e^{\int_\Omega d^d x (\bar{\psi}(x) (\not{\partial} + i \not{s}(x)) \psi(x))}. \quad (2.5)$$

Para calcular esta función de partición, lo que se puede hacer es descomponer a S_μ^l y a S_μ^r de la forma 1.19 y hacer dos transformaciones quirales sucesivas de los campos fermiónicos

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-\Gamma \not{\phi}^l - i \not{\xi}^l} \psi \doteq \chi' \rightarrow e^{-\Gamma \not{\phi}^r - i \not{\xi}^r} \chi' \doteq \chi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-\Gamma \not{\phi}^l + i \not{\xi}^l} \doteq \bar{\chi}' \rightarrow \bar{\chi}' e^{-\Gamma \not{\phi}^r + i \not{\xi}^r} \doteq \bar{\chi}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como vimos en la introducción, estas transformaciones producen un Jacobiano diferente de la identidad

$$J_\phi = e^{\frac{-1}{2\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi(x))^2}, \quad (2.7)$$

donde $\phi = \phi^l + \phi^r$. Al desacoplar a los fermiones del campo auxiliar S_μ , la integral fermiónica a realizar es una integral sobre los fermiones χ , cuya acción es la de fermiones libres 1.23. Esta integración es igual a la inversa de la normalización de la función de partición, por lo que se obtiene

$$Z(\psi, \bar{\psi}) = \int \mathcal{D}s_1^l \mathcal{D}s_1^r e^{\frac{1}{2\pi} \int d^2x (\phi^l(x) + \phi^r(x)) \partial^2 (\phi^l(x) + \phi^r(x))}. \quad (2.8)$$

Dado que para cada campo $S_\mu^{l,r}$ supusimos la descomposición 1.19, se puede hacer

$$\begin{aligned} \partial^2 \phi^l(x) &= \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^l(x) & \partial^2 \phi^r(x) &= \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^r(x) \\ \partial^2 \phi^l(x) &= \partial_{x_2} s_1^l(x_2) \delta(x_1) & \partial^2 \phi^r(x) &= \partial_{x_2} s_1^r(x_2) \delta(x_1 - L) \\ \tilde{\phi}^l(k) &= \frac{-ik_2 \tilde{s}_1^l(k_2)}{k^2} & \tilde{\phi}^r(k) &= \frac{-ik_2 \tilde{s}_1^r(k_2) e^{-ik_1 L}}{k^2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $F_{\mu\nu}^{l,r}$ es el tensor de Maxwell para cada uno de los campos abelianos $S_\mu^{l,r}$ y $\tilde{\phi}$ representa la transformada de Fourier del campo ϕ .

Utilizando que la transformada de Fourier tiene jacobiano igual a la identidad, se expresa la función de partición en términos de las transformadas de cada variable. Reorganizando todo en forma matricial se obtiene

$$Z(\psi, \bar{\psi}) = \int \mathcal{D}\tilde{s}_1^l \mathcal{D}\tilde{s}_1^r e^{\frac{1}{2} \int dk_2 [(\tilde{s}_1^{l*}(k_2) \quad \tilde{s}_1^{r*}(k_2)) \mathcal{M}(k_2, L) \begin{pmatrix} \tilde{s}_1^l(k_2) \\ \tilde{s}_1^r(k_2) \end{pmatrix}]}, \quad (2.10)$$

donde

$$\mathcal{M}(k_2, L) = \begin{pmatrix} \frac{k_2^2}{|k_2|} & \frac{k_2^2 e^{-|k_2 L|}}{|k_2|} \\ \frac{k_2^2 e^{-|k_2 L|}}{|k_2|} & \frac{k_2^2}{|k_2|} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Utilizando propiedades de integrales gaussianas puede despejarse

$$Z(\psi, \bar{\psi}) = e^{\frac{-T}{4\pi} \int dk_2 [Ln(k_2^2)]} e^{\frac{-T}{4\pi} \int dk_2 [Ln(1 - e^{-2|k_2 L|})]}, \quad (2.12)$$

de donde se obtiene la energía de Casimir Fermiónica condiciones de Bag-Model en $1 + 1$

$$E_0^c = \frac{1}{4\pi} \int dk_2 [Ln(1 - e^{-2|k_2 L|})] = \frac{-\pi}{24L}. \quad (2.13)$$

Es importante destacar que para obtener esta energía no se tuvo en cuenta la energía total del sistema, asociada con la primera exponencial en 2.12.

2.2. Paredes Imperfectas

El procedimiento para obtener la energía de Casimir en el caso con una pared imperfecta es similar, aunque más complicado. En este caso no se debe incluir una delta funcional, sino dos potenciales singulares centrados en cada una de las paredes. En efecto, la acción toma la forma

$$S = \int d^2x \bar{\Psi}(x) (\not{\partial} + g\delta(x_1) + g\delta(x_1 - L)) \Psi(x), \quad (2.14)$$

donde g es un acoplamiento con los defectos.

La función de partición asociada a esta acción puede expresarse como una integral gaussiana si se incluyen variables de Grassmann auxiliares $\bar{\chi}_0, \chi_0$ y $\bar{\chi}_L, \chi_L$ definidas sobre cada uno de los defectos en $x_0 = 0$ y $x_0 = L$, respectivamente. Siguiendo el procedimiento utilizado en [22], puede verse que la función de partición con estas variables auxiliares queda

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \int [\mathcal{D}\bar{\chi}_0 \mathcal{D}\chi_0] [\mathcal{D}\bar{\chi}_L \mathcal{D}\chi_L] e^{\int dy_0 \bar{\chi}_0(x_0) \chi_0(x_0) + \bar{\chi}_L(x_0) \chi_L(x_0)} \times e^{g \int d^2y \int d^2y' \bar{\eta}(y) D(y, y') \eta(y')}, \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{Z}_0 = \det(\not{\partial})$, $\eta(y) = \chi_0(y_0)\delta(y_1) + \chi_L(y_0)\delta(y_1 - L)$ y $D(x, y) = \langle x | (\not{\partial})^{-1} | y \rangle$.

Esto puede expresarse de manera más compacta definiendo

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y_0, y'_0) = \delta_{\alpha\beta}\delta(y_0 - y'_0) + gD(y_0, a_\alpha, y'_0, a_\beta), \quad (2.16)$$

donde $\alpha, \beta = 0, L$ y $a_\alpha, a_\beta = 0, L$. Así, con estas definiciones se puede expresar la función de partición de la forma

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} = \int [\mathcal{D}\bar{\chi}_0 \mathcal{D}\chi_0] [\mathcal{D}\bar{\chi}_L \mathcal{D}\chi_L] e^{\sum_{\alpha,\beta} \int dy_0 \int dy'_0 \bar{\chi}_\alpha(y_0) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(y_0, y'_0) \chi_\beta(y'_0)}. \quad (2.17)$$

Esas integrales pueden expresarse en términos de las transformadas de Fourier de las variables de integración, al igual que como se hizo en el caso de dos paredes perfectas. El resultado para la energía de Casimir, luego de hacer este procedimiento es

$$E_0^c = -\frac{\int dk_0}{2\pi} \text{tr}[Ln(\tilde{\mathcal{K}}(k_0))], \quad (2.18)$$

donde $\tilde{\mathcal{K}}$ es la transformada de Fourier de $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$.

Este trabajo ya fue realizado en [22], e involucra una gran cantidad de cálculos utilizando la forma del propagador de Dirac en 1 + 1 dimensiones, e introduciendo eso en 2.16. No vamos a detallar este procedimiento, ya que el mismo no aporta a la comparativa entre ambos tipos de paredes. El resultado de estos cálculos es

$$E_0^c = \frac{-1}{\pi} \int dk_0 \ln\left[1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2Lk_0}\right]. \quad (2.19)$$

Esta expresión tiene una forma cerrada en términos de la función polilogartimo Li_2 [23]

$$E_0^c = \frac{Li_2\left(\frac{-16g^2}{(4+g^2)^2}\right)}{2\pi L}. \quad (2.20)$$

Lo interesante de este resultado es que cuando $g = 2$ se recupera el resultado obtenido al imponer paredes perfectas con la condición de Bag-Model. Esto es interesante, ya que muestra una equivalencia entre el tratamiento de paredes, y permite una generalización sobre las condiciones de borde. Otra observación, es que la energía de Casimir tiene un máximo cuando $g = 2$, precisamente cuando se imponen paredes perfectas. Esto tiene sentido, ya que las condiciones de Bag-Model son las que imponen restricciones más fuertes sobre los modos de oscilación de los campos entre las paredes. De ahora en adelante, utilizaremos potenciales singulares para estudiar efectos de borde, comparando también con las condiciones más restrictivas que impone el Bag-Model.

2.3. Algunos Comentarios

Los resultados de esta sección nos habilitan a utilizar potenciales singulares para imponer paredes en una teoría de campos. Este mecanismo para introducir paredes será utilizado en todo lo que sigue de este trabajo, por su versatilidad y generalidad.

Es importante destacar que los resultados obtenidos en este apartado son una recopilación de resultados obtenidos en [22]. El objetivo del mismo es dar una ilustración de las diferentes formas de incluir bordes en teorías de campos, utilizando integrales de camino.

Resultados como 2.20 pueden generalizarse a más dimensiones, aunque no sin aumentar la complejidad de los cálculos. Además, también existen generalizaciones a teorías fermiónicas con masa y con paredes curvas.

Como ya se mencionó, en este apartado solo se recopilaron resultados asociados a singularidades planas y estáticas. Existen una amplia gama de resultados con singularidades curvas o aceleradas, las cuales son un área de investigación activa en la actualidad, ver [24], [25], [26], entre otras.

Capítulo 3

Bosonización en presencia de singularidades

“What we observe is not nature itself, but nature exposed to our method of questioning.”

— Werner Heisenberg, 1958

En este capítulo se obtienen resultados sobre la bosonización del modelo de Schwinger masivo, con interacciones clásicas y lineales en la corriente y en la norma de Dirac de los campos fermiónicos. Estas interacciones clásicas luego serán particularizadas a singularidades planas y estáticas, y se analizará su análogo en el modelo bosonizado.

Para comenzar este capítulo, es necesario una introducción sobre el método de bosonización de una teoría fermiónica. Aunque en este trabajo se utilizarán integrales de camino, es ilustrativo entender que las identidades que se encontrarán aquí también pueden obtenerse a nivel de operadores.

Bosonizar una teoría consiste en encontrar una teoría bosónica equivalente a la teoría fermiónica original. Cuando se dice equivalente, significa que hay una transformación unívoca entre los operadores en la teoría fermiónica y en la teoría bosónica. Así, para obtener observables en una teoría, solo es necesario saber cual es el equivalente en la otra teoría, para poder calcularlo en la que más conveniente resulte.

Una gran extensión de trabajo ha sido realizado sobre este tema [27] [28]. Se demostró que las identidades entre operadores fermiónicos y bosónicos son exactas en 1+1 dimensiones, y existen resultados de identidades aproximadas en dimensiones superiores [29]. En este trabajo se estudiarán identidades entre teorías en 1 + 1 dimensiones, por simplicidad. Existen relaciones entre los operadores de campos libres bosónicos y

fermiónicas denominadas “identidades de Mandelstam”, que tienen la forma

$$\begin{aligned}\psi_R &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} : e^{i2\sqrt{\pi}\phi_R} : \\ \psi_L &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} : e^{-i2\sqrt{\pi}\phi_L} : ,\end{aligned}\quad (3.1)$$

donde los campos ψ son campos fermiónicos, los campos ϕ son campos bosónicos, los subíndices R y L denotan quiralidad “Right” y “Left” respectivamente, $::$ denota orden normal de operadores y a es un cut-off para pequeñas distancias [28]. Se puede mostrar que estas identidades pueden emplearse para obtener

$$\bar{\psi}\psi = \frac{1}{\pi a} : \cos(2\sqrt{\pi}\phi) : . \quad (3.2)$$

En la Fig. 3.1 puede verse una representación gráfica del proceso de bosonización. Se toman una partícula y una anti-partícula fermiónica, con quiralidades opuestas, y se obtiene un modelo que describe un bosón de espín y carga cero.

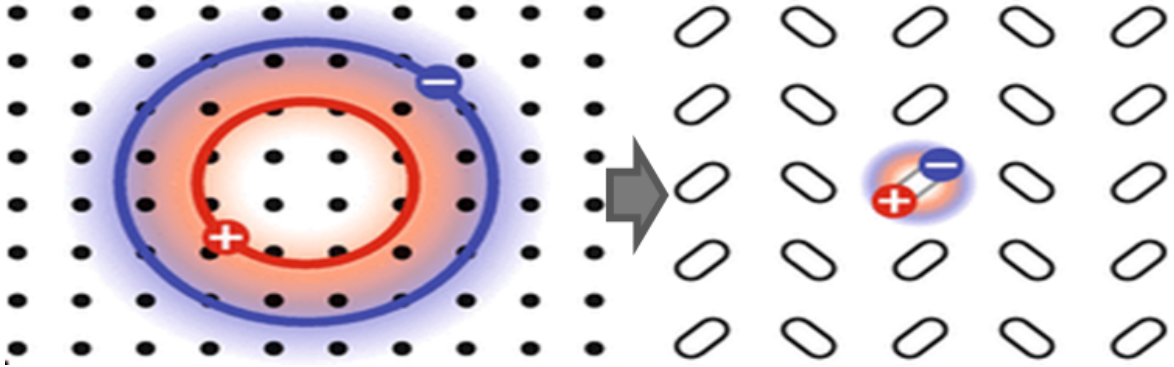


Figura 3.1: Representación gráfica del proceso de bosonización. A la izquierda se encuentran una partícula y su anti-partícula, ambas fermiónicas, con quiralidades opuestas. A la derecha, el modelo equivalente describiendo un bosón de espín cero y carga cero.

La relación 3.2 es utilizada para demostrar la equivalencia entre el modelo fermiónico (ψ) de Schwinger, dado por la acción

$$S_s = \int d^2x \left(\frac{1}{4} F_{uv}^2(x) - \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + iA(x)) \psi(x) - M \bar{\psi}(x) \psi(x) \right), \quad (3.3)$$

donde M es la masa de los fermiones, y el modelo bosónico (w) de Sine-Gordon dado por la acción

$$S_{SG} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu w(x))^2 + m^2 w(x)^2 - \alpha \cos(w(x)) \right), \quad (3.4)$$

donde m es la masa de los bosones, y α es una constante del modelo [30].

Esta identificación entre los modelos también puede hacerse al nivel de las funciones

de Green de ambas teorías, ya que las funciones de Green de una teoría determinan la misma [31]. Para ello, en este trabajo se utilizarán integrales de camino, y se obtendrá una equivalencia entre las funciones de partición de ambas teorías. Dado que las funciones de partición determinan las funciones de Green, esto establece una relación de bosonización. Para ello, se utilizarán los cambios de variable definidos en la Introducción 1.19, en donde se realiza una descomposición de Helmholtz del campo de gauge, y a partir de esta descomposición y un cambio de variable de los fermiones, se desacoplan ambos campos. Para ver detalles sobre este desacoplamiento, se recomienda ver la Introducción 1.2.2, ya que este procedimiento será fundamental en el proceso de bosonización utilizado.

3.1. Bosonización en 1 + 1 dimensiones - Modelo de Schwinger modificado

En este apartado se establece una relación de equivalencia utilizando métodos de bosonización por integrales de camino de los modelos de Schwinger y Sine-Gordon con interacciones en la masa y la corriente fermiónica en 1 + 1 dimensiones.

El modelo fermiónico a bosonizar será una modificación del modelo de Schwinger de manera tal que su acción es de la forma

$$S_{sm} = \int d^2x \left(\frac{1}{4} F_{A_{uv}}^2(x) - \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + iA(x)) \psi(x) - M \bar{\psi}(x) \psi(x) - g(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) - i \bar{\psi}(x) \not{s}(x) \psi(x) \right), \quad (3.5)$$

donde $F_{A_{uv}} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y g y s_μ son variables escalares y vectoriales clásicas, respectivamente. Estas nuevas variables pueden usarse, por ejemplo, para introducir impurezas que interactúen con la carga o con la corriente espacial, o para introducir paredes de dominio que modifiquen la masa. Estos casos particulares serán estudiados en la siguiente sección, una vez establecida la bosonización de la teoría.

La función de partición fermiónica con esta acción tiene la forma

$$Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^2x (\frac{1}{4} F_{A_{uv}}^2(x))} \times e^{\int d^2x (\bar{\psi}(x) (\not{\partial} + iA(x)) \psi(x) + M \bar{\psi}(x) \psi(x))} \times e^{\int d^2x (g(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) + i \bar{\psi}(x) \not{s}(x) \psi(x))}. \quad (3.6)$$

Para el cálculo de esta función se supondrá una descomposición de los campos A_μ y s_μ de la forma 1.19. Se denotarán de ahora en adelante como ϕ_A y ϕ_s a los campos que generan la parte de rotor de A_μ y s_μ respectivamente en la descomposición 1.20.

Además, si se realizan dos cambios de variables de la forma 1.21 para desacoplar los dos campos vectoriales A_μ y s_μ , la función de partición resultante será

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\phi_A \\ &\times e^{-\int d^2x \left(\frac{-1}{2} \phi_A(x) \partial^2 \partial^2 \phi_A(x) + \frac{1}{2\pi} \phi_A(x) \partial^2 \phi_A(x) + \frac{1}{2\pi} \phi_s(x) \partial^2 \phi_s(x) \right)} \\ &\times e^{\int d^2x \left(\bar{\chi}(x) \not{\partial} \chi(x) + (M+g(x)) \bar{\chi}(x) e^{2\gamma^5(\phi_A+\phi_s)} \chi(x) \right)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De 3.7 puede verse que, con este cambio de variables, la función de partición puede separarse en un producto de dos integrales de camino, siendo una sobre el campo ϕ_A , y la otra sobre los fermiones. Esto es importante, ya que en lo que sigue se deberá hacer un desarrollo formal en serie de potencias de $(M+g(x))$ de la última exponencial que aparece en 3.7. Haciendo esto se obtiene

$$Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) = N' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle [\int d^2x (M+g(x)) \bar{\chi}(x) e^{2\gamma^5(\phi_A+\phi_s)} \chi(x)]^n \rangle_0, \quad (3.8)$$

donde la notación $\langle \rangle_0$ indica el valor de expectación sobre campos libres sin masa, tanto bosónicos como fermiónicos. Para el cálculo de este valor medio es posible utilizar la identidad [11]

$$\bar{\chi} e^{2\gamma^5(\phi_A+\phi_s)} \chi = e^{2(\phi_A+\phi_s)} \bar{\chi} \frac{1+\gamma^5}{2} \chi + e^{-2(\phi_A+\phi_s)} \bar{\chi} \frac{1-\gamma^5}{2} \chi. \quad (3.9)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle [\int d^2x (M+g(x)) \\ &\times (e^{2(\phi_A+\phi_s)} \bar{\chi} \frac{1+\gamma^5}{2} \chi + e^{-2(\phi_A+\phi_s)} \bar{\chi} \frac{1-\gamma^5}{2} \chi)]^n \rangle_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Utilizando la expansión de Newton para potencias de binomios puede verse que

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \langle \int \left(\prod_{i=0}^k d^2x^i (M+g(x^i)) \right) \right. \\ &\times \left(\prod_{j=0}^{n-k} e^{2(\phi_A(x^j)+\phi_s(x^j))} \right) \left(\prod_{j=0}^{n-k} \bar{\chi}(x^j) \frac{1+\gamma^5}{2} \chi(x^j) \right) \\ &\times \int \left(\prod_{j=0}^{n-k} d^2x^j (M+g(x^j)) \right) \left(\prod_{i=0}^k e^{-2(\phi_A(x^i)+\phi_s(x^i))} \right) \\ &\left. \times \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}(x^i) \frac{1-\gamma^5}{2} \chi(x^i) \right) \right] \rangle_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para lo que sigue es conveniente introducir algunos resultados sobre valores medios en teorías bosónicas y fermiónicas. De particular interés será el cálculo de valores medios de campos escalares ϕ , de la forma

$$\langle \prod_{k=0}^n e^{i\beta_k \phi(x^k)} \rangle = N \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^2x ((\partial_\mu \phi(x))^2 + m^2 \phi(x) - J(x)\phi(x))}, \quad (3.12)$$

donde x^k son valores particulares de la coordenada, y donde se definió una fuente J como

$$J(x) \doteq i \sum_{k=0}^n \beta_k \delta(x - x^k). \quad (3.13)$$

Utilizando las propiedades de las integrales gaussianas puede verse que

$$\langle \prod_{k=0}^n e^{i\beta_k \phi(x^k)} \rangle = e^{\frac{1}{2} \int d^2x d^2y J(x) \Delta(x-y, m) J(y)} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n \beta_i \beta_j \Delta(x^i - x^j, m)}, \quad (3.14)$$

siendo $\Delta(x - y, m)$ el propagador escalar definido como la solución a la ecuación

$$(-\partial_x^2 + m) \Delta(x - y, m) = \delta(x - y). \quad (3.15)$$

Transformando fourier 3.15 puede verse que la solución en 1 + 1 dimensiones es [32]

$$\Delta(x - y, m) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} = \frac{1}{2\pi} K_0(m|x - y|), \quad (3.16)$$

donde K_0 es la función de Bessel modificada de orden cero y $||$ denota el módulo.

Este propagador es divergente en el ultravioleta en los casos con y sin masa, y en el caso sin masa, también es divergente en el infrarrojo. Esto puede verse haciendo un desarrollo en serie de potencias de 3.16, obteniendo [10]

$$\frac{1}{2\pi} K_0(m|x - y|) = \frac{-1}{4\pi} \left(\text{Ln} \left(\frac{m^2(x - y)^2}{4} \right) + 2\Phi \right) + O(m), \quad (3.17)$$

donde Φ es la constante de Euler.

Estas divergencias se evitan renormalizando la teoría, y es un tema sobre el que hay una gran extensión de trabajos, pero aquí solo se expondrán sus resultados. Se pueden ver más detalles sobre métodos para regularizar estas divergencias en [33].

Puede mostrarse que en el límite de m tendiendo a cero [10]

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^n \beta_i \beta_j \Delta(x^i - x^j, m) &= \frac{-1}{2\pi} [(\sum_{i=0}^n \beta_i)^2 (Ln(m/2) + \gamma) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \beta_i^2 Ln(\Lambda) + \sum_{i \neq j}^n Ln(|x^i - x^j|)] + O(m), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde Λ es una constante de cutoff. Se observa que en el límite de m tendiendo a cero los únicos términos no nulos en 3.14 son solo los productos que satisfacen $\sum_{i=0}^n \beta_i = 0$. Así, introduciendo una constante multiplicativa de renormalización $\xi_i = (\Lambda/\mu)^{-\beta_i^2/(4\pi)}$, de la forma:

$$e^{i\beta_i \phi(x^i)} \rightarrow \xi e^{i\beta_i \phi(x^i)}, \quad (3.19)$$

con μ una constante de renormalización de escala, puede verse que:

$$\langle \prod_{k=0}^n e^{i\beta_k \phi(x^k)} \rangle_{ren.} = \prod_{i < j}^n (\mu |x^i - x^j|)^{\frac{\beta_i \beta_j}{2\pi}}, \quad (3.20)$$

en donde $|_{ren.}$ denota que se efectuó una renormalización. Esta notación se omitirá de ahora en más, y se utilizarán los propagadores renormalizados. En particular, será necesario calcular propagadores de la forma

$$\langle \prod_{k=0}^n e^{i\beta(\phi(x^k) - \phi(y^k))} \rangle_0 = \frac{\prod_{i < j}^n (\mu |x^i - x^j|)^{\frac{\beta^2}{2\pi}} \prod_{i < j}^n (\mu |y^i - y^j|)^{\frac{\beta^2}{2\pi}}}{\prod_{i,j}^n (\mu |x^i - y^j|)^{\frac{\beta^2}{2\pi}}}. \quad (3.21)$$

Este resultado simplifica el cálculo de 3.11, ya que como se verá más adelante, el propagador del campo ϕ_A se puede expresar en términos de propagadores de la forma 3.16. Esto hace que, como solo sobreviven los valores de n que anulen la suma de los β_i , solo queden los términos tales que $n = 2k$. Así, se tienen tantos valores medios de funcionales de la forma $e^{2\phi(x^i)}$ como de la forma $e^{-2\phi(x^i)}$, lo que da una exponencial cuya suma de coeficientes es nula. Utilizando esto, podemos ver que 3.11 se reduce a:

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2 x^i d^2 y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\ &\quad \times \langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) + \phi_s(y^i) - \phi_A(y^i) - \phi_s(x^i))} \rangle_0 \langle \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}(x^i) \frac{1 + \gamma^5}{2} \chi(x^i) \right) \\ &\quad \left. \times \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}(y^i) \frac{1 - \gamma^5}{2} \chi(y^i) \right) \rangle_0 \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

que puede simplificarse si expresamos los campos fermiónicos en la base quiral $\chi =$

$\begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}$ y $\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_- & \bar{\chi}_+ \end{pmatrix}$. Para más detalles sobre la base de quiralidad definida, ver [34]. Esto simplifica algunos de los valores medios a calcular, como se verá de inmediato. En esta base, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(x^i) \frac{1 + \gamma^5}{2} \chi(x^i) &= \bar{\chi}_-(x^i) \chi_+(x^i) \\ \bar{\chi}(y^i) \frac{1 - \gamma^5}{2} \chi(y^i) &= \bar{\chi}_+(y^i) \chi_-(y^i). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esto se debe a que $\frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ son proyectores en las bases de quiralidad + y - respectivamente.

Usando que los campos χ_{\pm} y $\bar{\chi}_{\pm}$ anticonmutan porque son variables de Grassmann, se puede reordenar 3.22 usando 3.23 para obtener

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}, S_{\mu}, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2 x^i d^2 y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\ &\quad \times \left\langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) + \phi_s(y^i) - \phi_A(y^i) - \phi_s(x^i))} \right\rangle_0 \\ &\quad \times (-1)^{2K} \left\langle \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}_+(x^i) \chi_+(y^i) \right) \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}_-(x^i) \chi_-(y^i) \right) \right\rangle_0 \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Más aún, el propagador sobre el producto de fermiones de quiralidad definida que aparece en 3.24, puede factorizarse en propagadores sobre cada una de las quiralidades, ya que la acción fermiónica en esta base las separa en dos sumandos. La forma de ver esto, es viendo que si se hace el cambio de variables en la acción fermiónica

$$\begin{aligned} z &\doteq x_1 + ix_0 \\ \bar{z} &\doteq x_1 - ix_0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

que se puede ver que tiene jacobiano igual a 1, la acción para los fermiones libres en la base quiral queda [10]

$$S(\bar{\chi}, \chi) = - \int d^2 x \bar{\chi}(x) \not{\partial} \chi(x) \rightarrow - \int dz d\bar{z} (\bar{\chi}_+(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} \chi_+(z, \bar{z}) + \bar{\chi}_-(z, \bar{z}) \partial_z \chi_-(z, \bar{z})). \quad (3.26)$$

Con 3.26, se puede ver que los propagadores de cada uno de los campos de quiralidad definida, pueden obtenerse a partir de sus ecuaciones de movimiento igualadas a la delta

de Dirac. En efecto

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}\Delta_+(z, \bar{z}; z', \bar{z}') &= \delta(z - z') \\ \partial_z\Delta_-(z, \bar{z}; z', \bar{z}') &= \delta(\bar{z} - \bar{z}'),\end{aligned}\tag{3.27}$$

donde tomando un camino de integración que encierre la variable primada, y usando el teorema de Cauchy, se puede ver que las funciones que satisfacen estas ecuaciones son [10]

$$\begin{aligned}\Delta_+(z, \bar{z}; z', \bar{z}') &= -\frac{1}{2\pi(z - z')}, \\ \Delta_-(z, \bar{z}; z', \bar{z}') &= -\frac{1}{2\pi(\bar{z} - \bar{z}')}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Las funciones definidas en 3.28 tienen derivadas nulas en todo el plano con respecto a la variable z y \bar{z} respectivamente, exceptuando en los puntos que toman el valor de las variables primadas. En estos puntos los propagadores no están definidos, pero su integral vale 1 en cualquier contorno que encierre estos polos.

Ahora lo que sigue es el cálculo de los productos de valores medios fermiónicos que aparecen en 3.24. Esto puede hacerse utilizando el teorema de Wick para variables de Grassmann

$$\begin{aligned}\langle \prod_{i=0}^k \bar{\chi}_+(x^i) \chi_+(y^i) \rangle &= \text{Det}(\Delta_+(z^i, \bar{z}^i; z^{j'}, \bar{z}^{j'})) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \text{Det}\left(\frac{1}{z^i - z^{j'}}\right), \\ \langle \prod_{i=0}^k \bar{\chi}_-(x^i) \chi_-(y^i) \rangle &= \text{Det}(\Delta_-(z^i, \bar{z}^i; z^{j'}, \bar{z}^{j'})) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \text{Det}\left(\frac{1}{\bar{z}^i - \bar{z}^{j'}}\right),\end{aligned}\tag{3.29}$$

donde $z^i, \bar{z}^i, z^{i'}, \bar{z}^{i'}$ están definidos como en 3.25, para x^i e y^i respectivamente.

Los determinantes que aparecen en 3.29 son de tipo Cauchy, y tienen fórmulas cerradas [35]

$$(-1)^{k+1} \text{Det}\left(\frac{1}{z^i - z^{j'}}\right) = \frac{\prod_{i < j} (z^i - z^j)(z^{i'} - z^{j'})}{\prod_{i,j} (z^i - z^{j'})},\tag{3.30}$$

siendo su conjugado complejo la fórmula para el otro determinante que aparece en 3.29.

Ahora que se tienen todas las herramientas necesarias, se puede calcular la función

de partición 3.24. En efecto

$$\begin{aligned}
Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2 x^i d^2 y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\
&\quad \times \left\langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) + \phi_s(x^i) - \phi_A(y^i) - \phi_s(y^i))} \right\rangle_0 \\
&\quad \times \left\langle \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}_+(x^i) \chi_+(y^i) \right) \right\rangle_0 \left\langle \left(\prod_{i=0}^k \bar{\chi}_-(x^i) \chi_-(y^i) \right) \right\rangle_0 \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2 x^i d^2 y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\
&\quad \times \left\langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) + \phi_s(x^i) - \phi_A(y^i) - \phi_s(y^i))} \right\rangle_0 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2k} \\
&\quad \times \frac{\prod_{i<j} (z^i - z^j)(z'^i - z'^j) \prod_{i<j} (\bar{z}^i - \bar{z}^j)(\bar{z}'^i - \bar{z}'^j)}{\prod_{i,j} (z^i - z'^j) \prod_{i,j} (\bar{z}^i - \bar{z}'^j)} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2 x^i d^2 y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\
&\quad \times \left\langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) + \phi_s(x^i) - \phi_A(y^i) - \phi_s(y^i))} \right\rangle_0 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2k} \\
&\quad \times \frac{\prod_{i<j} |x^i - x^j|^2 |y^i - y^j|^2}{\prod_{i,j} |x^i - y^j|^2} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Ahora solo resta obtener el valor medio $\left\langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) + \phi_s(y^i) - \phi_A(y^i) - \phi_s(x^i))} \right\rangle_0$, para poder determinar completamente la forma de la función de partición. Como se mostró en 3.14, este valor medio depende de una exponencial del propagador de la teoría. En 3.20, se mostró cuanto vale cuando la teoría es la de un campo bosónico sin masa; veremos ahora como se puede expresar el propagador del campo ϕ_A en función de los propagadores de campos libres, para así poder utilizar este resultado.

Como se observa en 3.7 la parte de la función de partición para los campos ϕ_A y ϕ_s es

$$\int \mathcal{D}\phi_A e^{-\int d^2 x \left(\frac{1}{2} \phi_A(x) \partial^2 \phi_A(x) + \frac{1}{2\pi} \phi_A(x) \partial^2 \phi_A(x) + \frac{1}{2\pi} \phi_s(x) \partial^2 \phi_s(x) \right)}, \quad (3.34)$$

de donde se puede extraer la ecuación de movimiento que define el propagador Δ_A del campo ϕ_A

$$\left(\partial^2 \partial^2 - \frac{1}{\pi} \partial^2 \right) \Delta_A(x, y) = \delta(x - y). \quad (3.35)$$

Usando las ecuaciones que satisfacen los propagadores Δ para campos bosónicos libres con y sin masa, puede verse que esta ecuación se resuelve haciendo:

$$\Delta_A(x-y) = -\pi[\Delta(x-y, \frac{1}{\sqrt{\pi}}) - \Delta(x-y, 0)]. \quad (3.36)$$

Empleando las relaciones 3.36 y 3.14, se observa que

$$\begin{aligned} \langle \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_A(x^i) - \phi_A(y^i))} \rangle_0 &= e^{\int d^2x \frac{1}{2\pi} \phi_s(x) \partial^2 \phi_s(x)} e^{2 \sum_{i,j=0}^k \Delta_A(x^i - y^j)} \\ &= e^{\int d^2x \frac{1}{2\pi} \phi_s(x) \partial^2 \phi_s(x)} e^{-2\pi \sum_{i,j=0}^k (\Delta(x^i - y^j, \frac{1}{\sqrt{\pi}}) - \Delta(x^i - y^j, 0))} \\ &= e^{\int d^2x \frac{1}{2\pi} \phi_s(x) \partial^2 \phi_s(x)} e^{-2\pi \sum_{i,j=0}^k \Delta(x^i - y^j, \frac{1}{\sqrt{\pi}})} \\ &\times \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{2k} \frac{\prod_{i<j}^k (|x^i - x^j|)^{-2} \prod_{i<j}^k (|y^i - y^j|)^{-2}}{\prod_{i,j}^k (|x^i - y^j|)^{-2}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde se incluyó el factor asociado al jacobiano que había sido absorbido en el valor medio, y donde se definió $a \doteq \frac{2\pi}{\mu}$.

El factor multiplicativo que parece en la última línea de 3.37 se cancela con el factor que aparece en 3.33 asociado a los fermiones, dejando

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{2k} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2x^i d^2y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\ &\times \left. \prod_{i=0}^k e^{2(\phi_s(x^i) - \phi_s(y^i))} e^{\int d^2x \frac{1}{2\pi} \phi_s(x) \partial^2 \phi_s(x)} e^{-2\pi \sum_{i,j=0}^k \Delta(x^i - y^j, \frac{1}{\sqrt{\pi}})} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De aquí se puede usar nuevamente 3.14, para ver que

$$e^{-2\pi \sum_{i,j=0}^k \Delta(x^i - y^j, \frac{1}{\sqrt{\pi}})} = \langle \prod_{i=0}^k e^{i\alpha(w(x^i) - w(y^i))} \rangle, \quad (3.39)$$

donde $\alpha^2 \doteq 4\pi$, y w es un bosón de masa $m_w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Así, haciendo la transformación $i\sqrt{\pi}\phi'_s \doteq \phi_s$ se puede ver que:

$$\begin{aligned} Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) &= N' \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{2k} \frac{1}{k!^2} \left[\int \left(\prod_{i=0}^k d^2x^i d^2y^i (M + g(x^i))(M + g(y^i)) \right) \right. \\ &\times \left. e^{\int d^2x \frac{1}{2} \phi'_s(x) \partial^2 \phi'_s(x)} \langle \prod_{i=0}^k e^{i\alpha(w(x^i) + \phi'_s(x^i) - w(y^i) - \phi'_s(y^i))} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

El valor medio que aparece en la última línea de 3.40 es sobre una teoría bosónica libre de masa $m_w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. De la misma forma que se hizo para llegar hasta acá, utilizando el binomio de Newton y 3.14, puede verse directamente que una teoría con una acción

dada por

$$Z(w, S_\mu, g) = N' \int \mathcal{D}w e^{-\int d^2x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu w(x))^2 + \frac{1}{2\pi} w(x)^2 - \frac{(M+g(x))}{a} \cos(2\sqrt{\pi}(w(x)+\phi'_s(x))) \right)}, \quad (3.41)$$

satisface que $Z(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, S_\mu, g) = Z(w, S_\mu, g)$. Esta acción es la que establece la relación de bosonización con la teoría fermiónica 3.5.

Esta identificación se resume a la usual entre 3.3 y 3.4 cuando se hacen cero las funciones g y S_μ . En lo que sigue, se tomarán formas funcionales particulares para g y S_μ , de donde se intentarán reproducir modelos de interés bosónicos introduciendo singularidades en la teoría.

3.2. Singularidades Planas y Estáticas

En esta subsección se estudiarán casos particulares de las interacciones fermiónicas de la forma $(g(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) + i\bar{\psi}(x)\not{x}\psi(x))$ introducidas en el apartado anterior y sus efectos sobre la teoría bosonizada.

Como la función g no se ve modificada en la teoría bosónica 3.41, solo se mencionará uno de los casos más interesantes. El mismo corresponde a la introducción de N impurezas magnéticas en el modelo de Sine-Gordon, que se modelan de la forma

$$g(x) = \sum_{n=1}^N g_n \delta(x_1 - x_1^n), \quad (3.42)$$

donde g_n son constantes reales. Este modelo se corresponde a un modelo con impurezas magnéticas [36]. Los mismos se traducen al modelo de Schwinger como interacciones singulares con la masa, es decir, como auto interacciones en puntos x_1^n entre fermiones y antifermiones.

También son de interés algunos valores particulares para S_μ , por ejemplo funciones similares a las definidas en [37]. De esta forma, podemos hacer

$$S_\mu = \sum_{n_1=0}^{N_1} g_{1,n_1} \delta_{\mu,1} \delta(x_1 - x_1^{n_1}), \quad (3.43)$$

donde g_{0,n_1} son constantes reales. Esto corresponde a introducir impurezas locales que interactúen con la corriente espacial. Además, este tipo de potenciales pueden utilizarse para imponer vínculos en múltiples paredes. Luego, observando que

$$\phi'_s(x) = \sum_{n=0}^{N_1} \frac{g_{1,n_1}}{2} \sigma(x_1 - x_1^{n_1}), \quad (3.44)$$

donde σ es la función signo, puede verse que estas interacciones se mapean al modelo bosónico como interacciones de tipo

$$\frac{(M + g(x))}{a} \cos(2\sqrt{\pi}(w(x) + \sum_{n_1=0}^{N_1} \frac{g_{1,n_1}}{2\sqrt{\pi}} \sigma(x_1 - x_1^{n_1}))). \quad (3.45)$$

Este tipo de modelos de Sine-Gordon son una generalización del modelo de Sine-Gordon doble, ya que en este caso la interacción dentro del coseno depende de la posición. Estos modelos se corresponden en la teoría bosónica con modelos de multi-solitones y son de utilidad para, por ejemplo, modelar junturas Josephson [38], por lo que estos resultados podrían utilizarse en modelos de circuitos superconductores. En la Fig. 3.2 puede verse un esquema de una juntura de Josephson, la misma consta de dos superconductores separados por una pared muy delgada.

Una observación interesante es que si suponemos $g_{1,n_1} = g \forall n_1$, entonces podemos analizar nuevamente el caso de un modelo de fermiones confinados entre dos paredes. En este caso las condiciones de borde son diferentes, ya que el potencial singular interactúa con la corriente y no con la norma de Dirac de los campos. Este tipo de modelo es de interés en materia condensada [39]. Para estudiarlo, basta con suponer solo dos defectos, uno en $x_1 = 0$ y otro en $x_1 = L$. Podemos ver que sin importar el valor del acoplamiento g , el modelo fermiónico entre estas dos paredes es equivalente al modelo de Sine-Gordon usual, ya que la interacción extra entre esas dos paredes se anula por la suma de las funciones $\sigma(x_1) + \sigma(x_1 - L) = 0$.

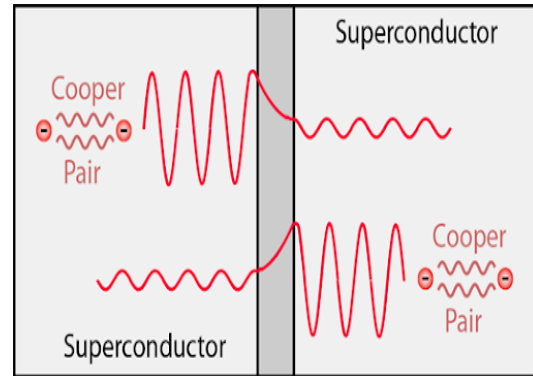


Figura 3.2: Esquema de una Juntura de Josephson. Consta de dos superconductores separados por una pared delgada, que permite correlaciones no nulas entre los pares de Cooper a ambos lados de la misma.

3.3. Algunos Comentarios

Los resultados obtenidos en esta sección son más generales que los analizados con potenciales singulares. La razón de estudiar este tipo de potenciales es que permiten imponer condiciones de borde a los campos, como se vio en los capítulos anteriores. La generalidad de estos resultados los vuelve aplicables a muchas situaciones. Existen otros modelos interesantes, en donde la contribución extra dentro del coseno en 3.45 es una constante. Este tipo de modelos son interesantes ya que presentan modelos de multi-solitones. Se deja para el futuro investigaciones que estudien como se mapean

estos modelos en la teoría fermiónica.

Además, puede verse que si se imponen las condiciones de Bag-Model (o también paredes imperfectas) en el modelo fermiónico, estas se ven mapeadas como interacciones de tipo delta con el término del coseno en el modelo de Sine-Gordon. Este tipo de modelos son de interés en modelos de ondas magnéticas en ferro-magnetos de multi-capas [40]. El tratamiento bosónico de estos modelos es de alta complejidad, y usualmente se realiza numéricamente. Con estos resultados se podrían obtener observables analíticamente en la teoría fermiónica, ya que la teoría de fermiones entre dos paredes planas es tratable más fácilmente.

Capítulo 4

Anomalía Quiral - Singularidad Plana y Estática

“Nothing in life is to be feared, it is only to be understood. Now is the time to understand more, so that we may fear less. ”

— Marie Curie, 1922

En este capítulo se analizarán los efectos de borde en la anomalía quiral. Pero antes de exponer estos resultados, se dará una breve introducción al tema.

Se dice que existe una “anomalía”, cuando clásicamente se conserva una magnitud, pero cuánticamente no lo hace. Para ser más específicos, supongamos que existe una magnitud conservada B_μ en una teoría clásica de campos, es decir, que cumpla que $\partial_\mu B^\mu = 0$. Entonces si en la teoría cuantizada se toma el valor medio sobre algún estado de esa magnitud, es decir si se toma $\langle B_\mu \rangle$, la magnitud se dice anomalía si ocurre que $\partial_\mu \langle B^\mu \rangle \neq 0$.

Estas magnitudes son de interés, ya que determinan si un modelo teórico está bien definido o no, debido a que la cancelación de la anomalía es necesaria para la consistencia de la invariancia de gauge de las corrientes conservadas [41]. Incluso se ha estipulado que la violación CP en el origen del universo pueda deberse a la no cancelación de la “anomalía quiral” [42].

A partir de ahora y en todo lo que sigue de este trabajo, la notación $\langle \rangle$ será reservada para valores de expectación sobre el estado de vacío.

El nombre “Anomalía quiral” se debe a que la magnitud que no se conserva cuánticamente es la corriente axial, definida como

$$J_\mu^5 \doteq i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi. \tag{4.1}$$

La primer observación de esta anomalía fue en los decaimientos del Pión neutro

a dos fotones [43]. Las contribuciones a orden más bajo a la sección eficaz de este proceso son diagramas de 1-loop de forma triangular como se observa en la Fig. 4.1. Estos diagramas se relacionan con la anomalía, ya que su contribución a la amplitud de dispersión $M_{\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma}$ depende de una función de correlación de 3 puntos en la que intervienen 3 corrientes fermiónicas: dos corrientes asociadas a la simetría U(1) y una corriente a la simetría axial [44], es decir que depende de:

$$\langle J_\mu^5 J_\nu J_\xi \rangle. \quad (4.2)$$

Si se contrae esta amplitud con ∂_μ se puede ver que esta contracción no se anula, lo que determina que la corriente quiral es anómala. Puede demostrarse que esta anomalía calculada a partir de diagramas de 1-loop es exacta [45] y que no es un efecto de falta de correcciones de mayor orden.

Para estudiar si esta anomalía posee una dependencia de la inclusión de una pared, lo primero que se hizo fue estudiar la teoría imponiendo condiciones de Bag-Model. Estas condiciones implican que la corriente inducida no pueda atravesar una dada pared, y por ende permiten restringir el dominio de los campos a un dominio que tenga como borde a esa pared. Lo que se hizo luego, fue generalizar estas condiciones de borde a paredes imperfectas, imponiendo un potencial singular en la acción. Esto, como veremos más adelante, permite que existan correlaciones a ambos lados de la pared introducida.

En este capítulo nos concentramos en introducir una pared plana y estática en la coordenada $x_d = 0$, donde analizamos en detalle los resultados en $1 + 1$ y $3 + 1$ dimensiones. Esto se debe a que en dimensiones pares no existe la matriz γ^5 , y por ende no existe la anomalía quiral [46].

En las siguientes dos subsecciones, se esquematizan los cálculos realizados imponiendo paredes perfectas e imperfectas. Para más detalles sobre este tipo de bordes ver [47], [22],[24], entre otras.

4.1. Condición de Bag Model - Regularización tipo Heat-Kernel

En este apartado la anomalía fue calculada de manera diferente a la usual, en donde se utilizan diagramas de Feynman. Aquí, los cálculos fueron realizados a partir de un cambio de variables en la función de partición que determina el valor de expectación

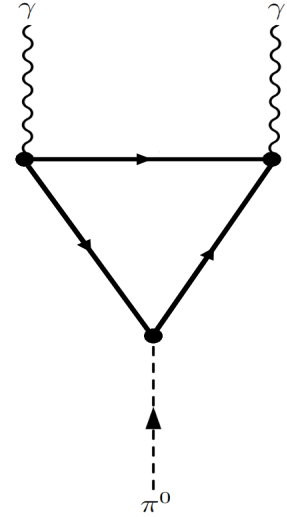


Figura 4.1: Ejemplo de un diagrama de Feynman de 1-loop del decaimiento del pión neutro a dos fotones. Las líneas con flechas representan propagadores fermiónicos.

($\langle \rangle$) de un operador Λ . Esta función de partición está dada por una teoría de fermiones sin masa acoplados a un campo de gauge A_μ , que puede provenir de un grupo no abeliano. Se deja lugar a que la teoría tenga otros campos, denotando estos grados de libertad como \mathcal{F} y su contribución a la acción total como $S_{\mathcal{F}}$.

Para estos cálculos, se supuso a Ω como el espacio euclídeo pero con la coordenada espacial x_d restringida al semi-espacio $x_d > 0$. Esto puede hacerse ya que las condiciones de Bag-Model por definición desconectan ambos lados de la pared. Las dimensiones estudiadas fueron $1 + 1$ y $3 + 1$.

La forma que toma el valor de expectación de Λ es:

$$\langle \Lambda \rangle = N \int \mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\lambda\Lambda(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \mathcal{F})e^{-S(\mathcal{F})-S(A_\mu, \psi)}e^{i\int_{\partial\Omega}d^dy\lambda(y)J_d(y)}\delta_{A_{mu}, \mathcal{F}}, \quad (4.3)$$

donde $S(A_\mu, \psi) = \int_{\Omega}d^dx(\frac{1}{4}F_{uv}^2(x) - \bar{\psi}(x)(\not{\partial} + i\not{A}(x))\psi(x))$, N es una constante de normalización y $\partial\Omega$ determina el borde del semi-espacio ($x_d = 0$). También se introdujo una delta funcional $\delta_{A_{mu}, \mathcal{F}}$ para incluir las posibles condiciones de borde de el resto de los campos además de los fermiónicos. Esta delta no jugará ningún papel en el resto de la deducción de la anomalía. Además se introdujo el campo auxiliar λ para determinar la condición de borde de Bag-Model, que se impuso sobre la pared. De ahora en más, la integración sobre el campo auxiliar se abreviará como δ_{J_d} , para mayor claridad en las cuentas.

Para ver la relación de 4.3 con la anomalía quiral, primero hay que notar que las corrientes fermiónicas $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ son invariantes ante la transformación 1.21. Por ende, la delta δ_{J_d} también lo es, ya que el campo auxiliar λ no se ve afectado por esta transformación.

Ahora, si hacemos esta transformación a las variables de integración, en 4.3 el valor medio del operador no cambia, ya que un cambio en las variables de integración por definición tiene que dejar invariante la integral. Lo que sí cambia es la acción, modificándose de la forma

$$\bar{\psi}(x)(\not{\partial}(x) + i\not{A}(x))\psi(x) \rightarrow \bar{\chi}(x)(\not{\partial} + i\not{A}(x))\chi(x) + \bar{\chi}(x)\not{\partial}\phi(x)\gamma^5\chi(x). \quad (4.4)$$

Además, aparece el jacobiano 1.13, lo que lleva a que el valor medio 4.3 quede expresado como

$$\langle \Lambda \rangle = N \int \mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}A_\mu\Lambda J_\phi e^{-S(\mathcal{F})-S(A_\mu, \chi)}e^{-\int_{\Omega}d^dx(\bar{\chi}(x)\not{\partial}\phi(x)\gamma^5\chi(x))}\delta_{A_{mu}, \mathcal{F}}\delta_{J_d}, \quad (4.5)$$

donde se omitió la dependencia de Λ con los campos, y donde ahora $J_d = \bar{\chi}\gamma_d\chi$.

Como se verá en los siguientes apartados, los únicos términos no nulos en el expo-

nente del jacobiano en 2 y 4 dimensiones serán a_2 y a_4 . Más aún, de estos dos términos, las contribuciones no nulas de cada uno de ellos serán integrales de ϕ con factores independientes de esta fase. Como ϕ es arbitrario, podemos tomar en la expresión 4.5 una derivada variacional de la forma $\frac{\delta}{\delta\phi(x)}$. Esta derivación hará que el término de la izquierda de la igualdad se anule y que en el término de la derecha aparezcan 3 sumandos que provienen de la regla de Leibnitz de derivación.

Una de las derivadas a calcular es

$$\frac{\delta J_\phi}{\delta\phi(x)}, \quad (4.6)$$

que dependerá de cuales de los coeficientes de 1.18 no se anulen luego de la regularización del jacobiano. Este cálculo se hará en las siguientes subsecciones dependiendo de la dimensión espacio-temporal de estudio.

Otra derivada que aparece es

$$-i \frac{\delta \int_\Omega d^d x \bar{\chi}(x) \not{\partial} \phi(x) \gamma^5 \chi(x)}{\delta\phi(x)} = - \frac{\delta \int_\Omega d^d x \partial_\mu (\phi(x) J_\mu^5(x))}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta \int_\Omega d^d x \phi(x) \partial_\mu J_\mu^5(x)}{\delta\phi(x)}, \quad (4.7)$$

donde en el primer término a la derecha de la igualdad se puede ser más explícito, teniendo en cuenta que todos los campos decaen a cero en el infinito, por lo que de esa integral solo sobreviven los términos que pertenezcan al borde. De esto se obtiene:

$$-i \frac{\delta \int_\Omega d^d x \bar{\chi}(x) \not{\partial} \phi(x) \gamma^5 \chi(x)}{\delta\phi(x)} = \delta(x_d) J_d^5(x) + \partial_\mu J_\mu^5(x). \quad (4.8)$$

La contribución con las funciones deltas es lo que aquí llamamos una contribución “clásica” a la anomalía. Esto se debe a que la misma no depende de la formulación cuántica de la teoría, sino que es una consecuencia de la forma que tiene la acción. Esta misma contribución aparecería en la teoría clásica. Esto nos lleva a considerar como una anomalía estos términos, ya que se definen como contribuciones anómalas a los términos que provengan exclusivamente de la teoría cuántica. El resultado final de esta derivación es

$$\langle \Lambda \partial_\mu J_\mu^5(x) \rangle = \langle \Lambda \frac{\delta J_\phi}{\delta\phi(x)} \rangle - \delta(x_d) \langle \Lambda J_d^5(x) \rangle. \quad (4.9)$$

De la ecuación 4.9 se observa que si en el exponente del jacobiano 1.13 existen términos no nulos, es decir, el jacobiano es diferente de la identidad, la corriente axial 4.1 es una anomalía. Esto es importante ya que implica que la existencia de una anomalía quiral se debe exclusivamente a que la medida de integración sobre todos los caminos no es invariante ante transformaciones de coordenadas. Esto puede interpretarse como que los “caminos” que causan que esta sea una magnitud anómala son las desviaciones

de las soluciones a la ecuación de movimiento clásica de los campos.

Como se mencionó anteriormente se separaron los cálculos en $1 + 1$ de los de $3 + 1$ en las siguientes subsecciones ya que aparecen diferentes términos en J_ϕ .

4.1.1. 1+1 dimensiones

En esta subsección se calcula la anomalía quirral en $1 + 1$ dimensiones.

El primer paso es determinar cuáles de los coeficientes que aparecen en 1.18 son relevantes en 2 dimensiones. Se sabe que la traza de un producto de un número impar de matrices γ es cero si se trabaja en dimensión par [48]. Esto es importante, ya que la matriz γ^5 es proporcional al producto de todas las matrices γ en esa dimensión, en este caso solo dos matrices; por lo que al tomar la traza sobre el fibrado tangente a Ω con el que se esté trabajando, se anularán todos los términos con un número impar de matrices γ .

En este caso, puede verse que el término a_0 se anula debido a que la traza de la matriz γ^5 es cero. Además, el término a_1 también se anula, ya que como $\chi = i\gamma_n\gamma^5$, la traza del producto $\chi\gamma^5$ es cero, por ser proporcional a un producto de 5 matrices γ .

Para el término a_2 , se observa que la contribución puramente de borde se anula por la misma razón que se anula el término a_1 . Además, como la contribución de volumen de este término tiene una traza de 4 matrices γ la misma no se anula, quedando solo

$$a_2(\phi\gamma^5, \mathbb{D}_\alpha^2) = \frac{1}{6}(4\pi)^{-1} \left(\int_\Omega d^2x \text{Tr}(6\phi(x)\gamma^5 E(x)) \right). \quad (4.10)$$

Con esto se obtiene que

$$\langle \Lambda \partial_\mu J_\mu^5(x) \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle \Lambda \int_0^1 d\alpha F_{\mu\nu(\alpha)} \text{Tr}(\gamma^5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]) \rangle - \delta(x_1) \langle \Lambda J_1^5(x) \rangle. \quad (4.11)$$

Ahora, se puede hacer uso de 1.12 para notar que la integración en α resulta en un factor multiplicativo igual a 1. Además, se puede ver que

$$\text{Tr}(\gamma^5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]) = \frac{i}{2} \epsilon_{ab} \text{Tr}(\gamma_a \gamma_b [\gamma_\mu, \gamma_\nu]) = 4i\epsilon_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Esto termina dando por resultado

$$\langle \Lambda \partial_\mu J_\mu^5(x) \rangle = \frac{i}{2\pi} \langle \Lambda \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \rangle - \delta(x_1) \langle \Lambda J_1^5(x) \rangle. \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 coincide con el resultado bien conocido para la anomalía quirral [10] sin bordes. El segundo término a la derecha de la igualdad proviene de la teoría clásica siempre que haya bordes y como se mencionó antes, esto no contribuye a la anomalía.

4.1.2. 3+1 dimensiones

En esta subsección se calcula la anomalía quiral en 3 + 1 dimensiones.

De la misma forma que se hizo en el apartado anterior, es necesario demostrar cuales de los coeficientes de 1.18 no se anulan. Como se está trabajando en 4 dimensiones, sigue valiendo que la traza de un número impar de matrices γ es cero, por lo que se ve fácilmente que los coeficientes a_0 y a_1 se anulan.

El hecho de que el coeficiente a_2 no interviene en la anomalía en 3 + 1 no es tan directo, ya que no se puede utilizar el argumento de que haya un número impar de matrices γ . Los cálculos en 3 + 1 para la traza $Tr(\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu)$ están hechos en [49] y se ve que esta traza es cero. Esto significa que el coeficiente a_2 tampoco contribuye a la anomalía.

De la misma forma que a_0 y a_1 , el coeficiente a_3

$$a_3(\phi\gamma^5, \mathcal{D}_\alpha^2) = \frac{1}{384}(4\pi)^{\frac{-(4-1)}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} d^3x Tr(\phi(x)\gamma^5(96\chi E(x)) + 24\chi\partial_3\partial_3\phi(x)\gamma^5) \right), \quad (4.14)$$

se anula ya que todos los términos tienen trazas de un número impar de matrices γ .

Esto nos deja solamente con el coeficiente a_4 . Tanto su contribución de volumen como su contribución de borde, tienen términos con números pares de matrices γ

$$a_4(\phi\gamma^5, \mathcal{D}_\alpha^2) = \frac{1}{360(4\pi)^2} \left(\int_{\Omega} d^4x Tr(180\phi(x)\gamma^5 E^2(X)) + \int_{\partial\Omega} d^3x Tr(\phi(x)\gamma^5 60\partial_3 E(x)) \right). \quad (4.15)$$

Aquí se omitieron los términos con matrices χ dentro de la traza, dado que estos contienen un número impar de matrices γ .

Tomando la derivada $\frac{\delta J_\phi}{\delta\phi(x)}$, se puede ver que

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \partial_\mu J_\mu^5(x) \rangle &= \frac{i}{256\pi^2} \langle \Lambda \int_0^1 d\alpha (F_{\mu\nu}(\alpha))^2 Tr(\gamma^5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]^2) \rangle \\ &+ \frac{-i}{96\pi^2} \delta(x_3) \langle \Lambda \int_0^1 d\alpha \partial_1 F_{\mu\nu}(\alpha) Tr(\gamma^5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]) \rangle - \delta(x_3) \langle \Lambda J_3^5(x) \rangle \\ &= \frac{i}{64\pi^2} \langle \Lambda \int_0^1 d\alpha (F_{\mu\nu}(\alpha))^2 Tr(\gamma^5 (\gamma_\mu \gamma_\nu)^2) \rangle \\ &+ \frac{-i}{48\pi^2} \delta(x_3) \langle \Lambda \int_0^1 d\alpha \partial_3 F_{\mu\nu}(\alpha) Tr(\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu) \rangle - \delta(x_3) \langle \Lambda J_3^5(x) \rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Se observa que el término de borde también se anula, ya que es proporcional a $Tr(\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu)$ al igual que a_2 . Teniendo esto en cuenta, el resultado final es

$$\langle \Lambda \partial_\mu J_\mu^5(x) \rangle = \frac{i}{16\pi^2} \langle \Lambda F_{\mu\nu}(x) F_{\psi\beta}(x) \epsilon_{\mu\nu\psi\beta} \rangle - \delta(x_3) \langle \Lambda J_3^5(x) \rangle, \quad (4.17)$$

donde fue necesario calcular la traza de 8 matrices γ . Este cálculo se hizo utilizando el software Mathematica.

El resultado 4.17 coincide con el resultado bien conocido para la anomalía quiral en $3 + 1$ dimensiones [10], exceptuando por el término clásico a la derecha de la igualdad.

Vemos que ocurre lo mismo que en $1 + 1$ dimensiones, la anomalía no tiene contribuciones de borde cuando se confina el dominio de los campos a un semi-espacio.

Estos resultados fueron alentadores, y motivaron la generalización que se puede ver en la siguiente sección. En la misma, se impusieron condiciones de borde utilizando paredes imperfectas, en donde se relajó la condición de Bag-Model utilizada en estos cálculos.

4.2. Paredes imperfectas - Regularización tipo Point-splitting

En esta sección se realizan cálculos de la anomalía quiral, el propagador de Dirac, y el tensor de polarización de vacío en presencia de una singularidad plana y estática. La forma del acoplamiento con esta singularidad es

$$\mathcal{S}(\bar{\psi}, \psi; A) = \int d^{d+1}x \bar{\psi}(x) [\not{D} + g\delta(x_d)] \psi(x), \quad (4.18)$$

donde el valor de g es el que determina la condición de borde, como se mencionó en la Introducción 1.2.3.

En esta sección, se generalizan los resultados obtenidos anteriormente, relajando las condiciones de borde del Bag-Model, y permitiendo el paso de corrientes de un lado a otro de la pared. En las siguientes subsecciones se demuestra que la presencia de esta singularidad no solo no afecta a la anomalía, sino que además cuando $g = 2$ se observa que las correlaciones a ambos lados de la pared entre corrientes inducidas se anulan. Esto implica que las regiones del espacio a ambos lados de la pared se desconectan, obteniendo las condiciones de Bag-Model del apartado anterior, que anulan la componente normal de la corriente de Dirac en el borde.

4.2.1. Independencia de la anomalía en presencia del defecto

En esta subsección se utiliza el método de Point-Splitting para regularizar el valor medio de la corriente axial, y demostrar que la anomalía no posee una contribución de borde.

El valor medio de la corriente axial puede expresarse como una combinación lineal de componentes del propagador de Dirac en el límite de coincidencia, es decir cuando

$S_F(x, x)$. En efecto, se puede hacer

$$j_{\mu reg}^5(x) = i < \bar{\psi}(x - \frac{\epsilon}{2}) \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi(x + \frac{\epsilon}{2}) > e^{i\epsilon\eta \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} dy \cdot A(y)}, \quad (4.19)$$

donde η es un parámetro que cuando cumple $\eta = 1$ hace que la teoría sea gauge invariante, ya que el factor exponencial daría invariancia ante las transformaciones

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\alpha(x)} \psi(x), \quad (4.20)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}(x), \quad (4.21)$$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha(x). \quad (4.22)$$

Esta regularización separando los valores de x en una distancia ϵ se denomina regularización de tipo Point-Splitting. La razón de tener que hacer esto es que el propagador tiene singularidades en el límite de coincidencia, y con esta regularización se pueden despejar las mismas tomando $\epsilon \rightarrow 0$.

Lo que sigue para obtener la anomalía quiral es tomar la divergencia de la corriente axial regularizada. La misma puede separarse en tres términos

$$\partial_{\mu} J_{\mu reg}^5(x) = C_1 + C_2 + C_3, \quad (4.23)$$

donde

$$C_1 = -e Tr[\gamma^5 (\not{A}(x - \frac{\epsilon}{2}) - \not{A}(x + \frac{\epsilon}{2})) S_F(x + \frac{\epsilon}{2}, x - \frac{\epsilon}{2})] \quad (4.24)$$

$$C_2 = -i[g(\delta(x_d - \frac{\epsilon_d}{2}) + \delta(x_d + \frac{\epsilon_d}{2}))] Tr[\gamma_5 S_F(x + \frac{\epsilon}{2}, x - \frac{\epsilon}{2})] e^{i\epsilon\eta \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} dy \cdot A(y)} \quad (4.25)$$

$$C_3 = i\epsilon\eta J_{\mu reg}^5(x) [\int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} dy \cdot A(y)]. \quad (4.26)$$

A partir de estos coeficientes se puede tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y analizar que contribuciones no se anulan, ya que de estas se obtiene la anomalía quiral. Es interesante notar que en este límite, el término C_3 se anula si el campo de gauge no es singular, ya que la integral se anula y multiplica un observable finito. No es claro a simple vista cual es la parte no nula de C_1 y C_2 , ya que es necesario un cálculo de los propagadores. Para demostrar que la anomalía no tiene contribuciones de borde, en lo que sigue vamos a demostrar que C_2 se anula en el límite de coincidencia, y que además el propagador no tiene contribuciones divergentes que dependan del acoplamiento g . Incluso se puede demostrar esto en el caso de que el campo tenga masa, algo que haremos a continuación. Además, y por simplicidad, se hará un cálculo demostrativo de la anomalía quiral con este tipo de regularización en 1 + 1.

En efecto, sea S_F^0 el propagador del campo de Dirac masivo a orden cero en el

campo de gauge y en presencia de una pared estática y plana en $x_d = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
S_F^0(x, y) &= \langle x | (\not{\partial} + m + g\delta(x_d))^{-1} | y \rangle \\
&= \langle x | (1 + (\not{\partial} + m)^{-1}g\delta(x_d))^{-1}(\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle \\
&= \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-g)^k \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} \delta^1 \\
&\quad \times (\not{\partial} + m)^{-1} \delta^2 \dots (\not{\partial} + m)^{-1} \delta^k (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

donde δ^k es la delta de Dirac en la variable x_d y k solo es una notación que cuantifica el número de productos que aparecen en cada término de la suma. De ahora en más, se utilizará la notación $(x_0, x_1, \dots, x_d) = (x_{\parallel}, x_d)$ para las coordenadas perpendiculares a x_d .

Con el fin de simplificar la expresión anterior y estudiar su convergencia en el límite de coincidencia, veamos el primer y segundo orden g . A primer orden se obtiene

$$\langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} \delta (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle = \int (d^d z_{\parallel}) \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | z_{\parallel} \rangle_0 \langle z_{\parallel} |_0 (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle, \tag{4.28}$$

y a segundo orden

$$\begin{aligned}
\langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} \delta (\not{\partial} + m)^{-1} \delta (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle &= \int (d^d z_{\parallel}) (d^d w_{\parallel}) \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | z_{\parallel} \rangle_0 \\
&\quad \times K(z_{\parallel} - w_{\parallel}) \langle w_{\parallel} |_0 (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle, \tag{4.29}
\end{aligned}$$

donde $K(z_{\parallel} - w_{\parallel}) \doteq \langle z_{\parallel} |_0 (\not{\partial} + m)^{-1} | w_{\parallel} \rangle_0$. Podemos continuar esto a órdenes más altos, y la función K va a aparecer $k - 1$ veces en cada término de orden g^k . Entonces, podemos simplificar haciendo

$$\begin{aligned}
S_F^0(x, y) &= \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle - \int (d^d z_{\parallel}) (d^d w_{\parallel}) \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | z_{\parallel} \rangle_0 \\
&\quad \times M(z_{\parallel} - w_{\parallel}) \langle w_{\parallel} |_0 (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$$S_F^0(x, y) = \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle - T(x, y), \tag{4.31}$$

donde definimos $T(x, y)$ como la contribución de borde del propagador y M como

$$\begin{aligned}
M(z_{\parallel} - w_{\parallel}) &\doteq (gI - g^2 K^2 + g^3 K^3 + \dots)(z_{\parallel} - w_{\parallel}) \\
&= g(I + gK)^{-1}(z_{\parallel} - w_{\parallel}) \\
&= g \langle z_{\parallel} |_0 (I + gK)^{-1} | w_{\parallel} \rangle_0. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

M tiene una forma más simple en el espacio de momentos, así que calculamos K integrando sobre el momento p_d

$$K(z_{\parallel} - w_{\parallel}) = \int \frac{(d^d p_{\parallel})}{(2\pi)^{d-1}} e^{ip_{\parallel} \cdot (z_{\parallel} - w_{\parallel})} \frac{(-i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m)}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}}. \quad (4.33)$$

Con K ya expresado en el espacio de momentos, todo lo que necesitamos para probar que esta contribución es finita es tomar el límite de coincidencia de $T(x, y)$. En efecto

$$\begin{aligned} T(x, x) &= \int \frac{(d^d p_{\parallel}) dq_d dq'_d}{(2\pi)^{d-1} (2\pi)^2} e^{i(q_d - q'_d)x_d} \frac{g}{1 + g \frac{-i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}}} \\ &\times \frac{(-i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel} - i\gamma_d q_d + m)}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + q_d^2 + m^2}} \frac{(-i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel} - i\gamma_d q'_d + m)}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + q_d'^2 + m^2}} \\ &= \int \frac{(d^d p_{\parallel})}{(2\pi)^{d-1}} e^{-2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}} \frac{g}{1 + g \frac{-i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}}} \\ &\times \frac{m + \gamma_d \sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2} \text{Sgn}(x_d) - i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel}}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}} \\ &\times \frac{m - \gamma_d \sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2} \text{Sgn}(x_d) - i\gamma_{\parallel} \cdot p_{\parallel}}{2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Luego de un poco de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} T(x, x) &= \int \frac{(d^d p_{\parallel})}{(2\pi)^{d-1}} e^{-2\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2}} \frac{\frac{-2}{g} p_{\parallel} \cdot p_{\parallel}}{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + (m + \frac{2}{g} \sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel} + m^2})^2} \\ &= \frac{\int d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^{\infty} dr e^{-2\sqrt{r^2 + m^2}} \frac{\frac{-2}{g} r^d}{r^2 + (m + \frac{2}{g} \sqrt{r^2 + m^2})^2}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde en la última igualdad se utilizaron coordenadas esféricas en $d - 1$ dimensiones, factorizando la integral en ángulo sólido Ω y un radio $r = +\sqrt{p_{\parallel} \cdot p_{\parallel}}$. Esta integral es finita para todo valor de g gracias a la exponencial decreciente.

Una vez realizados estos cálculos, podemos utilizar estos resultados para mostrar que la anomalía no depende del borde. Para ello, primero es necesario ver que el propagador puede expandirse en potencias del campo de gauge de la misma forma que se hizo en potencias de g

$$\begin{aligned} S_F(x, y) &= \langle x | (\not{\partial} + m + ie\mathcal{A} + g\delta(x_d))^{-1} | y \rangle \\ &= \langle x | (1 + (\not{\partial} + m + g\delta(x_d))^{-1} ie\mathcal{A})^{-1} (\not{\partial} + m + g\delta(x_d))^{-1} | y \rangle \\ &= \langle x | (1 + S_F^0 ie\mathcal{A})^{-1} S_F^0 | y \rangle = S_F^0(x, y) + S_F^1(x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde

$$S_F^1(x, y) = -ie \int d^{d+1}z S_F^0(x, z) A(z) S_F^0(z, y) \quad (4.37)$$

es finito en el límite de coincidencia, así como también los resultados a órdenes más altos en A_μ , ya que no aparecen propagadores con sus dos argumentos iguales.

Para lo que sigue vamos a volver al caso del campo sin masa, en donde el análisis es relevante para los cálculos de la anomalía quiral. Con estos resultados podemos decir que

$$S_F(x, x) = D_F^0(x, x) + (\mathbf{Contribuciones Finitas}), \quad (4.38)$$

donde $D_F^0(x, y) = \langle x | (\not{\partial} + m)^{-1} | y \rangle$. Esto nos sirve para poder argumentar que antes de tomar el límite de coincidencia, la única parte relevante es el propagador libre. Volviendo al cálculo de la anomalía

$$\begin{aligned} C_2 &= -i[g(\delta(x_d - \frac{\epsilon_d}{2}) + \delta(x_d + \frac{\epsilon_d}{2}))] Tr[\gamma_5 [D_F^0(x + \frac{\epsilon}{2}, x - \frac{\epsilon}{2}) + (\mathbf{C. F.})]] e^{ie\eta \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} dy \cdot A(y)} \\ &= -i[g(\delta(x_d - \frac{\epsilon_d}{2}) + \delta(x_d + \frac{\epsilon_d}{2}))] Tr[\gamma_5 D_F^0(x + \frac{\epsilon}{2}, x - \frac{\epsilon}{2})] e^{ie\eta \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} dy \cdot A(y)} = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

porque $Tr[\gamma^5] = Tr[\gamma^5 \gamma_\mu] = 0$. Esto significa que en el cálculo de la anomalía, todas las contribuciones asociadas a el borde en el propagador no son relevantes y por ende no contribuyen a la anomalía. Esto se debe a que la única contribución que queda es la asociada a C_1 , y esta depende solo del propagador sin el borde en el límite de coincidencia. Por completitud, a continuación se muestra el resultado para la anomalía en $1 + 1$ dimensiones, donde el propagador libre para el campo sin masa toma la forma

$$D_F^0(x + \frac{\epsilon}{2}, x - \frac{\epsilon}{2}) = -\frac{\not{\epsilon}}{\epsilon^2} + O(\epsilon), \quad (4.40)$$

entonces

$$C_1 = e Tr[\epsilon_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \gamma^5 \gamma_\mu \frac{-\not{\epsilon}}{2\pi\epsilon^2}] = \frac{-e}{2\pi} Tr[\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\rho] \frac{\epsilon_\nu \epsilon_\rho}{\epsilon^2} \partial_\nu A_\mu(x) = \frac{-ie}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu(x), \quad (4.41)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita en dos dimensiones. Este es el resultado usual para la anomalía en 2 dimensiones.

4.2.2. Propagador de Dirac en $d + 1$ dimensiones

Como vimos anteriormente, el propagador en presencia de una pared es fundamental para realizar cálculos de la anomalía, pero el mismo también es útil para obtener observables de todo tipo. En este apartado calculamos el propagador para el campo de

Dirac sin masa, en presencia de una singularidad plana y estática en $d + 1$.

La descomposición del propagador en el espacio de coordenadas es la que se observa en 4.31, pero en este apartado trabajaremos en una representación más sencilla. El sistema ofrece una invariancia ante traslaciones en todas las coordenadas paralelas a la pared ($x_d = 0$), por lo que es natural transformar Fourier las coordenadas paralelas a ésta. En efecto, el propagador transformado en estas coordenadas toma la forma

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_F^0(p_{\parallel}; x_d, y_d) &= \int d^d(x_{\parallel} - y_{\parallel}) S_F^0(x, y) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \\
&= e^{-|p_{\parallel}||x_d - y_d|} \left[\gamma_d \sigma(x_d - y_d) + \frac{ip_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} \right] \\
&\quad - \int \frac{dq_d dk_d}{(2\pi)^2} e^{iq_d x_d} e^{-ik_d y_d} \frac{[iq_d \gamma_d + ip_{\parallel}]}{[q_d^2 + p_{\parallel}^2]} \frac{[ik_d \gamma_d + ip_{\parallel}]}{[k_d^2 + p_{\parallel}^2]} \tilde{M}(p_{\parallel}) \\
&= e^{-|p_{\parallel}||x_d - y_d|} \left[\gamma_d \sigma(x_d - y_d) + \frac{ip_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} \right] \\
&\quad - \frac{e^{-|p_{\parallel}|(|x_d| + |y_d|)}}{2} \left[\gamma_d \sigma(x_d - y_d) + \frac{ip_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} \right] \left[-\gamma_d \sigma(x_d - y_d) + \frac{ip_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} \right] \frac{\frac{g}{2}}{1 + \frac{g}{2} \frac{-ip_{\parallel}}{|p_{\parallel}|}},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

que luego de un poco de álgebra se puede transformar en

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_F^0(p_{\parallel}; x_d, y_d) &= e^{-|p_{\parallel}||x_d - y_d|} \left[\gamma_d \sigma(x_d - y_d) + \frac{ip_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} \right] \\
&\quad + \frac{e^{-|p_{\parallel}|(|x_d| + |y_d|)}}{2(1 + (\frac{g}{2})^2)} \left[(\frac{g}{2})(\sigma(x_d)\sigma(y_d) + 1) + i(\frac{g}{2}) \frac{p_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} \gamma_d (\sigma(x_d) + \sigma(y_d)) \right] \\
&\quad + \frac{e^{-|p_{\parallel}|(|x_d| + |y_d|)}}{2(1 + (\frac{g}{2})^2)} \left[(\frac{g}{2})^2 \gamma_d (\sigma(x_d) - \sigma(y_d)) + i(\frac{g}{2})^2 \frac{p_{\parallel}}{|p_{\parallel}|} (1 - \sigma(x_d)\sigma(y_d)) \right].
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Como era de esperarse, las contribuciones al propagador que dependen del acoplamiento con el borde no tienen invariancia ante traslaciones en la coordenada perpendicular a la pared. Además, estas contribuciones de borde se anulan cuando el acoplamiento es nulo. También es interesante notar que las correlaciones entre los campos a ambos lados de la pared dependen del cuadrado del acoplamiento, mientras que las correlaciones entre los campos a un mismo lado de la pared dependen linealmente con el acoplamiento. Esto será relevante en la siguiente subsección, en donde las correlaciones entre corrientes a un lado y otro de la pared se verán afectadas para el valor particular $g = 2$. Esta expresión para el propagador podría ser de utilidad para calcular valores de expectación de interés en $d + 1$ dimensiones, en presencia de una pared plana y estática, con condiciones de borde imperfectas.

4.2.3. Tensor de Polarización de Vacío en 1 + 1 dimensiones

En este apartado se calcula el tensor de polarización de vacío en 1 + 1 dimensiones.

Como se mencionó anteriormente, el propagador en presencia del borde puede ser de utilidad para calcular observables. En particular, se puede calcular el valor de expectación de la corriente inducida. Aquí se calcula la corriente inducida a primer orden en el campo de gauge. Es interesante notar que en 1 + 1 dimensiones la corriente axial y la corriente inducida se relacionan de la forma

$$j_\mu^5 = \epsilon_{\mu\nu} j_\nu, \quad (4.44)$$

lo que permite relacionar la anomalía con las corrientes de gauge de manera directa. Además, el hecho de que la corriente de gauge dependa de la corriente axial, implica que si hubiera contribuciones de borde a la anomalía, la corriente de gauge se vería afectada por éstas. Como demostramos anteriormente, la anomalía no recibe contribuciones de borde, por lo que la corriente de gauge calculada a primer orden en el campo A_μ es exacta a ese orden. Para obtener j_μ vamos a hacer

$$j_\mu(x) = -e \operatorname{tr} \left[\gamma_\mu \langle x | (\not{\partial} + ie \not{A}(x) + g\delta(x_d))^{-1} | y \rangle \right], \quad (4.45)$$

lo que al menor orden no trivial implica

$$j_\mu(x) = ie^2 \int d^{d+1}y \operatorname{tr} \left[\gamma_\mu \mathcal{S}_F^0(x, y) \gamma_\nu \mathcal{S}_F^0(y, x) \right] A_\nu(y). \quad (4.46)$$

Así, se define el tensor de polarización de vacío (VPT) como

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = -e^2 \operatorname{tr} \left[\gamma_\mu \mathcal{S}_F^0(x, y) \gamma_\nu \mathcal{S}_F^0(y, x) \right], \quad (4.47)$$

a partir de lo cual podemos escribir

$$j_\mu(x) = -i \int d^{d+1}y \Pi_{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y). \quad (4.48)$$

En lo que sigue, utilizaremos los resultados de la subsección anterior para calcular el VPT de forma exacta. De manera similar a como se hizo para obtener el propagador, transformamos Fourier las variables perpendiculares a x_1 , que en este caso sería el tiempo imaginario. En efecto

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_0; x_1, y_1) = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\gamma_\mu \tilde{\mathcal{S}}_F^0(p_0 + k_0; x_1, y_1) \gamma_\nu \tilde{\mathcal{S}}_F^0(p_0; y_1, x_1) \right]. \quad (4.49)$$

Utilizando los resultados obtenidos en 4.43, puede verse que $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_0; x_1, y_1)$ depende

del signo de x_1 y x_2 . Debido a esto, se encontró conveniente expresar el resultado en términos del signo de estas variables. Haciendo esto, se obtiene

- $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_0; x_1, y_1) = & -\frac{e^2}{2\pi} |k_0| \left\{ \left[e^{-|k_0||x_1-y_1|} + \frac{g^2}{(1+\frac{g^2}{4})^2} e^{-|k_0||x_1+y_1|} \right] \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \right. \\ & - \left[e^{-|k_0||x_1-y_1|} - \frac{g^2}{(1+\frac{g^2}{4})^2} e^{-|k_0||x_1+y_1|} \right] \delta_{\mu 1} \delta_{\nu 1} \\ & + i\sigma(k_0) \left[\sigma(x_1 - y_1) e^{-|k_0||x_1-y_1|} - \frac{g^2}{(1+\frac{g^2}{4})^2} e^{-|k_0||x_1+y_1|} \right] \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 1} \\ & \left. + i\sigma(k_0) \left[\sigma(x_1 - y_1) e^{-|k_0||x_1-y_1|} + \frac{g^2}{(1+\frac{g^2}{4})^2} e^{-|k_0||x_1+y_1|} \right] \delta_{\mu 1} \delta_{\nu 0} \right\}. \quad (4.50) \end{aligned}$$

- $x_1 > 0$ y $y_1 < 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_0; x_1, y_1) = & -\frac{e^2}{2\pi} \frac{1 - (\frac{g}{2})^2}{1 + (\frac{g}{2})^2} e^{-|k_0||x_1-y_1|} \left[|k_0| (\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} - \delta_{\mu 1} \delta_{\nu 1}) \right. \\ & \left. + i k_0 (\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 1} + \delta_{\mu 1} \delta_{\nu 0}) \right]. \quad (4.51) \end{aligned}$$

Es interesante notar que cuando $x_1 > 0$ y $y_1 < 0$, el VPT se anula si $g = 2$. Esto tiene una interpretación física interesante, ya que el VPT puede expresarse como [12]

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = -\langle J_\mu(x) J_\nu(y) \rangle. \quad (4.52)$$

Esto significa que J_μ no tiene correlación con si misma al otro lado de la pared, o en otras palabras, J_μ no es sensitiva respecto de un campo de gauge al otro lado de la pared. Cabe destacar que cuando $g = 0$ se recupera el tensor de polarización de vacío en el espacio libre, salvo un término singular de la forma $\frac{e^2}{\pi} \delta(x_1 - y_1) \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}$, que solo aparece cuando existe invariancia de Lorentz en la dirección perpendicular a la pared [12].

4.3. Algunos Comentarios

Los resultados de esta sección son de utilidad en el cálculo de observables en teorías con paredes estáticas y planas. Además, el hecho de que la anomalía no dependa de la introducción de un borde en la teoría fermiónica despierta interés en ver si esto también es cierto en teorías con mayor cantidad de paredes. En teoría de cuerdas esto podría ser

relevante, ya que las teorías fermiónicas tienen dimensiones compactificadas. Se deja para trabajos en el futuro un cálculo del propagador en presencia de más de un defecto, para repasar esta deducción incluyendo los mismos y analizando si efectivamente las divergencias solo tienen relación con la teoría libre, y no con las paredes.

Además, queda aún la discusión de este tipo de resultados cuando las paredes no son hiper-planos, sino que tienen curvatura. Es posible que estos resultados sean válidos a pesar de incluir curvatura, ya que podría hacerse una expansión en la curvatura de la pared y ver que estos resultados siguen valiendo. En la siguiente subsección se realiza un cálculo del propagador fermiónico cuando estas paredes tienen curvatura, pero no se vuelven a analizar sus divergencias como en este capítulo. Se dejan para un trabajo en el futuro una verificación de estas hipótesis.

Capítulo 5

Propagador de Dirac - Singularidad Con Curvatura

“Remember to look up at the stars and not down at your feet. Try to make sense of what you see and wonder about what makes the universe exist, be curious.”

— Stephen Hawking, 2011

Con la intención de generalizar los resultados del Capítulo 4, en este apartado se generalizarán los cálculos del propagador obtenidos en 4.43, para una singularidad con una forma funcional $x_d = f(x_{||})$, donde f determina una superficie no compacta.

Como vimos en los capítulos anteriores, los cálculos para obtener observables en presencia de singularidades planas y estáticas aumentan su complejidad respecto de los cálculos sin ellas, pero aún así, se pueden obtener resultados exactos. En el caso de esta generalización a paredes con dependencia no trivial en el espacio, no se pueden obtener resultados exactos sin ser más explícitos con la forma de la pared. En la siguiente subsección explicaremos un método llamado “Desarrollo en Derivadas”, que nos permitirá dar una forma explícita para cada término en un desarrollo a todo orden en derivadas de la superficie que define la singularidad. Luego, utilizaremos los resultados generales obtenidos para realizar algunas aproximaciones y supuestos sobre f . Esto nos permitirá ser más explícitos en la forma de la función f , que nos permitirán expresar como integrales en el espacio de momentos cada contribución del desarrollo en derivadas, para este caso particular.

Los resultados obtenidos en este capítulo podrían ser de interés para el cálculo de observables en teorías fermiónicas en presencia de singulares. Por mencionar algunos ejemplos, esto serviría para cálculos relacionados con el Efecto Casimir, así como también para obtener correlaciones entre corrientes en sistemas de materia condensada, con paredes curvas que modifiquen la masa de los fermiones, o más en general, que

impongan algún vínculo sobre los campos. Además, los resultados de este apartado podrían utilizarse para calcular numéricamente observables que puedan expresarse en términos del propagador fermiónico.

5.1. Desarrollo en derivadas

En teoría de campos, realizar una expansión perturbativa en algún parámetro es el camino más comúnmente usado para obtener resultados. Usualmente estas expansiones se basan en que un cierto parámetro sin dimensiones es pequeño, y se realizan desarrollos en potencias del mismo. El desarrollo en derivadas es una herramienta conceptualmente diferente, ya que a pesar de ser también un método perturbativo, no requiere que existan magnitudes pequeñas. En realidad, esta requiere que las magnitudes sean “suaves” [50], necesitando de la existencia de derivadas de la magnitud expandida, hasta un cierto orden. Siendo más específico, y yendo a lo que contiene este apartado, se realizó un desarrollo en derivadas de la función f para el propagador de Dirac.

El desarrollo consiste en expandir formalmente el propagador, en potencias del apartamiento f respecto del plano $x_d = 0$. Luego, se transformó fourier en las variables perpendiculares a x_d y se expandió en potencias del momento $k_{||}$. Cada uno de los términos del desarrollo en potencias de $k_{||}$ está asociado con un cierto orden en derivadas de la función f . Por último, a cada orden en potencias de $k_{||}$ se incluyeron las contribuciones a todo orden en potencias de f , obteniendo así un desarrollo en derivadas de la función, y a todo orden en su apartamiento respecto del plano.

Este desarrollo es de utilidad cuando la pared es suficientemente suave para incluir tantas derivadas como sean necesarias. Una superficie con muchas oscilaciones no será bien representada a un bajo orden en derivadas, ya que requeriría de muchos términos del desarrollo. Aquí también aparece la diferencia más importante con una expansión en potencias usual, y es que si el apartamiento de f respecto de $x_d = 0$ es grande, la expansión en potencias de f no sería adecuada, ya que se deberían incluir muchos términos. Sin embargo, si la función es suficientemente suave, como por ejemplo una cuadrática, bastaría sólo con dos términos del desarrollo en derivadas para obtener un resultado exacto [50][51]. Por supuesto, si la superficie es muy oscilante, pero se separa muy poco respecto del plano, entonces la expansión en potencias de f sería la más adecuada, aunque jamás daría un resultado exacto.

En lo que sigue, se mostrará como aplicar este método para calcular el propagador de Dirac en presencia de una singularidad con dependencia espacio-temporal no trivial.

5.1.1. Resultados generales a todo orden en derivadas

Como se mencionó anteriormente, se generalizó el modelo para una singularidad plana y estática 4.18, a un modelo con una singularidad con dependencia espacio-temporal

$$\mathcal{S}(\bar{\psi}, \psi; A) = \int d^{d+1}x \bar{\psi}(x) [\mathcal{D} + g\delta(x_d - f(x_{||}))] \psi(x). \quad (5.1)$$

En lo que sigue, emularemos el procedimiento utilizado para demostrar que la anomalía no dependía de la presencia de una singularidad plana y estática (ver 4). Se puede mostrar que el propagador a orden cero en el campo de gauge, y en presencia de la singularidad toma la forma

$$\begin{aligned} \langle x | (\partial + g\delta_f)^{-1} | y \rangle &= \langle x | (\partial)^{-1} | y \rangle \\ &\quad - \int d^d z_{||} d^d z'_{||} \langle x | (\partial)^{-1} | z_{||}, f(z_{||}) \rangle M_f(z_{||}, z'_{||}) \langle z'_{||}, f(z'_{||}) | (\partial)^{-1} | y \rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

en donde

$$M_f(z_{||}, z'_{||}) = g \langle z_{||}, f(z_{||}) | [1 + gK_f]^{-1} | z'_{||}, f(z'_{||}) \rangle, \quad (5.3)$$

y además

$$K_f(z_{||}, z'_{||}) = \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||}(z_{||} - z'_{||})} e^{-|p_{||}| |f(z_{||}) - f(z'_{||})|} [\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||})) \frac{\gamma_d}{2} - i \frac{\not{p}_{||}}{2|p_{||}|}]. \quad (5.4)$$

En las funciones M_f y K_f es en donde se guarda toda la información sobre la dependencia espacio-temporal de la singularidad. Se puede ver que sin decir una forma particular para la función f es imposible calcular explícitamente la función K_f , y más aún invertir la misma para obtener M_f . Es por esto que en el siguiente apartado se realizarán suposiciones sobre esta función para poder calcular e invertir K_f .

Para simplificar la notación, denotaremos la contribución de borde del propagador como T_f . Se puede ver que el propagador se descompone de la forma

$$S_F^0(x, y) = D_F^0(x, y) - T_f(x, y), \quad (5.5)$$

donde T_f se define como

$$T_f(x, y) = \int d^d z_{||} d^d z'_{||} \langle x | (\partial)^{-1} | z_{||}, f(z_{||}) \rangle M_f(z_{||}, z'_{||}) \langle z'_{||}, f(z'_{||}) | (\partial)^{-1} | y \rangle, \quad (5.6)$$

o de manera más compacta

$$T_f(x, y) = \int d^d z_{||} d^d z'_{||} \mathcal{T}(z_{||}, f(z_{||}); z'_{||}, f(z'_{||})), \quad (5.7)$$

donde se omitió la dependencia en x e y por simplicidad, y se definió \mathcal{T} como lo que aparece dentro de las integrales en 5.6. En lo que sigue, trabajaremos directamente con la funcional $\mathcal{T}(z_{\parallel}, f(z_{\parallel}); z'_{\parallel}, f(z'_{\parallel}))$, la cual expandiremos formalmente en potencias de $f(z_{\parallel})$ y $f(z'_{\parallel})$ por separado. Luego, utilizaremos las integrales en z'_{\parallel} y en z_{\parallel} para expresar esto en términos de transformadas de Fourier de f y luego desarrollar en derivadas.

Para ello, primero es necesario separar las contribuciones según el orden de potencias de f , para mayor claridad en las cuentas. En efecto

$$\begin{aligned}
T_f(x, y) &= \int d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \mathcal{T}(z_{\parallel}, 0; z'_{\parallel}, 0) \\
&\quad + \int d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \mathcal{T}^{\geq 1, 0}(z_{\parallel}, f(z_{\parallel}); z'_{\parallel}, 0) \\
&\quad + \int d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \mathcal{T}^{0, \geq 1}(z_{\parallel}, 0; z'_{\parallel}, f(z'_{\parallel})) \\
&\quad + \int d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \mathcal{T}^{\geq 1, \geq 1}(z_{\parallel}, f(z_{\parallel}); z'_{\parallel}, f(z'_{\parallel})), \tag{5.8}
\end{aligned}$$

donde la notación con superíndices de la forma $\geq 1, 0$ ó $0, \geq$ implica que hay órdenes mayores o iguales que 1 en potencias de la función f en el argumento izquierdo o derecho de \mathcal{T} . Análogamente para más de 1 potencia en ambos argumentos.

Una vez realizada esta descomposición, lo primero que se hace es notar que la primer línea en 5.8 no es más que la contribución de borde calculada en 4.31. Los otros términos corresponden a correcciones al plano $x_d = 0$. Lo que sigue es hacer un desarrollo en potencias de f de las últimas 3 líneas de 5.8, y expresar cada orden en potencias de f como función de su transformada de Fourier. Haciendo esto se obtiene

$$\begin{aligned}
T_f(x, y) &= T(x_{\parallel} - y_{\parallel}; x_d, y_d) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^d k_{\parallel}^{(0)} \frac{d^d k_{\parallel}^{(1)}}{(2\pi)^d} \dots \frac{d^d k_{\parallel}^{(n)}}{(2\pi)^d} \delta\left(\sum_{i=0}^n k_{\parallel}^{(i)}\right) \left[\int d^d z'_{\parallel} h_L^{(n)}(k_{\parallel}^{(0)}; z'_{\parallel}) \right] \tilde{f}(k_{\parallel}^{(1)}) \dots \tilde{f}(k_{\parallel}^{(n)}) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int d^d p_{\parallel}^{(0)} \frac{d^d p_{\parallel}^{(1)}}{(2\pi)^d} \dots \frac{d^d p_{\parallel}^{(m)}}{(2\pi)^d} \delta\left(\sum_{j=0}^m p_{\parallel}^{(j)}\right) \left[\int d^d z_{\parallel} h_R^{(m)}(z_{\parallel}; p_{\parallel}^{(0)}) \right] \tilde{f}(p_{\parallel}^{(1)}) \dots \tilde{f}(p_{\parallel}^{(m)}) \\
&\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} \int d^d k_{\parallel}^{(0)} \frac{d^d k_{\parallel}^{(1)}}{(2\pi)^d} \dots \frac{d^d k_{\parallel}^{(n)}}{(2\pi)^d} d^d p_{\parallel}^{(0)} \frac{d^d p_{\parallel}^{(1)}}{(2\pi)^d} \dots \frac{d^d p_{\parallel}^{(m)}}{(2\pi)^d} \delta\left(\sum_{i=0}^n k_{\parallel}^{(i)}\right) \delta\left(\sum_{j=0}^m p_{\parallel}^{(j)}\right) \\
&\quad \times [h^{(n,m)}(k_{\parallel}^{(0)}, p_{\parallel}^{(0)})] \tilde{f}(k_{\parallel}^{(1)}) \dots \tilde{f}(k_{\parallel}^{(n)}) \tilde{f}(p_{\parallel}^{(1)}) \dots \tilde{f}(p_{\parallel}^{(m)}), \tag{5.9}
\end{aligned}$$

donde las funciones $h_L^{(n)}$, $h_R^{(m)}$ y $h^{(n,m)}$ se definen como

$$\left[\int d^d z'_\parallel h_L^{(n)}(k_\parallel^0; z'_\parallel) \right] = \int d^d z'_\parallel \frac{\partial^n \widetilde{\mathcal{T}}(\widetilde{z}_\parallel, f; z'_\parallel, 0)}{df^n} \Big|_{f=0}(k_\parallel^0), \quad (5.10)$$

$$\left[\int d^d z_\parallel h_R^{(m)}(z_\parallel; p_\parallel^0) \right] = \int d^d z_\parallel \frac{\partial^m \widetilde{\mathcal{T}}(z_\parallel, 0; \widetilde{z}'_\parallel, f')}{df^m} \Big|_{f'=0}(p_\parallel^0), \quad (5.11)$$

$$[h^{(n,m)}(k_\parallel^{(0)}, p_\parallel^{(0)})] = \frac{\partial^{n+m} \widetilde{\mathcal{T}}(\widetilde{z}_\parallel, f; \widetilde{z}'_\parallel, f')}{df^n df'^m} \Big|_{f=f'=0}(k_\parallel^0, p_\parallel^0), \quad (5.12)$$

en donde \widetilde{z}'_\parallel ó \widetilde{z}_\parallel indica sobre que variable se transforma Fourier. Por supuesto, todas estas funciones dependen de x, y , pero por simplicidad se omite esta dependencia.

Hasta ahora no se hizo más que reordenar la expansión en serie de potencias utilizando transformadas de Fourier. El desarrollo en derivadas, en este caso, consiste en expandir en potencias del momento k_\parallel, p_\parallel ó ambos, las funciones $h_L^{(n)}$, $h_R^{(m)}$ y $h^{(n,m)}$.

Como puede verse en 5.9, las deltas de Dirac $\delta(\sum_{i=0}^n k_\parallel^{(i)})$ y $\delta(\sum_{j=0}^m p_\parallel^{(j)})$, relacionan la expansión en momentos de las funciones h con derivadas de la función f . Esto se debe a que potencias del momento multiplicando transformadas de Fourier son derivadas de la función. Esto implica que de conocerse los coeficientes de la expansión en potencias del momento de las funciones h , se podría obtener la contribución a un cierto orden en derivadas para el propagador de Dirac. Más explícitamente, lo que se desea conocer para obtener el desarrollo en derivadas es

$$h_L^{(n)}(k_\parallel^{(0)}; z'_\parallel) = h_L^{(n)}((0); z'_\parallel) + A_{L;\mu}^{(n)}(z'_\parallel) k_\parallel^{(0)\mu} + B_{L;\mu,\nu}^{(n)}(z'_\parallel) k_\parallel^{(0)\mu} k_\parallel^{(0)\nu} + \dots \quad (5.13)$$

$$h_R^{(m)}(z_\parallel; p_\parallel^{(0)}) = h_R^{(m)}(z_\parallel, (0)) + A_{R;\mu}^{(m)}(z_\parallel) p_\parallel^{(0)\mu} + B_{R;\mu,\nu}^{(m)}(z_\parallel) p_\parallel^{(0)\mu} p_\parallel^{(0)\nu} + \dots \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} h^{(n,m)}(k_\parallel^{(0)}, p_\parallel^{(0)}) &= h^{n,m}(0, 0) + A_{1;\mu}^{(n,m)} k_\parallel^{(0)\mu} + A_{2;\mu}^{(n,m)} p_\parallel^{(0)\mu} + B_{1;\mu,\nu}^{(n,m)} k_\parallel^{(0)\mu} k_\parallel^{(0)\nu} \\ &\quad + B_{2;\mu,\nu}^{(n,m)} p_\parallel^{(0)\mu} p_\parallel^{(0)\nu} + C_{\mu,\nu}^{n,m} k_\parallel^{(0)\mu} p_\parallel^{(0)\nu} \dots, \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde los coeficientes A, B, C , etc. son los que guardan la dependencia en x e y , y además definen el desarrollo en derivadas.

Insertando las expresiones 5.15 en 5.9 puede obtenerse un desarrollo en derivadas del propagador de Dirac. Además, dado que a cada orden en derivadas aparecen contribuciones a todo orden en potencias de f , vemos que el desarrollo es válido para apartamientos respecto del plano de cualquier magnitud. Esto es una de las diferencias más importantes de este desarrollo respecto de la expansión en potencias usual.

También es necesario destacar que para que el desarrollo sea válido, los coeficientes en 5.15 tienen que estar bien definidos, por lo que la función f debe ser suficientemente suave como para que esto ocurra. Si la función posee puntos angulosos, sus derivadas en esos puntos serán distribuciones y esto podría ocasionar divergencias en los coeficientes

del desarrollo.

Por supuesto, para poder expandir las funciones h es necesario saber más sobre ellas, y por ende se requiere ser más explícitos en las funciones K y M definidas en 5.3 y 5.4. En lo que sigue vamos a hacer algunas suposiciones sobre la función f que nos permitirán ser más explícitos en la forma de calcular los coeficientes.

5.2. Caso particular: Aproximaciones de curvatura y monotonía

En esta sección se realizan algunas aproximaciones y supuestos sobre la variedad que define la singularidad en 5.1, descrita por la hiper-superficie $x_d = f(x_{||})$. A partir de estos supuestos, se obtienen formas explícitas en términos de integrales sobre el espacio de momentos para los coeficientes de la expansión en momentos de las funciones h que se definieron en 5.12.

Como se mencionó anteriormente, sin conocer explícitamente la función f no es posible obtener los coeficientes del desarrollo en derivadas. Para ser un poco más explícitos, asumiremos que dados dos puntos $f(z_{||})$ y $f(z'_{||})$, la diferencia entre los mismos es pequeña comparada con el radio de curvatura de f en la región entre esos dos puntos. Esta aproximación corresponde a suponer $|f(z_{||}) - f(z'_{||})| \ll \frac{1}{|p_{||}|}$ dentro del exponente en la función $K : f$. Más explícitamente

$$\begin{aligned} K_f(z_{||}, z'_{||}) &= \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||}(z_{||}-z'_{||})} e^{-|p_{||}|f(z_{||})-f(z'_{||})} [\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||})) \frac{\gamma_d}{2} - i \frac{\not{p}_{||}}{2|p_{||}|}], \\ K_f(z_{||}, z'_{||}) &\simeq \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||}(z_{||}-z'_{||})} [\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||})) \frac{\gamma_d}{2} - i \frac{\not{p}_{||}}{2|p_{||}|}]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Esta aproximación provee una simplificación muy grande, ya que toda la dependencia con la función f se reduce a $\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||}))$. A pesar de haber realizado esta aproximación, no se pudo invertir la función K_f sin hacer más supuestos sobre f . Para poder continuar, se asumió monotonía de la función f al rededor de un punto, que se tomó como el origen de coordenadas por simplicidad, y sin pérdida de generalidad. Esto se hizo para poder separar el valor de la función $\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||}))$ en regiones en las cuales su valor fuera 1, -1 ó 0.

En efecto, se asumió que la función f es monótona decreciente al rededor del origen. Ejemplos de este tipo de funciones pueden ser planos o distribuciones de probabilidad

continuas y derivables, como por ejemplo gaussianas. Así, se definen tres regiones

$$\begin{aligned} R_1 &= \{|z_{||}| < |z'_{||}|\} = \{f(z_{||}) < f(z'_{||})\} = \{\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||})) = -1\} \\ R_2 &= \{|z_{||}| > |z'_{||}|\} = \{f(z_{||}) > f(z'_{||})\} = \{\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||})) = 1\} \\ R_3 &= \{|z_{||}| = |z'_{||}|\} = \{f(z_{||}) = f(z'_{||})\} = \{\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||})) = 0\}, \end{aligned}$$

las cuales serán denotadas como R_i , con $i = 1, 2, 3$.

Estos supuestos restringen la forma que puede tener la singularidad. Puede verse en la Fig. 5.1, un ejemplo que ilustra la dependencia espacio-temporal de las hiper-superficies que satisfacen estas hipótesis.

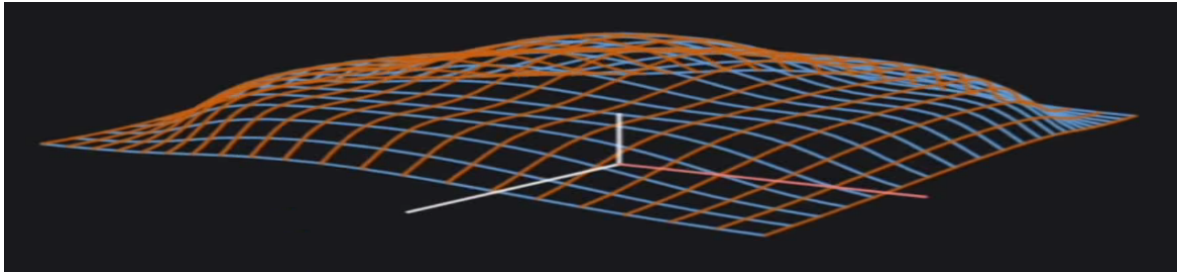


Figura 5.1: Ejemplo de una variedad de dos dimensiones espaciales que satisface las hipótesis y aproximaciones realizadas en este apartado.

Como puede observarse en la Fig. 5.1, las hipótesis son restrictivas pero a su vez dejan lugar a una gran variedad de formas funcionales para la singularidad. Además, estos cálculos podrían utilizarse solo en una región de alguna hiper-superficie en donde se satisfagan estas hipótesis y puedan despreciarse correlaciones con otras regiones que no las satisfagan.

Una vez separadas las regiones donde cambia el valor de $\sigma(f(z_{||}) - f(z'_{||}))$, se pueden utilizar transformadas de Fourier para invertir la función K_f en cada una de esas regiones, y así obtener un resultado explícito para la función M_f definida en 5.3. En efecto, el resultado obtenido es

$$M_f(z_{||}, z'_{||})|_{R_1} = \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||} \cdot (z_{||} - z'_{||})} \left[1 - \frac{g}{2}(\gamma_d + i \frac{p_{||}}{|p_{||}|})\right]^{-1} \doteq \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||} \cdot (z_{||} - z'_{||})} G_{R_1}(p_{||}) \quad (5.17)$$

$$M_f(z_{||}, z'_{||})|_{R_2} = \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||} \cdot (z_{||} - z'_{||})} \left[1 + \frac{g}{2}(\gamma_d - i \frac{p_{||}}{|p_{||}|})\right]^{-1} \doteq \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||} \cdot (z_{||} - z'_{||})} G_{R_2}(p_{||}) \quad (5.18)$$

$$M_f(z_{||}, z'_{||})|_{R_3} = \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||} \cdot (z_{||} - z'_{||})} \left[1 - \frac{g}{2}i \frac{p_{||}}{|p_{||}|}\right]^{-1} \doteq \int \frac{d^d p_{||}}{(2\pi)^d} e^{-ip_{||} \cdot (z_{||} - z'_{||})} G_{R_3}(p_{||}), \quad (5.19)$$

en donde se definieron las funciones G_{R_i} con $i = 1, 2, 3$. El cálculo de estas funciones

G_{R_i} se puede realizar de manera algebraica, pero preferimos dejarlas con esta notación para mayor simplicidad.

Una vez definidas estas regiones de integración, procedemos a expresar las funciones h y las integrales relevantes de las mismas

$$\begin{aligned} [\int d^d z'_{\parallel} h_L^{(n)}(k_{\parallel}^0; z'_{\parallel})] &= \int_{R_i} d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^d p_{\parallel}}{(2\pi)^d} e^{iz_{\parallel} \cdot k_{\parallel}^{(0)}} e^{-ik_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - z_{\parallel})} \\ &\times e^{-ip_{\parallel} \cdot (z_{\parallel} - z'_{\parallel})} e^{-ik_{\parallel} \cdot (z'_{\parallel} - y_{\parallel})} e^{-ik_d x_d} e^{ik'_d y_d} (ik_d)^n \frac{-ik}{|k|} G_{R_i}(p_{\parallel}) \frac{ik'}{|k'|} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} [\int d^d z_{\parallel} h_R^{(m)}(z_{\parallel}; p_{\parallel}^0)] &= \int_{R_i} d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^d p_{\parallel}}{(2\pi)^d} e^{iz'_{\parallel} \cdot p_{\parallel}^{(0)}} e^{-ik_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - z_{\parallel})} \\ &\times e^{-ip_{\parallel} \cdot (z_{\parallel} - z'_{\parallel})} e^{-ik_{\parallel} \cdot (z'_{\parallel} - y_{\parallel})} e^{-ik_d x_d} e^{ik'_d y_d} (-ik'_d)^m \frac{-ik}{|k|} G_{R_i}(p_{\parallel}) \frac{ik'}{|k'|} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} [h^{(n,m)}(k_{\parallel}^{(0)}, p_{\parallel}^{(0)})] &= \int_{R_i} d^d z_{\parallel} d^d z'_{\parallel} \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^d p_{\parallel}}{(2\pi)^d} e^{iz_{\parallel} \cdot k_{\parallel}^{(0)}} e^{iz'_{\parallel} \cdot p_{\parallel}^{(0)}} e^{-ik_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - z_{\parallel})} \\ &\times e^{-ip_{\parallel} \cdot (z_{\parallel} - z'_{\parallel})} e^{-ik_{\parallel} \cdot (z'_{\parallel} - y_{\parallel})} e^{-ik_d x_d} e^{ik'_d y_d} (ik_d)^n (-ik'_d)^m \frac{-ik}{|k|} G_{R_i}(p_{\parallel}) \frac{ik'}{|k'|}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde hay una suma implícita sobre las regiones de integración R_i . Cuando $R_i = R_3$, solo hay integración sobre una de las dos variables, z_{\parallel} ó z'_{\parallel} , igualando ambas en donde aparezcan. Estas integrales podrían representarse más específicamente pasando a coordenadas esféricas en ambas variables z_{\parallel} y z'_{\parallel} , para luego expresar todo en términos de integrales de momentos. Pero se decidió dejar expresadas las mismas de esta forma ya que, sin importar la representación, estas deben ser calculadas numéricamente. Esto se debe a que es necesario imponer un cut-off en todas las integrales sobre momentos con sub-índice \parallel , para mantener la validez de la aproximación realizada en 5.16. Si la función es un plano en alguna coordenada, hacer esto no es necesario en todas las componentes del momento, solo en aquellas en las que no sea plana la función f . El cut-off natural para acotar estas integrales es $\Lambda = \frac{1}{\max(f(z_{\parallel}) - f(z'_{\parallel}))}$. Dado que todas las funciones que analizamos necesariamente son acotadas para que exista su transformada de Fourier, este cut-off siempre será diferente de cero.

Es importante notar que bajo estas aproximaciones, el desarrollo en derivadas se reduce a la expansión en potencias de una exponencial, ya que los argumentos de las funciones h están en exponenciales dentro de las integrales. Dado que todas tienen un cut-off, las mismas son convergentes, y por ende es posible conmutar derivadas con integrales.

Para finalizar, es interesante analizar como estas contribuciones se mapearían en

un caso simple, como por ejemplo una superficie estática con forma gaussiana

$$f(z_{||}) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{z_j^2}{\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d-1}{2}}}. \quad (5.23)$$

Con este tipo de superficies, que pueden aproximar localmente una gran variedad de superficies con curvatura, todas las contribuciones de borde al propagador serían proporcionales a potencias de momentos de orden par de la distribución gaussiana. Esto podría verse expandiendo las funciones h . Aquí solo mostraremos el resultado para orden cero en derivadas, que corresponde a corregir el propagador por un plano alejado de $x_d = 0$, en efecto

$$\begin{aligned} T_f^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int d^d z'_{||} h_L^{(n)}(0; z'_{||}) \right] \left[\int \frac{d^d k_{||}}{(2\pi)^d} \tilde{f}(k_{||}) \right]^n \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int d^d z_{||} h_R^{(m)}(z_{||}; 0) \right] \left[\int \frac{d^d k_{||}}{(2\pi)^d} \tilde{f}(k_{||}) \right]^m \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [h^{(n,m)}(0, 0)] \left[\int \frac{d^d k_{||}}{(2\pi)^d} \tilde{f}(k_{||}) \right]^{n+m} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int d^d z'_{||} h_L^{(n)}(0; z'_{||}) \right] \left[\frac{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{d-1}} \right]^n \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int d^d z_{||} h_R^{(m)}(z_{||}; 0) \right] \left[\frac{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{d-1}} \right]^m \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [h^{(n,m)}(0, 0)] \left[\frac{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{d-1}} \right]^{n+m}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Órdenes más altos en derivadas implicarían cálculos de las funciones h evaluadas en una suma de $n + m$ momentos, y expandidas hasta el orden deseado en los mismos.

5.3. Algunos Comentarios

En este apartado se obtuvieron resultados que podrían ser de utilidad tanto por razones teóricas como prácticas. En aspectos teóricos, este desarrollo podría utilizarse para demostrar la independencia de la anomalía quiral al introducir una pared con curvatura. En aspectos prácticos, el propagador puede utilizarse para obtener observables, como por ejemplo valores de expectación de la corriente de gauge, o el tensor de polarización de vacío. En la realidad no existen las paredes planas infinitas, por lo que estos resultados pueden aplicarse al estudio de correlaciones en presencia de defectos con formas mucho más generales que paredes planas infinitas. Un ejemplo de esto podrían ser malformaciones en hojas de grafeno, que pueden ser modeladas por potenciales singulares, y

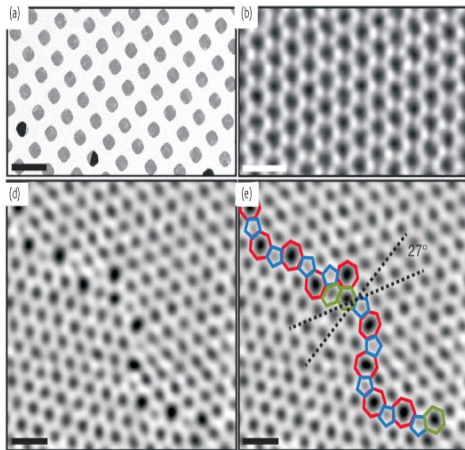


Figura 5.2: Imagen de malformaciones en una hoja de grafeno. Las malformaciones están destacadas en forma de una cadena con tonalidad más oscura que el resto de la red, en el cuadro de abajo a la derecha. Imagen tomada de [1].

que generan efectos interesantes en la forma de la densidad de estados de los portadores de carga [52].

Este tipo de malformaciones afectan las propiedades globales del grafeno, y es importante conocer en detalle las interacciones de los electrones cerca de estos defectos. En la Fig. 5.2 puede verse una imagen de este tipo de malformaciones en la red, que básicamente consisten de regiones en donde la forma de la red no tiene la usual forma de panal de abeja.

Es importante aclarar que las aproximaciones realizadas en el último apartado no son una condición necesaria para obtener resultados. Los supuestos realizados solo se tomaron para ser más explícitos en la forma funcional de las funciones h .

Además, el método del desarrollo en derivadas puede aplicarse a muchas más cosas que solo el cálculo de un propagador. Este método originalmente fue pensado para el cálculo de energías de Casimir [51], en donde se aprovecha una propiedad interesante que tiene este desarrollo, y es que la misma puede restringir los términos que aparecen en un funcional de la superficie, como es en este caso la energía de Casimir.

El potencial de este desarrollo está limitado por la complejidad que pueden llegar a tener los coeficientes de cada orden en derivadas. Se deja para futuros trabajos una implementación numérica para calcular los mismos.

Por último, es interesante aclarar que sigue abierto el problema de formular este desarrollo de manera covariante. Esto limita sus aplicaciones actuales a espacios con poca curvatura o nula, en donde puedan utilizarse transformadas de Fourier. Se deja para una futura investigación una formulación covariante, y un análisis detallado sobre la convergencia de cada uno de los coeficientes de la expansión.

Capítulo 6

Efectos Disipativos Inerciales

“I am coming more and more to the conviction that the necessity of our geometry cannot be demonstrated, at least neither by, nor for, the human intellect...geometry should be ranked, not with arithmetic, which is purely aprioristic, but with mechanics.”

— Carl Friedrich Gauss, 1840

En este capítulo se estudian efectos disipativos inerciales, asociados con la creación de pares de partículas definidas sobre una variedad con dependencia temporal.

Antes de explicar que es lo que se hizo en este capítulo en detalle, es necesario realizar una introducción al tema. Existen muchos efectos que dejan ver la naturaleza cuántica de los campos de materia, entre ellos se encuentra uno cuya naturaleza es similar a la de los efectos estudiados en este capítulo: El Efecto Casimir Dinámico (DCE). El DCE aparece cuando existe un espejo acelerado, donde por espejo se entiende una superficie que imponga alguna condición de borde sobre el campo electromagnético. La presencia de este espejo genera excitaciones de vacío en el campo electromagnético, lo que genera disipación de energía durante del movimiento acelerado del mismo [53]. La amplitud de estos efectos depende de la condición que este espejo imponga sobre el campo e.m. y de la forma que tenga el mismo, donde pueden existir resonancias que aumentarían estos efectos disipativos, si el espejo fuese una cavidad [54]. Este efecto depende de la existencia de grados de libertad (campo e.m.) definidos en el espacio en donde está embebido el espejo. El DCE no tiene relación alguna con los grados de libertad internos del espejo, salvo porque estos imponen condiciones de borde al campo electromagnético.

Como vimos en los Capítulos anteriores, las condiciones de borde de un campo sobre una determinada pared o espejo, pueden modelarse como interacciones con potenciales singulares. Pero, ¿de donde vienen este tipo de potenciales?. Una forma de explicar estas singularidades es pensando en grados de libertad definidos en el interior de la

pared que determina la singularidad [55]. Vale aclarar que cuando decimos grados de libertad hablamos de campos definidos sobre la singularidad. En efecto, sean $\chi, \bar{\chi}$ campos fermiónicos y η un campo bosónico, ambos definidos sobre una variedad dada por $x_d = f(x_{||})$ y con masa μ . Sean $\psi, \bar{\psi}$ campos fermiónicos y ϕ un campo bosónico, ambos definidos en el espacio donde está embebida la superficie $x_d = f(x_{||})$. Para poder explicar de donde proviene la interacción con un potencial singular en los campos $\chi, \bar{\chi}, \phi$, es necesario pensar que existen interacciones de la forma

$$S_{int} = \sqrt{\lambda} \int_f d^d x \sqrt{g(x)} [\chi(\bar{x})\psi(x) + \chi\bar{\psi}(x)] \quad (6.1)$$

$$S_{int} = \lambda \int_f d^d x \sqrt{g(x)} \eta(x)\phi(x), \quad (6.2)$$

donde λ es una constante de acoplamiento. La notación \int_f implica que la integración se realiza sobre la variedad $x_d = f(x_{||})$. En lo que sigue se va a suponer el límite $\mu \rightarrow \infty$, para poder aproximar el propagador de los campos $\chi, \bar{\chi}, \eta$. Para ello, se supondrá que estos grados de libertad son campos libres. Esto en realidad no es necesario, ya que en el límite de masa tendiendo a infinito, todas las interacciones que no dependan de la masa pueden despreciarse, obteniendo los mismos resultados. Por simplicidad, nos mantendremos en el caso de campos libres.

La teoría que describe los campos $\chi, \bar{\chi}, \eta$ será asumida gaussiana. Al ser gaussiana, se pueden integrar estos grados de libertad, obteniendo acciones efectivas para los campos $\psi, \bar{\psi}, \phi$ de la forma

$$S_{int}^{ef} = \lambda \int_f d^d x \int_f d^d y \sqrt{g(x)} \sqrt{g(y)} \bar{\psi}(x) D_{\chi, \bar{\chi}}(x, y) \psi(y) \quad (6.3)$$

$$S_{int}^{ef} = \lambda^2 \int_f d^d x \int_f d^d y \sqrt{g(x)} \sqrt{g(y)} \phi(x) D_{\eta}(x, y) \phi(y), \quad (6.4)$$

donde D_{η} y $D_{\chi, \bar{\chi}}$ son los propagadores de $\chi, \bar{\chi}, \eta$.

Ahora, se puede probar que en el límite de masa tendiendo a infinito, el propagador de campos libres, tanto fermiónicos como bosónicos, tiende a una delta de Dirac. En efecto

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} D_{\chi, \bar{\chi}}(x, y) \simeq \frac{1}{\mu \sqrt{g(x)}} \delta(x - y) \quad (6.5)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} D_{\eta}(x, y) \simeq \frac{1}{\mu^2 \sqrt{g(x)}} \delta(x - y). \quad (6.6)$$

Esto significa que las acciones efectivas pueden escribirse como

$$S_{int}^{ef} \simeq \frac{\lambda}{\mu} \int d^{d+1}x \sqrt{g(x)} \delta(x_d - f(x_{||})) \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (6.7)$$

$$S_{int}^{ef} \simeq \frac{\lambda^2}{\mu^2} \int d^{d+1}x \sqrt{g(x)} \delta(x_d - f(x_{||})) \phi^2(x), \quad (6.8)$$

obteniendo así los potenciales singulares utilizados en los Capítulos 2, 3, 4 y 5, que imponen condiciones de borde sobre los campos definidos en el espacio ambiente de la variedad $x_d = f(x_{||})$.

Esto genera interés en el estudio de grados de libertad definidos sobre las paredes. En particular, nos lleva a preguntarnos: Si la pared está acelerada, ¿se excitarían grados de libertad internos y generarían estos un efecto disipativo como el DCE?. La respuesta a esta pregunta es sí, y lo que veremos en este Capítulo son los cálculos relacionados a estos efectos.

Mas en general, uno podría preguntarse si estos efectos ocurren en un tipo más general de variedades con dependencia temporal, que no sean necesariamente hiper-superficies, como $x_d = f(x_{||})$. Veremos que esto también es verdad, y que estos efectos existen siempre que la métrica del espacio-tiempo donde están definidos los campos tenga una dependencia temporal. Eso no es algo nuevo, ya que una dependencia temporal de la métrica rompe explícitamente la invariancia ante traslaciones en el tiempo, y por ende la conservación de energía. Este argumento no dice nada sobre de que manera se disipa esta energía, que es lo que veremos en este capítulo.

Veremos que al calcular la acción efectiva para la métrica por diferentes métodos, luego de integrar los grados de libertad internos, aparecerán contribuciones no unitarias asociadas con la creación de pares de partículas. De ahora en más, a estos efectos disipativos los llamaremos “inerciales”, debido a que no dependen de la interacción con ningún campo en el exterior de la pared, sino que solo dependen del movimiento de la misma. En la Fig. 6.1 se puede observar un esquema de un posible montaje experimental para estudiar este tipo de efectos, en donde se sostienen dos esferas muy cerca, una estática y la otra oscilante, anclada a un muelle con constante elástica conocida.

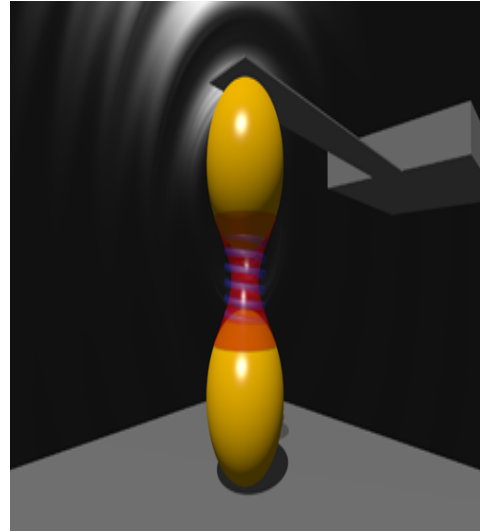


Figura 6.1: Ejemplo de un posible montaje experimental para analizar efectos disipativos inerciales y el DCE. El mismo consta de dos esferas, una fija y la otra anclada a un muelle oscilante con constante elástica conocida. Imagen tomada de [2].

Este tipo de efectos solo pueden verse en la signatura de Lorentz de la métrica, ya que trabajando en la signatura euclídea no aparecen polos en las integrales para la acción efectiva, y por ende no hay contribuciones imaginarias a la misma. Para poder calcular este tipo de efectos es necesario hacer una rotación de Wick que vaya de la signatura euclídea a la signatura lorentziana. Veremos esto en más detalle en los capítulos que siguen. Se compararon dos métodos diferentes para el cálculo de la acción efectiva: “Expansión de Magnus” y “Acción efectiva a 1-loop”, resultando en que el último es el más acertado para calcular este tipo de efectos.

Para más información sobre el cálculo de las magnitudes usuales en geometría diferencial y sus aproximaciones al menor orden no trivial, ver el apartado 1.3.1. Para estudiar otros casos particulares de métricas, se puede utilizar el programa de Mathematica desarrollado y adjuntado en el Apéndice A.

6.1. Acción efectiva - Cociente de determinantes

El modelo que utilizaremos para estudiar efectos disipativos inerciales es el de un campo escalar ϕ de masa μ , acoplado no minimalmente a la curvatura escalar R por medio de un parámetro ϵ . La acción de este campo es

$$S = \int_{\Sigma} d^d x \sqrt{g(x)} \phi(x) [-\Delta_x + \mu^2 + \epsilon R(x)] \phi(x), \quad (6.9)$$

donde $\Delta f(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} f(x))$ es el operador de Laplace en un espacio curvo. Esta acción corresponde a la signatura euclídea de la métrica, y será utilizada en la segunda parte de este capítulo para utilizar cálculos a 1-loop. En la siguiente subsección trabajaremos en la signatura lorentziana y, en lo que a nosotros respecta, eso corresponde a reemplazar laplaciano por D’Alambertiano dentro del operador entre [] y \sqrt{g} por $\sqrt{-g}$ en esta acción. En lo que sigue llamaremos Δ al laplaciano antes y después de rotar a tiempo real, a pesar de que el signo de la parte temporal cambie luego de la rotación de Wick.

Aquí podemos notar dos cosas, la primera es que la interacción con la métrica no está solo en el acoplamiento con la curvatura escalar R , sino que también está presente en el término cinético y en el factor global \sqrt{g} . Esto será de relevancia en las siguientes subsecciones, en donde realizaremos aproximaciones de pequeña curvatura en la signatura euclídea, para así hacer una rotación de Wick y volver a tiempo real. Esto se debe a que en un espacio curvo cualquiera no es claro como pasar de la signatura euclídea a la lorentziana, como si lo es en el espacio plano. Además, estas aproximaciones al menor orden no trivial en curvatura nos permitirán utilizar transformadas de fourier para analizar los resultados más fácilmente.

En lo que sigue de este apartado, se utilizará un resultado que permite calcular la

acción efectiva de teorías gaussianas como un cociente de determinantes. Usando esto, se analiza la naturaleza no perturbativa de estos efectos disipativos, en el caso de una métrica que solo tenga dependencia temporal, y con la forma

$$ds = -dt^2 + \sum_{i=1}^d (1 + a_i(t)) dx_i^2, \quad (6.10)$$

donde $a_i(t)$ son funciones que satisfacen $a_i(t) > -1 \forall t, i$, para no cambiar la signatura de la métrica. Notar también que en la definición de esta métrica estamos utilizando la signatura lorentziana.

6.1.1. Naturaleza no perturbativa del efecto disipativo

Como se mencionó anteriormente, es de esperar que si la métrica tiene dependencia temporal, entonces la energía no se conserve. En este apartado vamos a mostrar como la presencia de un campo escalar en una métrica con dependencia temporal, genera efectos disipativos cuánticos en la acción de la métrica. En este apartado se trabajará por completo en la signatura lorentziana.

Para ello utilizaremos que la acción efectiva, luego de integrar un campo escalar con una acción como la 6.9, tiene contribuciones imaginarias en la signatura lorentziana de la métrica. Puede verse que como $g_{\mu\nu}$ es diagonal y solo depende del tiempo, entonces $R = R(t)$. Esto establece que la teoría tiene invariancia ante traslaciones espaciales. Además, implica que es más conveniente trabajar transformando fourier en las variables espaciales, como se hizo en los Capítulos 4 y 5. En la signatura de Lorentz, luego de transformar Fourier, la acción efectiva por unidad de área $\bar{\mathcal{A}}$ toma la forma

$$\frac{i\Gamma}{(2\pi)^d \bar{\mathcal{A}}} = \frac{-1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Ln} \left[\frac{\det(-\partial_t(\sqrt{-g}\partial_t) - \sqrt{-g}(\sum_{i=1}^d \frac{k_i^2}{(1+a_i(t))} + \mu^2 + \epsilon R(t)))}{\det(-\partial_t(\sqrt{-g}\partial_t) - \sqrt{-g}(\sum_{i=1}^d \frac{k_i^2}{(1+a_i(t))} + \mu^2))} \right]. \quad (6.11)$$

De aquí se puede observar que para obtener una evolución unitaria, lo que está dentro del argumento del Logaritmo debería ser una exponencial imaginaria. Si el logaritmo no fuese imaginario puro, entonces aparecerían contribuciones disipativas a la acción. La estrategia para demostrar que existe una parte imaginaria, es utilizar un resultado sobre cociente de determinantes en teoría de campos, obtenido en [56]

$$\frac{\det(-\partial_t(\sqrt{-g}\partial_t) - \sqrt{-g}(\sum_{i=1}^d \frac{k_i^2}{(1+a_i(t))} + \mu^2 + \epsilon R(t)))}{\det(-\partial_t(\sqrt{-g}\partial_t) - \sqrt{-g}(\sum_{i=1}^d \frac{k_i^2}{(1+a_i(t))} + \mu^2))} = \frac{\tilde{q}(k, \tau)}{\tilde{q}_0(k, \tau)}, \quad (6.12)$$

con τ el ancho del intervalo temporal, y donde $\tilde{q}(k, t)$ satisface la siguiente ecuación

homogénea y las respectivas condiciones

$$[-\partial_t(\sqrt{-g}\partial_t) - \sqrt{-g}(\sum_{i=1}^d \frac{k_i^2}{1+a_i(t)} + \mu^2 + \epsilon R(t))]\tilde{q}(k, t) = 0 \quad (6.13)$$

$$\tilde{q}(k, 0) = 0 \quad \dot{\tilde{q}}(k, 0) = 1. \quad (6.14)$$

Además, $\tilde{q}_0(k, t)$ satisface las mismas condiciones solo que resuelve la ecuación 6.13 con $\epsilon = 0$. Esto soluciona el problema, ya que si se obtiene que el cociente de estas dos soluciones no es una exponencial imaginaria, la acción efectiva tendrá una parte disipativa asociada a efectos de un campo cuántico integrado.

Para ello proponemos una solución de la forma

$$\tilde{q}(k, t) = e^{iE(t)t} e^{i\frac{f(t)}{2E(t)}}, \quad (6.15)$$

donde $E(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^d \frac{k_i^2}{1+a_i(t)} + \mu^2}$, y f es una función desconocida. Si f tuviera parte imaginaria, entonces la acción efectiva tendría un término disipativo. En efecto, la ecuación 6.13 se transforma en

$$-i\partial_t[\sqrt{-g}\partial_t(Et + \frac{f}{2E})] + \sqrt{-g}[2E\dot{E}t + \dot{f} + \frac{f\dot{E}}{E} + (\dot{E}t\frac{f}{2E} + \frac{f\dot{E}}{2E^2})^2 - \epsilon R] = 0. \quad (6.16)$$

Se puede ver que si f fuera real, entonces 6.16 se separa en dos ecuaciones homogéneas, ya que tanto la parte imaginaria como la real de esa ecuación deben ser cero. Esto se reduce a un absurdo, ya que ambas ecuaciones pueden resolverse independientemente obteniendo soluciones no compatibles, obteniendo que la parte imaginaria de f es diferente de cero. Como la solución $\tilde{q}_0(k, t)$ no tiene dependencia en ϵ , y la función f si, no sería posible que esta parte imaginaria se cancele en el cociente de las soluciones, y por ende, se obtiene que la acción efectiva contiene términos disipativos.

El resultado de esta demostración podría resultar intuitivo, ya que como se mencionó antes, es de esperar que la energía no se conserve. Lo que no es evidente, es que parte de esta disipación de energía esté asociada con la integración de campos cuánticos. Estos resultados fueron no perturbativos, lo que significa que los efectos disipativos aparecen a todo orden en el acoplamiento de los campos con la métrica.

6.1.2. Expansión de Magnus al menor orden no trivial

En esta sección se muestran los resultados de aproximar la acción 6.9 al menor orden no trivial en la curvatura, y luego, usando un método llamado “Aproximación de Magnus”, se obtienen resultados cuantitativos para estos efectos disipativos. Más información sobre esta expansión se encuentra en el apartado 1.3.2, en donde también

se encuentran extensas referencias sobre el tema. En este apartado se trabajará por completo en la signatura lorentziana de la métrica.

Para poder utilizar la aproximación de Magnus, es necesario restringirnos a una métrica de la forma 6.10. Esto se debe a que la base del método es encontrar una analogía con un oscilador armónico cuántico, y así poder utilizar herramientas de mecánica cuántica, como el operador evolución. Vamos a suponer que $|a_i(t)| \ll 1 \forall t$. Además, vamos a despreciar todos los efectos de la curvatura al menor orden no trivial, al nivel de la acción del campo escalar. Esto implica aproximar

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\prod_{j=1}^d (1 + a_j(t))} \simeq 1 \quad (6.17)$$

$$R(t) \simeq K \left(\sum_{i=1}^d \ddot{a}_i(t) \right), \quad (6.18)$$

donde K es una constante que depende de la dimensión del espacio tiempo, por ejemplo en $2+1$ se tiene que $K = 1$. Estas aproximaciones hacen que la acción para el campo escalar tome la forma

$$S_\phi \simeq \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \int dt \tilde{\phi}(k, t) (-\partial_t^2 - \mu^2 - k_i k^i - \epsilon R(t)) \tilde{\phi}(-k, t) \right]. \quad (6.19)$$

Luego de estas aproximaciones, 6.19 tiene la forma de una integral sobre momentos de un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo. Esto implica que si podemos obtener la parte disipativa para el oscilador, solo nos resta integrarla en momentos para así obtener la parte disipativa el menor orden no trivial.

De esta forma, utilizaremos la notación usual en mecánica cuántica para el oscilador, y definiremos

$$\omega_0^2 \doteq \mu^2 + k^i k_i \quad (6.20)$$

$$\omega^2(t) \doteq \omega_0^2 + \epsilon(t) \quad (6.21)$$

$$\epsilon(t) \doteq \epsilon R(t), \quad (6.22)$$

donde para que el método de Magnus converja es necesario pedir que $\int_{-\infty}^{\infty} dt \epsilon(t) = 0$, y para que las soluciones al oscilador estén bien definidas también es necesario que $|\epsilon(t)| < \omega_0^2$ [57]. La condición de épsilon pequeño se satisface naturalmente, debido a que estamos haciendo una aproximación al menor orden no trivial. La condición de $\int_{-\infty}^{\infty} dt \epsilon(t) = 0$ nos fuerza a suponer funciones cuya derivada primera valga lo mismo en el infinito que en menos infinito. Esto no necesariamente requiere que el límite esté bien definido, pero si que su regularización lo esté. Por ejemplo, una función senoide satisface estas condiciones.

Se sabe que la acción efectiva para un oscilador con frecuencia 6.21, está dada por

$$e^{i\Gamma} = \left[\frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(t))}{\det(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.23)$$

por lo que podemos usar los resultados de [56] para calcular este cociente de determinantes. Este cociente puede expresarse como un caso particular de 6.13, donde se hace $\sqrt{-g} \simeq 1$. Una vez obtenidas las soluciones a las ecuaciones homogéneas $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(t))q(t) = 0$ y $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2)q_0(t) = 0$, lo que sigue es pasar a la representación de interacción, es decir, analizar el sistema en el marco rotante a velocidad angular ω_0 . Esto se debe a que en la representación de interacción la acción efectiva será solo debida a la parte con dependencia temporal de la frecuencia, es decir, a la parte disipativa. Este trabajo ya fue realizado en [57], en donde se obtuvo que

$$\frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(t))}{\det(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2)} = (U_I)_{22}, \quad (6.24)$$

donde $(U_I)_{22}$ es el elemento de matriz 22 del operador evolución en la representación de interacción.

Como se mencionó en la Introducción 1.3.2, la expansión de Magnus consiste en suponer una forma funcional exponencial para el operador evolución, y expandir en exponente en sumandos, cada uno con un orden mayor en potencias de una constante sin dimensiones. En efecto [57]

$$U_I = e^A \quad (6.25)$$

$$A = A_1 + A_2 + \dots \quad (6.26)$$

$$A_1 = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{H}'_I(t) \quad (6.27)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 [\mathcal{H}'_I(t_1), \mathcal{H}'_I(t_2)], \quad (6.28)$$

donde \mathcal{H}'_I es el hamiltoniano del sistema en la representación de interacción. En nuestro caso se puede ver que

$$\mathcal{H}'_I(t) = \eta(t) \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\omega_0 t} \\ -e^{-2i\omega_0 t} & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

donde $\eta(t) = \frac{\epsilon^{(2)}}{2\omega_0}$. Así, si se desea obtener la acción efectiva al menor orden no trivial, solo es necesario utilizar A_1 , el cuál vale

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\tilde{\eta}(-2\omega_0) \\ i\tilde{\eta}(2\omega_0) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

para así obtener

$$U_I = e^{A_1} = \cosh|\tilde{\eta}(2\omega_0)|\mathcal{I} + \frac{\sinh|\tilde{\eta}(2\omega_0)|}{|\tilde{\eta}(2\omega_0)|}A_1. \quad (6.31)$$

De esto podemos extraer la componente necesaria del operador evolución

$$(U_I)_{22} = \cosh|\tilde{\eta}(2\omega_0)|.$$

Una vez obtenido este coeficiente, lo que sigue es reemplazar 6.20 y 6.22 en 6.24, para luego integrar en los momentos. Obteniendo así

$$\frac{Im\Gamma}{(2\pi)^d\bar{\mathcal{A}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Ln}[\cosh(\frac{|\epsilon\tilde{R}(2\sqrt{k_i k^i + \mu^2})|}{2\sqrt{k_i k^i + \mu^2}})]. \quad (6.32)$$

Este resultado no es el resultado final, ya que contiene contribuciones a órdenes superiores a 2 en R . Esto implica que para obtener un resultado consistente con nuestras aproximaciones, es necesario expandir hasta el menor orden no trivial en R , obteniendo

$$\frac{Im\Gamma}{(2\pi)^d\bar{\mathcal{A}}} = \frac{1}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{[\epsilon\tilde{R}(2\sqrt{k_i k^i + \mu^2})]^2}{4k_i k^i + 4\mu^2}. \quad (6.33)$$

Se pueden realizar algunas observaciones sobre 6.35. La primera, es que estos efectos disipativos aparecen cuando la energía $k_0^2 = 4k_i k^i + 4\mu^2$, lo que implica que estos efectos solo existen cuando hay energía suficiente para crear un par de partículas de masa μ . Esto significa que al menos a este orden, los efectos disipativos se deben a excitaciones de vacío, y por ende tienen una naturaleza similar al DCE. Además, a este orden en curvatura, estas excitaciones solo aparecen cuando la métrica se modifica aceleradamente, lo que es otra similitud con el DCE. Esto no es una condición necesaria para que haya este tipo de efectos disipativos, ya que calculando a órdenes superiores en la curvatura, aparecerían siempre que la métrica tenga una dependencia temporal. Otra observación es que, en esta aproximación, la amplitud de estos efectos se anula cuando el campo escalar está minimalmente acoplado a la curvatura. En lo que sigue veremos que esto no es así, ya que utilizando la aproximación a 1-loop para la acción efectiva se podrá ver que estos efectos existen incluso cuando $\epsilon = 0$.

6.2. Acción efectiva a 1-loop

En este apartado se utiliza una expansión a 1-loop de la acción efectiva para la métrica, integrando un campo escalar con acción 6.9. Se utilizan estos resultados para obtener la parte disipativa de la acción, y se comparan los resultados con los obtenidos en la sección anterior.

Como se mencionó anteriormente, en este capítulo mostraremos como una expansión a 1-loop muestra que estos efectos disipativos existen cuando $\epsilon = 0$. Además, se realizan cálculos para métricas más generales que 6.10, en donde admitimos dependencia espacial. Para ello, primero trabajaremos en la signatura euclídea, y al final de todos los cálculos y aproximaciones, volveremos al formalismo de tiempo real para poder observar estos efectos disipativos.

Los cálculos a 1-loop se reducen a obtener todos los términos cuadráticos en la curvatura, ya sea la curvatura escalar o el tensor de Ricci [58]. La primer diferencia con el método de Magnus, es que al hacer estos cálculos aparecen términos extra en la acción efectiva que vienen del acoplamiento con la curvatura en el término cinético. Como a esta altura no se está aproximando nada, el acoplamiento con el término cinético hace que aparezcan contribuciones que no dependen de ϵ .

Estos cálculos ya fueron realizados en [58], en donde se utilizó la función ζ de Riemann para regularizar las contribuciones a la acción efectiva. En ese mismo trabajo, se muestra la forma funcional de la parte local y la parte no local de la acción efectiva. En la parte local de la acción efectiva, no aparece ninguna contribución que pudiera dar lugar a polos en las integrales o a raíces de números negativos. Esto significa que no hay contribuciones que pudieran dar lugar a términos imaginarios en la acción, y por ende a efectos disipativos.

Mas aún, se puede ver que la parte no local posee operadores de Laplace fraccionarios que, luego de rotar a tiempo real, harán aparecer factores imaginarios que generarán efectos disipativos. Debido a esto, de ahora en más solo trabajaremos con la parte no local de la acción efectiva, que luego de integrar 6.9, toma la forma [58]

$$\begin{aligned} \Gamma^{non-local} = \frac{(4\pi)^{-\frac{D}{2}}}{2} \int_{\Sigma} d^D x \sqrt{g(x)} [& \epsilon^2 R(x) \beta^{(1)}(\Delta, \mu) R(x) \\ & + 2R_{\alpha\mu}(x) \nabla^{\alpha} \frac{1}{\Delta} \beta^{(2)}(\Delta, \mu) \nabla_{\nu} R^{\nu\mu}(x) \\ & - 2\epsilon R(x) \beta^{(3)}(\Delta, \mu) R(x) + R_{\mu\nu}(x) \beta^{(4)}(\Delta, \mu) R^{\mu\nu}(x) \\ & + R(x) \beta^{(5)}(\Delta, \mu) R(x)], \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde $D = d + 1$ es la dimensión espacio-temporal, ∇^{α} es la derivada covariante, y las funciones $\beta^{(i)}(\Delta, \mu)$ solo dependen de la masa del campo escalar μ y del laplaciano Δ . Estas funciones $\beta^{(i)}$ son las que contienen singularidades, y por ende son las que darán lugar a efectos disipativos. La forma funcional de las mismas depende de la dimensión de la variedad donde está definido el campo escalar. En lo que sigue utilizaremos los resultados de [58] sin deducirlos. Allí se puede ver en detalle el cálculo de los resultados aquí presentados.

Para D impar se tiene que

$$\beta^{(i)}(\Delta, \mu) = \frac{\pi(-1)^{\frac{D-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{D-2}{2})} \int_0^1 dz f^{(i)}(z) [\mu^2 - \frac{1-z^2}{4}\Delta]^{\frac{D-4}{2}}, \quad (6.35)$$

y para D par

$$\begin{aligned} \beta^{(i)}(\Delta, \mu) = & \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{2\Gamma(\frac{D-2}{2})} \int_0^1 dz f^{(i)}(z) [\mu^2 - \frac{1-z^2}{4}\Delta]^{\frac{D-4}{2}} \\ & \times \{Ln[\frac{1}{m^2}(\mu^2 - \frac{1-z^2}{4}\Delta)] - \Psi(\frac{D-2}{2}) + \Psi(1)\}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

donde m es una escala de renormalización, $\Psi(q) = \frac{d}{dq} Ln(\Gamma(q))$ y las funciones $f^{(i)}$ son polinomios. En este trabajo solo utilizaremos las siguientes funciones $f^{(i)}$

$$f^{(1)}(z) = 1, f^{(2)}(z) = \frac{z^2}{2}, f^{(3)}(z) = \frac{1-z^2}{4}, f^{(4)}(z) = \frac{z^4}{6} \text{ y } f^{(5)}(z) = \frac{3-6z^2-z^4}{48}. \quad (6.37)$$

De estas funciones $\beta^{(i)}$ es de donde salen las contribuciones a la parte disipativa de la acción. Como adelanto, puede verse que existirán singularidades si se cumple que $-\Delta < -4\mu^2$. Esto solo puede ocurrir si la variedad tiene dependencia temporal, lo que haría que al rotar a tiempo real $-\Delta$ pueda ser negativo. Si la variedad no tuviera dependencia temporal, no aparecerían singularidades en las integrales, y por ende no habría efectos disipativos. Más en detalle, si se realiza la aproximación al menor orden no trivial puede verse que esta condición de existencia de singularidades es equivalente a pedir que la energía satisfaga $k_0^2 > (2\mu)^2$. Esto nuevamente demuestra que estos efectos disipativos se deben a la creación de pares de partículas.

En lo que sigue, se mostrarán los resultados del cálculo de las funciones $\beta^{(i)}$ para campos sin masa en $d + 1$ dimensiones y con masa en $2 + 1$ dimensiones. Esto se debe a que cuando se incluye masa las expresiones $d + 1$ dimensiones son demasiado largas, y no aportan al entendimiento de este fenómeno. Luego, se utilizan estos resultados para calcular las contribuciones a la acción efectiva de esos efectos disipativos.

6.3. Efecto disipativo - Campo sin masa - $d + 1$

En este apartado se calculan las contribuciones disipativas a la acción efectiva para la métrica, luego de integrar un campo escalar sin masa, acoplado no minimalmente a la curvatura escalar.

El hecho de que el campo escalar tenga una acción de la forma 6.9 con $\mu = 0$, facilita los cálculos de las funciones $\beta^{(i)}$. Esto a su vez, facilita los cálculos de las contribuciones

disipativas de la acción efectiva. En lo que sigue mostraremos los resultados de las funciones $\beta^{(i)}$ para este caso, y luego los utilizaremos para dar una forma general para las contribuciones disipativas de la acción efectiva.

Estudiar el caso sin masa es interesante ya que permite dar fórmulas relativamente sencillas para las contribuciones en $d + 1$ dimensiones. Esto hace del campo escalar sin masa un modelo de juguete, con el cual evaluar las amplitudes disipativas para diferentes modelos de interés.

El primer paso para obtener resultados cuantitativos para estos efectos disipativos, es obtener las funciones 6.35 y 6.36. En efecto, para D impar

$$\beta^{(i)}(\Delta, \mu) = \frac{\pi^{\frac{3}{4}} (-1)^{\frac{D-1}{2}}}{4 \Gamma(\frac{D-1}{2})} \left(\frac{-\Delta}{4}\right)^{\frac{D-4}{2}} [f_D^i], \quad (6.38)$$

y para D par

$$\beta^{(i)}(\Delta, \mu) = \frac{\pi^{\frac{1}{4}} (-1)^{\frac{D}{2}}}{4 \Gamma(\frac{D-1}{2})} \left(\frac{-\Delta}{4}\right)^{\frac{D-4}{2}} \left\{ (f_D^i) \left[\text{Ln}\left(\frac{-\Delta}{4m^2}\right) + \Psi\left(\frac{D-1}{2}\right) + \Psi(1) \right] + \alpha_D^i \right\}, \quad (6.39)$$

donde f_D^i y α^i son constantes que dependen de la dimensión

$$f_D^1 = 1, f_D^2 = \frac{1}{2(D-1)}, f_D^3 = \frac{\frac{D}{2} - 1}{2(D-1)}, f_D^4 = \frac{1}{2(D^2-1)} \text{ y } f_D^5 = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D}{2} - 1}{4(D^2-1)}, \quad (6.40)$$

$$\alpha_D^1 = 0, \alpha_D^2 = \frac{-1}{(D-1)^2}, \alpha_D^3 = \frac{1}{2(D-1)^2}, \alpha_D^4 = \frac{-2D}{(D^2-1)^2} \text{ y } \alpha_D^5 = \frac{D^2 + 3D + 1}{4(D^2-1)}. \quad (6.41)$$

En lo que sigue se discute la posibilidad de generar un factor imaginario a partir de cada función $\beta^{(i)}$. Esto se debe a que el resto de los factores que aparecen en la parte no local de la acción efectiva son reales en ambas firmas de la métrica (esto se verá en detalle más adelante). Por lo que, si la función beta es imaginaria pura al pasar a tiempo real, entonces este factor junto con el factor imaginario de la integral en el tiempo (ver 6.34), generarían un término disipativo de la acción efectiva.

Para D impar, se puede ver que $\forall D$ siempre habrá una potencia fraccionaria del laplaciano $\left(\frac{D-4}{2}\right)$, por lo que al pasar a tiempo real esta raíz generará un factor imaginario siempre que $-\Delta < 0$. Esta discusión será más sencilla cuando realicemos aproximaciones al menor orden no trivial, en donde podremos expresar esta condición en el espacio de momentos.

Para D par, el factor imaginario no viene de un laplaciano fraccionario, sino que viene del logaritmo. Lo interesante de este caso, es que por propiedades del logaritmo, se puede hacer $\text{Ln}(-\Delta) = i\Pi + \text{Ln}(\Delta)$. Esto significa que aunque las funciones $\beta^{(i)}$

dependan de un cut-off m , la parte disipativa de la acción no lo hace. Esto además significa, que al menos a este orden, los efectos disipativos no se ven afectados por el flujo del grupo de renormalización.

Una vez despejada la parte que generaría un factor imaginario en tiempo real, es necesario continuar y dar la forma de la parte disipativa de la acción. Para ser más explícitos, es necesario utilizar aproximaciones. A partir de este momento se aproximará la curvatura de la variedad al menor orden no trivial. Esto nos permitirá realizar transformadas de Fourier de las magnitudes que aparecen en 6.34.

De ahora en adelante, se aproximarán las siguientes magnitudes dentro de 6.34 por

$$g_{\mu\nu} \simeq \delta_{\mu\nu} , \sqrt{g} \simeq 1 , \Delta \simeq \Delta_0 = \sum_{i=0}^d \partial_i^2 , \nabla_\nu \simeq \partial_\nu . \quad (6.42)$$

Por supuesto, también es necesario aproximar R y $R^{\mu\nu}$ al menor orden no trivial posible. Dado que estas dos magnitudes dependen no trivialmente de la métrica, se las dejará expresadas como R y $R^{\mu\nu}$, por simplicidad. La forma funcional de estas magnitudes a este orden en aproximaciones puede verse en 1.31 y 1.32.

Así, es posible rotar nuevamente al formalismo de tiempo real, y expresar la acción efectiva en términos de las transformadas de Fourier de cada término. Se puede ver que, bajo estas aproximaciones y en tiempo real, la condición para que exista un efecto disipativo $-\Delta < 0$ se transforma en $k_0^2 > \vec{k}^2$. Esto era de esperarse, ya que al no tener masa, la creación de pares de partículas no tiene ningún “threshold”, es decir, una cota inferior de energía superior a cero. El procedimiento a seguir a partir de esto es claro: Lo primero que se debe hacer es rotar a tiempo real, es decir hacer la transformación $x_0 \rightarrow -it$. Lo segundo, es escribir todas las magnitudes en términos de sus transformadas de Fourier e integrar las variables espaciales, dejando solo integrales en momento. Tercero y último, despejar la parte imaginaria de la acción efectiva, restringiendo la integración sobre los momentos a la región que satisface $k_0^2 > \vec{k}^2$.

Los pasos serán esquematizados para D impar, y solo se incluirán los resultados para D par, por simplicidad. En efecto, para D impar, incluyendo la forma de las funciones $\beta^{(i)}$ dentro de 6.34 se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma^{non-local} = & \frac{(4\pi)^{-\frac{D}{2}} \pi^{\frac{3}{4}} (-1)^{\frac{D-1}{2}}}{2 \cdot 4 \Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d^D x \{ \\ & [\epsilon^2 - \epsilon \frac{(\frac{D}{2} - 1)}{(D-1)} + \frac{((\frac{D}{2})^2 - \frac{D}{2} - 1)}{4(D^2 - 1)}] R \left(\frac{-\sum_{i=0}^d (\partial_i^2)}{4} \right)^{\frac{D-4}{2}} R \\ & - \frac{1}{4(D-1)} R_{\alpha\gamma} \partial^\alpha \left(\frac{-\sum_{i=0}^d (\partial_i^2)}{4} \right)^{\frac{D-6}{2}} \partial_\nu R^{\nu\gamma} \\ & + \frac{1}{2(D-1)} R_{\alpha\gamma} \left(\frac{-\sum_{i=0}^d (\partial_i^2)}{4} \right)^{\frac{D-4}{2}} R^{\alpha\gamma} \}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Lo que sigue ahora es expresar de una forma manipulable las potencias no enteras del laplaciano $\sum_{i=0}^d \partial_i^2$. Esto va a depender de en cuantas dimensiones se estén analizando estos efectos, ya que dependiendo de la dimensión, estas potencias son negativas o positivas. En el caso de que las mismas sean negativas, es decir $D < 4$ o $D < 6$, dependiendo de que término se mire, estas potencias pueden expresarse por medio de integrales, utilizando que [55]

$$\left(\frac{-\Delta}{a}\right)^{\frac{1-2n}{2}} = \frac{2\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n-\frac{1}{2})} \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\left(\frac{-\Delta}{a} + \lambda^2\right)^n}, \quad (a > 0, n > 1). \quad (6.44)$$

En el caso de que $D > 4$ o $D > 6$, las potencias de los laplacianos son positivas, y por ende se tiene que recurrir a otras herramientas, como por ejemplo la fórmula de Boggio [59]. Dado que este tipo de fórmulas son muy complicadas para realizar un cálculo explícito, y además solo aparecerían a partir de $D \geq 5$, no trabajaremos con ellas. Solo mencionaremos que en el caso de $D = 5$ la raíz del laplaciano puede ser fácilmente entendida a partir de su transformada de Fourier, ya que $-\sqrt{\Delta_0}f(x)(k) = |k|\tilde{f}(k)$.

En el paso siguiente pasamos a tiempo real, y expresamos las integrales en términos de sus transformadas de Fourier. El resultado de hacer estas transformaciones es

$$\begin{aligned} Im(\Gamma^{non-local}) = & i \frac{(4\pi)^{-\frac{D}{2}}}{2} \frac{\pi^{\frac{3}{4}}}{4} \frac{(-1)^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d\vec{p} \int_{p_0^2 > \vec{p}^2} dp_0 \{ \\ & - [\epsilon^2 - \epsilon \frac{(\frac{D}{2} - 1)}{(D-1)} + \frac{((\frac{D}{2})^2 - \frac{D}{2} - 1)}{4(D^2 - 1)}] \tilde{R}(-p) \left(\frac{-p_0 + \vec{p}}{4}\right)^{\frac{D-4}{2}} \tilde{R}(p) \\ & + \frac{1}{4(D-1)} \tilde{R}_{\alpha\gamma}(-p) p^\alpha \left(\frac{-p_0 + \vec{p}}{4}\right)^{\frac{D-6}{2}} p_\nu \tilde{R}^{\nu\gamma}(p) \\ & - \frac{1}{2(D-1)} \tilde{R}_{\alpha\gamma}(-p) \left(\frac{-p_0 + \vec{p}}{4}\right)^{\frac{D-4}{2}} \tilde{R}^{\alpha\gamma}(p) \}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde se utilizó la notación $\left(\frac{-p_0 + \vec{p}}{4}\right)^{\frac{n}{2}} G(p)$ para expresar la transformada de Fourier de $(-\Delta_0)^{\frac{n}{2}} G(x)$ en tiempo real. Este es el resultado para la parte disipativa de la acción efectiva a 1-loop. Es interesante notar que esta expresión no depende de una elección especial de la métrica, y solo requiere que la misma tenga dependencia temporal. Si no hubiera dependencia temporal, no habría parte imaginaria, como se mencionó anteriormente. Este resultado difiere del obtenido en 6.32 en que si hacemos $\epsilon = 0$, la parte imaginaria no se anula. Esto se debe a que aquí se está tomando la aproximación al menor orden no trivial luego de hacer los cálculos a 1-loop. Esto demuestra nuevamente algo que la gente que hace física de altas energías conoce muy bien, y es que en teoría de campos no es equivalente intercambiar el orden en que se toman límites y aproximaciones.

Para D par, los cálculos son muy similares, solo que ahora la parte imaginaria debe

ser extraída de adentro del logaritmo que aparece en 6.41. El resultado es

$$\begin{aligned}
Im(\Gamma^{non-local}) = & \frac{(4\pi)^{\frac{-D}{2}} \pi^{\frac{3}{4}} (-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2 \cdot 4 \Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d\vec{p} \int_{p_0^2 > \vec{p}^2} dp_0 \{ \\
& - [\epsilon^2 - \epsilon \frac{(\frac{D}{2} - 1)}{(D-1)} + \frac{((\frac{D}{2})^2 - \frac{D}{2} - 1)}{4(D^2 - 1)}] \tilde{R}(-p) (\frac{-p_0 + \vec{p}}{4})^{\frac{D-4}{2}} \tilde{R}(p) \\
& + \frac{1}{4(D-1)} \tilde{R}_{\alpha\gamma}(-p) p^\alpha (\frac{-p_0 + \vec{p}}{4})^{\frac{D-6}{2}} p_\nu \tilde{R}^{\nu\gamma}(p) \\
& - \frac{1}{2(D-1)} \tilde{R}_{\alpha\gamma}(-p) (\frac{-p_0 + \vec{p}}{4})^{\frac{D-4}{2}} \tilde{R}^{\alpha\gamma}(p) \}. \tag{6.46}
\end{aligned}$$

Para obtener una noción más intuitiva de estos efectos disipativos, es necesario estudiar un caso particular de métrica y fijar la dimensión espacio-temporal. Para ello, decidimos estudiar en $2 + 1$ un caso en donde la métrica tenga la forma 6.10. Esto se hizo con la intención de analizar un posible efecto cuántico del paso de una onda gravitacional a través de un material de dos dimensiones espaciales. En el caso que analizaremos ahora, la curvatura escalar y el tensor de Ricci solo dependen del tiempo, y el cálculo de la parte disipativa de la acción se simplifica.

Para poder continuar, vamos a dar uso de las identidades en 6.44. En el caso de $2 + 1$ dimensiones, es necesario calcular $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ y $(-\Delta)^{-\frac{3}{2}}$. Además, como estamos trabajando en una métrica que tiene solo dependencia temporal, usaremos $-\Delta_0 = \partial_t^2$. Estos operadores se obtienen de manera más sencilla pasando a su representación en el espacio de momentos y usando 6.44. En efecto

$$\widetilde{(-\Delta_0)^{\frac{1}{2}-n}}(p_0) = \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{(-p_0^2 + \lambda^2)^n} = \frac{i\pi}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} \frac{1}{(\lambda + p_0)} \right]_{\lambda=p_0}, \tag{6.47}$$

donde se integró utilizando residuos, y tomando el polo asociado a energía positiva. Además, vemos que estas integrales son las que proveen un factor imaginario. Reemplazando $n = 1$ y $n = 2$ en 6.47 y usando que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda'} \left[\frac{1}{(\lambda' + p_0)^2} \right]_{\lambda'=p_0} = \frac{-1}{4p_0^3} \tag{6.48}$$

$$\left[\frac{1}{(\lambda' + p_0)} \right]_{\lambda'=p_0} = \frac{1}{2p_0}, \tag{6.49}$$

se obtienen las potencias del laplaciano que se necesitan en $2 + 1$.

El paso siguiente es dar una forma particular para la métrica. Con ánimos de estudiar este tipo de efectos asociados a el paso de una onda gravitacional en un material, analizamos una métrica de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + a(t)]dx^2 + [1 + b(t)]dy^2, \quad |a(t)|, |b(t)| \ll 1, \tag{6.50}$$

en donde asumimos

$$a(t) = A \arctan(\Omega_a t), \quad (6.51)$$

$$b(t) = B \arctan(\Omega_b t + \delta_b). \quad (6.52)$$

Aquí A y B son constantes que determinan la amplitud de la dilatación del espacio tiempo, Ω_a y Ω_b son frecuencias que determinan la velocidad de esta dilatación, y δ_b es un desfase entre ambas direcciones de dilatación. Este modelo es interesante, ya que con el paso de una onda gravitacional los materiales se dilatan y se contraen en dos direcciones perpendiculares [60]. Para este tipo de métricas, podemos aproximar al menor orden no trivial las magnitudes que determinan la curvatura del espacio tiempo. En efecto, las únicas magnitudes diferentes de cero son

$$R(t) = \frac{\ddot{a}(t)}{(1+a(t))} + \frac{\ddot{b}(t)}{(1+b(t))} - \frac{3}{4} \left[\frac{\dot{a}^2(t)}{(1+a(t))^2} + \frac{\dot{b}^2(t)}{(1+b(t))^2} \right] \simeq \ddot{a}(t) + \ddot{b}(t), \quad (6.53)$$

$$R_{00}(t) = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{(1+a(t))} + \frac{\ddot{b}(t)}{(1+b(t))} + \frac{1}{4} \left[\frac{\dot{a}^2(t)}{(1+a(t))^2} + \frac{\dot{b}^2(t)}{(1+b(t))^2} \right] \simeq -\frac{1}{2} [\ddot{a}(t) + \ddot{b}(t)], \quad (6.54)$$

$$R_{11}(t) = \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{(1+a(t))} - \frac{4}{4} \left[\frac{\dot{a}^2(t)}{(1+a(t))^2} - \frac{\dot{b}^2(t)}{(1+b(t))^2} \right] \simeq \frac{\ddot{a}(t)}{2}, \quad (6.55)$$

$$R_{22}(t) = \frac{1}{2} \frac{\ddot{b}(t)}{(1+b(t))} - \frac{4}{4} \left[\frac{\dot{b}^2(t)}{(1+b(t))^2} - \frac{\dot{a}^2(t)}{(1+a(t))^2} \right] \simeq \frac{\ddot{b}(t)}{2}. \quad (6.56)$$

Para utilizar la fórmula 6.46 es necesario transformar Fourier a R y a $R_{\mu\nu}$, obteniendo así

$$\tilde{\tilde{a}}(p) = i\pi A p \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_a}\right|\right\}, \quad (6.57)$$

$$\tilde{\tilde{b}}(p) = i\pi B p \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_a}\right| - i\frac{p}{\Omega_b} \delta_b\right\}, \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{R}(-p)\tilde{R}(p)}{\pi^2} &\simeq p^2 \left[A \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_a}\right|\right\} + B \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_b}\right|\right\} \right]^2 \\ &\quad + 2p^2 AB \exp\left\{-\left|p\frac{(\Omega_a + \Omega_b)}{\Omega_a \Omega_b}\right|\right\} \left[\cos\left(\frac{p}{\Omega_b} \delta_b\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\frac{\tilde{R}(-p)\tilde{R}(p)}{\pi^2} \simeq [F(p) + 2G(p, \delta_b)], \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{R}_{\mu\nu}(-p)\tilde{R}^{\mu\nu}(p)}{\pi^2} &\simeq \frac{p^2}{2} \left[A \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_a}\right|\right\} + B \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_b}\right|\right\} \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} p^2 AB \exp\left\{-\left|p\frac{(\Omega_a + \Omega_b)}{\Omega_a \Omega_b}\right|\right\} \left[\cos\left(\frac{p}{\Omega_b} \delta_b\right) - 2 \right], \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\frac{\tilde{R}_{\mu\nu}(-p)\tilde{R}^{\mu\nu}(p)}{\pi^2} \simeq \left[\frac{1}{2} F(p) + \frac{1}{2} H(p, \delta_b) \right], \quad (6.62)$$

donde se definieron las funciones

$$F(p) \doteq p^2 [A \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_a}\right|\right\} + B \exp\left\{-\left|\frac{p}{\Omega_b}\right|\right\}]^2, \quad (6.63)$$

$$G(p, \delta_b) \doteq p^2 AB \exp\left\{-\left|p \frac{(\Omega_a + \Omega_b)}{\Omega_a \Omega_b}\right|\right\} [\cos\left(\frac{p}{\Omega_b} \delta_b\right) - 1], \quad (6.64)$$

$$H(p, \delta_b) \doteq p^2 AB \exp\left\{-\left|p \frac{(\Omega_a + \Omega_b)}{\Omega_a \Omega_b}\right|\right\} [\cos\left(\frac{p}{\Omega_b} \delta_b\right) - 2]. \quad (6.65)$$

Con estas definiciones, podemos expresar las contribuciones disipativas de la acción efectiva utilizando 6.46, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{Im(\Gamma^{non-local})}{[(2\pi)^2 \bar{\mathcal{A}}]} &= \frac{(4\pi)^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi}} \pi \int_0^\infty dp \left[\frac{[\frac{1}{2}F(p) + \frac{1}{2}H(p, \delta_b)]}{6} - \frac{[F(p) + 2G(p, \delta_b)]}{48} \right] \frac{3}{4p} \\ &\quad + \left[\frac{[F(p) + 2G(p, \delta_b)]}{4} \right] \frac{1}{p} \\ &\quad + [F(p) + 2G(p, \delta_b)] \frac{(\epsilon^2 + \frac{1}{16} - \frac{\epsilon}{2})}{2p} \\ &\quad + [F(p) + 2G(p, \delta_b)] \left[\frac{(\epsilon - \frac{1}{4})}{4} \frac{1}{p} \right]. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Esta expresión permite calcular la amplitud de estos efectos disipativos tomando la norma al cuadrado de la exponencial de la acción in-out. Así, haciendo $e^{-2Im(\Gamma^{non-local})}$, se obtendría la probabilidad de creación de pares como función de A , B , Ω_a , Ω_b y δ_b . Además, cambiando variables en la integral de momentos, se puede ver que estos efectos son proporcionales al cuadrado de la amplitud por la frecuencia de la dilatación. Nuevamente, notamos que estos efectos no se anulan al tomar $\epsilon = 0$, demostrando que los cálculos a 1-loop son mejores para obtener contribuciones disipativas que el método de la aproximación de Magnus, a pesar de que este último da un estimativo de los mismos de manera más sencilla.

6.4. Efecto disipativo - Campo masivo - 2 + 1

En este apartado se realizan cálculos de efectos disipativos inerciales para un campo escalar masivo, no minimalmente acoplado a la curvatura, en 2 + 1 dimensiones.

El modelo utilizado en este apartado es el que aparece en 6.9. La complejidad para obtener resultados cuantitativos en el caso masivo radica en las funciones $\beta^{(i)}$ (6.35 y 6.36). ya que en el caso masivo, no es posible encontrar una fórmula cerrada en $d + 1$ dimensiones. En este apartado, trabajamos en 2 + 1 dimensiones por simplicidad, y luego particularizamos los resultados para el modelo propuesto en 6.50.

El cálculo de las funciones $\beta^{(i)}$ para este modelo fue realizado utilizando el software

Mathematica, obteniendo como resultado

$$\beta^{(1)}(\Delta, \mu) = -\sqrt{\frac{\pi}{4\mu^2}} \frac{\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})}{2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}}}, \quad (6.67)$$

$$\beta^{(2)}(\Delta, \mu) = -\sqrt{\frac{\pi}{4\mu^2}} \frac{1}{2} \frac{[-2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}} + 4(\frac{-\Delta+4\mu^2}{4\mu^2})\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})]}{8(\frac{-\Delta}{4\mu^2})^{\frac{3}{2}}}, \quad (6.68)$$

$$\beta^{(3)}(\Delta, \mu) = \frac{\beta^{(1)}(\Delta, \mu)}{4} - \frac{\beta^{(2)}(\Delta, \mu)}{2}, \quad (6.69)$$

$$\beta^{(4)}(\Delta, \mu) = -\sqrt{\frac{\pi}{4\mu^2}} \frac{1}{2} \frac{[-2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}}(\frac{-5\Delta+14\mu^2}{4\mu^2}) + 12(\frac{-\Delta+4\mu^2}{4\mu^2})^2\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})]}{96(\frac{-\Delta}{4\mu^2})^{\frac{5}{2}}}, \quad (6.70)$$

$$\beta^{(5)}(\Delta, \mu) = \frac{\beta^{(1)}(\Delta, \mu)}{16} - \frac{\beta^{(2)}(\Delta, \mu)}{4} - \frac{\beta^{(4)}(\Delta, \mu)}{8}. \quad (6.71)$$

Se puede ver que estas expresiones son equivalentes a 6.38 en el límite de $\mu = 0$. Así, la parte no local de la acción toma la forma

$$\begin{aligned} \Gamma^{non-local} = & \frac{(4\pi)^{\frac{-3}{2}}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{4\mu^2}} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{g(x)} \left[-(\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{16})(4\mu^2)^{\frac{1}{2}} R(x) \frac{\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})}{2\sqrt{-\Delta}} R(x) \right. \\ & - (\epsilon - \frac{1}{4}) \frac{1}{2} (4\mu^2)^{\frac{3}{2}} R(x) \frac{[-2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}} + 4(\frac{-\Delta+4\mu^2}{4\mu^2})\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})]}{8(-\Delta)^{\frac{3}{2}}} R(x) \\ & + \frac{1}{8} (4\mu^2)^{\frac{5}{2}} R(x) \frac{[-2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}}(\frac{-5\Delta+14\mu^2}{4\mu^2}) + 12(\frac{-\Delta+4\mu^2}{4\mu^2})^2\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})]}{96(-\Delta)^{\frac{5}{2}}} R(x) \\ & - \frac{1}{2} (4\mu^2)^{\frac{3}{2}} (\nabla_{\nu} R(x)) \frac{[-2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}} + 4(\frac{-\Delta+4\mu^2}{4\mu^2})\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})]}{8(-\Delta)^{\frac{5}{2}}} \nabla^{\nu} R(x) \\ & \left. - (4\mu^2)^{\frac{5}{2}} R_{\mu\nu}(x) \frac{[-2\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}}(\frac{-5\Delta+14\mu^2}{4\mu^2}) + 12(\frac{-\Delta+4\mu^2}{4\mu^2})^2\arctan(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}})]}{96(-\Delta)^{\frac{5}{2}}} R^{\mu\nu}(x) \right]. \quad (6.72) \end{aligned}$$

Lo que sigue es despejar la parte imaginaria de la acción, y para eso es necesario analizar de que términos salen las contribuciones imaginarias. Dado que al rotar a tiempo real, la integración provee de un factor imaginario, este debe multiplicar con otro para así dar un término disipativo. Se puede ver que todos los términos que no tengan la arcotangente no poseen un factor imaginario, ya que tiene raíces del laplaciano en el numerador y en el denominador. Esto implica que si hay efectos disipativos, estos deben salir de la arcotangente.

Dado que ya sabemos que estos efectos están asociados a la creación de pares, vamos

a expandir la arcotangente en el rango $|\Delta| > 4\mu^2$. Haciendo esto se obtiene

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4\mu^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n - \frac{1}{2})(2n+1)} \frac{(4\mu^2)}{(-\Delta)} \int_0^{\infty} d\lambda \frac{1}{(\frac{-\Delta}{4\mu^2} + \lambda^2)^n}, \quad (6.73)$$

donde se hizo uso de la representación en forma de integral de las potencias del laplaciano 6.44.

Puede verse que todos los términos de la expansión 6.73 con $n \geq 1$ darían un factor imaginario luego de integrar por residuos. Este se cancelaría con el factor imaginario que genera el denominador en 6.72, lo que significa que la parte disipativa de la acción sale del término con $n = 0$, osea el $\frac{\pi}{2}$ que aparece en 6.73. Además, puede verse que expandiendo para $|\Delta| < 4\mu^2$ todos los factores imaginarios se cancelan.

Lo que sigue ahora es un procedimiento similar al realizado para el caso sin masa: Aproximar la curvatura al menor orden no trivial, pasar a tiempo real, transformar Fourier, y por último expresar todo en términos de una integral en momentos sobre el rango donde hay disipación. No realizaremos el proceso, y solo incluiremos el resultado. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{Im(\Gamma^{non-local})}{[(2\pi)^2 \bar{\mathcal{A}}]} &= \frac{(4\pi)^{-\frac{3}{2}}}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4\mu^2}} (2i) \int_{2m}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d\lambda'}{2} \\ &\left[-2\left(\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{16}\right) (4\mu^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{R}(-p_0) \tilde{R}(p_0) \frac{[\frac{\pi}{2}]}{(\lambda'^2 - p_0^2)} \right. \\ &- 4\left(\epsilon - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{2} (4\mu^2)^{\frac{3}{2}} \tilde{R}(-p_0) \tilde{R}(p_0) \frac{[4(\frac{-p_0^2 + 4\mu^2}{4\mu^2})][\frac{\pi}{2}]}{8(\lambda'^2 - p_0^2)^2} \\ &+ \frac{2}{3} (4\mu^2)^{\frac{5}{2}} \tilde{R}(-p_0) \tilde{R}(p_0) \frac{[12(\frac{-p_0^2 + 4\mu^2}{4\mu^2})^2][\frac{\pi}{2}]}{96(\lambda'^2 - p_0^2)^3} \\ &- \frac{8}{3} (4\mu^2)^{\frac{3}{2}} p_0^2 \tilde{R}(-p) \tilde{R}(p) \frac{[4(\frac{-p_0^2 + 4\mu^2}{4\mu^2})][\frac{\pi}{2}]}{8(\lambda'^2 - p_0^2)^3} \\ &\left. - \frac{16}{3} (4\mu^2)^{\frac{5}{2}} \tilde{R}_{\mu\nu}(-p_0) \tilde{R}^{\mu\nu}(p_0) \frac{[12(\frac{-p_0^2 + 4\mu^2}{4\mu^2})^2][\frac{\pi}{2}]}{96(\lambda'^2 - p_0^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Esta expresión determina la parte disipativa de la acción efectiva luego de integrar el campo escalar masivo. Hasta aquí no se ha realizado ninguna elección de la métrica, por lo que este resultado vale para una métrica arbitraria con dependencia temporal y sin dependencia espacial. Este resultado puede particularizarse para la métrica elegida

en 6.50, obteniendo así

$$\begin{aligned} \frac{Im(\Gamma^{non-local})}{[(2\pi)^2\bar{\mathcal{A}}]} = \frac{(4\pi)^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi}}\pi \int_{2\mu}^{\infty} dp \left[-\frac{[\frac{1}{2}F(p) + \frac{1}{2}H(p, \delta_b)]}{6} \right. \\ + \frac{[F(p) + 2G(p, \delta_b)]}{48} \frac{3(4\mu^2 - p^2)^2}{4p^5} \\ - \frac{[F(p) + 2G(p, \delta_b)]}{4} \frac{(4\mu^2 - p^2)}{p^3} \\ + [F(p) + 2G(p, \delta_b)] \frac{(\epsilon^2 + \frac{1}{16} - \frac{\epsilon}{2})}{2p} \\ \left. - [F(p) + 2G(p, \delta_b)] \frac{(\epsilon - \frac{1}{4}) (4\mu^2 - p^2)}{4p^3} \right]. \quad (6.75) \end{aligned}$$

Este resultado es una generalización a campos con masa de 6.66. Aunque tanto 6.66 como 6.75 puedan integrarse utilizando Mathematica, estas expresiones tienen muchas líneas de longitud y no aportan al entendimiento de estos fenómenos. A pesar de esto, es importante destacar que 6.75 decrece exponencialmente con la masa μ del campo escalar, por lo que mientras más masivo sea el mismo, menos relevante será este efecto.

Estos efectos fueron estudiados en [55], en donde se analizó el caso de un campo escalar no masivo y acoplado minimalmente a la curvatura. Allí, se comparó la amplitud de estos efectos con los del DCE. Comparando órdenes de magnitud para ondas estacionarias en un material en $2 + 1$, se obtuvo que estos efectos dependen del cuadrado de la frecuencia de oscilación, mientras que el DCE depende de la frecuencia a la cuarta. Esto significa que dependiendo de la velocidad de oscilación, uno de los dos efectos puede ser más importante que el otro. Un detalle interesante es que estos efectos disipativos inerciales tienen una cota inferior igual 2μ , mientras que el DCE tiene una cota inferior que depende de la frecuencia. Esto significa que en distintos rangos de energía, que dependerán de la comparativa entre la masa y la frecuencia de oscilación, estos efectos podrán observarse en simultáneo o no.

6.5. Algunos Comentarios

Como se vio a lo largo de este capítulo, estos efectos disipativos están asociados a la creación de pares de partículas, debido a un movimiento acelerado de la variedad donde están definidos los campos. Lo interesante es que estos efectos no dependen de un acoplamiento con campos en el exterior de la pared en movimiento. Esto significa que estos efectos siempre ocurrirán, y deberían tenerse en consideración a la hora de realizar mediciones de otros efectos de naturaleza similar como el Efecto Casimir Dinámico.

Incluso este tipo de efectos podrían aparecer en situaciones más extraordinarias, como en la evaporación de agujeros negros. Si existieran campos definidos sobre un

cascarón cercano al horizonte de eventos, y este se estuviera achicando debido a la evaporación, estos efectos serían otro mecanismo de disipación de energía, que podría reducir la vida de los agujeros negros. Por supuesto, los cálculos realizados a este orden no son aplicables a esta situación, y serían necesarios cálculos numéricos para obtener el orden de magnitud de estos efectos. Pero como ya vimos, los mismos dependen de potencias de la curvatura del espacio, lo que indicaría que estos efectos serían relevantes cerca del horizonte de eventos.

Es interesante notar que utilizando la formula de Lichnerowicz se pueden utilizar estos cálculos para aplicarlos a modelos fermiónicos. En efecto, se sabe que a 1-loop la acción efectiva, luego de integrar fermiones, se calcula usando la siguiente traza

$$\text{Tr}[Ln[i\mathcal{D} + m]] = \frac{\text{Tr}[Ln[|i\mathcal{D} + m|^2]]}{2} = \frac{\text{Tr}[Ln[-\Delta + m^2 + \frac{R}{4}]]}{2},$$

donde se utilizó la fórmula de Lichnerowicz para relacionar la traza del operador de Dirac con la traza para el kernel de la acción bosónica. Vemos que esta traza es un caso particular de los estudiados en este capítulo, por lo que imponiendo $\epsilon = \frac{1}{4}$ en los cálculos del campo escalar, se están obteniendo resultados aplicables a campos fermiónicos. Esto puede ser de interés para observar este tipo de efectos en hojas de grafeno, en donde hay modos no masivos y otros de masa pequeña para los portadores de carga fermiónicos. De poder contraer y dilatar una hoja de grafeno de una forma similar a la dada por

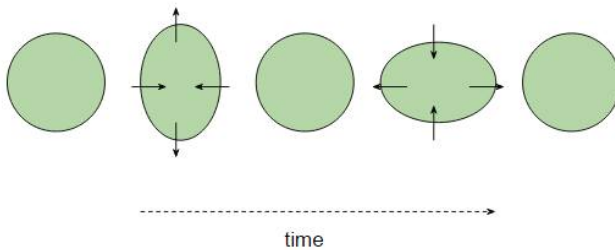


Figura 6.2: Esquema de dilataciones y contracciones que varían con el tiempo, desfasadas 90 una de la otra. Esto podría ser el efecto del modelo dado por 6.52.

6.52, tal vez se podrían observar este tipo de efectos. Un esquema de estas dilataciones y contracciones puede verse en la Fig. 6.2.

Se deja para trabajos en el futuro un estudio más general del caso masivo en $d + 1$ dimensiones, que puede ser de interés tanto en áreas teóricas como experimentales.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de Tesis de Maestría, se estudiaron efectos de borde asociados a la presencia de singularidades en teorías de campos. A su vez, también se estudiaron efectos disipativos inerciales asociados a la creación de pares de partículas. En este trabajo se re-obtuvieron resultados ya conocidos, así como también se obtuvieron algunos resultados que no fueron encontrados en la bibliografía.

En el Capítulo 1, se introdujeron algunos conceptos de teoría de campos con bordes y de geometría diferencial. En este capítulo se sentaron las bases para entender los resultados obtenidos en el resto de la tesis.

En el Capítulo 2 se re-obtuvieron resultados para energías de Casimir fermiónicas, en presencia de paredes perfectas e imperfectas. Se compararon ambos tipos de paredes en el cálculo de energías de Casimir de campos fermiónicos sin masa en $1 + 1$. Para ello, se introdujeron en dos paredes planas separadas una distancia L . Se concluyó que incluir singularidades en la acción clásica de los campos, impone condiciones de borde imperfectas sobre los mismos en cada pared. Además, se concluyó que para ciertos valores del acoplamiento de los campos con estas singularidades, se recuperan los resultados de imponer paredes perfectas utilizando los métodos convencionales con integrales de camino. Los resultados de esta sección ya fueron obtenidos en [22].

En el Capítulo 3, se bosonizó un modelo de Schwinger modificado, utilizando integrales de camino. En el mismo, se incluyeron interacciones con campos clásicos en la masa y la corriente de los fermiones, con dependencia espacial arbitraria. Estas nuevas interacciones se mapearon dentro de un modelo de Sine-Gordon modificado, en donde apareció una amplitud del coseno con dependencia espacial, y un nuevo argumento dentro del coseno también con dependencia espacial. Estas nuevas contribuciones están directamente asociadas con las interacciones con campos clásicos, incluidas en el modelo fermiónico original. Además, se estudió el caso particular en que estos nuevos campos clásicos sean singulares, aprovechando que este tipo de interacción impone condiciones de borde sobre paredes imperfectas. Se observó que si se introducen dos defectos que

interactúen con la corriente con el mismo acoplamiento, el modelo bosónico entre esas dos paredes imperfectas es el modelo de Sine-Gordon usual. Los resultados de este apartado pueden ser de utilidad para modelar bosones en presencia de defectos, como modelos de multisolitones, o juntas de Josephson.

En el Capítulo 4 se realizaron cálculos de la Anomalía Quiral en presencia de una pared, en $d+1$ dimensiones, y se obtuvieron valores de expectación de observables como la corriente inducida, y se obtuvieron formulas explícitas para el tensor de polarización de vacío y para el propagador de Dirac. Además, se compararon los efectos de imponer paredes perfectas e imperfectas sobre la anomalía quiral, y se encontró que la misma es independiente de la presencia de una pared de cualquiera de los dos tipos. Se utilizó este resultado para realizar cálculos exactos de el tensor de polarización de vacío, la corriente de gauge y el propagador de Dirac, a el orden más bajo no trivial en el campo de gauge de la teoría. Se encontró nuevamente que los resultados del Capítulo 2 para paredes imperfectas son ciertos. Esto se debe a que al imponer un cierto valor de la constante de acoplamiento con la singularidad, las correlaciones entre corrientes a ambos lados de la pared se anulan, recuperando las condiciones de una pared perfecta. Los resultados de este capítulo podrían ser de interés en sistemas de materia condensada, en donde obtener valores de expectación de teorías en presencia de defectos es de utilidad.

En el Capítulo 5 se generalizaron los resultados obtenidos en el Capítulo 4 para el propagador de Dirac. En este apartado, se obtuvieron resultados explícitos para el propagador en presencia de una singularidad definida sobre una hiper-superficie espacio-temporal, con dependencia no trivial en las coordenadas. Para ello, se introdujo un método llamado “Desarrollo en Derivadas”, que permite obtener resultados de un observable en términos de un desarrollo en derivadas de la hiper-superficie que define el defecto. Este método provee de una herramienta de utilidad para defectos con forma suave pero arbitrariamente grandes, ya que este desarrollo difiere de la usual expansión en potencias del apartamiento respecto de un plano, el cuál se suele suponer pequeño. Además, se estudió el caso particular en que esta singularidad tenga radio de curvatura pequeño y algunas propiedades de monotonía, para ser más específicos en las contribuciones a todo orden en derivadas del desarrollo. Los resultados obtenidos en este apartado podrían ser de utilidad para el cálculo de observables utilizando el propagador, como por ejemplo correlaciones a ambos lados de una pared curva en un sistema de materia condensada.

Finalmente, en el Capítulo 6 se estudiaron campos definidos sobre paredes con curvatura y dependencia temporal. En el límite de masa grande, se demostró que estos campos reproducen interacciones de tipo singular con campos en el exterior de estas paredes. Además, se demostró que si la variedad donde los campos están definidos tiene dependencia temporal, se producirían efectos disipativos asociados a la creación de pares de partículas, en el interior de estas paredes. Estos efectos tienen naturaleza

similar a otros como el Efecto Casimir Dinámico, donde se crean pares de fotones debido al movimiento acelerado de paredes. Se compararon dos métodos diferentes para calcular la amplitud de probabilidad de creación de pares debido a estos efectos. Para ello, se estudió la acción in-out de la métrica de estas variedades, y se realizaron cálculos de la parte imaginaria de esta acción utilizando la expansión de Magnus y una expansión a 1-loop en la interacción con la métrica. Se obtuvieron resultados para un campo escalar no masivo, acoplado no minimalmente a la curvatura en $d + 1$, y se concluyó que el método a 1-loop es el más adecuado para calcular estos efectos disipativos. Además, se realizaron estos cálculos para un campo escalar masivo con el mismo acoplamiento en $2 + 1$ dimensiones, por simplicidad. Los resultados de este apartado son de interés en el estudio de la dinámica de paredes a escala microscópica, ya que producen disipación de energía al igual que otros efectos, como el Efecto Casimir Dinámico.

Los resultados obtenidos a lo largo de esta tesis son un compendio de efectos de borde y de efectos disipativos. Algunos de los resultados obtenidos no fueron encontrados en la bibliografía. Los resultados obtenidos en todos los capítulos de la tesis podrían ser continuados y profundizados, analizando diferentes casos de condiciones de borde, incluyendo más defectos, o analizando diferentes dependencias temporales de la métrica del espacio-tiempo. Se deja para futuras investigaciones una generalización y un estudio más detallado de los resultados obtenidos aquí.

Apéndice A

Magnitudes de Geometría Diferencial - Implementación en Mathematica

En este apartado se adjunta el algoritmo utilizado para calcular magnitudes en Geometría Diferencial, que fue de utilidad para analizar diferentes métricas espacio-temporales al calcular efectos disipativos. Se deja al lector interesado el código implementado en Mathematica para realizar estos cálculos, con sus respectivos comentarios. El lector que desee explorar diferentes resultados para efectos disipativos, puede usar libremente del mismo.

Listing A.1: Implementación en Mathematica - Cálculo de magnitudes relevantes en geometría diferencial.

```
1  (* SE PUEDE CAMBIAR LA DIMENSION DEL ESPACIO-TIEMPO \
2  MODIFICANDO LA VARIABLE n EN TODAS LAS DEFINICIONES. *)
3  InverseMetric [g_] := Simplify[Inverse[g]]
4  ChristoffelSymbol [g_, xx_] :=
5  Block[{n, ig, res}, n = 4; ig = InverseMetric[g];
6  res = Table[(1/2)*
7  Sum[ig[[i,
8  s]]*(-D[g[[j, k]], xx[[s]]] + D[g[[j, s]], xx[[k]]] +
9  D[g[[s, k]], xx[[j]]]), {s, 1, n}, {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k,
10  1, n}];
11 Simplify[res]]
12 RiemannTensor[g_, xx_] :=
13 Block[{n, Chr, res}, n = 4; Chr = ChristoffelSymbol[g, xx];
14 res = Table[
15 D[Chr[[i, k, m]], xx[[l]]] - D[Chr[[i, k, l]], xx[[m]]] +
16 Sum[Chr[[i, s, l]]*Chr[[s, k, m]], {s, 1, n}] -
17 Sum[Chr[[i, s, m]]*Chr[[s, k, l]], {s, 1, n}, {i, 1, n}, {k, 1,
18  n}, {l, 1, n}, {m, 1, n}];
19 Simplify[res]]
```

```

20 RicciTensor[g_, xx_] :=
21 Block{{Rie, res, n}, n = 4; Rie = RiemannTensor[g, xx];
22 res = Table[Sum[Rie[[s, i, s, j]], {s, 1, n}], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
23 Simplify[res]]
24 RicciScalar[g_, xx_] :=
25 Block{{Ricc, ig, res, n}, n = 4; Ricc = RicciTensor[g, xx];
26 ig = InverseMetric[g];
27 res = Sum[ig[[s, i]] Ricc[[s, i]], {s, 1, n}, {i, 1, n}];
28 Simplify[res]]
29
30
31 xx = {t, r, \[Theta], \[Phi]}; (* NOMBRE DE LAS COORDENADAS *)
32 (* EN LAS COMPONENTES DE LA METRICA SE PUEDEN PONER FUNCIONES f[x] Y \
33 EL PROGRAMA HACE EL CALCULO SIMBOLICO. *)
34 (*EJEMPLO DE UNA METRICA *)
35 g = {{-(1 - 2 M/r), 0,
36 0, -2 J/r}, {0, (r^2)/(r^2 - 2 Mr + (J/M)^2), 0, 0}, {0, 0,
37 r^2, 0}, {-2 J/r, 0, 0, (r^2 + (J/M)^2 + (2 J^2)/(M r))}};
38 Print["SIMBOLOS_DE_CHRISTOFFEL"]
39 Print[Subscript[
40 Superscript[\[CapitalGamma], \[Alpha]], \[Mu]\[Nu], "="]
41 ChristoffelSymbol[g, xx]
42 Print[" TENSOR_DE_RIEMANN"]
43 Print[" R\[Mu]\[Nu]\[Rho]\[Sigma]="]
44 RiemannTensor[g, xx]
45 Print[" TENSOR_DE_RICCI"]
46 Print[" R\[Mu]\[Nu]="]
47 RicciTensor[g, xx]
48 Print[" CURVATURA_ESCALAR_DE_RICCI"]
49 Print[" R="]
50 RicciScalar[g, xx]
51 Print[" TENSOR_DE_EINSTEIN"]
52 Print[" G\[Mu]\[Nu]="]
53 EinsteinTensor = RicciTensor[g, xx] - (g/2) RicciTensor[g, xx]

```

Bibliografía

- [1] Araujo, P. T., Terrones, M., Dresselhaus, M. S. Defects and impurities in graphene-like materials. *Materials Today*, **15** (3), 98–109, 2012. URL [https://doi.org/10.1016/S1369-7021\(12\)70045-7](https://doi.org/10.1016/S1369-7021(12)70045-7). vii, 58
- [2] Garrett, J. L., Somers, D. A., Munday, J. N. Measurement of the casimir force between two spheres. *Physical review letters*, **120** (4), 040401, 2018. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.040401>. vii, 61
- [3] Bilić, N., Nikolić, H. Self-gravitating bosons at nonzero temperature. *Nuclear Physics B*, **590**(3), 575–595, 2000. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2012/01/020>. 1
- [4] Einhorn, M. B., Jones, D. R. T. Comment on fujikawa’s path-integral derivation of the chiral anomaly. *Physical Review D*, **29**(2), 331, 1984. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.29.331>. 4
- [5] Ball, R. D. Chiral gauge theory. *Physics Reports*, **182**(1-2), 1–186, 1989. URL [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(89\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(89)90027-6). 4
- [6] Müller, J., Müller, W. Regularized determinants of laplace-type operators, analytic surgery, and relative determinants. *Duke Mathematical Journal*, **133**(2), 259–312, 2006. URL <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-06-13323-9>. 4
- [7] Vassilevich, D. V. Heat kernel expansion: user’s manual. *Physics reports*, **388**(5-6), 279–360, 2003. URL <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2003.09.002>. 5, 7
- [8] Branson, T. P., Gilkey, P. B. The asymptotics of the laplacian on a manifold with boundary. *Communications in partial differential equations*, **15**(2), 245–272, 1990. URL <https://doi.org/10.1080/03605309908820686>. 6
- [9] Marachevsky, V. N. Chiral anomaly for local boundary conditions. *Nuclear Physics B*, **677**(3), 535–552, 2004. URL <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.11.009>. 6

- [10] Zinn-Justin, J. Quantum field theory and critical phenomena. *Clarendon Press, Oxford.*, **113**, 2002. 8, 9, 23, 24, 25, 26, 37, 39
- [11] Naón, C. M. Abelian and non-abelian bosonization in the path-integral framework. *Physical Review D.*, **31**, 229–238, 1985. URL http://dx.doi.org/10.1142/9789812812650_0022. 8, 22
- [12] Fosco, . S. A., C. D. Chiral anomaly, induced current, and vacuum polarization tensor for a dirac field in the presence of a defect. *Physics Letters B*, **822**, 136659, 2021. URL <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136659>. 10, 46, 93
- [13] Ivorra Castillo, C. Geometría diferencial. 2012. URL <http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1504>. 10
- [14] Giblin Jr, J. T., Mertens, J. B., Starkman, G. D., Tian, C. Limited accuracy of linearized gravity. *Physical Review D*, **99** (2), 023527, 2019. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.023527>. 11
- [15] Rahaman, F. The General Theory of Relativity: A Mathematical Approach. Cambridge University Press, 2021. URL <https://doi.org/10.1017/9781108837996.005>. 11
- [16] Blanes, S., Casas, F., Oteo, J.-A., Ros, J. The magnus expansion and some of its applications. *Physics reports*, **470** (5-6), 151–238, 2009. URL <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.11.001>. 11, 12
- [17] Klarsfeld, S., Oteo, J. The baker-campbell-hausdorff formula and the convergence of the magnus expansion. *Journal of physics A: mathematical and general*, **22** (21), 4565. URL <https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/21/018>. 12
- [18] Iserles, A., Nørsett, S., Rasmussen, A. Time symmetry and high-order magnus methods. *Applied numerical mathematics*, **39** (3-4), 379–401, 2001. URL [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(01\)00088-5](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00088-5). 12
- [19] Blanes, S., Casas, F., Oteo, J., Ros, J. A pedagogical approach to the magnus expansion. *European Journal of Physics*, **31** (4), 907, 2010. URL <https://doi.org/10.1088/0143-0807/31/4/020>. 12
- [20] Bordag, M. U., M., Mostepanenko, V. M. New developments in the casimir effect. *Physics reports*, **353**(1-3), 1–205, 2001. URL [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00015-1](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00015-1). 13
- [21] Losada, E. L. Teoría de campos en variedades con singularidades. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Cuyo, 2007. URL <http://ricabib.cab.cnea.gov.ar/262/>. 14

- [22] Fosco, C., Losada, E. Functional approach to the fermionic casimir effect. *Physical Review D*, **78** (2), 025017, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.025017>. 14, 16, 17, 18, 34, 81
- [23] Weisstein, E. W. Polylogarithm. <https://mathworld.wolfram.com/>, 2002. 17
- [24] Fosco, C., Lopez, A. Dirac fermions and domain wall defects in 2+ 1 dimensions. *Nuclear Physics B*, **538** (3), 685–700, 1999. URL [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00733-0](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00733-0). 18, 34
- [25] Fosco, C., Lombardo, F., Mazzitelli, F. Quantum dissipative effects in moving mirrors: A functional approach. *Physical Review D*, **76** (8), 085007, 2007. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.085007>. 18
- [26] Fosco, C. D., Giraldo, A., Mazzitelli, F. D. Dynamical casimir effect for semitransparent mirrors. *Physical Review D*, **96** (4), 045004. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.045004>. 18
- [27] Stone, M. Bosonization. *World Scientific*, 1994. 19
- [28] Fradkin, E. Field theories of condensed matter physics. *Cambridge University Press*, 2013. 19, 20
- [29] Burgess, L. C. A., C. P., Quevedo, F. Bosonization in higher dimensions. *Physics Letters B*, **336**(1), 18–24, 1994. URL [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)00963-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)00963-5). 19
- [30] Cuevas-Maraver, K. P. G., J., Williams, F. The sine-gordon model and its applications. *Nonlinear Systems and Complexity (Switzerland: Springer)*, 2014. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06722-3>. 20
- [31] Wightman, A. S. Quantum field theory and analytic functions of several complex variables. *Indian Mathematical Society*, 1960. URL <https://doi.org/10.18311/jims/1960/16936>. 21
- [32] Hong-Hao, K.-X. F. S.-W. Q. A. Z., Z., Xue-Song, L. On analytic formulas of feynman propagators in position space. *Chinese Physics C*, **34**(10), 1576, 2010. URL <https://doi.org/10.1088/1674-1137/34/10/005>. 23
- [33] Balasin, K. W.-P. O., H., Schweda, M. *Physics Letters B*, **287**(1-3), 138–144, 1992. URL [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(92\)91889-H](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91889-H). 23
- [34] Gattringer, C., Lang, C. Quantum chromodynamics on the lattice: an introductory presentation. *Springer Science Business Media*, **788**, 2009. 25

- [35] Schiebold, C. Cauchy-type determinants and integrable systems. *Linear algebra and its applications*, **433(2)**, 447–475, 2010. URL <https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.03.011>. 26
- [36] Zhang, F. Breather scattering by impurities in the sine-gordon model. *Physical Review E*, **58(2)**, 2558, 1998. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.2558>. 29
- [37] Fuentes, M., Lopez, A., Fradkin, E., Moreno, E. Bosonization rules in 12+ 1 dimensions. *Nuclear Physics B*, **450** (3), 603–640, 1995. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00224-G](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00224-G). 29
- [38] Takacs, G., Wagner, F. Double sine-gordon model revisited. *Nuclear Physics B*, **741(3)**, 353–367, 2006. URL <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.02.004>. 30
- [39] Liguori, A., Mintchev, M. Quantum field theory, bosonization and duality on the half line. *Nuclear Physics B*, **522** (1-2), 345–372, 1998. URL [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00823-2](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00823-2). 30
- [40] Gumerov, A. M., Kudryavtsev, R. V., Ekomasov, E. G. Dynamics of the multi-soliton waves in the sine-gordon model with two identical point impurities. *arXiv preprint arXiv:1702.06987*, 2017. URL <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1702/1702.06987.pdf>. 31
- [41] Inoue, T., Maskawa, T. Bag theory with the dirichlet boundary conditions and spontaneous symmetry breakdown. *Progress of Theoretical Physics*, **54(6)**, 1833–1847, 1975. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.54.1833>. 33
- [42] Basilakos, M. N. E., S., Peracaula, J. S. *Physical Review D*, **101(4)**, 045001, 2020. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.045001>. 33
- [43] Bernstein, A. M., Holstein, B. R. Neutral pion lifetime measurements and the qcd chiral anomaly. *Reviews of Modern Physics*, **85(1)**, 49, 2013. URL <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.49>. 34
- [44] Schwartz, M. D. Quantum field theory and the standard model. *Cambridge University Press*, 2014. 34
- [45] Nakahara, M. Geometry, topology and physics. *CRC press*, 2003. 34
- [46] Park, J.-H. Lecture note on clifford algebra. *Modave Summer School in Mathematical Physics, Belgium*, 2005. URL <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.519.7273&rep=rep1&type=pdf>. 34

- [47] Fosco, C., Lombardo, F., Mazzitelli, F. Casimir effect with dynamical matter on thin mirrors. *Physics Letters B*, **669** (5), 371–375, 2008. URL <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.10.004>. 34
- [48] Greiner, S. S., W., Stein, E. Quantum chromodynamics. *Springer Science Business Media*, 2007. 37
- [49] Nagashima, Y., Nagashima, Y. Elementary particle physics. *Wiley-Vch*, **1**, 2010. 38
- [50] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Proximity force approximation for the casimir energy as a derivative expansion. *Physical Review D*, **84** (10), 105031, 2011. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.105031>. 50
- [51] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Derivative expansion for the casimir effect at zero and finite temperature in $d+1$ dimensions. *Physical Review D*, **86** (4), 045021, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.045021>. 50, 58
- [52] Huang, W.-M., Tang, J.-M., Lin, H.-H. Power-law singularity in the local density of states due to the point defect in graphene. *Physical Review B*, **80** (12), 121404, 2009. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.121404>. 58
- [53] Dodonov, V. Fifty years of the dynamical casimir effect. *Physics*, **2** (1), 67–104, 2020. URL <https://doi.org/10.3390/physics2010007>. 59
- [54] Faccio, D., Carusotto, I. Dynamical casimir effect in optically modulated cavities. *EPL (Europhysics Letters)*, **96** (2), 24006, 2011. URL <https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/24006>. 59
- [55] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Inertial forces and dissipation on accelerated boundaries. *Physical Review D*, **82** (12), 125039, 2010. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.125039>. 60, 72, 78
- [56] Kirsten, K., McKane, A. J. Functional determinants for general sturm–liouville problems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37** (16), 4649, 2004. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/37/16/014/meta>. 63, 66
- [57] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. A magnus approximation approach to harmonic systems with time-dependent frequencies. *Annals of Physics*, **399**, 258–269, 2018. URL <https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.10.016>. 65, 66

-
- [58] Avramidi, I. G. A covariant technique for the calculation of the one-loop effective action. *Nuclear Physics B*, **355** (3), 712–754, 1991. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(91\)90492-G](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90492-G). 68
- [59] Dipierro, S., Grunau, H.-C. Boggio’s formula for fractional polyharmonic dirichlet problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, **196** (4), 1327–1344, 2017. URL <https://doi.org/10.1007/s10231-016-0618-z>. 72
- [60] Saulson, P. R. If light waves are stretched by gravitational waves, how can we use light as a ruler to detect gravitational waves? *American Journal of Physics*, **65** (6), 501–505, 1997. URL <https://doi.org/10.1119/1.18578>. 74

Publicaciones asociadas

Una ampliación de los resultados obtenidos en el Capítulo 4 fue publicado en Physics Letters B [\[12\]](#).

Agradecimientos

El primer agradecimiento necesariamente tiene que ser para mi familia, quienes me tuvieron trabajando durante los últimos dos años al lado del lavadero de mi casa. Sin su apoyo no podría haber logrado nada de todo esto. A ellos más que a nadie, hoy les digo gracias.

Me gustaría agradecer también a mis amigos y a mi novia, quienes me acompañaron durante este largo trayecto hasta recibirme, con incontables momentos y risas que me ayudaron a pasar esta etapa.

Por supuesto, quisiera agradecer a mi supervisor, César, quien siempre estuvo disponible incluso a cientos de kilómetros, para responderme preguntas y colaborar, o para charlar sobre muchas cosas, haciendo todo este trabajo mucho mas ameno.

Por último, me gustaría agradecer al Instituto Balseiro. De no haber tenido sus increíbles profesores y su apoyo económico, me hubiera sido imposible formarme académicamente con la calidad que lo hice.

