

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

**CÁLCULO DEL EQUILIBRIO MHD A PARTIR DE
INFORMACIÓN EXPERIMENTAL EN TOKAMAKS
AVANZADOS**

Ing. Nicolás Morgan
Maestrando

Dr. Pablo García Martínez
Director

Dr. Ricardo Farengo
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Enzo Dari (Instituto Balseiro)
Dr. Federico Halpern (General Atomics)
Dr. José González (Instituto Balseiro)

9 de Octubre de 2022

Sección Fusión Nuclear Controlada y Física de Plasmas
Gerencia de Física
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Para Anne.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xv
Resumen	xvii
Abstract	xix
1. Dispositivos de confinamiento	1
1.1. Fusión nuclear	1
1.1.1. Plasmas de ignición	2
1.2. Confinamiento magnético	3
1.3. Configuraciones toroidales	4
1.3.1. Tokamak	4
1.3.2. RFP	6
1.3.3. Stellarator	8
1.3.4. FRC	9
1.3.5. Spheromak	11
1.4. Confinamiento inercial	12
1.5. Confinamiento gravitatorio	13
1.6. Motivación	13
2. Introducción al modelo magnetohidrodinámico	15
2.1. Ecuaciones del modelo	15
2.2. Conservación de flujo	17
2.3. Corrientes de confinamiento	18
2.4. Validez del modelo ideal	20
3. Características del equilibrio magnetohidrodinámico en tokamaks	21
3.1. Ecuación de Grad-Shafranov	21

3.2.	Coordenadas de flujo	22
3.3.	Parámetros y perfiles del plasma	23
3.3.1.	Parámetros geométricos	24
3.3.2.	Corrimiento de Shafranov	25
3.3.3.	Campo magnético externo	25
3.3.4.	Factor de mérito β	25
3.3.5.	Corriente total	26
3.3.6.	Factor de seguridad q	26
3.3.7.	Ángulo de inclinación magnético	27
3.3.8.	Radio medio normalizado	28
3.4.	Aspectos de la operación	28
3.4.1.	Métodos de calentamiento	28
3.4.2.	Modos de confinamiento	29
3.5.	Escenarios de operación	31
3.5.1.	Escenario inductivo	31
3.5.2.	Escenario híbrido	32
3.5.3.	Escenario avanzado	32
3.6.	Inestabilidades	32
3.6.1.	Tearing modes	32
3.6.2.	Kink modes	33
3.6.3.	Vertical displacement event	34
3.6.4.	Edge Localized Modes	34
3.6.5.	Inestabilidad de sawtooth	34
4.	Resolución del equilibrio magnetohidrodinámico con frontera fija	37
4.1.	Planteo del problema diferencial	37
4.1.1.	Adimensionalización	38
4.1.2.	Normalización	38
4.1.3.	Densidad de corriente en la separatriz	39
4.2.	Solución del problema directo	40
4.2.1.	Formulación variacional	40
4.2.2.	Método de Newton-Raphson	41
4.2.3.	Problema lineal	42
4.3.	Problema inverso a partir de la relación de flujos	43
4.3.1.	Promediado en superficies de flujo	44
4.3.2.	Ecuación de G-S promediada	44
4.3.3.	Determinación de las funciones arbitrarias	45
4.3.4.	Determinación del equilibrio a partir del factor de seguridad	45
4.4.	Determinación del equilibrio a partir del ángulo del campo magnético	46

5. Análisis de escenarios de operación en tokamaks avanzados	51
5.1. Características de los escenarios	51
5.2. Cálculo del equilibrio mediante el q -solver	54
5.2.1. Corrimiento de Shafranov	59
5.2.2. Densidad de corriente en la separatriz	62
5.2.3. Perfiles dato de $\gamma(R)$	64
6. Cálculo del equilibrio a partir del ángulo de inclinación magnético	67
6.1. Resultados	67
6.2. Resolución de los equilibrios con imposición de $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ para el q -solver	74
6.3. Densidad de corriente en la separatriz	75
6.4. Cálculo del equilibrio con perfiles de presión imprecisos	77
7. Conclusiones y trabajos futuros	83
7.1. Objetivo	83
7.2. Casos de estudio	83
7.3. Resultados	84
7.4. Trabajos futuros	85
Bibliografía	87
Agradecimientos	93

Índice de figuras

1.1.	(a) A primer orden, las partículas cargadas se mueven siguiendo las líneas del campo magnético externo. (b) La forma más simple de producir una configuración cerrada de campo magnético es mediante un toroide. En un tokamak, el campo principal va en la dirección toroidal y es producido externamente, mientras que la componente poloidal se genera al inducir una corriente.	3
1.2.	Esquema de la dinámica de una partícula atrapada en un espejo magnético.	3
1.3.	Esquema de un reactor tokamak [1]. Posee bobinas que rodean al plasma en dirección poloidal para generar el campo magnético toroidal. El reactor utiliza al plasma como el circuito secundario de un transformador, lo que genera una corriente en sentido toroidal dentro del plasma, que a su vez genera el campo poloidal. De este modo se generan los campos magnéticos que confinan al plasma. Las bobinas de campo vertical evitan que el plasma se expanda demasiado y sirven para controlar la posición y la forma del toroide.	5
1.4.	Evolución del récord del valor del triple producto en tokamaks [2].	6
1.5.	Esquema de los campos magnéticos en un plasma confinado por RFP, esquematizados por las líneas negras [3].	7
1.6.	Evolución del valor récord del triple producto a lo largo de los años en reactores RFP [2].	7
1.7.	Esquema de un reactor tipo stellarator, específicamente del reactor Wendelstein 7-X [4].	8
1.8.	Evolución del valor récord de L_n a lo largo de los años en reactores stellarator [2].	8
1.9.	Esquema de una configuración FRC [3]. Las líneas de campo magnético se denotan con verde y la flecha roja indica la dirección de la corriente. Esta configuración no posee un campo magnético toroidal.	9
1.10.	Evolución del valor del triple producto récord a lo largo de los años en reactores FRC [2].	10

1.11. Funcionamiento del dispositivo FRX-L [5]. En un primer paso se genera una configuración FRC, que luego es trasladada a otra cámara en donde se comprime al plasma de manera adiabática, en pos de generar condiciones para la fusión.	10
1.12. Gráfico del choque de 2 configuraciones FRC en el dispositivo construido por Helion Energy [6].	11
1.13. Esquema del plasma confinado en un reactor spheromak [7].	11
1.14. Evolución del valor record del triple producto a lo largo de los años en reactores spheromak [2].	12
1.15. Esquema del proceso de calentamiento, implosión y fusión de una pastilla [3]. Una vez que se calienta la superficie de la pastilla, al volatilizarse aplica una gran presión a los reactivos, aumentando su densidad. Si se dan las condiciones necesarias para la ignición, ocurren reacciones de fusión autosustentadas y la pastilla libera una gran cantidad de energía.	13
3.1. Esquema de superficies magnéticas toroidales concéntricas [1]. Cada contorno está definido por un valor constante de Ψ , y cualquier cantidad de flujo puede utilizarse como coordenada.	23
3.2. Sección transversal de una descarga típica en un reactor tokamak, con perfil en forma de D. En este caso el reactor posee un divertor, que está situado debajo de la zona en donde las líneas de campo de la separatriz se cruzan entre sí [1, 8].	24
3.3. Corte transversal de una descarga de plasma en un reactor tokamak [9]. La descarga de la izquierda no posee un punto x, mientras que la de la derecha si lo posee.	24
3.4. Esquema de las líneas de campo en una descarga. El factor de seguridad q se puede asociar a la cantidad de “vueltas” que da una línea de campo en sentido toroidal por cada vuelta que da en sentido poloidal.	27
3.5. Esquema de las posibles localizaciones del haz de partículas neutras respecto al plasma.	29
3.6. Maqueta 3D de los cañones de haces del tokamak diseñado en el proyecto ITER. Se pueden apreciar las distintas orientaciones de los cañones, lo que permite incidir los haces de iones en diferentes ángulos.	29
3.7. Diferencia en el perfil de presión entre los modos L y H. Se observa un pedestal de presión cerca de la separatriz del plasma en el modo H, a diferencia del modo L [8].	30
3.8. Diferentes perfiles del factor de seguridad q , catalogados por la cantidad de reversed magnetic shear que poseen [10].	30

3.9. Comparación esquemática de perfiles de presión entre los distintos modos de confinamiento [11].	31
3.10. Esquemización de islas magnéticas [8]. Las líneas de campo magnético se quiebran y se reconectan formando “islas” que aumentan el transporte dentro del plasma.	33
3.11. Foto de un plasma confinado toroidalmente, en donde se puede observar una inestabilidad de kink externa. Las zonas en donde el campo magnético se comprime aumenta la presión, lo que deforma al plasma comprimiendo aún más al campo.	34
3.12. Medición de la temperatura en la zona central de una descarga realizada en el reactor DIII-D [12]. Se puede observar el comportamiento periódico de la temperatura, donde esta cae abruptamente para luego volver a elevarse, de manera periódica.	35
5.1. Perfil de $p(\rho)$ y $ p'(\rho) $ diseñados para el escenario inductivo.	53
5.2. Perfil de $p(\rho)$ y $ p'(\rho) $ diseñados para el escenario híbrido.	53
5.3. Perfil de $p(\rho)$ y $ p'(\rho) $ diseñados para el escenario avanzado.	54
5.4. Perfiles de $q(\rho)$ diseñados para cada escenario de operación.	54
5.5. Evolución del residuo en cada iteración del RHS para cada escenario, utilizando el q -solver.	55
5.6. Comparación entre los perfiles de $q(\rho)$ dato y obtenidos en cada escenario mediante el q -solver.	56
5.7. Perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ finales calculados para cada escenario, mediante el q -solver. Se puede observar que su estructura funcional es compleja, lo que dificulta la capacidad de estimar estos perfiles para resolver la ecuación de G-S directamente, en un equilibrio realista.	56
5.8. Perfiles de $\frac{dp}{d\psi}$ finales calculados para cada escenario, mediante el q -solver. Similar a los perfiles de $f\frac{df}{d\psi}$, los perfiles pueden resultar complejos funcionalmente, teniendo las mismas dificultades para su estimación <i>a priori</i>	57
5.9. Comparación de perfiles de $J(R)$ entre escenarios, calculados en el plano ecuatorial mediante el q -solver.	57
5.10. Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario inductivo, utilizando el q -solver.	58
5.11. Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario híbrido, utilizando el q -solver.	58
5.12. Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario avanzado, utilizando el q -solver.	59

5.13. Valores obtenidos de Δ_s para ciertos valores de p_0 en cada escenario elegido. Los valores de p_0 van desde 0 hasta el valor máximo antes de que la solución no converja, según sea el caso.	60
5.15. Perfiles de $J(R)$ del escenario híbrido para distintos valores de p_0 . Los valores utilizados son $p_0 = 0$, la mitad del valor máximo de p_0 antes de que el solver deje de converger y el valor máximo alcanzado.	60
5.14. Perfiles de $J(R)$ del escenario inductivo para distintos valores de p_0 . Los valores utilizados son $p_0 = 0$, la mitad del valor máximo de p_0 antes de que el solver deje de converger y el valor máximo alcanzado.	61
5.16. Perfiles de $J(R)$ del escenario avanzado para distintos valores de p_0 . Los valores utilizados son $p_0 = 0$, la mitad del valor máximo de p_0 antes de que el solver deje de converger y el valor máximo alcanzado.	61
5.17. Perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ calculados, imponiendo la nulidad en la separatriz mediante la ecuación 5.3, utilizando el q -solver.	62
5.18. Comparación de perfiles de $J(R)$ entre escenarios, calculados en el plano ecuatorial, con la imposición de $\mathbf{J} = 0$ en la separatriz.	63
5.19. Comparación de perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para cada escenario, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz, utilizando el q -solver.	63
5.20. Ampliación de la figura 5.19 cerca de la separatriz e incluyendo valores de $q(\rho)$ por encima de q_{95}	64
5.21. Perfiles de $\gamma(R)$ obtenidos de cada equilibrio, calculados mediante el q -solver.	65
6.1. Evolución de parámetros numéricos del escenario inductivo. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.	68
6.2. Evolución de parámetros numéricos del escenario híbrido. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.	68
6.3. Evolución de parámetros numéricos del escenario avanzado. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.	69
6.4. Comparación de perfiles de $\gamma(R)$ dato y calculados para cada escenario.	70

6.5. Perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ calculados en cada escenario. Nótese que tienden a 0 para $\psi = 0$, lo que indica que \mathbf{J} se anula en la separatriz. Este resultado es una característica del γ -solver.	70
6.6. Perfiles de $\frac{dp}{d\psi}$ calculados en cada escenario.	71
6.7. Comparación de perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para cada escenario, utilizando el γ -solver.	72
6.8. Comparación de perfiles de $J(R)$ entre escenarios, calculados en el plano ecuatorial mediante el γ -solver.	72
6.9. Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario inductivo, utilizando el γ -solver.	73
6.10. Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario híbrido, utilizando el γ -solver.	73
6.11. Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario avanzado, utilizando el γ -solver.	74
6.12. Comparación de perfiles de $\gamma(R)$ dato y calculados para cada escenario, habiendo forzado $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en el q -solver para la obtención de los perfiles dato.	74
6.13. Comparación de perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para cada escenario, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz, utilizando el γ -solver.	75
6.14. Comparación del perfil de $J(R)$ cerca de la separatriz de distintas soluciones del escenario inductivo, comentadas en la lista de la sección 6.3, junto con el perfil de la solución lineal	77
6.15. Perfiles de $p(\rho)$ del escenario híbrido modificados.	78
6.16. Evolución de parámetros numéricos del escenario híbrido, con la modificación 1. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.	79
6.17. Evolución de parámetros numéricos del escenario híbrido, con la modificación 2. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.	79
6.18. Comparación de perfiles de $q(\rho)$ calculados mediante el γ -solver, entre el perfil dato y los perfiles calculados con los escenarios modificados. . .	80
6.19. Comparación de perfiles de $J(R)$ entre el escenario híbrido calculado mediante el q -solver, y los escenarios modificados calculados con el γ -solver. .	81

Índice de tablas

5.1. Características de los escenarios planeados para el proyecto ITER, publicados por Shimada <i>et al.</i> [10]. ^a : Delimitado por las capacidad de enfriamiento de las bobinas.	51
5.2. Dimensiones del reactor del proyecto ITER [10].	52
5.3. Valores de los parámetros utilizados en los perfiles de $q(\rho)$ y $p(\rho)$ elegidos.	52
5.4. Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado por medio del q -solver.	55
5.5. Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz mediante el q -solver.	64
6.1. Valores mínimos de residuos obtenidos para cada escenario, por medio del γ -solver.	71
6.2. Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado, por medio del γ -solver.	71
6.3. Valores mínimos de residuos obtenidos para cada escenario, por medio del γ -solver.	75
6.4. Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz mediante el γ -solver.	75
6.5. Valores de los parámetros utilizados en los perfiles de $p(\rho)$ elegidos para el escenario híbrido, en pos de analizar la variabilidad de la solución frente a perfiles de presión imprecisos.	78
6.6. Valores mínimos de residuos obtenidos para el escenario híbrido y sus modificaciones, así como la diferencia entre, por medio del γ -solver.	80
6.7. Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre el perfil dato y los escenarios híbridos modificados, mediante el γ -solver.	80

Resumen

La tecnología para obtener energía aprovechable de la fusión de núcleos livianos se encuentra aún en desarrollo. Si bien este tipo de reacciones se han logrado en el laboratorio hace muchos años, aún no se ha logrado fabricar un reactor capaz de liberar más potencia producida por fusión que la necesaria para mantener las condiciones requeridas, en forma estacionaria o casi-estacionaria. El próximo paso en esta carrera tecnológica es la construcción de ITER (*International Thermonuclear Reactor*) que, usando un plasma producido por una configuración tipo tokamak, ha sido diseñado para liberar una potencia de fusión diez veces mayor que la potencia de calentamiento requerida para mantener las condiciones del plasma que forman los reactivos. Para lograr este objetivo, se requiere lograr un plasma con buena estabilidad en las condiciones que permiten una cantidad de reacciones de fusión suficientemente grande. Para lograr esto se debe tener un modelo preciso del plasma y su estructura interna y un buen sistema de control de sus perfiles, entre otros requisitos. La mayoría de este tipo de modelos requieren como insumo la configuración de campo en estado de equilibrio de fuerzas magnetohidrodinámicas (equilibrio MHD). De los numerosos métodos y códigos para resolver el equilibrio MHD que existen a día de hoy, la mayoría lo hacen partiendo de información que no se puede obtener directamente en forma experimental. Para obtener la configuración magnética en la práctica se recurren a códigos de reconstrucción del equilibrio que resuelven una aproximación linealizada del problema y ajustan parámetros para aproximar lo mejor posible una serie de observables (problema de minimización con restricciones). Aunque esta estrategia permite describir adecuadamente los campos en experimentos actuales, su adaptación al diseño de escenarios y estrategias de control en plasmas con nuevas condiciones puede volverse un factor limitante.

En esta tesis se introduce un esquema numérico para obtener la configuración de campo magnético de equilibrio MHD en tokamaks, y configuraciones axisimétricas en general, a partir de información experimental. La información requerida es una estimación del perfil de presión en función del radio menor del toroide y el perfil radial de ángulo de inclinación del campo magnético en el plano ecuatorial. El perfil de presión se puede inferir a partir de la emisión de ciclotrón de los electrones del plasma, mientras que el ángulo del campo magnético se determina rutinariamente mediante una técnica denominada *Motional Stark Effect* (MSE). A partir de esta información, el esquema ite-

rativo propuesto permite obtener y resolver la ecuación diferencial de Grad-Shafranov que describe el equilibrio. Para la resolución de este problema inverso, se emplea una secuencia de problemas diferenciales no lineales de segundo orden, que se aproximan mediante el método de elementos finitos. Además de introducir y validar el esquema numérico, se analiza la estructura y distribución de corrientes en los escenarios de operación previstos para ITER.

Palabras clave: TOKAMAKS, EQUILIBRIO MAGNETOHIDRODINÁMICO, ELEMENTOS FINITOS

Abstract

The technology to obtain usable energy from the fusion of light nuclei is still under development. Although these types of reactions have been achieved in the laboratory for many years, it has not yet been possible to manufacture a reactor capable of releasing more power produced by fusion than is necessary to maintain the required conditions, in a stationary or quasistationary manner. The next step in this technological race is the construction of ITER (International Thermonuclear Reactor) which, using a plasma produced by a tokamak-type configuration, has been designed to release a fusion power ten times greater than the heating power required to maintain the plasma conditions that form the reactants. To achieve this goal, it is required to achieve a plasma with good stability under conditions that allow a sufficiently large number of fusion reactions. For this reason it is necessary to have an accurate model of the plasma and its internal structure and a good control system for its profiles, among other requirements. Most of this type of models require as input the configuration of the field in equilibrium state of magnetohydrodynamic forces (MHD equilibrium). Of the numerous methods and codes to solve the MHD equilibrium that exist today, most do so starting from information that cannot be directly obtained experimentally. To obtain the magnetic configuration in practice, equilibrium reconstruction codes are used that solve a linearized approximation of the problem and adjust parameters to best approximate a series of observables (constrained minimization problem). Although this strategy allows adequately describing the fields in current experiments, its adaptation to the design of scenarios and control strategies in plasmas with new conditions can become a limiting factor.

In this thesis, a numerical scheme is introduced to obtain the equilibrium magnetic field configuration MHD in tokamaks, and axisymmetric configurations in general, from experimental information. The information required is an estimate of the pressure profile as a function of the minor radius of the toroid and the radial profile of the angle of inclination of the magnetic field in the equatorial plane. The pressure profile can be inferred from the cyclotron emission of plasma electrons, while the magnetic field angle is routinely determined by a technique called Motional Stark Effect (MSE). From this information, the proposed iterative scheme allows obtaining and solving the Grad-Shafranov differential equation that describes the equilibrium. To solve this inverse

problem, a sequence of second-order nonlinear differential problems is used, which are approximated using the finite element method. In addition to introducing and validating the numerical scheme, the structure and distribution of currents in the operation scenarios foreseen for ITER are analyzed.

Keywords: TOKAMAKS, MAGNETOHYDRODINAMIC EQUILIBRIUM, FINITE ELEMENTS

Capítulo 1

Dispositivos de confinamiento

“And as great as all this might be, it would be even more fruitful still if one would develop the perception of impermanence just for the time it takes to snap one’s fingers.”

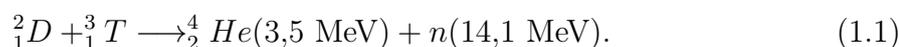
— Buddha, “In the Buddha’s words”, Bhikkhu Bodi, 2005.

1.1. Fusión nuclear

Así como la fisión de núcleos con elevado número atómico (como el uranio) libera productos de la reacción con un exceso de energía que puede aprovecharse mediante reactores nucleares (de fisión), la fusión de núcleos más livianos que el hierro también es energéticamente conveniente. El proceso de fusión nuclear se da naturalmente en el interior de las estrellas, donde la atracción gravitatoria de una gran cantidad de materia genera las condiciones adecuadas para este proceso.

Como fuente de producción de energía eléctrica, un reactor basado en la fusión nuclear de núcleos livianos presenta una serie de ventajas respecto a la fisión. Por su alta densidad de energía, un reactor de fusión no tendría riesgo de accidente severo ya que requiere pocos gramos de combustible. Por otro lado, la producción de material radioactivo es mínima y se trata de isótopos con vidas medias de pocos años. Además de los aspectos de seguridad, la disponibilidad de combustible en la naturaleza es ilimitado a los fines prácticos y la producción de gases de efecto invernadero es mínima, lo que la convierte en una alternativa sustentable a largo plazo [13]. Comparado con fuentes de energía renovables, como solar y eólica, un reactor de fusión presenta la ventaja de tener un bajo requerimiento de uso de suelo, de forma que reduce al mínimo la competencia con otras actividades centrales para la humanidad como la producción de alimentos, la protección de la biodiversidad y el funcionamiento de los ecosistemas.

En la fusión de un núcleo de deuterio y uno de tritio se forma una partícula alfa y un neutrón. El exceso de energía de ligadura es 17.6 MeV, es decir, que la liberación de energía por nucleón es superior a tres veces la energía liberada en promedio por la fisión del U235. Más precisamente, la energía liberada en la reacción D-T es,



La principal dificultad para lograr y sostener esta reacción es la barrera coulombiana de repulsión mutua, debida a la carga positiva de los dos reactivos. Esto se traduce

en que la sección eficaz de reacción es casi nula a bajas temperaturas. Sin embargo, a medida que aumenta la energía de las partículas la sección eficaz aumenta, alcanzando un máximo a 100 keV (1 eV \sim 11000 K). Si bien es relativamente simple impartir esta energía a los iones intervinientes en la reacción mediante aceleradores, no es posible lograr por este camino un balance energético que permita extraer energía aprovechable. Por eso, la gran mayoría de los esfuerzos orientados al desarrollo de reactores de fusión se basan en un plasma termalizado de alta temperatura, como medio ambiente para lograr suficientes reacciones nucleares. El desempeño de un plasma en cuanto a la liberación de potencia producida por la reacción nuclear se mide en términos del factor de ganancia,

$$Q = \frac{P_{fus}}{P_{ext}}, \quad (1.2)$$

donde, P_{fus} representa la potencia liberada por las reacciones de fusión y P_{ext} representa la potencia de fuentes de energía externas que es necesario suministrar al plasma para mantener las condiciones necesarias para que se produzca la fusión. La condición límite $Q = 1$, es decir, que se inyecta una potencia de calentamiento externo igual a la potencia que liberan las reacciones de fusión, se denomina condición de *breakeven*

1.1.1. Plasmas de ignición

Si consideramos la reacción 1.1, vemos que un 20% de la energía liberada por la reacción se la lleva la partícula alfa. A diferencia del neutrón, que escapa casi libremente del plasma y debe ser capturado por un moderador fuera de la cámara donde se confina el plasma, la partícula alfa queda confinada junto con el combustible depositando su exceso de energía en el plasma. Por este motivo, otro valor de referencia es para el factor de ganancia es $Q = 5$, en el que la potencia externa es comparable a la potencia que depositan las alfa producto de la reacción. A partir de este valor, cuando el plasma se calienta más a sí mismo que lo que se suministra externamente, se denomina rango de plasmas combustibles. El objetivo final sería que las alfa suministren el total de la energía necesaria para mantener las condiciones de fusión, es decir, que compensen las pérdidas. En esa condición no es necesario el calentamiento externo y el plasma se sostiene por sí sólo. Este es la denominada condición de ignición, y $Q \rightarrow \infty$.

Las condiciones requeridas en un plasma para alcanzar la ignición se pueden expresar en términos del triple producto,

$$L_n = nT\tau_E \quad (1.3)$$

donde n representa la densidad numérica de partículas (suponiendo que es igual para ambas especies), T la temperatura del plasma y τ_E es el tiempo de confinamiento de la energía para la configuración considerada, que se define como el cociente de la energía total del plasma y la potencia perdida por el plasma (que coincide con la del calentamiento externo en estado estacionario).

A partir del balance de potencia y suponiendo que la reactividad es proporcional al cuadrado de la temperatura, el criterio para alcanzar la condición de ignición en plasmas de D-T, es [8]

$$nT\tau_E > 3 \times 10^{21} \text{m}^{-3} \text{keV s} \quad (1.4)$$

que es análogo al criterio establecido por Lawson en 1957 como base para las condiciones requeridas para lograr un reactor de fusión. Esto quiere decir que, por ejemplo, en un plasma de 10^{20} partículas por metro cúbico a una temperatura de 20 keV, el tiempo

de confinamiento debe ser superior a 1.5 segundos. Como veremos en la próxima sección, los tokamaks más modernos están muy cerca de lograr esta condición.

1.2. Confinamiento magnético

A las elevadas temperaturas para las que la reacción D-T tiene mayor sección eficaz, la materia se encuentra en estado de plasma totalmente ionizado. En ese estado no es posible contenerlo mediante paredes sólidas de ningún material. Por otro lado, al estar compuesto de cargas eléctricas es posible utilizar campos magnéticos para confinar el plasma. En presencia de un campo magnético externo, las partículas cargadas tienden a moverse principalmente a lo largo de las líneas de campo, como se esquematiza en la figura 1.1.

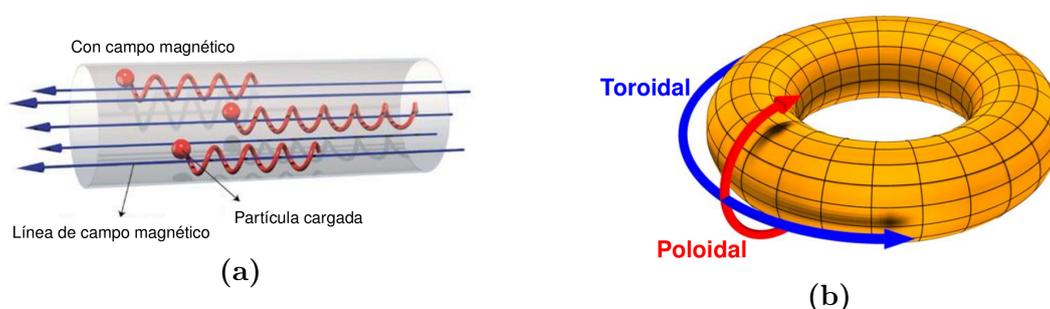


Figura 1.1: (a) A primer orden, las partículas cargadas se mueven siguiendo las líneas del campo magnético externo. (b) La forma más simple de producir una configuración cerrada de campo magnético es mediante un toroide. En un tokamak, el campo principal va en la dirección toroidal y es producido externamente, mientras que la componente poloidal se genera al inducir una corriente.

Un sistema de confinamiento magnético se basa en la aplicación de un campo magnético intenso que permita atrapar las partículas del plasma, en una especie de contenedor magnético. Dentro de los sistemas de confinamiento podemos distinguir dos grandes categorías: configuraciones abiertas y cerradas.

Entre las configuraciones abiertas, los espejos magnéticos constituyen uno de los principales ejemplos [14]. Estos dispositivos consisten en un par de bobinas separadas por una distancia, por las que circulan corrientes iguales, de modo que se forma una botella magnética entre ellas.

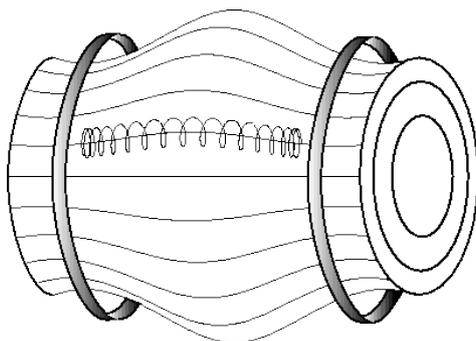


Figura 1.2: Esquema de la dinámica de una partícula atrapada en un espejo magnético.

Por conservación de energía, $E = (1/2)mv_{\parallel}^2 + \mu B$ y la invariancia del momento magnético $\mu = (1/2)mv_{\perp}^2/B$, en ausencia de campo eléctrico, las partículas experimentan una reducción de la velocidad paralela al campo a medida que se acercan a cada solenide. Si la componente paralela se vuelve negativa, la partícula “rebota” y queda confinada. Con estos dispositivos es posible confinar plasmas con temperaturas del orden de $10^6 K$. Una limitación importante es que se pierden las partículas cuya componente de velocidad paralela al campo supera la relación de espejo:

$$v_{\parallel} > v_{\perp} \sqrt{\frac{B_{max}}{B_{min}}} = 1. \quad (1.5)$$

Los cinturones de Van Allen, son regiones en forma de toroide que rodean la Tierra, donde quedan confinadas algunas partículas (las que satisfacen la relación de espejo adecuada) provenientes, principalmente, del viento solar. Se trata de una configuración similar a los espejos magnéticos construidos en el laboratorio, que se forma naturalmente debido a la no-uniformidad del campo magnético terrestre.

Para eliminar las pérdidas a lo largo de las líneas de campo, se buscó desarrollar configuraciones magnéticas cerradas, en las que las líneas de campo no atraviesen superficies, o permitan escapar una fracción importante de partículas como en el caso de los espejos magnéticos. La forma más simple de cerrar un campo solenoidal es mediante un toroide, como muestra la figura 1.1b, en el que se impone un campo principal en la dirección toroidal. El campo toroidal no es suficiente para mantener las partículas confinadas, debido a que los gradientes de campo inducen una pequeña separación de carga con un campo eléctrico asociado que desplaza las partículas “lentamente” en la dirección vertical. Por eso se impone además una corriente toroidal que genera una componente poloidal de campo. Existen diversos esquemas de confinamiento toroidal que, por ser los que han logrado condiciones más próximas a las requeridas para un reactor de fusión, son las que se describen con mayor detalle a continuación.

1.3. Configuraciones toroidales

Las configuraciones toroidales de campo magnético han resultado ser las más eficientes para confinar plasmas, y las describimos en esta sección con mayor detalle. Dentro de este tipo de configuraciones se encuentra el tokamak, que es uno de los esquemas con más historia y mejores resultados [Wesson]. Otro dispositivo muy estudiado es el reversed field pinch (RFP), que a diferencia del tokamak tiene componentes de campo toroidal y poloidal del mismo orden de magnitud [15, 16]. Tanto el tokamak como el RFP son configuraciones idealmente bidimensionales, es decir, que tienen simetría de revolución. El stellarator es un ejemplo de configuración tridimensional [17]. Por último, introducimos dos integrantes de la familia de toroides compactos: el FRC [18] y el spheromak [19].

1.3.1. Tokamak

El tokamak (acrónimo del ruso Тороидальная Камера с Аксиальным магнитным полем, cámara toroidal con campo magnético axial) es un dispositivo de confinamiento magnético que confina al plasma formando un toroide. Posee un solenoide central y dispone de bobinas que rodean al plasma en dirección poloidal, como se puede observar

en la figura 1.3.

El solenoide central genera una corriente en sentido toroidal dentro del plasma, que

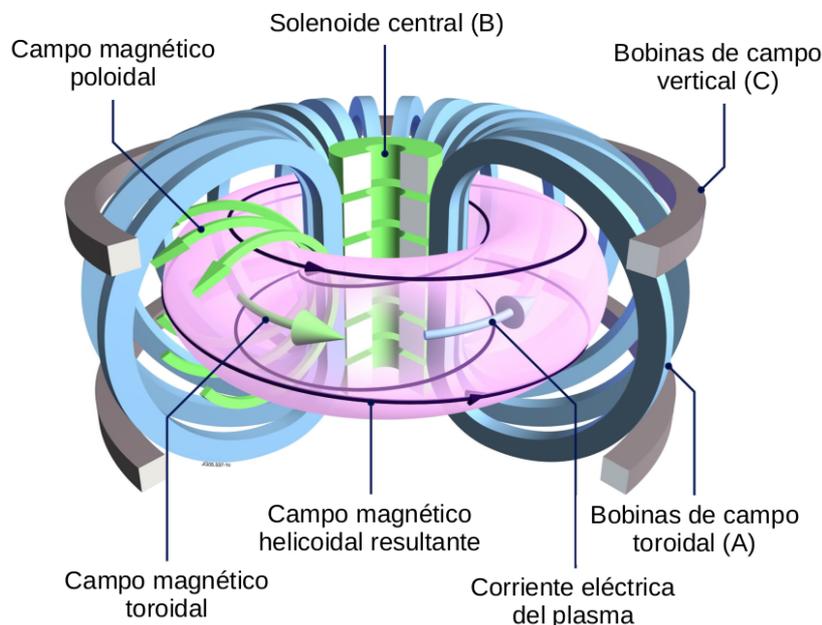


Figura 1.3: Esquema de un reactor tokamak [1]. Posee bobinas que rodean al plasma en dirección poloidal para generar el campo magnético toroidal. El reactor utiliza al plasma como el circuito secundario de un transformador, lo que genera una corriente en sentido toroidal dentro del plasma, que a su vez genera el campo poloidal. De este modo se generan los campos magnéticos que confinan al plasma. Las bobinas de campo vertical evitan que el plasma se expanda demasiado y sirven para controlar la posición y la forma del toroide.

a su vez genera un campo magnético en sentido poloidal, siguiendo la ley de Ámpere. Las bobinas que envuelven al toroide generan un campo magnético en sentido toroidal, y el conjunto de los campos toroidales y poloidales confinan al plasma. A su vez, posee bobinas que se denominan de campo vertical, las cuáles son utilizadas para controlar la posición y forma del plasma confinado.

El tokamak es la configuración de confinamiento más estudiada, siendo la que ha alcanzado las mejores performances en términos del triple producto (ec. 1.3)[20]. Es el esquema elegido para el proyecto ITER (por sus siglas en inglés, *International Thermonuclear Experimental Reactor*), que busca analizar experimentalmente la validez de un reactor de fusión para su uso comercial [21]. ITER es el mayor proyecto de fusión nuclear hasta el momento, y actualmente se encuentra en construcción, con fecha estimada para la primera descarga en 2025 [22]. Otros tokamaks de gran relevancia son los reactores DIII-D [23], JET (*Joint European Torus*) [24], EAST (*Experimental Advanced Superconducting Tokamak*) [25], KSTAR (*Korean Superconducting Tokamak Advanced Research*)[26], ASDEX-U (*Axial Symmetric Divertor Experiment Upgrade*) [27], JT-60U (*Japan Tours-60 Upgrade*) [28] y el proyecto SPARC [29], el cuál está en construcción y se espera que complemente a los experimentos que se realizarán en el proyecto ITER. A futuro, los proyectos más notables son el proyecto DEMO [30] y K-DEMO [31], los cuáles planean generar alrededor de 2 GW de potencia continua y estar conectados a la red.

Una característica que tienen los plasmas producidos en tokamaks tradicionales es que

su funcionamiento es intermitente. Al tratar al plasma como el circuito secundario de un transformador, se generará una corriente mientras el campo en el solenoide cambie en el tiempo. Esta limitación restringe al reactor a funcionar de manera pulsada. Sin embargo, se encuentran en desarrollo escenarios de operación denominados avanzados, en los que se plantean usar modos de operación y estrategias de control que permitan extender significativamente la duración de las descargas. Un ejemplo de reactor avanzado con resultados récord es el tokamak EAST, el cuál logró un tiempo de confinamiento mayor a 1000 segundos [25]; o KSTAR, el cuál mantuvo temperaturas de 10 keV durante 30 s [32]. Estos logros son alentadores, y posibilitan nuevas ramas de desarrollo de cara a la fusión controlada como fuente de energía.

La siguiente figura muestra la evolución del récord de valor del triple producto a lo largo de los años, para este dispositivo.

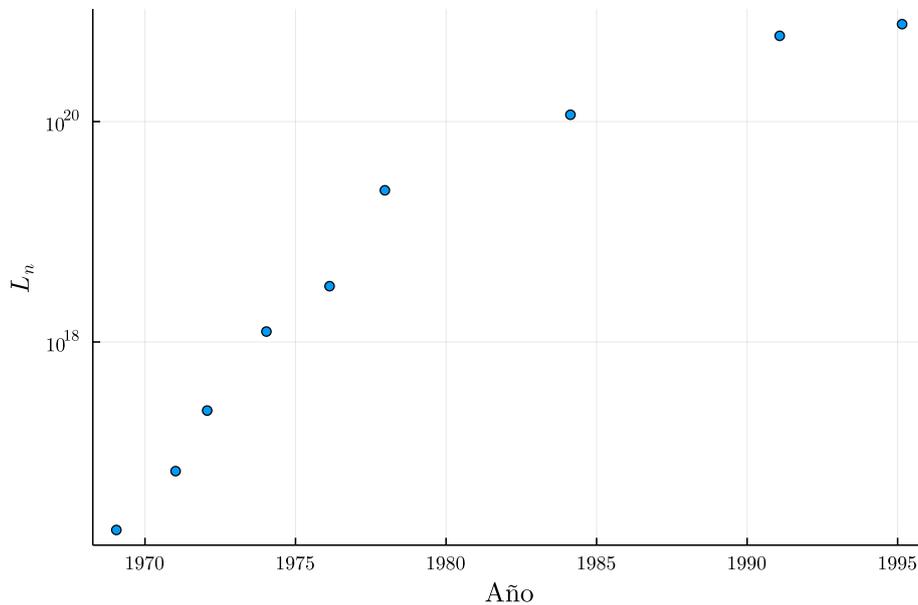


Figura 1.4: Evolución del récord del valor del triple producto en tokamaks [2].

Se observa que a lo largo de los años se ha aumentado el triple producto en 3 órdenes de magnitud, y es hoy en día el dispositivo de confinamiento magnético con el valor más alto [2].

1.3.2. RFP

Los RFP (en inglés, *Reversed Field Pinch*) son similares a los tokamak, pero en los que el campo magnético poloidal es similar en magnitud al campo toroidal, y este último se invierte cerca del borde del toroide [33], como se puede ver en el esquema de la figura 1.5.

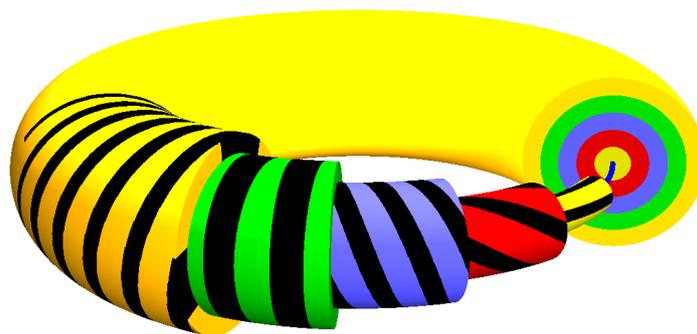


Figura 1.5: Esquema de los campos magnéticos en un plasma confinado por RFP, esquematizados por las líneas negras [3].

Esta configuración de los campos magnéticos se produce naturalmente a causa de un proceso de relajación del plasma, lo que sugiere que es una configuración de mínima energía. A diferencia de los tokamaks, el plasma se confina dentro de una cámara conductora. La ventaja que poseen sobre los reactores tokamak radica en que no se necesitan corrientes toroidales muy grandes, lo que significa que en principio no es necesario el uso de bobinas superconductoras. En la figura 1.6 se muestra el avance del valor del triple producto obtenido en este tipo de reactores.

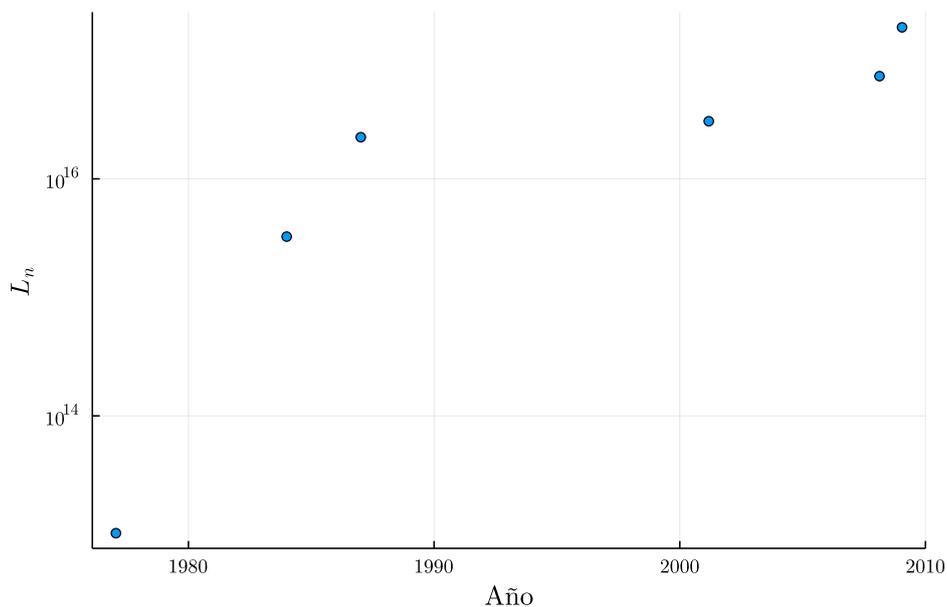


Figura 1.6: Evolución del valor récord del triple producto a lo largo de los años en reactores RFP [2].

Hoy en día los proyectos más avanzados son los reactores RFX (*Reversed Field eXperiment*) en Italia [34] y el reactor MST (*Madison Symmetric Torus*) en EEUU [35]. A día de hoy, estos proyectos continúan realizando experimentos, y está planificada una mejora del reactor RFX [36].

1.3.3. Stellarator

El reactor stellarator confina al plasma de manera toroidal, pero, a diferencia del tokamak, no tiene simetría axial si no que el plasma se encuentra confinado en un campo magnético con una variación axial periódica, como se muestra en la figura 1.7.

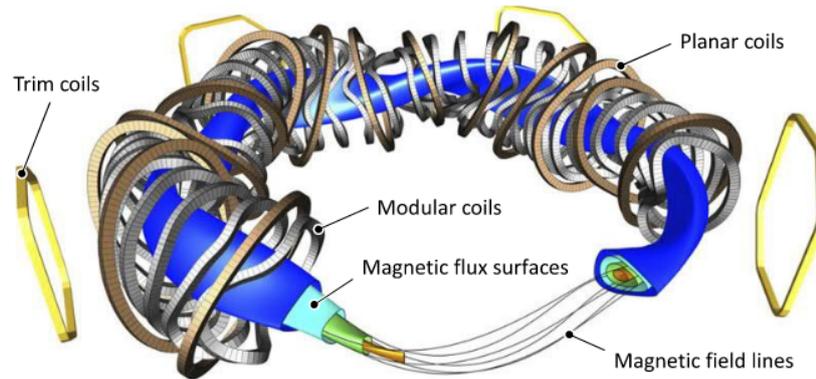


Figura 1.7: Esquema de un reactor tipo stellarator, específicamente del reactor Wendelstein 7-X [4].

Posee la ventaja de que no necesita un solenoide central y que el confinamiento es inherentemente estacionario, pero la construcción es más compleja que un tokamak. La siguiente figura muestra la evolución del valor récord de L_n a lo largo de los años.

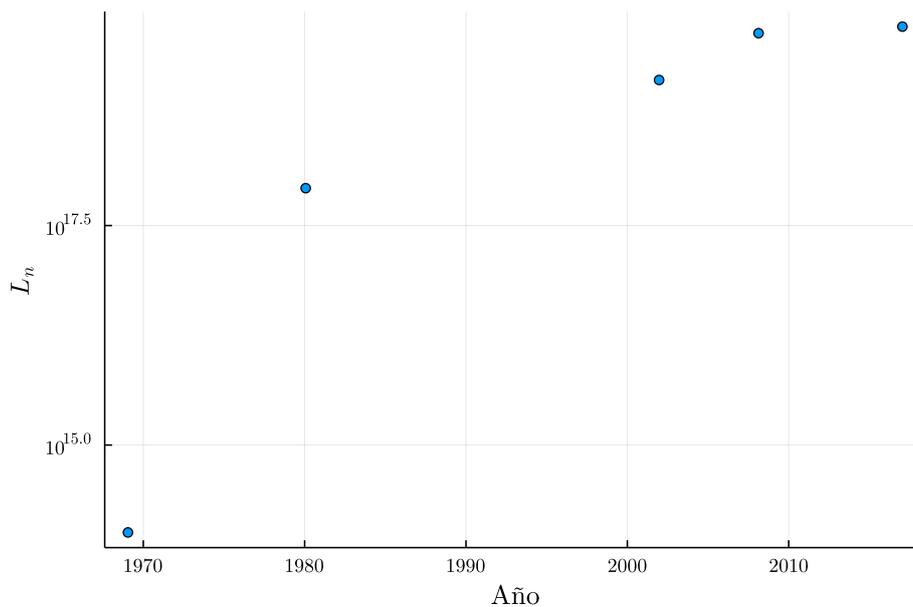


Figura 1.8: Evolución del valor récord de L_n a lo largo de los años en reactores stellarator [2].

El experimento de este tipo más avanzado en la actualidad es el Wendelstein 7-X, en el que se planean descargas estacionarias de 30 minutos [4].

1.3.4. FRC

La configuración FRC (*Field Reversed Configuration*) es una manera de confinar un plasma dentro de un campo magnético. En este tipo de configuraciones, el plasma forma un toroide, con un campo toroidal nulo [37].

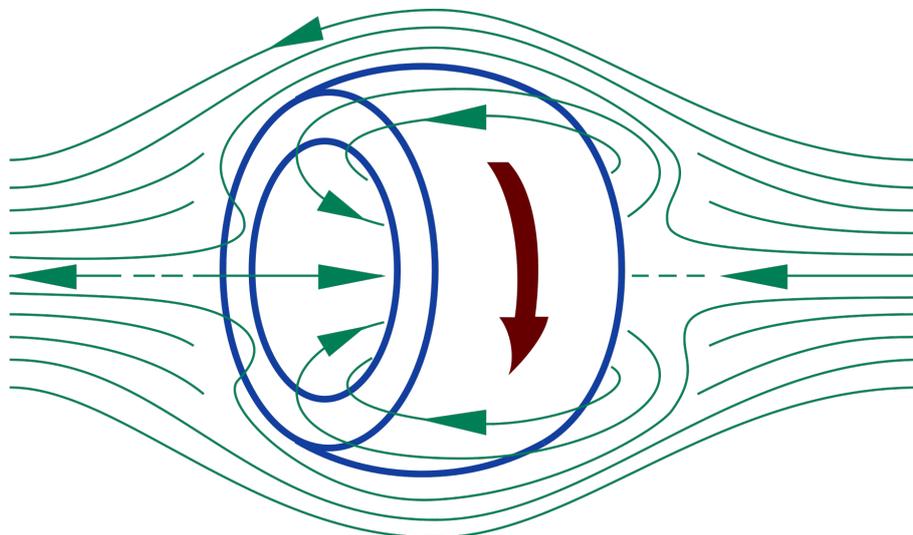


Figura 1.9: Esquema de una configuración FRC [3]. Las líneas de campo magnético se denotan con verde y la flecha roja indica la dirección de la corriente. Esta configuración no posee un campo magnético toroidal.

Se distinguen de los demás dispositivos toroidales ya que no poseen solenoides en el centro del plasma. Esta característica tiene como ventaja que los dispositivos de toroides compactos son más sencillos constructivamente y pueden tener tamaños reducidos, del orden de decenas de cm [38].

La figura 1.10 muestra los avances en el valor del triple producto en el tiempo, para esta configuración.

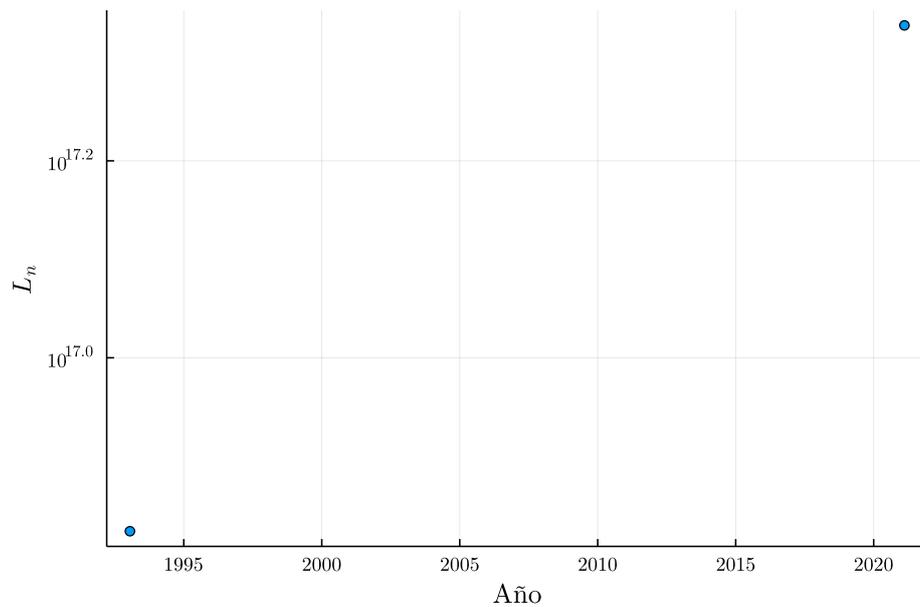


Figura 1.10: Evolución del valor del triple producto récord a lo largo de los años en reactores FRC [2].

La configuración FRC se utiliza en reactores MTF (*Magnetized Target Fusion*) experimentales, en donde se busca una operación pulsada similar al confinamiento inercial, pero por confinamiento magnético, con la ventaja de tener un costo menos elevado. El dispositivo FRX-L [5] es un reactor experimental de MTF que analiza los procesos de creación de configuraciones FRC, así como el control de posición del plasma y su compresión.

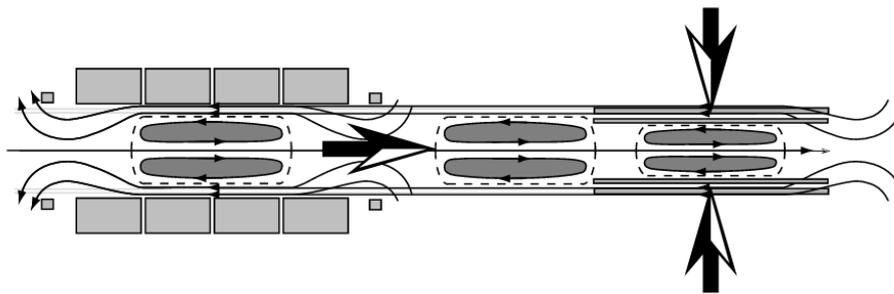


Figura 1.11: Funcionamiento del dispositivo FRX-L [5]. En un primer paso se genera una configuración FRC, que luego es trasladada a otra cámara en donde se comprime al plasma de manera adiabática, en pos de generar condiciones para la fusión.

Otro dispositivo que utiliza configuraciones FRC es el modelo propuesto por Helion Energy [6], que hace colisionar dos plasmas confinados en FRC para comprimir las configuraciones. De esta manera, se busca obtener las condiciones necesarias para que se produzcan reacciones de fusión. El proceso entonces se repetiría constantemente para generar energía de manera pulsada.

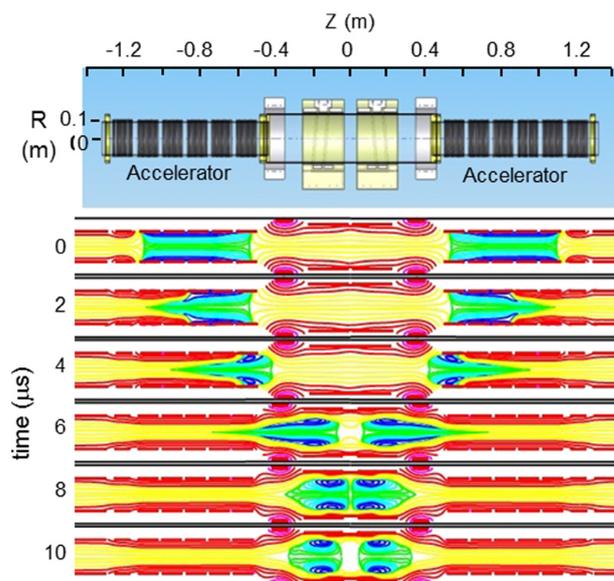


Figura 1.12: Gráfico del choque de 2 configuraciones FRC en el dispositivo construido por Helion Energy [6].

1.3.5. Spheromak

Los spheromaks confinan al plasma en configuraciones esferoidales, y no necesitan de campos magnéticos externos para sustentar el confinamiento [19]. Un esquema de la configuración del plasma se observa en la figura 1.13.

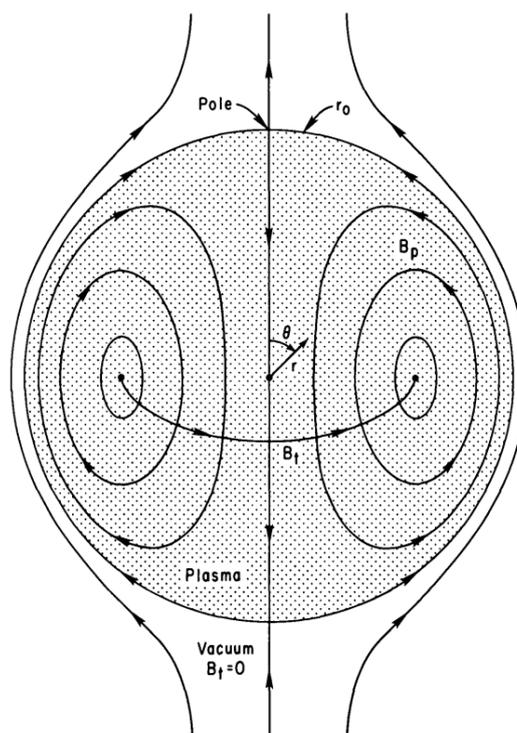


Figura 1.13: Esquema del plasma confinado en un reactor spheromak [7].

La configuración del confinamiento en estos reactores se genera de manera espontá-

nea, dadas ciertas condiciones iniciales, lo que indica que son estados de mínima energía en el plasma [7]. Por ende, existen varias maneras de generar una configuración spheromak y se suelen dar en la naturaleza, en ciertos plasmas que se estudian en astrofísica [19]. Si bien no necesitan de campos magnéticos externos, el plasma necesita de estar confinado en una cámara conductora, sobre la cuál se generan corrientes parásitas que mantienen los campos magnéticos dentro del plasma [19].

La figura 1.14 muestra la evolución del valor del triple producto a lo largo de los años para los reactores spheromak.

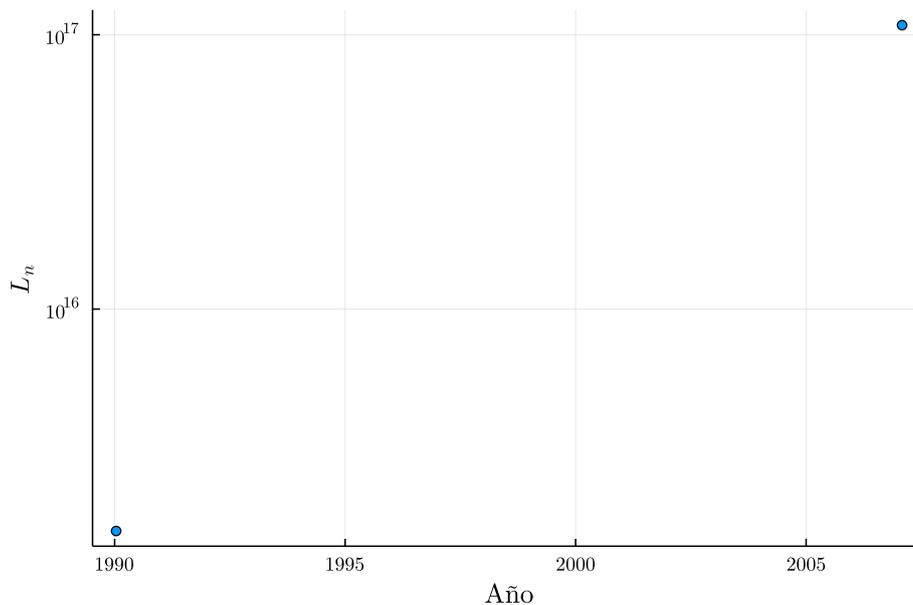


Figura 1.14: Evolución del valor record del triple producto a lo largo de los años en reactores spheromak [2].

Hoy en día existen líneas de investigación en lo que se conoce como Dynamak [39], que buscan explotar las ventajas de esta configuración para emplearlas como base para un reactor de fusión nuclear.

1.4. Confinamiento inercial

El confinamiento inercial se basa en calentar pastillas con los reactivos en estado sólido por medio de láseres o haces de iones, generando presión por medios térmicos. Las pastillas están conformadas por un núcleo hueco, envuelto en capas de reactivos, sumado a una capa superficial. Cuando se calienta la capa superficial, esta se volatiliza y aplica presión sobre las capas de reactivos. Estas presiones pueden ser del orden de 40 Mbar [40], y buscan implosionar el combustible para que se alcancen las condiciones necesarias para la ignición de los reactivos, lo que da a lugar a que se produzca fusión autosustentada.

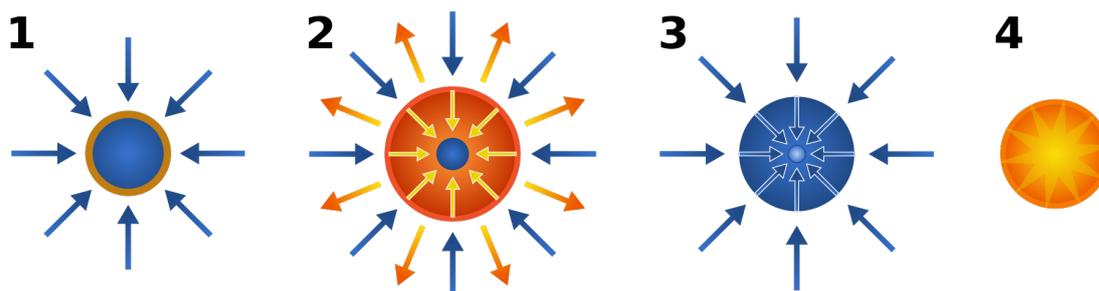


Figura 1.15: Esquema del proceso de calentamiento, implosión y fusión de una pastilla [3]. Una vez que se calienta la superficie de la pastilla, al volatilizarse aplica una gran presión a los reactivos, aumentando su densidad. Si se dan las condiciones necesarias para la ignición, ocurren reacciones de fusión autosustentadas y la pastilla libera una gran cantidad de energía.

Una de las principales desventajas que tendría un reactor basado en el esquema de confinamiento inercial, es que su operación sería inherentemente pulsada. Si bien la mayoría de los regímenes de funcionamiento de los dispositivos de confinamiento magnético en la actualidad son pulsados, se tratan de pulsos de varios segundos que, potencialmente, podrían alcanzar la operación estacionaria. El experimento con mayor desarrollo hoy en día es la sede NIF (por sus siglas en inglés, *National Ignition Facility*) en California, Estados Unidos. Posee un láser de 500 TW de potencia [41], y en el dispositivo se logró obtener plasma de combustión [42], es decir, plasma cuya energía está sostenida principalmente por las partículas alfa producidas por las reacciones de fusión.

1.5. Confinamiento gravitatorio

En escalas astronómicas, la manera en la que los reactivos se confinan para dar lugar a reacciones de fusión es gracias a la atracción gravitatoria. El aglomeramiento de los reactivos en dichas escalas es tal que la misma presión que ejerce la gravedad es suficiente como para producir la fusión de los reactivos, liberando energía. Por las grandes presiones y temperaturas, los reactantes se encuentran en estado plasma, siendo este estado el más abundante en el universo (99 % del universo visible [43]). Existe un interés práctico del estudio de plasmas astrofísicos desde el punto de vista del confinamiento a nivel laboratorio, ya que ciertas configuraciones observables pueden ser reproducidas en escalas humanas. Ejemplos de esto son las configuraciones spheromak [19] y los espejos magnéticos [14].

1.6. Motivación

A día de hoy, el dispositivo que podría dar lugar al desarrollo de un reactor de fusión termonuclear y que se encuentra en un mayor grado de desarrollo es el tokamak. Es de interés, entonces, analizar el confinamiento del plasma en dichos reactores, y en particular de los escenarios avanzados de operación. La motivación del trabajo yace en el desarrollo de códigos de cálculo numérico enfocados en la descripción de la estructura interna del plasma en equilibrio, capaces de usarse en tareas de diseño de escenarios, análisis de estabilidad, evaluación de fenómenos de transporte y desarrollo de esquemas de control mediante fuentes de corriente no inductiva. Para ello, el código debe ser

capaz de resolver el problema del equilibrio, recibiendo como entrada parámetros que pueden ser obtenidos en forma experimental, o bien otros perfiles relacionados a la estabilidad y performance de la descarga.. El objetivo del trabajo es desarrollar un código que pueda ser utilizado en conjunto con otros programas y herramientas de diagnóstico, complementando a las tecnologías que hoy día se utilizan en el análisis del plasma confinado en los reactores, y que cumpla con las características mencionadas anteriormente.

Capítulo 2

Introducción al modelo magnetohidrodinámico

“When a noble disciple has thus understood formations, the origin of formations, the cessation of formations, and the way leading to the cessation of formations... he here and now makes an end of suffering.”

— Ven. Sariputta, Majjhima Nikaya 9.63, 500 BC.

El marco teórico utilizado en el presente trabajo es el modelo magnetohidrodinámico (MHD). Este describe la dinámica macroscópica del plasma suponiendo que se comporta como un fluido conductor. Partiendo de una descripción cinética, es posible obtener una descripción de tipo fluidodinámica tomando momentos de las leyes de conservación [44]. De esta forma, se obtienen la descripción de 2 fluidos (iones y \bar{e} por separado). Las hipótesis que permitir reducir el modelo de dos fluidos son:

1. Se desprecia la inercia de los \bar{e} , dado que su tiempo de respuesta es mucho menor que el de los iones.
2. Condición de cuasineutralidad ($n_{\bar{e}} \approx Zn_i$), lo que lleva a que $\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$ dentro del plasma. Esta suposición es válida si la distancia de apantallamiento es mucho menor que la dimensión característica del plasma ($\lambda_D \ll a$).
3. Se considera que la velocidad de los iones no es relativista, por lo que las corrientes de desplazamiento son despreciables ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$).

2.1. Ecuaciones del modelo

La deducción del modelo MHD parte de una descripción estadística, en la cuál se supone al plasma como un conjunto de electrones e iones de un sólo tipo [45]. Para ello, se parte de una función distribución f_k para cada conjunto de partículas cargadas ($k = i, e$). Estas funciones representan la densidad de las partículas en un espacio de fase de 6 dimensiones formado por 3 componentes espaciales y 3 componentes de velocidad. Es de interés analizar cómo se modifican las distribuciones de partículas dentro del plasma. Suponiendo que existen campos electromagnéticos en el seno del mismo, la

derivada temporal de f_k es

$$\frac{df_k}{dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.1)$$

Agregando las interacciones entre iones y electrones en forma de colisiones y planteando que el cambio de las funciones de distribución se debe a dichas interacciones, se obtiene la expresión

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = C_k, \quad (2.2)$$

en donde C_k representa las interacciones de colisión entre la partícula cargada k y las demás partículas. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Boltzmann [45]. Las colisiones representan interacciones de corta distancia entre las partículas, y los campos electromagnéticos están compuestos tanto por campos externos como las interacciones de largo alcance que generan las partículas entre si.

La ecuación de Boltzmann describe de manera cinética al plasma, lo que dificulta su resolución y análisis en la práctica. Para obtener una descripción macroscópica se toman los momentos de la ecuación 2.2, en donde se integra el espacio de fases de manera de obtener cantidades en vez de distribuciones. Por ejemplo, el momento 0 de la ecuación 2.2 resulta

$$\int \frac{df_k}{dt} d^3v = \frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad (2.3)$$

del sistema siendo n_k la densidad de partículas k y \mathbf{u}_k la velocidad de la especie k . La expresión obtenida es la ecuación de continuidad para la especie k . Aplicando el primer y segundo momento a la ecuación 2.2 se obtienen las ecuaciones de momento y energía, respectivamente.

Las ecuaciones obtenidas mediante los momentos de la ecuación de Boltzmann son macroscópicas pero describen al plasma como 2 fluidos que interactúan entre sí. Para reducir el conjunto de ecuaciones a un solo fluido, se aplican las suposiciones mencionadas en la introducción del capítulo. De las suposiciones, se deduce que

- La densidad está dada por los iones: $\rho = m_i n$, $n = n_i = n_e$ (condición de cuasineutralidad), siendo n_i los núcleos atómicos del plasma y n_e los electrones
- Como los iones transportan toda la masa del fluido, la velocidad del plasma es la velocidad de los iones: $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_i$
- La corriente total adopta la forma $I = en(Zu_i - u_e)$
- La presión y la temperatura son las totales, es decir, la suma de las componentes iónica y electrónica: $P = P_i + P_e$, $T = T_i + T_e$

Con estas definiciones se logra obtener una descripción del plasma como un solo fluido. Las ecuaciones del modelo MHD tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación de continuidad: } & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla = 0, \\
\text{Ecuación de momento: } & \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P, \\
\text{Ecuación de energía: } & \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0, \\
\text{Ley de Ohm: } & \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \\
\text{Ley de Faraday: } & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\text{Ley de Ámpere: } & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \\
\text{Ley de Gauss: } & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

siendo la derivada total $\frac{D^*}{Dt} = \frac{\partial^*}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot *$. El conjunto de ecuaciones 2.4 son las obtenidas en el límite ideal, ya que se desprecian los términos de disipación viscosa y resistividad eléctrica. Además, se consideró que la presión es isotrópica, lo cuál deja de ser válido cuando el plasma contiene una fracción significativa de partículas de alta energía. Estas ecuaciones describen al plasma en una formulación euleriana [46] y pueden utilizarse para plantear un problema diferencial si se agregan condiciones de borde.

2.2. Conservación de flujo

La ecuación de inducción en un plasma se deriva de la ley de Ohm, en conjunto con la ley de Faraday. En su forma general, tiene por expresión [47]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{2.5}$$

en donde la resistividad eléctrica η del plasma juega un papel importante en la difusión del campo magnético. Cuando en el plasma el número de Reynolds magnético $R_m = \frac{V_0 L_0}{\eta}$ es muy grande, se puede despreciar el término difusivo y la ecuación de inducción [48] se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{2.6}$$

Esta situación sucede cuando el plasma tiene una resistividad muy pequeña, y equivale a que se cumpla la ley de Ohm del modelo MHD ideal, que es frecuente en reactores de fusión dado que los plasmas reducen su resistividad con la temperatura [49]. Este resultado implica que las líneas de campo magnético se mueven con el plasma, como si estuviesen “congeladas” en él. Para ver esto consideremos una curva C que se mueve con el plasma. Dado una cantidad de tiempo dt , un elemento $d\mathbf{S}$ de área de la curva barre una cantidad de área $\mathbf{v} \times d\mathbf{S} dt$. La expresión de la razón de cambio del flujo magnético en la superficie s que encierra la curva está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \times d\mathbf{S}. \tag{2.7}$$

Aplicando el teorema de Stokes, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.8)$$

El lado derecho se anula en el límite ideal, por lo que se concluye que el flujo magnético que cruza una superficie cerrada por una curva C se conserva. Esto quiere decir que los elementos de plasma que se sitúan sobre una línea de campo en un tiempo t_1 lo seguirán estando para cualquier tiempo $t > t_1$.

Estos resultados indican que la topología del plasma no cambia a menos que suceda un evento de reconexión magnética, que son efectos que no pueden ser descritos por el modelo MHD ideal [48]. Entonces, si una superficie magnética se genera en el interior o en el borde de un plasma, su topología sólo se verá afectada por efectos disipativos, cuya escala de tiempo es larga. Este resultado demuestra que es posible confinar un plasma mediante campos magnéticos.

2.3. Corrientes de confinamiento

En la sección anterior se mostró que es posible confinar un plasma mediante campos magnéticos, pero sin explicitar cómo dichos campos se generan. En esta sección se demostrará que para confinar un plasma en estado de equilibrio en un sistema laboratorio es necesario generar los campos magnéticos de confinamiento de manera externa.

Como es usual en el análisis de posibles configuraciones en un sistema, se procederá a aplicar el teorema del Virial [50] a un plasma de volumen finito V , con $g = 0$. Definamos un origen dentro del volumen y un vector de posición \mathbf{r} . El momento de inercia escalar I_n se calcula como

$$I_n = \frac{1}{2} \int_V \rho r^2 d^3x. \quad (2.9)$$

Diferenciando con respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{dI_n}{dt} = -\frac{1}{2} \int_S r^2 \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} d^3x, \quad (2.10)$$

donde S representa la superficie del volumen V . Supongamos que las paredes de V son rígidas y el plasma no pueda salir por ellas. Entonces, el primer término del lado derecho de la ecuación 2.10 se anula. Derivando otra vez con respecto al tiempo,

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) d^3x + \int_V \mathbf{T} : \nabla \mathbf{r} d^3x, \quad (2.11)$$

$$= - \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} + \int \text{Tr}(\mathbf{T}) d^3x. \quad (2.12)$$

La expresión queda definida en términos del tensor de esfuerzos \mathbf{T} , que se deduce de la ecuación de momento 2.4,

$$\mathbf{T} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi}. \quad (2.13)$$

Si no hay elementos conductores que rodean al plasma, el volumen V puede extenderse hasta infinito sin modificar los integrandos, si los hubiese existirían discontinuidades y el teorema no podría aplicarse. Extendiendo el volumen V , los esfuerzos superficiales desaparecen al estar la superficie del volumen lejos del plasma, y se obtiene

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \int_V \left(\rho u^2 + 3P + \frac{3B^2}{8\pi} - \frac{B^2}{4\pi} \right) dx^3 \quad (2.14)$$

$$= 2\mathcal{E}_u + 3(\gamma - 1)\mathcal{E}_P + \mathcal{E}_B. \quad (2.15)$$

En este caso, \mathcal{E}_v es la energía cinética, \mathcal{E}_P la energía interna y \mathcal{E}_B la energía magnética. Si el plasma se encuentra confinado, tomando el promedio temporal con $t \rightarrow \infty$, la derivada segunda de I_n se desvanece. Sin embargo, las energías anterior mencionadas están definidas positivas, por lo que su suma siempre será mayor a 0. Este absurdo implica que para que el plasma esté confinado en estado estacionario es necesario que existan conductores externos al plasma. En términos prácticos, el plasma de un reactor no puede estar confinado únicamente por sus propias corrientes internas, si no que se requiere un sistema de bobinas con corrientes confinantes o bien un recipiente de paredes conductoras que conserve el flujo magnético, ya que no es necesario que las corrientes se encuentren dentro del plasma, como en los reactores spheromak [19]. En reactores tokamak, el plasma se confina en forma toroidal porque existe un transporte elevado en las direcciones del campo magnético. Entonces, el plasma puede girar a través del toroide, siguiendo las líneas de campo magnético que se cierran formando dicho cuerpo. Además, por el teorema de la bola peluda [51], un toroide es la figura no simplemente conexa más sencilla que puede ser “envuelta” ergódicamente por un campo magnético.

En plasmas donde la masa es considerable, como por ejemplo en estrellas, el confinamiento se logra por medio de fuerzas gravitatorias. Agregando a la traza de \mathbf{T} el término

$$T_g = -\frac{1}{8\pi G} (\nabla\phi_g)^2, \quad (2.16)$$

la ecuación 2.15 resulta

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = 2\mathcal{E}_u + 3(\gamma - 1)\mathcal{E}_P + \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_g. \quad (2.17)$$

El término de la energía gravitacional es el único término negativo, por lo que puede existir el confinamiento por medio de las energías internas del plasma. El ajuste de estas energías durante la vida de la estrella explica porqué aumentan su tamaño mientras se enfrían, para luego explotar en forma de supernovas [50].

Veamos como deben ser dichas corrientes respecto al campo magnético, para poder realizar el confinamiento. El estado de equilibrio se define por la nulidad de las velocidades del plasma y las derivadas temporales. Es decir, se produce cuando el plasma está quieto y no hay transporte de masa dentro del mismo. Este estado del plasma es óptimo para su confinamiento. La ecuación de momento para este estado se reduce a

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.18)$$

Para que se logre el confinamiento en estado de equilibrio, generado por el gradiente de presión, es necesario que exista una cantidad perpendicular de \mathbf{J} respecto a \mathbf{B} .

2.4. Validez del modelo ideal

Las condiciones necesarias para que el modelo MHD ideal representen la física del plasma dentro de un reactor se logran en su mayoría. La excepción es la colisionalidad, que permite tratar al plasma como un fluido continuo y no como un sistema de partículas. Aún así, el modelo MHD ideal tiene un gran acuerdo con los resultados experimentales [44, 48]. Este resultado se debe a que el modelo MHD ideal es correcto para modelar movimientos del plasma a gran escala, sea colisionante o no, siempre y cuando el plasma no pueda sostener un campo eléctrico significativo en su propio marco de referencia [48]. En dicho caso, la ley de Ohm ideal se cumple y la ecuación de inducción tiene por expresión la igualdad 2.6, y estas características se logran obtener dentro de reactores de fusión.

Existen otras razones por la que el modelo MHD ideal es válido fuera de un régimen colisionante [48]. Primero, está formulado a partir de la conservación de masa, momento y energía, que aplica sea el plasma colisionante o no. Segundo, si existe un campo magnético en el plasma, las partículas cargadas desarrollan un movimiento de revolución que previene que se transporten a través del campo magnético, pero pueden hacerlo sin problemas a lo largo del mismo. Entonces, el transporte a través del campo puede ser descrito por ecuaciones similares al modelo MHD. Finalmente, los plasmas generalmente poseen numerosas interacciones onda-partícula, que impiden el movimiento de partículas cargadas, incluso en la misma dirección que el campo. Esto hace que las interacciones entre partículas se localicen y sucedan en todas las direcciones, como en un plasma colisionante.

Capítulo 3

Características del equilibrio magnetohidrodinámico en tokamaks

“It’s for you to strive ardently. Tathagatas simply point out the way.”

— Buddha, Dhammapada 276, 500 BC.

En este capítulo se desarrollan conceptos asociados específicamente al confinamiento magnético del plasma dentro de un tokamak. Se muestra un desarrollo de la ecuación teórica que modela el estado de equilibrio y se explican conceptos relacionados a las características del plasma confinado y la operación del dispositivo.

3.1. Ecuación de Grad-Shafranov

Para enfocar el análisis del plasma en estado de equilibrio, confinado dentro de un reactor tokamak, se utilizan coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) . En principio, es factible suponer que la configuración tiene simetría axial, por lo que se descartarán las derivadas angulares $\left(\frac{\partial}{\partial \phi} = 0\right)$.

Se define la función de flujo poloidal $\Psi(R, Z)$ como el flujo magnético por radián que atraviesa un disco D de radio R con normal \hat{e}_z , situado a una altura Z del eje de simetría:

$$\Psi(R, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.1)$$

Debido a que el campo magnético es solenoidal y que existe una simetría axial, las componentes del campo en el plano poloidal pueden expresarse como

$$\begin{aligned} B_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \\ B_Z &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

y en términos de Ψ se mantiene la nulidad de la divergencia de \mathbf{B} . A continuación, se define la función de corriente poloidal F como

$$F = RB_\phi. \quad (3.3)$$

Entonces, el campo magnético puede escribirse como $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{pol} + \mathbf{B}_\phi$, con \mathbf{B}_{pol} el campo en dirección poloidal, en términos de Ψ y F ,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} (\nabla\Psi \times \hat{e}_\phi) + \frac{F}{R} \hat{e}_\phi. \quad (3.4)$$

Haciendo el mismo tratamiento a la densidad de corriente \mathbf{J} , da como resultado

$$\mu_0 \mathbf{J} = \frac{1}{R} [\nabla(F) \times \hat{e}_\phi] - \frac{\Delta^* \Psi}{R} \hat{e}_\phi, \quad (3.5)$$

en donde Δ^* es un operador diferencial elíptico que tiene como expresión

$$\Delta^* \Psi \equiv R^2 \nabla \cdot \frac{1}{R^2} \nabla \Psi. \quad (3.6)$$

Aplicando la condición de equilibrio en la ecuación de momento,

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

y combinando el equilibrio con las ecuaciones 3.5 y 3.4, se obtiene

$$\nabla P = - \left(\frac{\Delta^* \Psi}{R^2} \nabla \Psi + \frac{F}{\mu_0 R^2} \nabla F \right). \quad (3.8)$$

Substituyendo las expresiones de \mathbf{B} y \mathbf{J} en términos de Ψ y F en la ecuación 3.7, y realizando el producto escalar con $\nabla \Psi$, \mathbf{B} y \hat{e}_ϕ , se obtienen 3 condiciones [52]:

$$\begin{aligned} F &= F(\Psi), \\ P &= P(\Psi), \\ \Delta^* \Psi + R^2 \mu_0 \frac{dP}{d\Psi} + \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\Psi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La última expresión es la ecuación de Grad-Shafranov, que describe el equilibrio de un plasma axisimétrico en coordenadas cilíndricas, según el modelo MHD ideal. Para resolver esta ecuación (de ahora en más, G-S), deben de proponerse formas funcionales para P y F o información equivalente, para luego definir la ecuación diferencial para Ψ . Una vez obtenido el campo escalar $\Psi(R, Z)$, se pueden obtener los campos magnéticos y todos los parámetros de interés.

3.2. Coordenadas de flujo

Como el gradiente de Ψ y el gradiente de presión son colineales, las superficies asociadas a las curvas de nivel de Ψ contienen las líneas de campo magnético y densidad de corriente. Además, la presión es constante en cada una de estas superficies. Estos resultados se pueden inferir de la condición de equilibrio, ecuación 3.7. Por tanto, es útil denominar los contornos en Ψ como superficies magnéticas y utilizar su valor como una coordenada, denominada coordenada de flujo.

Muchos parámetros de interés para el confinamiento del plasma son constantes sobre las superficies magnéticas, como por ejemplo F y P . Estos parámetros son denominados cantidades de flujo y resulta conveniente el uso de coordenadas de flujo para este

tipo de parámetros, ya que se condensan las coordenadas espaciales en una sola, asociada a cada superficie magnética. Sin embargo, algunos parámetros de interés no son cantidades de flujo, como la densidad de corriente ó el ángulo de inclinación magnético, que utilizaremos más adelante.

La zona geométrica en donde una de las superficies magnéticas se degenera en una línea se llama eje magnético. En los casos donde Ψ tiene un extremo dentro del plasma, la posición del eje magnético está sobre el mismo. Por otra parte, la superficie magnética que actúa de interfaz del plasma con el resto del espacio se denomina separatriz.

Observando la expresión de Ψ (ec. 3.1), la coordenada de flujo puede definirse a menos de una constante, lo que significa que algún valor de referencia puede situarse arbitrariamente. Por ello, para resolver problemas de equilibrio en general se utiliza un valor de Ψ_0 tal que el valor en la separatriz sea nulo. En cada superficie magnética es posible

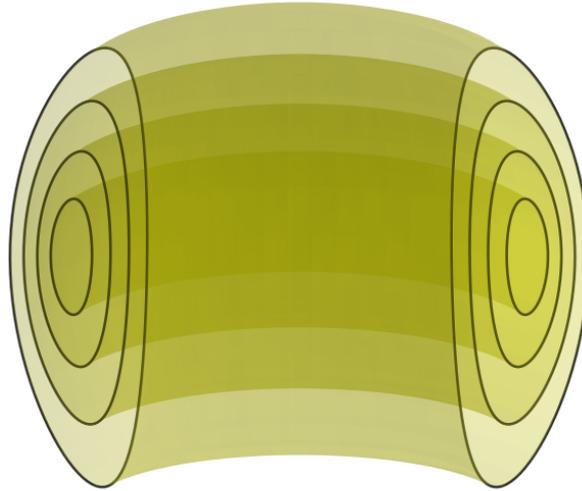


Figura 3.1: Esquema de superficies magnéticas toroidales concéntricas [1]. Cada contorno está definido por un valor constante de Ψ , y cualquier cantidad de flujo puede utilizarse como coordenada.

calcular el flujo magnético toroidal Φ como

$$\Phi(\Psi) = \int_{\Omega(\Psi)} \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.10)$$

con $\Omega(\Psi)$ la superficie delimitada por la curva de nivel en el plano poloidal. Esta definición de flujo toroidal implica que también puede usarse como coordenada de flujo, ya que cada valor está asociado a una superficie magnética y en tokamaks tienen un comportamiento monótono.

3.3. Parámetros y perfiles del plasma

Para caracterizar las descargas de plasma, se utilizan distintos parámetros y perfiles, en función de alguna coordenada de flujo, de las cantidades más relevantes. Entre ellos se encuentran tanto el campo magnético impuesto por las bobinas que rodean al plasma, así como también factores de mérito, seguridad y geometría de la descarga.

3.3.1. Parámetros geométricos

Un esquema del corte transversal de una descarga de plasma en un reactor tokamak se esquematiza en la figura 3.2. Las variables características son el radio mayor R_0 , el

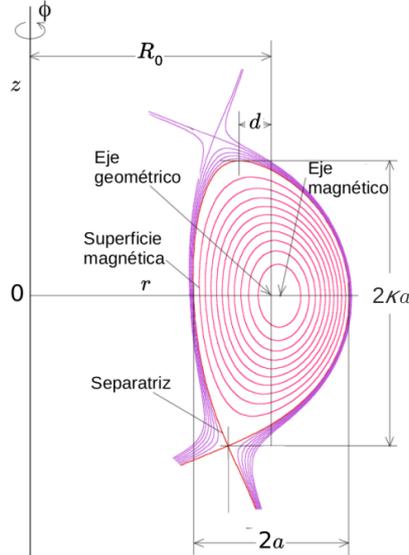


Figura 3.2: Sección transversal de una descarga típica en un reactor tokamak, con perfil en forma de D. En este caso el reactor posee un divertor, que está situado debajo de la zona en donde las líneas de campo de la separatriz se cruzan entre sí [1, 8].

radio menor a , la elongación vertical κ , obtenidas como se describe en dicha figura y la triangularidad δ . La triangularidad se define como $\delta = \frac{d}{a}$, en donde d es la distancia horizontal entre el punto más alto de la separatriz y el eje geométrico. El punto donde las líneas de campo se cruzan entre sí en la separatriz se denomina punto x. En los reactores que poseen un divertor se confina al plasma en una separatriz con punto x para guiar las partículas que escapan al confinamiento hacia el mismo, así como también las impurezas que contenga el plasma. La zona de la derecha del plasma se la denomina LFS (por sus siglas en inglés, *Low Field Side*, lado de bajo campo) y la zona de la izquierda se la denomina HFS (*High Field Side*, lado de alto campo).

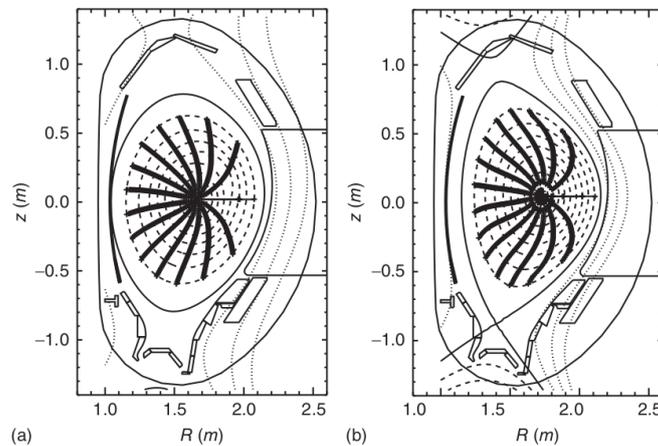


Figura 3.3: Corte transversal de una descarga de plasma en un reactor tokamak [9]. La descarga de la izquierda no posee un punto x, mientras que la de la derecha sí lo posee.

En base a los parámetros antriormente definidos, es posible describir la separatriz utilizando formas funcionales simples. Por ejemplo, para el caso de un reactor tokamak tipo ITER, sin punto x, se puede parametrizar la separatriz como

$$\begin{aligned} R &= R_0 + a \cos(\theta + \delta \sin \theta), \\ Z &= a\kappa \sin(\theta), \end{aligned} \quad (3.11)$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3.3.2. Corrimiento de Shafranov

Como puede observarse en la figura 3.2, la posición espacial del radio mayor R_0 y el eje magnético R_m no coincide. Esto se debe a que la presión generada en el plasma deforma las superficies magnéticas, corriendo el eje magnético hacia la zona del LFS. Este corrimiento se denomina *Shafranov shift* (en inglés, corrimiento de Shafranov), y es proporcional a la presión en el plasma [53]. En el presente trabajo se utilizará la expresión

$$\Delta_s = 100 \frac{R_m - R_0}{a} \quad (3.12)$$

para cuantificarlo, es decir, se calcula como el porcentaje de radio menor que se desplaza el eje magnético del radio mayor.

3.3.3. Campo magnético externo

El campo magnético toroidal externo se denota como

$$B_{0\phi} = \frac{R_0 B_0}{R}, \quad (3.13)$$

con R_0 y B_0 la posición radial del eje geométrico del plasma y B_0 el campo de vacío, es decir, medido sin la presencia de plasma en el reactor, en dicho lugar. Dentro del plasma el campo toroidal puede variar por el aporte de la corriente poloidal del plasma, contenida en la cantidad de flujo F .

3.3.4. Factor de mérito β

Como el confinamiento se realiza mediante una presión magnética, generada por el efecto pinch, es de sumo interés maximizar la relación entre la presión generada y el campo impuesto. Este factor de mérito, denominado β , tiene como expresión

$$\beta_0 = \frac{P_0}{B_0^2 / (2\mu_0)}, \quad (3.14)$$

siendo P_0 la presión máxima alcanzada en el plasma. En términos más generales, el factor β es el cociente entre la energía potencial mecánica de la presión y la energía magnética externa necesaria para producirla. También puede dar una idea de la potencia termonuclear generada en la descarga, ya que en temperaturas de 10 a 15 keV dicha potencia es medianamente proporcional a P^2 [8]. El definir al factor como un cociente de energías hace que existan varias maneras de calcularlo, dependiendo de la facilidad y/o conveniencia de las mediciones necesarias y de la información que se

quiera reportar. En este trabajo también se utilizara el β medio, que está dado por la expresión

$$\beta = \frac{\frac{1}{V} \int_V P dV}{B_0^2 / (2\mu_0)}, \quad (3.15)$$

con V el volumen del plasma [8].

3.3.5. Corriente total

La corriente toroidal total del plasma I_ϕ es otro parámetro de interés para describir las descargas. En general su valor es del orden de los MA en los tokamaks medianos modernos, alcanzando los 15 MA en el escenario base planeado para el proyecto ITER. La corriente total tiene varias contribuciones, las cuáles se detallarán en las siguientes secciones. Usualmente, la principal es inductiva, producida por el campo magnético del solenoide central. Por otra parte, las contribuciones no inductivas provienen de la resonancia con ondas de radiofrecuencia, la inyección de haces de partículas neutras y la corriente de *bootstrap*. Esta última es generada por gradientes radiales de densidad dentro del plasma [53], y es de suma importancia para los escenarios avanzados de operación ya que se reduce la necesidad de contribución inductiva si la fracción de corriente de bootstrap es lo suficientemente alta.

El interés en reducir la necesidad de corriente inductiva se halla en que el plasma actúa como el circuito secundario de un transformador, con el solenoide central como circuito primario. Por esta razón, la corriente inductiva no puede generarse de manera estacionaria, a diferencia de los aportes externos no inductivos. Lograr prescindir de la corriente inductiva una vez alcanzadas las condiciones deseadas en el plasma es fundamental para obtener un régimen estacionario de confinamiento.

3.3.6. Factor de seguridad q

El factor q es una cantidad de flujo de interés, ya que está asociado con la estabilidad de la descarga. Puede definirse por la expresión

$$q = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{d\Psi}, \quad (3.16)$$

de donde se puede deducir que su valor coincide con el número de vueltas que da una línea de campo magnético en la dirección toroidal por cada tránsito poloidal.

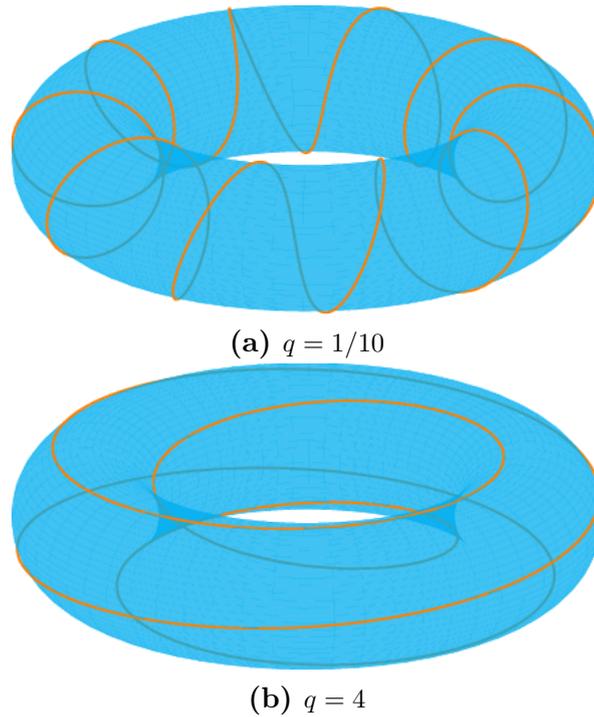


Figura 3.4: Esquema de las líneas de campo en una descarga. El factor de seguridad q se puede asociar a la cantidad de “vueltas” que da una línea de campo en sentido toroidal por cada vuelta que da en sentido poloidal.

Como referencia, se utilizan los denominados q_0 y q_{95} , localizados en el eje magnético y en la superficie magnética que contiene al 95 % del flujo magnético toroidal, respectivamente. La referencia q_{95} está relacionada con la corriente total en el plasma, y un valor mayor equivale a una menor corriente, manteniendo los demás parámetros fijos.

Experimentalmente se observa que en las descargas en donde se obtienen valores racionales de q hay una posibilidad de presentar inestabilidades. En un reactor tokamak, como el campo toroidal es mayor que el campo poloidal, el valor del factor de seguridad normalmente se encuentra por encima de la unidad.

3.3.7. Ángulo de inclinación magnético

El ángulo de inclinación magnético γ en un reactor tokamak se calcula como

$$\tan(\gamma) = \frac{B_{pol}}{B_{\phi}}, \quad (3.17)$$

es decir, el ángulo del vector de campo magnético con la dirección toroidal. También denominado *pitch angle* (ángulo de inclinación), este ángulo puede medirse por métodos no invasivos, como el diagnóstico MSE (por sus siglas en inglés, *Motional Stark Effect*), en el cual se mide el ángulo de polarización de línea de Stark que emiten partículas neutras inyectadas en el plasma [54].

3.3.8. Radio medio normalizado

Otro parámetro es el radio medio normalizado ρ de cada superficie magnética, definido como

$$\rho^2 = \frac{\Phi(\Psi)}{\Phi_0}, \quad (3.18)$$

donde Φ_0 es el flujo de la separatriz, es decir, el flujo magnético toroidal total. Al estar derivado de Φ , es una cantidad de flujo y puede utilizarse como coordenada. Es usual utilizarla, dado que como los tokamaks poseen un campo magnético mayoritariamente toroidal, hay una menor variabilidad entre descargas, a diferencia del flujo magnético poloidal.

3.4. Aspectos de la operación

En los tokamaks tradicionales se utilizan bobinas de cobre. Por tanto, los dispositivos funcionan intermitentemente, en lo que se denominan descargas de plasma, dado que no es posible mantener baja la temperatura de las bobinas. Estas descargas poseen una duración en el orden de segundos, en donde se inyecta el gas a confinar luego de encender las bobinas del dispositivo. Una vez ingresado el gas a la cámara del tokamak, se comienza a reducir la corriente del solenoide central, lo que produce una corriente toroidal en el gas, y este comienza a calentarse. El gas entonces se ioniza y cambia de estado, en un proceso donde se controla su posición, sección transversal y corriente total. Una vez que el plasma comienza a calentarse, se mantiene fija la corriente toroidal y comienza propiamente el experimento de confinamiento. La finalización de la descarga está gobernada por el solenoide central; cuando ya no es posible mantener el flujo magnético, la corriente toroidal del plasma comienza a descender y se destruye el confinamiento [55].

Al momento de realizar una descarga de plasma en un reactor, existen diferentes “recetas” para lograr las características del confinamiento deseadas. Estas recetas dan lugar a lo que se denominan escenarios de operación.

3.4.1. Métodos de calentamiento

En todos los reactores tokamak, la primera etapa de calentamiento del plasma se realiza por disipación óhmica [8]. La corriente toroidal generada en el plasma por el solenoide central calienta al plasma mientras éste tenga temperaturas bajas, dado que la resistividad se reduce conforme aumenta la temperatura. Para la siguiente etapa de calentamiento, se utilizan principalmente 2 métodos: la inyección de haces de partículas neutras y la emisión de ondas EM en las frecuencias de ciclotrón iónica y electrónica. Los haces deben ser de partículas neutras para poder penetrar hacia el interior del plasma. Se parte de iones cargados que se neutralizan luego de ser acelerados, por medio de un gas target. Una vez que ingresan al plasma, las partículas vuelven a obtener carga y se confinan dentro de los campos magnéticos, depositando su excedente de energía en la descarga, aumentando la temperatura. Las partículas pueden inyectarse en distintas orientaciones respecto al plasma, como se puede ver en la figura 3.5.

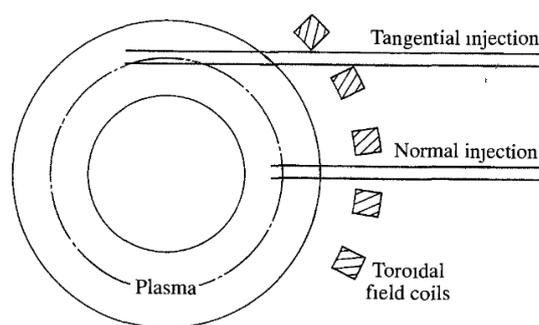


Figura 3.5: Esquema de las posibles localizaciones del haz de partículas neutras respecto al plasma.

Una maqueta esquemática de los cañones de haces planeados para el proyecto ITER se puede ver en la figura 3.6.

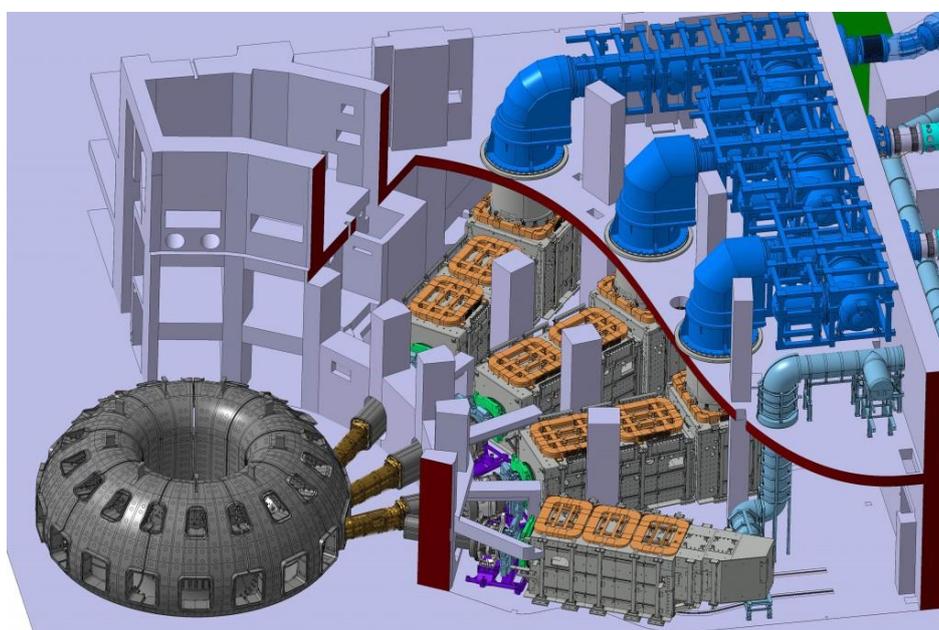


Figura 3.6: Maqueta 3D de los cañones de haces del tokamak diseñado en el proyecto ITER. Se pueden apreciar las distintas orientaciones de los cañones, lo que permite incidir los haces de iones en diferentes ángulos.

El calentamiento por absorción resonante se realiza excitando frecuencias normales en el plasma, como la frecuencia de ciclotrón. El diseño del sistema de calentamiento debe ser tal que las ondas de radiofrecuencia logren penetrar hasta el interior del plasma. Esto implica que deben realizarse cálculos sobre la propagación no lineal de las ondas a través del plasma, acoplado con la interacción de las mismas con las partículas confinadas [8].

3.4.2. Modos de confinamiento

Los diferentes comportamientos de una descarga se pueden dividir en 4 categorías [8]. La primera está relacionada con el calentamiento óhmico, y las restantes se producen por medio del calentamiento adicional y están asociadas a distintos modos de

confinamiento.

De las categorías asociadas a la segunda etapa de calentamiento, la primera es denominada modo L, por *Low confinement mode*. Este modo se caracteriza por un bajo tiempo de confinamiento, el cuál se degrada conforme aumenta la cantidad de energía suministrada. En 1982, en el reactor ASDEX se descubrió un nuevo modo de confinamiento, el cuál se llamó modo H (por *High confinement mode*) [56]. Este modo se logra mediante una transición que sucede en el modo L, una vez que se suministra una cierta cantidad de energía. La capacidad de confinamiento del reactor aumenta alrededor de la separatriz del plasma, generando un pedestal de presión como se observa en la figura 3.7. Esta mejora puede llegar a duplicar el tiempo de confinamiento promedio del modo L [8].

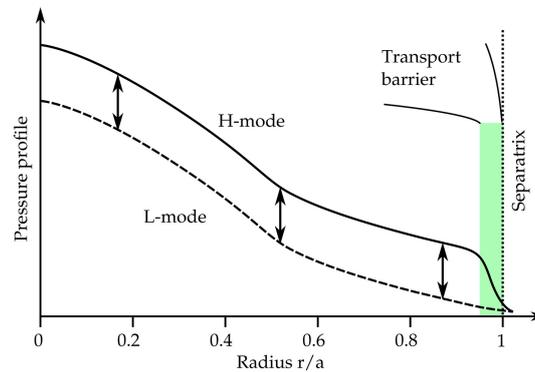


Figura 3.7: Diferencia en el perfil de presión entre los modos L y H. Se observa un pedestal de presión cerca de la separatriz del plasma en el modo H, a diferencia del modo L [8].

La última categoría está relacionada con los escenarios avanzados de confinamiento. En estos escenarios se produce una barrera de transporte, como en el modo H, pero localizada en el seno del plasma en vez de en las cercanías de la separatriz. A su vez, sucede el fenómeno denominado *reversed magnetic shear* (en español, cizalladura magnética revertida), en donde la derivada del perfil de factor de seguridad cambia de signo.

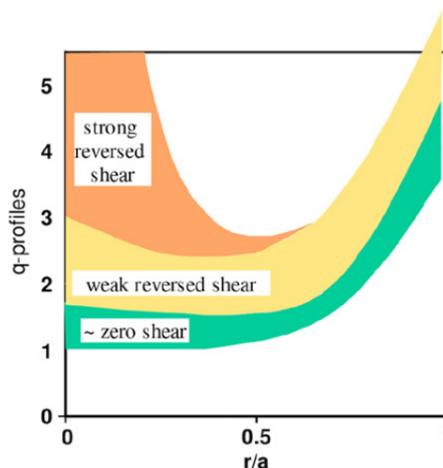


Figura 3.8: Diferentes perfiles del factor de seguridad q , catalogados por la cantidad de reversed magnetic shear que poseen [10].

Ante la existencia del fenómeno de reversed magnetic shear, en el plasma puede

aumentar considerablemente la cantidad de corriente de bootstrap toroidal [57]. Cuando existe una barrera de transporte interna (llamada ITB por sus siglas en inglés, *Internal Transport Barrier*), se observa un aumento en la derivada del perfil de presión respecto al modo H, como se ve en la figura 3.9.

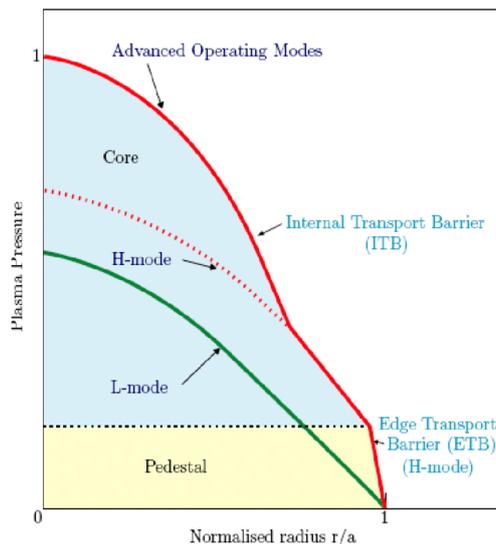


Figura 3.9: Comparación esquemática de perfiles de presión entre los distintos modos de confinamiento [11].

En base a estos aspectos de operación se eligieron los casos de estudio para la aplicación de los códigos numéricos desarrollados.

3.5. Escenarios de operación

Son el conjunto de características que posee una descarga, como pueden ser los modos de confinamiento, perfiles de q , corrientes totales, valor de β , entre otros. Los escenarios elegidos para las simulaciones son los publicados por Shimada *et al.* [10], planeados para el tokamak de ITER. Estos escenarios se denominan escenario inductivo, híbrido y avanzado.

3.5.1. Escenario inductivo

Se caracteriza por una corriente toroidal mayoritariamente inductiva, generada por el solenoide central. El perfil del factor de seguridad q es monótono y posee una superficie en donde $q = 1$, por lo que puede sufrir inestabilidades del tipo *sawtooth* [58]. Si bien es el escenario más prometedor para alcanzar el valor $Q = 10$ planeado para el reactor, tiene las desventajas de que su funcionamiento es pulsado y relativamente corto frente a los demás escenarios, y es más susceptible a inestabilidades MHD que pueden terminar con la descarga prematuramente.

3.5.2. Escenario híbrido

Son descargas confinadas en modo H, con ningún o muy poco reversed magnetic shear y con valores de q cerca de la unidad en el eje magnético, pero sin superficies magnéticas en donde $q = 1$. Es un escenario prometedor para la operación en estado estacionario, con un valor esperado de $Q > 5$. En este escenario se puede obtener un valor de β alto, ya que posee una menor cantidad de corriente toroidal que el escenario inductivo. Además, una fracción de alrededor de hasta el 30 % de la corriente es corriente de bootstrap.

Aunque el perfil de q sea mayor que 1 en todas las superficies, el plasma sigue siendo susceptible a otras inestabilidades, como los tearing modes o kink internos.

3.5.3. Escenario avanzado

Son creados cuando más del 50 % de la corriente toroidal es generada de manera no inductiva. El perfil de q posee una zona con un gran reversed magnetic shear, lo que genera la formación de ITBs. En esta situación, la corriente de bootstrap crece y se vuelve posible mantener toda la corriente toroidal por medios no inductivos, prescindiendo así de la necesidad del solenoide central. Sin embargo, la corriente toroidal es menor que en los anteriores escenarios, lo que reduce las reacciones de fusión. Por otra parte, por la baja corriente hay un menor confinamiento de partículas α y demás partículas energéticas, lo que equivale a energía térmica de fusión que no se deposita en el plasma. Además, este escenario posee una mayor difusión respecto a los anteriores, con una mayor deposición de impurezas en la zona de la ITB, por el frenamiento que causa el cambio del gradiente de densidad.

3.6. Inestabilidades

Desde los primeros experimentos de confinamiento magnético, se descubrió que existen una serie de inestabilidades que pueden degradar significativamente la capacidad de mantener la configuración o incluso destruirla. Si bien en un tokamak esto no representa un problema de seguridad, se reduce en gran medida la performance del dispositivo, y pueden ocurrir daños superficiales en la cámara de vacío cuando el plasma entra en contacto con ellas.

A continuación se detallan algunas de las inestabilidades o situaciones que pueden surgir en una descarga de plasma dentro de un tokamak.

3.6.1. Tearing modes

Los *tearing modes* (modos de desgarramiento) son eventos resistivos, generados entre superficies magnéticas y que suceden en superficies con un valor de q racional, denominadas resonantes. Entre las superficies resonantes existe un atraso y un adelanto del valor de q en las superficies magnéticas adyacentes, lo que genera un esfuerzo de corte sobre la superficie resonante. Ante este esfuerzo, se generan fuerzas restitutivas que producen láminas de corriente, y en estas láminas el campo magnético puede desacoplarse del plasma. En un proceso de reconexión, las líneas de campo magnético se rompen y recombinan, formando lo que se denominan islas magnéticas.

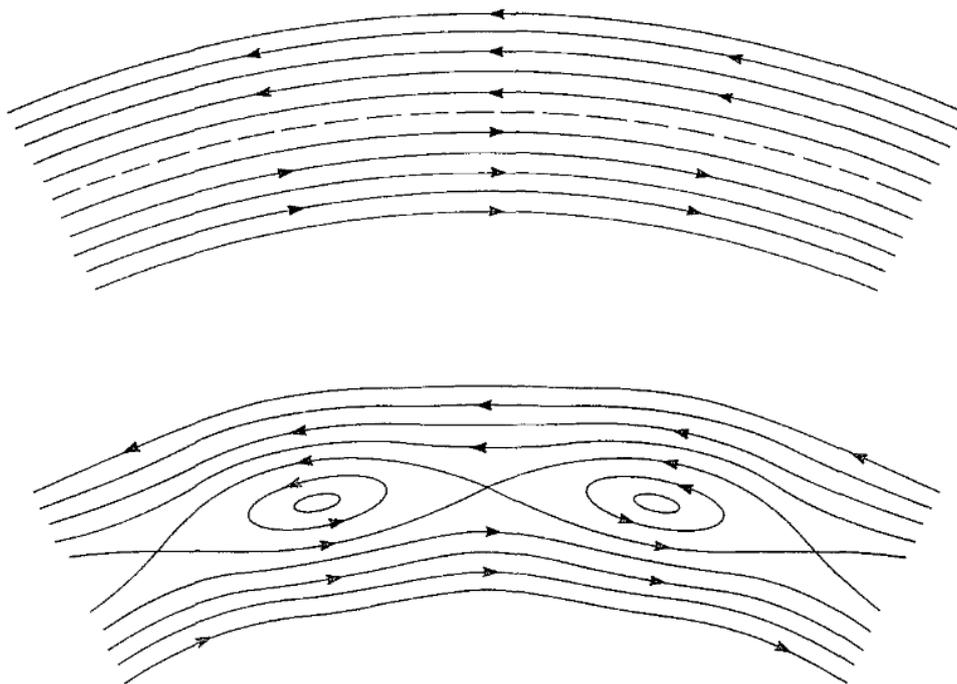


Figura 3.10: Esquematación de islas magnéticas [8]. Las líneas de campo magnético se quiebran y se reconectan formando “islas” que aumentan el transporte dentro del plasma.

El problema que traen consigo las islas magnéticas es que aumentan el transporte dentro del plasma, haciendo que distintas zonas se conecten rápidamente entre sí. Si bien dicho aumento del transporte suele ser localizado y el plasma lo puede tolerar, el crecimiento de la isla puede ser inestable, lo que resulta en la aniquilación de la topología del campo magnético original, destruyendo el confinamiento.

3.6.2. Kink modes

Las inestabilidades de *kink* (torcedura) se producen por diferencias de densidad de campo magnético. Si en el plasma el campo magnético empieza a comprimirse, generará una presión magnética mayor que en las zonas donde no está comprimido. Si no se controla este exceso de presión, el plasma puede modificarse de manera tal que se produce una realimentación positiva con la compresión del campo magnético, destruyendo el confinamiento. Existen modos de *kink* externos e internos, los cuáles pueden ser analizados por el principio de la energía [9]. La diferencia entre los modos externos e internos radica en que en los primeros existe un desplazamiento en la separatriz, mientras que en los últimos no.

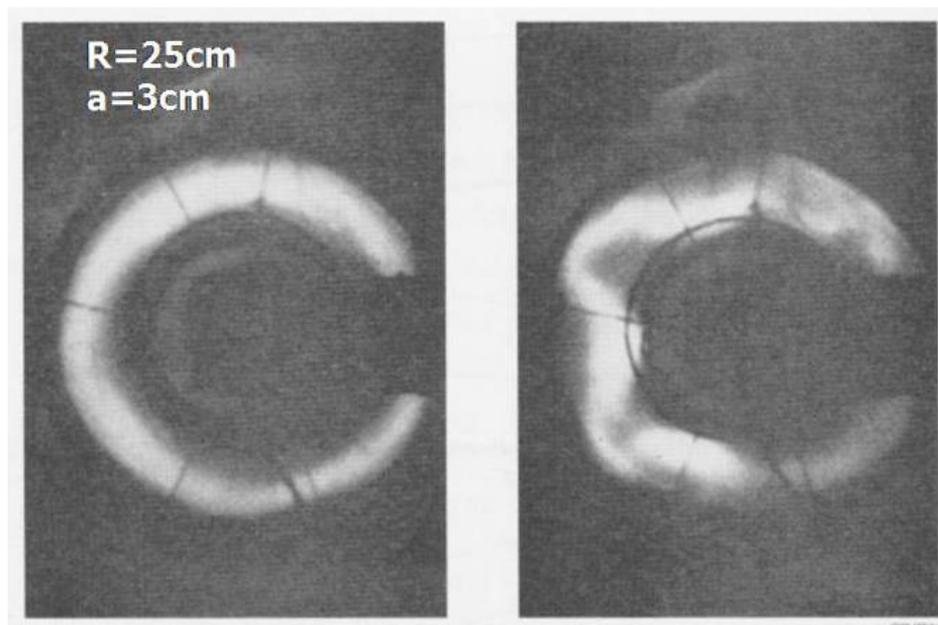


Figura 3.11: Foto de un plasma confinado toroidalmente, en donde se puede observar una inestabilidad de kink externa. Las zonas en donde el campo magnético se comprime aumenta la presión, lo que deforma al plasma comprimiendo aún más al campo.

3.6.3. Vertical displacement event

En un evento VDE (*Vertical Displacement Event*, evento de desplazamiento vertical) se pierde el control de la posición vertical de la descarga. Se puede asociar a una inestabilidad de kink, y en este evento el plasma comienza a moverse en dirección vertical. Llegado a este punto se debe de detener la descarga, dado que el plasma puede colisionar con las bobinas del reactor y dañarlas en el proceso.

3.6.4. Edge Localized Modes

Los *Edge Localized Modes* (ELMs, modos localizados en el borde) son inestabilidades que se producen en los modos H de confinamiento, en las superficies magnéticas donde ocurre el pedestal de presión. Estas inestabilidades son localizadas, como su nombre lo indica, y producen pérdidas de energía y partículas cerca de la separatriz del plasma. Estas pérdidas pueden ser muy altas, al punto de reducir el tiempo de confinamiento de la descarga. Como suceden en el modo H de confinamiento, evitar que ocurran ELMs es importante para producir energía de manera estacionaria.

3.6.5. Inestabilidad de sawtooth

Esta inestabilidad se produce cuando el perfil de q es menor a 1 cerca del eje magnético. Aparece una variación periódica de temperatura en el plasma cerca del centro, en donde el valor sube monótonamente hasta cierto valor, en donde rápidamente decae a un valor menor. En función del tiempo, esta variación periódica tiene la forma de un diente de sierra, de ahí el nombre *sawtooth*.

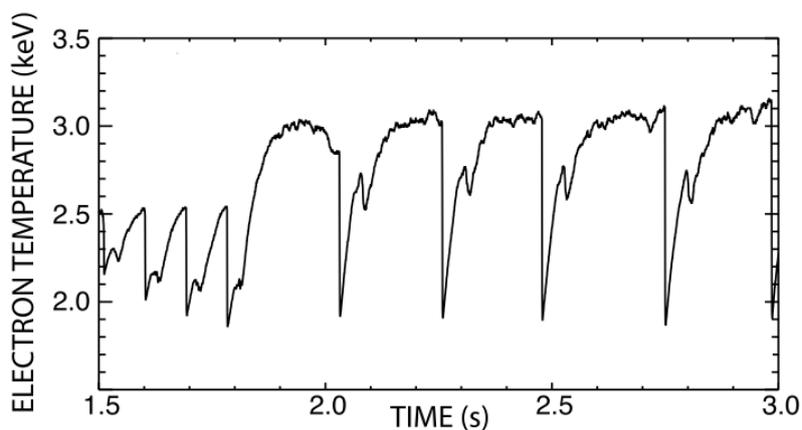


Figura 3.12: Medición de la temperatura en la zona central de una descarga realizada en el reactor DIII-D [12]. Se puede observar el comportamiento periódico de la temperatura, donde esta cae abruptamente para luego volver a elevarse, de manera periódica.

En este proceso, la temperatura acumulada en el centro se distribuye hacia el resto del plasma cuando su valor cae precipitadamente, por lo que al igual que las islas magnéticas esta inestabilidad calienta al resto del plasma. Sin embargo, esta redistribución impacta en el tiempo de confinamiento y, además, pueden generar tearing modes [9].

Capítulo 4

Resolución del equilibrio magnetohidrodinámico con frontera fija

“Develop what is skillful, monks. It is possible to develop what is skillful. If it were not possible to develop what is skillful, I would not say to you, ‘Develop what is skillful’.”

— Buddha, Anguttara Nikaya 2.19, 500 BC.

En este capítulo se desarrolla el planteo del problema diferencial a resolver. Los pasos realizados consisten en adimensionalizar la ecuación de G-S (ecuación 3.9) y plantear el problema diferencial como un problema de Poisson.

4.1. Planteo del problema diferencial

En configuraciones con simetría de revolución, la geometría y estructura magnética del plasma se obtienen a partir de la ecuación de G-S 3.9. Existen dos enfoques comunes para plantear el problema del equilibrio:

- **Problema de frontera libre.** En el caso que se adopta todo el espacio como dominio, el problema diferencial se especifica prescribiendo las distribuciones de corriente de las bobinas de campo poloidal (incluyendo el solenoide central), en vacío, en las paredes de la cámara y otros elementos externos e imponiendo como condición de contorno que Ψ tiende a cero en infinito. En estos casos, la forma funcional de las funciones de arbitrarias $F(\Psi)$ y $P(\Psi)$ suele ser lo más simple posible porque el principal objetivo es resolver la interacción de la corriente toroidal del plasma con la de las bobinas y elementos ferromagnéticos estructurales.
- **Problema de frontera fija.** Cuando se requiere un detalle más preciso del comportamiento de los perfiles internos del plasma, el problema se restringe a la separatriz, de modo que la ecuación de G-S se resuelve únicamente donde está el plasma. En este caso, la forma de la separatriz se especifica como dato (geometría del dominio) y será resultado de alguna distribución de corrientes en las bobinas externas, *a priori* desconocida. Este desacoplamiento permite resolver dependencias más complejas para $F(\Psi)$ y $P(\Psi)$ y por lo tanto obtener distribuciones más

precisas de los perfiles magnéticos y cinéticos que determinan la estabilidad y performance del plasma.

En este trabajo nos enfocamos en el problema de frontera fija, que podemos formular de la siguiente manera,

$$\begin{cases} -\Delta^*\Psi = \mu_0 R^2 \frac{dP}{d\Psi} + F \frac{dF}{d\Psi} & \text{en } \Omega \\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $\partial\Omega$ representa la separatriz que limita al plasma, que es un dato del problema. Otra distinción importante en el planteo del problema es la referente al tipo de información disponible para los perfiles del plasma. Como se ve en la ec. 4.1, la información requerida son los perfiles $P(\Psi)$ y $F(\Psi)$.

Cuando se especifica una dependencia para estos dos perfiles, el problema del equilibrio queda bien planteado en forma directa, y por eso nos referimos a él como *problema directo*. En general, estos perfiles no se conocen y resulta de interés obtener el equilibrio a partir de otros perfiles del plasma, como el factor de seguridad o el ángulo de inclinación del campo magnético. En estos casos no se conoce *a priori* la ecuación diferencial a resolver, sino que hay que inferirla. Por eso nos referimos a estos casos como *problemas inversos* y se tratan en las secciones 4.3.4 y 4.4.

Antes de describir los métodos de resolución, efectuamos primero la adimensionalización de todas las cantidades y luego la normalización de la función incógnita, como se describe en las siguientes secciones.

4.1.1. Adimensionalización

Además de μ_0 , para adimensionalizar la ecuación de G-S se necesita una escala de longitud y una escala de campo magnético. En este trabajo se utilizó el radio menor del tokamak, a , para la primera y el campo toroidal de referencia en el eje geométrico, B_0 , para la última. Por análisis dimensional, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \frac{\Psi}{B_0 a^2}, \quad \tilde{P} = \frac{P \mu_0}{B_0^2}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{J} \mu_0 a}{B_0}, \\ \tilde{I} &= \frac{I \mu_0}{B_0 a}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{B_0 a}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

De ahora en más, en el desarrollo del presente trabajo se utilizarán variables adimensionalizadas a menos que se especifique lo contrario, por lo que se omitirán las tildes.

4.1.2. Normalización

La ecuación de G-S 3.9 incluye, en el miembro de la derecha (o RHS por sus siglas en inglés), derivadas respecto de la incógnita que se busca hallar. Esto presenta varias dificultades, más allá de los problemas de convergencia numérica que puede ocasionar [59]. Por ejemplo, si se debe especificar que la presión vale p_0 en el eje magnético, la condición es $P(\Psi_0) = P_0$. Pero como no se conoce aún el valor de Ψ_0 , no es posible definir una dependencia funcional correcta para P .

Para evitar este tipo de dificultades, en este trabajo se adopta la práctica de normalizar

la incógnita del problema de la siguiente manera,

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad (4.3)$$

donde ψ es el flujo normalizado que pasa a ser la nueva incógnita y Ψ_0 es el valor de flujo poloidal (adimensional) en el eje magnético, en principio desconocido. Sin perder generalidad, la referencia utilizada es $\psi = 0$ en la separatriz, por lo que la variable normalizada ψ toma valores entre 0 y 1. Incorporando esta definición a la ecuación de G-S, se obtiene

$$-\Delta^* \psi = \frac{1}{\Psi_0^2} \left(R^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2} \frac{df^2}{d\psi} \right), \quad (4.4)$$

en donde

$$\begin{aligned} p(\psi) &= P(\Psi) \rightarrow \frac{dP}{d\Psi} = \frac{1}{\Psi_0} \frac{dp}{d\psi}, \\ f(\psi) &= F(\Psi) \rightarrow \frac{dF}{d\Psi} = \frac{1}{\Psi_0} \frac{df}{d\psi}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De esta manera, Ψ_0 actúa en forma similar a un autovalor, es parte de la solución del problema, debe adoptar el valor adecuado para que el máximo de ψ sea 1 (en el eje magnético). En la práctica, resulta relativamente simple iterar sobre λ para que el problema quede adecuadamente normalizado, usando el método de la bisección por ejemplo. En la sección 4.3.4, explicamos un método para estimar este autovalor basado en la física del problema.

En definitiva, la versión no-lineal del problema diferencial a resolver se plantea de la siguiente forma,

$$\begin{cases} -\Delta^* \psi = \lambda(R^2 p' + f f'), & \text{en } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0, \\ \text{máx}(\psi) = 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

donde redefinimos, por convenciencia, al autovalor como $\lambda = 1/\Psi_0^2$. Las funciones arbitrarias p y f , y sus derivadas, tendrán en general una dependencia no-lineal en ψ por lo que recurrimos al método iterativo de Newton-Rapshon, como se detalla en la sección 4.2.2.

4.1.3. Densidad de corriente en la separatriz

La separatriz es la última superficie cerrada, es decir, separa al plasma de la región de vacío. Pero este límite tiene un cierto espesor. La delgada capa donde todas las cantidades cinéticas (densidad, presión, temperatura) y la densidad de corriente se hacen cero, se denomina *scrape-off layer* (SOL). Empleando el problema 4.6 es posible modelar el equilibrio de fuerzas del plasma tanto hasta el comienzo de la SOL, como hasta la región de vacío incluyendo esta capa. En el primer caso, es posible que los gradientes de presión y corriente (p' y f') no se anulen en $\psi = 0$ (que representaría la cara interna de la SOL, en este caso), y por lo tanto no se anulará la densidad de corriente en el borde del dominio de cálculo. En el segundo caso, como el dominio termina donde no hay plasma, la condición física más natural es pedir que se anule la

densidad de corriente, con lo que las funciones p' y f' deben anularse en $\psi = 0$.

La elección de una aproximación u otra para la descripción de los perfiles del plasma tiene consecuencias en las características de las soluciones del problema matemático a resolver. En el primer caso, cuando el enfoque de modelado permite que p' , f' o ambos sean no nulos en el borde (y por lo tanto no se anula la densidad de corriente), el problema es no-homogéneo, lo cual excluye inmediatamente a la función cero como solución del problema. En este caso, una vez especificados p y f y sus derivadas, el problema del equilibrio MHD se asemeja, matemáticamente, a un problema de Poisson, en general no lineal, haciendo que la solución por elementos finitos siga lineamientos estándar.

En el caso homogéneo, el miembro de la derecha se anula en $\partial\Omega$, lo que junto con la condición de Dirichlet, $\psi|_{\partial\Omega} = 0$, hace que la función nula sea solución del problema. En este caso conviene distinguir el problema lineal del no-lineal. Cuando se emplea una dependencia lineal para las funciones arbitrarias, $p' \propto \psi$ y $f f' \propto \psi$, el problema del equilibrio se puede formular como un problema de autovalores, donde el primer autovalor y su autofunción correspondiente son las únicas que tienen sentido físico. En este caso la interpretación del autovalor difiere de la del problema no lineal 4.6, lo que se discute con mayor detalle en la sección 4.2.3.

Por último, mencionamos que si bien el problema no-lineal homogéneo acepta la solución nula, en todos los casos analizados hemos obtenido la convergencia del proceso iterativo a la solución no-trivial de interés. El método empleado se presenta en la sección 4.3 y los resultados en los capítulos 5 y 6.

4.2. Solución del problema directo

La discretización y resolución del problema diferencial, supuestas conocidas las dependencias de las funciones p y f , se realiza mediante la técnica de elementos finitos [60]. Para la implementación de esta aproximación numérica se emplea el entorno FreeFem [61]. FreeFem es un solver de ecuaciones diferenciales, programado en C++, que incluye algoritmos para generación de mallas de elementos finitos, así como esquemas de interpolación eficiente en 1D, 2D y 3D, que permite el abordaje de sistemas de ecuaciones no-lineales y problemas con “multi-física”. A continuación se describe la implementación del solver del problema del equilibrio MHD mediante elementos finitos utilizando FreeFem.

4.2.1. Formulación variacional

La construcción de una aproximación numérica mediante el método de elementos finitos parte de la formulación variacional, o formulación débil, del problema diferencial [60]. Llamaremos $\varphi(\psi)$ a los términos que contienen las derivadas de las funciones arbitrarias en el RHS,

$$-\Delta^* \psi = \lambda \left(R^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2} \frac{df^2}{d\psi} \right) = \lambda \varphi(\psi), \quad (4.7)$$

donde $\lambda = 1/\Psi_0^2$. Con esta definición podemos expresar la formulación variacional del problema del equilibrio de la siguiente manera: hallar ψ y λ tal que,

$$\mathcal{R}(\psi) = \int_{\Omega} \left(\nabla\psi \cdot \nabla\zeta + \frac{\zeta}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} - \lambda\zeta\varphi(\psi) \right) d\Omega = 0, \quad (4.8)$$

para toda función de prueba ζ en un espacio de funciones adecuado $\mathcal{V}(\Omega)$ con $\max_{\Omega}(\psi) = 1$.

Como la función $\varphi(\psi)$ es en general no lineal, no es posible aplicar directamente el método de Galerkin para efectuar la discretización del problema. Por eso, en el caso no-lineal usamos el método de Newton-Raphson que se describe en la sección 4.2.2. Éste es un método iterativo, y como tal requiere una semilla inicial adecuada. La solución del problema lineal provee una buena semilla, cuando se formula y resuelve como problema de autovalores. Esto se detalla en la sección 4.2.3.

4.2.2. Método de Newton-Raphson

Para hallar la raíz del funcional \mathcal{R} de la forma variacional del problema del equilibrio, utilizamos la linealización alrededor de una estimación ψ^k ,

$$J_{\mathcal{R}}(\psi^i)(\delta\psi^{i+1}) = \mathcal{R}(\psi^i), \quad (4.9)$$

de donde calculamos $\delta\psi^{i+1} = \psi^{i+1} - \psi^i$, que permite actualizar la estimación de la solución del problema. Siguiendo el método de Newton-Raphson, la forma diferencial $J_{\mathcal{R}}$ representa el jacobiano de \mathcal{R} , que evaluado en un ψ conocido y actuando sobre la incógnita $\delta\psi$ tiene la siguiente expresión,

$$J_{\mathcal{R}}(\psi)(\delta\psi) = \int_{\Omega} \left(\nabla\zeta \cdot \nabla\delta\psi + \frac{\zeta}{R} \frac{\partial\delta\psi}{\partial R} - \lambda\varphi'(\psi)\zeta\delta\psi \right) d\Omega. \quad (4.10)$$

Empleando la linealización 4.9 podemos convertir el problema no-lineal en una secuencia de problemas lineales de la forma estándar,

$$a(u, v) = b \quad (4.11)$$

donde, $\delta\psi$ juega el rol de la incógnita u , ζ la función de prueba v , el miembro de la derecha se calcula con la ecuación 4.8 evaluada en la estimación ψ^i y la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ está dada por la expresión 4.10. Planteado en estos términos es directa la discretización por Galerkin así como la implementación del cálculo por elementos finitos empleando un entorno como FreeFem++ [61].

Para que se cumpla la condición de borde $\psi|_{\Omega} = 0$, partimos de una semilla que la satisface y luego se impone la misma condición para obtener cada $\delta\psi^{i+1}$, de manera que el valor en la separatriz se mantenga en cero.

Es importante destacar que lo descrito en esta sección supone conocido el valor de λ que conduce a una solución debidamente normalizada. En este trabajo emplearemos una estimación de λ basada en la relación de flujos (toroidal y poloidal) que se puede inferir del perfil del factor de seguridad o del ángulo de inclinación del campo. Esta estimación se detalla en la sección 4.3.

En caso de no contar con información de este tipo, es posible efectuar un bucle externo al de Newton-Raphson, donde se busca el valor de λ empleando otro método iterativo,

por ejemplo, el método de la secante que no requiere la determinación explícita del jacobiano del sistema resultante.

4.2.3. Problema lineal

Ya sea como una primera aproximación al problema del equilibrio, o por su utilidad como semilla para resolver problemas no-lineales, la solución del problema lineal es de gran relevancia. Como quedará claro más adelante, para el problema lineal resulta conveniente utilizar la ecuación de G-S sin normalizar la incógnita. La familia de problemas lineales que vamos a considerar queda determinada por la siguiente elección de las funciones arbitrarias,

$$\begin{aligned} P(\Psi) &= P_1\Psi + \frac{P_2}{2}\Psi^2, \\ F^2(\Psi) &= F_0^2 + 2F_1\Psi + F_2\Psi^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde tanto los P_i como F_i son constantes. Con este planteo, P_1 controla el gradiente de presión en la separatriz y P_2 la presión máxima, y por lo tanto el β , de la configuración. El campo toroidal de vacío está dado por $F_0 = B_0R_0$, F_1 da el gradiente de corriente poloidal del plasma en la periferia y F_2 el diamagnetismo (si es negativo) o paramagnetismo (si es positivo) del plasma.

Usando la elección 4.2.3, la ecuación de G-S resulta lineal. En particular, si se adopta P_1 o F_1 no nulas, se obtiene un problema elíptico matemáticamente similar a uno de Poisson con fuente lineal, con solución única, para el cual el método de Galerkin puede aplicarse en forma directa. Sin embargo, que alguna de estas dos constantes sean distintas de cero da lugar a una densidad de corriente no nula en la pared, lo cual tiene poca validez física en la mayoría de los enfoques de modelado, como discutimos en la sección 4.1.3. Por eso se discute a continuación, cómo es posible resolver el caso homogéneo.

Caso lineal homogéneo: problema de autovalores

Al tomar $P_1 = F_1 = 0$, la función lineal del miembro de la derecha se vuelve homogénea (se anula para $\Psi = 0$) y se obtienen dos ventajas en cuanto a la representación de la física del problema. Por un lado la densidad de corriente en la separatriz se anula. Por otro lado, la solución del problema deja de ser única y pasa a estar definida a menos de una constante. Esto permite reescalar la solución de para obtener un valor de corriente total del plasma especificado previamente. Como contrapartida, el problema se convierte en uno de autovalores, lo que dificulta su solución (respecto del problema de Poisson no-lineal). Esto se ve claramente al plantear el problema lineal homogéneo,

$$\begin{cases} -\Delta^*\Psi = (R^2P_2 + F_2)\Psi & \text{en } \Omega \\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Este problema tiene solución idénticamente nula, excepto para combinaciones específicas de las constantes P_2 y F_2 , que actúan como autovalores que vuelven singular el operador lineal. En ese caso la solución es una autofunción del operador de G-S y es solución del problema. Como toda autofunción, está definida a menos de una constante multiplicativa.

Método de resolución del problema de autovalores

Como la única autofunción que tiene sentido físico relevante es la primera, aprovechamos el comportamiento resonante del problema lineal. Para esto introducimos una pequeña perturbación en el miembro de la derecha,

$$\begin{cases} -\Delta^*\Psi = (R^2P_2 + F_2)\Psi + \epsilon & \text{en } \Omega \\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

que equivale a permitir una pequeña corriente en la separatriz. Luego, fijamos el valor de P_2 y buscamos el comportamiento resonante barriendo en F_2 (que actúa como autovalor). A medida que F_2 se acerca a la primera resonancia, el máximo de la solución aumenta en forma divergente. En la práctica, tomando $\epsilon = 10^{-8}$ y buscar, con el método de la secante, el valor de F_2 que da un máximo de Ψ mayor a uno, alcanza para obtener una buena aproximación de la autofunción [1].

Una vez obtenida la autofunción, se renormaliza para que la solución dé la corriente toroidal total que tenga la descarga que se está modelando. Este proceso se repite, barriendo en P_2 , hasta que la solución final tiene, además de la corriente establecida, el valor de β especificado para la descarga. Alternativamente, puede usarse el barrido en P_2 para recuperar un valor especificado de antemano de Δ_s (corrimiento de Shafranov, ver sección 3.3.2).

Cabe notar que el problema lineal planteado de este modo, si bien no requiere de una iteración de Newton-Raphson, requiere dos niveles de iteración: uno para hallar el autovalor y la autofunción y un segundo nivel para determinar el β (o Δ). Por supuesto que el problema podría plantearse especificando F_2 y dejando a P_2 actuar como autovalor. Esto es útil, por ejemplo, para obtener el caso $F_2 = 0$, que delimita los comportamientos diamagnético y paramagnético del plasma.

4.3. Problema inverso a partir de la relación de flujos

Para la determinación de la configuración de equilibrio en un tokamak, la situación más común es que no se conoce la función F . Establecer una aproximación razonable para $P(\Psi)$, o su versión normalizada $p(\psi)$, es posible, pero surge el problema de que el perfil de flujo poloidal es muy variable entre descargas, aun pertenecientes a un mismo escenario. Es decir, que típicamente no se conoce la ecuación diferencial que determina la configuración magnética, y se debe recurrir a información adicional para poder hallarla. Por esto, el problema del equilibrio MHD que nos interesa resulta ser un problema inverso, en el que contamos con parte de información de la solución y debemos inferir la ecuación diferencial y su solución completa.

En esta tesis, nos enfocamos en la solución de dos tipos de problema inverso empleando como dato de entrada la siguiente información:

- (1) el factor de seguridad y la presión como funciones del radio menor normalizado, $q(\rho)$ y $p(\rho)$
- (2) el ángulo de inclinación del campo como función de R a lo largo del plano ecuatorial, $\gamma(R_{ec})$ y la forma del perfil de presión, $\tilde{p}(\psi)$.

La formulación completa de estos casos y la determinación de las funciones arbitrarias del RHS de la ecuación de G-S a partir de esta información se detalla en las secciones

4.3.4 y 4.4, respectivamente. Pero antes, mostramos cómo es posible estimar $df^2/d\psi$ y $dp/d\psi$ a partir de un equilibrio de referencia, el gradiente de presión $dp/d\rho$, la relación entre las coordenadas de flujo $d\psi/d\rho$ y una estimación del Ψ_0 para el equilibrio objetivo. Para esto utilizamos la ecuación de G-S promediada en superficies de flujo.

La definición de residuos utilizada en este trabajo está definida como el cociente entre la norma 2 de la diferencia entre un perfil dato ξ_{dato} y un perfil obtenido ξ_{obt} , y la norma 2 del perfil ξ_{dato} . Es decir,

$$\text{Residuo}(\xi_{dato}, \xi_{obt}) = \frac{\|\xi_{dato} - \xi_{obt}\|}{\|\xi_{dato}\|}. \quad (4.15)$$

4.3.1. Promediado en superficies de flujo

El promedio de una variable arbitraria A sobre una superficie de flujo se define como [52],

$$\langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial V} \int_{V(\psi)} A dV, \quad (4.16)$$

donde $V(\psi)$ representa el volumen encerrado dentro del contorno de flujo ψ . Una expresión más práctica se puede obtener empleando solamente integrales de contorno,

$$\langle A \rangle = \frac{2\pi}{V_\psi} \oint A \frac{Rdl}{|\nabla\psi|}, \quad (4.17)$$

donde,

$$V_\psi = \frac{dV}{d\psi} = 2\pi \oint \frac{Rdl}{|\nabla\psi|}. \quad (4.18)$$

De las expresiones 4.17 y 4.18 queda claro que el valor de las cantidades de flujo coincide con el de su promedio.

Por otro lado, es posible obtener la siguiente identidad para calcular el promedio de la divergencia de un campo vectorial \mathbf{A} ,

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{V_\psi} \frac{d}{d\psi} [V_\psi \langle \mathbf{A} \cdot \nabla\psi \rangle]. \quad (4.19)$$

Si bien hemos empleado el flujo poloidal normalizado como coordenada de flujo, es posible utilizar cualquier otra. En particular, nos interesa utilizar también el radio menor normalizado que está basado en el flujo toroidal y por lo tanto tiene una variación mucho menor entre los equilibrios de un mismo escenario.

4.3.2. Ecuación de G-S promediada

Reemplazando la definición del operador de G-S,

$$\Delta^* \psi = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\psi}{R^2} \right), \quad (4.20)$$

en la ecuación 4.1 y reordenando, se obtiene

$$-\Psi_0^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\psi}{R^2} \right) = \frac{dp}{d\psi} + R^{-2} \frac{1}{2} \frac{df^2}{d\psi}. \quad (4.21)$$

Expresada de esta manera, el único término que es una cantidad de superficie es el gradiente de la presión (primer término de la derecha).

El balance de fuerzas 4.21 es válido en todos los puntos del plasma. Tomando el promedio de esta ecuación en contornos de flujo, obtenemos la ecuación de G-S promediada,

$$\frac{\Psi_0^2}{V_\psi} \frac{d}{d\psi} \left[\left\langle \frac{|\nabla\psi|^2}{R^2} \right\rangle V_\psi \right] = -\frac{dp}{d\psi} - \frac{\langle R^{-2} \rangle}{2} \frac{df^2}{d\psi}, \quad (4.22)$$

que nos da una relación muy útil entre la función f , el gradiente de presión y propiedades geométricas del equilibrio.

4.3.3. Determinación de las funciones arbitrarias

Para estimar las funciones arbitrarias del RHS, planteamos un esquema iterativo, partiendo de un equilibrio de referencia con la misma separatriz. La actualización de la aproximación al equilibrio objetivo, desde el nivel k al $k+1$, requiere una estimación de $(dp/d\psi)_{k+1}$ y $(df^2/d\psi)_{k+1}$. Para hallar estos perfiles actualizados, suponemos conocido el gradiente de presión $dp/d\rho$ del equilibrio objetivo y que además podemos obtener una estimación para la relación entre los flujos $(d\psi/d\rho)_{k+1}$ y el flujo poloidal total Ψ_0^{k+1} (que actúa como autovalor en el problema no-lineal).

En primer lugar podemos actualizar el gradiente de presión utilizando simplemente la regla de la cadena,

$$\left(\frac{dp}{d\psi} \right)_{k+1} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{dato} \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)_{k+1}^{-1}. \quad (4.23)$$

La determinación de la función de corriente poloidal del plasma se realiza empleando la ecuación de G-S promediada 4.22. Utilizando la regla de la cadena para cambiar las derivadas respecto de ψ por derivadas respecto de ρ y despejando se obtiene,

$$\left(\frac{df^2}{d\psi} \right)_{k+1} = -\frac{2}{\langle R^{-2} \rangle} \left\{ \left(\frac{dp}{d\psi} \right)_{k+1} + \frac{(\Psi_0^{k+1})^2}{V_\rho} \frac{d}{d\rho} \left[V_\rho \left\langle \frac{|\nabla\rho|^2}{R^2} \right\rangle \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)_{k+1} \right] \right\}, \quad (4.24)$$

donde $V_\rho = dV/d\rho$ y $\nabla\rho$ se obtiene también por regla de la cadena a partir de $\nabla\psi$. Los términos que no tienen índice $k+1$, a saber V_ρ , $\langle R^{-2} \rangle$ y $\langle |\nabla\rho|^2/R^2 \rangle$, corresponden a factores geométricos del equilibrio de referencia a nivel de iteración k . Esta aproximación se basa en el hecho de que la forma de los contornos de flujo y su contenido de flujo toroidal varía muy poco entre una iteración y otra, gracias a que el campo toroidal en un tokamak es dominante. Con las funciones obtenidas usando las expresiones 4.23 y 4.24 más la estimación Ψ_0^{k+1} , es posible calcular el equilibrio mediante las técnicas descriptas para el problema directo, y avanzar un paso la iteración hacia el equilibrio objetivo, actualizando a su vez los factores geométricos.

4.3.4. Determinación del equilibrio a partir del factor de seguridad

En muchas situaciones como en estudios de estabilidad, generación de escenarios o desarrollo de modelos de control del plasma, es conveniente hallar el equilibrio a partir de sus perfiles de factor de seguridad y presión como función del radio menor. En estos casos, podemos formular el problema del equilibrio de la siguiente manera,

Problema q -solver: dada la forma de la separatriz, $\partial\Omega$, hallar $\{\Psi_0, f(\psi), p(\psi)\}$ tal que la solución del problema 4.6 satisfaga que $q(\rho) = q_{dato}(\rho)$ y $p(\rho) = p_{dato}(\rho)$,

donde suponemos que la forma de la separatriz es también un dato.

Esta metodología fue desarrollada en trabajos anteriores dentro del grupo [1, 62]. Para la resolución de este problema empleamos un método iterativo partiendo de un equilibrio de referencia que obtenemos a partir de un RHS lineal, como se describe en la sección 4.2.3. Para su empleo como semilla de la iteración, la primera autofunción del problema 4.13 puede ser calculada con $P_2 = 0$ y renormalizando la solución para que q cerca de la separatriz coincida con $q_{dato}(1)$.

Tomando esta autofunción como aproximación en el paso iterativo $k = 0$, actualizamos la terna $\{\Psi_0, p(\psi), f(\psi)\}_k$. Primero, combinando la definición del factor de seguridad 3.16 y la del radio menor normalizado 3.18, obtenemos la siguiente relación,

$$\frac{d\Psi}{d\rho} = B_0 \rho_b^2 \frac{\rho}{q}, \quad (4.25)$$

siendo $\rho_b^2 = \frac{\Phi_0}{\pi B_0}$, que resulta de gran utilidad porque nos permite mejorar la estimación del autovalor,

$$\Psi_0^{k+1} = B_0 (\rho_b^k)^2 \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{q_{dato}(\rho)}, \quad (4.26)$$

por un lado, y también la relación de flujos,

$$\left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)_{k+1} = \frac{B_0 (\rho_b^k)^2}{\Psi_0^{k+1}} \frac{\rho}{q_{dato}(\rho)}. \quad (4.27)$$

Con estas dos actualizaciones es posible corregir la aproximación de las funciones arbitrarias del RHS con las ecuaciones 4.23 y 4.24, y resolver el problema 4.6 para alcanzar la iteración $k + 1$. Se procede de la misma forma hasta que $\|q_{k+1}(\rho) - q_{dato}(\rho)\|$ sea menor que una tolerancia prescrita, o bien, continuar el proceso iterativo hasta que la norma de la diferencia deja de disminuir (es decir, se alcanza la máxima precisión posible compatible con la resolución utilizada).

4.4. Determinación del equilibrio a partir del ángulo del campo magnético

El caso de mayor interés para esta tesis es el de determinar el equilibrio a partir de la medición del ángulo del campo magnético, γ , junto con una estimación de la forma del perfil de presión (o bien su gradiente). De la misma forma que en el problema directo y en la determinación a partir del factor de seguridad, necesitamos dos perfiles con información, uno de la distribución de corriente en el plasma (f , q y, en este caso γ) y otro de la presión (o temperatura, pues la densidad del plasma suele tener una variación suave).

Por otro lado, las diferencias que plantea la resolución a partir del ángulo de inclinación del campo son principalmente dos. La más importante es que el dato se mide en determinadas posiciones espaciales, es decir, que la información del perfil que caracteriza la distribución de corriente es función de una coordenada espacial, y no una coordenada de flujo (como se pide para f y q). La otra diferencia es tiene que ver con la posición

del eje magnético y su relación con la presión del plasma. Suponiendo que la medición del ángulo de inclinación se realiza en el plano ecuatorial, la posición del eje magnético queda determinada por el cruce por cero del perfil $\gamma(R)$. Esto representa una restricción espacial para la solución que estamos buscando. Las otras formulaciones del problema no tienen una condición de esta naturaleza.

Planteo del problema

En este caso, planteamos el problema del equilibrio de la siguiente manera,

Problema γ -solver: dada la forma de la separatriz $\partial\Omega$, hallar $\{\Psi_0, f(\psi), \tilde{p}(\psi), p_0\}$ tal que la solución del problema 4.6 satisfaga $\gamma(R_{ec}) = \gamma_{dato}(R_{ec})$ y el perfil de presión normalizado sea $p(\rho)/p_0 = \tilde{p}_{dato}(\rho)$,

donde suponemos que el perfil de γ se mide en el plano ecuatorial (plano horizontal a la altura del eje magnético), por eso el subíndice *ec* en la coordenada radial, y la presión dato está normalizada a uno, pues p_0 (la amplitud del perfil de presión) pasa a ser parte del problema a resolver: el valor de p_0 adecuado es el que da un equilibrio con la posición del eje magnético determinada por el cruce por cero de γ_{dato} .

Relaciones para el ángulo de inclinación

El perfil del ángulo de inclinación del campo magnético, medido en el plano ecuatorial, verifica

$$\tan [\gamma(R_{ec})] = \frac{B_{\theta,ec}}{B_{\phi,ec}}, \quad (4.28)$$

es decir, es proporcional al cociente entre las componentes poloidal y toroidal del campo magnético. Para la componente poloidal tenemos,

$$B_{\theta,ec} = \frac{1}{R_{ec}} \left. \frac{d\Psi}{dR} \right|_{ec}, \quad (4.29)$$

donde la derivada radial está restringida al plano ecuatorial y por eso puede escribirse como un diferencial total. La componente toroidal se puede obtener simplemente como,

$$B_{\phi,ec} = \frac{F}{R_{ec}}. \quad (4.30)$$

Reemplazando estas últimas relaciones en la ec. 4.28 obtenemos,

$$\tan [\gamma (R_{ec})] = \frac{d\Psi}{d\rho} \left(\frac{1}{F} \left. \frac{\partial \rho}{\partial R} \right|_{ec} \right), \quad (4.31)$$

que resulta ser una expresión de mucha utilidad para la formulación de un método de resolución iterativo.

Mapeo del dato a coordenadas de flujo

Nuevamente partimos de un equilibrio de referencia que puede obtenerse resolviendo el problema de autovalores 4.13, donde se define la geometría de la separatriz. La corriente del plasma y la presión en la semilla inicial deben estar en el rango del

escenario en estudio, preferentemente.

Para actualizar la terna $\{\Psi_0, f(\psi), p(\psi)\}$ a partir del perfil de ángulo de inclinación utilizamos la expresión 4.31, pero primero es necesario mapear adecuadamente los valores de γ que están especificados en función de la coordenada radial a una coordenada de flujo. Para esto definimos la coordenada radial normalizada como

$$r_n = \frac{R_{ec} - R_m}{R_{max} - R_m}, \quad (4.32)$$

donde R_m es la posición del eje magnético y R_{max} la posición radial extrema (sobre la separatriz) en el plano ecuatorial, de modo que $r_n \in [0, 1]$. Está claro que podemos definir r_n tanto para el dato $\gamma(R_{ec})$ como para equilibrio en la iteración k . A este último lo notamos r_n^k .

Entonces, en primer lugar evaluamos el dato en la coordenada normalizada. Formalmente esto corresponde a la asignación,

$$\tilde{\gamma}[r_n(R_{ec})] = \gamma_{dato}(R_{ec}), \quad (4.33)$$

aunque en la práctica tenemos valores discretos de γ y R_{ec} , así que basta con agregar la columna r_n e interpolar consistentemente.

Por último, construimos el perfil de γ objetivo para este nivel de iteración mediante la siguiente asignación,

$$\gamma_{dato,k}[\rho_k(r_n^k)] = \tilde{\gamma}(r_n^k), \quad (4.34)$$

es decir, fijamos la dependencia de γ como función de ρ evaluando tanto la coordenada de flujo como el dato en la coordenada radial normalizada del equilibrio en la iteración k . Esta asignación debe repetirse para el equilibrio en cada nivel de iteración. Es claro que la aproximación va mejorando en la medida que el equilibrio k -ésimo reproduce mejor los perfiles dato.

Primer nivel de iteración

El primer nivel de iteración procede en forma similar al empleado para resolver el problema a partir del factor de seguridad, y por eso mantenemos la denominación del índice de iteración (k). Empleando el mapeo del dato radial a coordenada de flujo 4.34, podemos utilizar la relación 4.31 para actualizar la relación de flujos de la siguiente forma,

$$\left(\frac{d\Psi}{d\rho}\right)_{k+1} = \frac{\tan(\gamma_{dato,k})}{\tan(\gamma_k)} \left(\frac{d\Psi}{d\rho}\right)_k \quad (4.35)$$

donde suponemos que la variación de F y $\rho(R_{ec})$ es despreciable para la corrección de la relación entre los flujos poloidal y toroidal. Es importante notar que esta aproximación no implica que F y $\rho(R, Z)$ se mantienen fijos, pues al actualizar el equilibrio en la iteración $k + 1$ se actualizan todos los perfiles.

Una vez que contamos con la actualización de $d\Psi/d\rho$, podemos integrarla para hallar Ψ_0^{k+1} , luego normalizarla para obtener $(d\psi/d\rho)_{k+1}$, actualizar el RHS mediante las ecuaciones 4.23 y 4.24 y finalmente recalculamos el equilibrio en $k + 1$. La iteración continúa hasta minimizar la diferencia $\|\gamma_k(R_{ec}) - \gamma_{dato}(R_{ec})\|$. En este caso, no resulta conveniente imponer de antemano una tolerancia como criterio de parada de la iteración porque el nivel de aproximación logrado será variable, de acuerdo a qué tan buena fue

la aproximación de p_0 empleada. Para completar la solución del problema se requiere un segundo nivel de iteración para hallar el mejor valor de p_0 .

Segundo nivel de iteración

El primer nivel de iteración (en k) descrito anteriormente requiere la especificación de la amplitud del perfil de presión y procede ajustando la relación de flujos $d\Psi/d\rho$ en base al perfil de γ . Debido al uso de coordenadas de flujo, impuesto mediante el mapeo 4.33 y 4.34, la iteración no corrige la posición del eje magnético, sólo ajusta lo mejor posible el perfil usando coordenadas normalizadas.

Para corregir este problema usamos un segundo nivel de iteración, en el que variamos p_0 , con el objetivo de que la posición del eje magnético del equilibrio calculado coincida con R_m . Dado que la dependencia de R_m con p_0 es monótona y casi lineal, es posible hallar una buena aproximación a la solución en pocas iteraciones con el método de la secante.

Adoptando el índice n para la iteración en p_0 , efectuamos el primer nivel de iteración en k , con una primera estimación $p_0^{n=1}$. La siguiente estimación de p_0 se basa en el resultado de la primera,

$$p_0^{n=2} = \left(\frac{R_m^{dato}}{R_m^{n=1}} \right) p_0^{n=1}. \quad (4.36)$$

Alternativamente, es posible usar $p_0^{n=2} = 1,1p_0^{n=1}$ si $R_m^{n=1} < R_m^{dato}$, o bien, $p_0^{n=2} = 0,9p_0^{n=1}$ si $R_m^{n=1} > R_m^{dato}$, obteniendo prácticamente el mismo resultado.

Una vez que se tienen dos iteraciones completas en p_0 , podemos continuar con el método de la secante,

$$p_0^{n+1} = p_0^n - \frac{p_0^n - p_0^{n-1}}{R_m^n - R_m^{n-1}} (R_m^n - R_m^{dato}), \quad (4.37)$$

hasta que $|p_0^{n+1} - p_0^n|/p_0^{n+1}$ cae por debajo de un valor de tolerancia adecuado para la resolución de la malla que se utilice (típicamente en el orden de 10^{-3}) ó hasta que la diferencia entre R_m^n y R_m^{dato} alcance una tolerancia de algunos órdenes de magnitud menor que la anterior.

En resumen, la resolución del problema “ γ -solver” tiene tres niveles de iteración: el más externo (en n) para determinar la amplitud de la presión que mejor ajusta la posición del eje magnético, que en cada paso requiere completar la iteración en k para ajustar lo mejor posible la dependencia de γ mapeada a coordenadas de flujo, que a su vez requiere la solución del problema directo, que por ser no-lineal involucra las iteraciones de Newton-Raphson.

Capítulo 5

Análisis de escenarios de operación en tokamaks avanzados

*“Where neither water nor yet earth,
Nor fire nor air gain a foothold,
There gleam no stars, no sun sheds light,
There shines no moon, yet there no darkness reigns.
When a sage, a brahman, has come to know this
For himself through his own wisdom,
Then he is freed from form and formless.
Freed from pleasure and from pain.”*
— Buddha, Udana 1.10, 500 BC.

En este capítulo se resuelve la ecuación de G-S para los escenarios elegidos, utilizando el q -solver (cap. 4). Se muestra un estudio de la performance del código, como también una posible modificación del mismo.

Una vez resueltos los escenarios, se procedió a calcular los perfiles de $\gamma(R)$ para cada uno, para luego utilizarse como perfil dato para el γ -solver, cuyos resultados se muestran en el próximo capítulo.

5.1. Características de los escenarios

En la tabla 5.1 se observan los parámetros de descarga planeados para el reactor ITER según sea el escenario, mientras que las dimensiones se muestran en la tabla 5.2. En base a los aspectos de operación asociados a cada escenario, se proponen perfiles

Escenario	Corriente total del plasma [MA]	Fracción no inductiva	Tiempo de confinamiento [s]
Inductivo	15	0,15	~ 400
Híbrido	~ 12	$\sim 0,5$	≥ 1000
Avanzado	~ 9	1	3000^a

Tabla 5.1: Características de los escenarios planeados para el proyecto ITER, publicados por Shimada *et al.* [10]. ^a: Delimitado por las capacidad de enfriamiento de las bobinas.

Parámetro	Radio mayor [m]	Radio menor [m]	Corriente máxima [MA]	Campo toroidal [T]
Dimensión	6.2	2.0	15	5.3

Tabla 5.2: Dimensiones del reactor del proyecto ITER [10].

de $q(\rho)$ y $p(\rho)$, según las expresiones

$$q(\rho) = q_w + (1 - \rho^{n_q}) \frac{1 - q_w}{1 - \rho_r^{n_q}} + A_0 \exp \left[- \left(\frac{\rho - \rho_0}{D_q} \right)^2 \right],$$

$$p(\rho) = p_0 \left\{ (1 - a) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{D_0} \right)^2 \right] + a \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{1 - \rho}{D_e} \right)^2 \right] \right\} \right\}, \quad (5.1)$$

que producen perfiles similares a los planeados para ITER. Para la presión del escenario avanzado se agregó un término adicional, con el cuál se agrega el efecto de una ITB. La expresión resultante es

$$p(\rho) = \frac{p_0}{1 + A_t} \left\{ (1 - a) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{D_0} \right)^2 \right] + a \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{1 - \rho}{D_e} \right)^2 \right] \right\} + \frac{A_t}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{\rho_t - \rho}{D_t} \right) \right\} \right\}. \quad (5.2)$$

Los valores utilizados de los parámetros que aparecen en el conjunto de ecuaciones 5.1 y 5.2 se pueden observar en la tabla 5.3. Los perfiles de presión se pueden observar en

Escenario	q_w	n_q	ρ_r	A_0	D_q	ρ_0	p_0	a	D_0	D_e	A_t	ρ_t	D_t
Inductivo	3,07	4	0,35	2,4	0,55	-0,1	0,06	0,05	0,39	0,43	-	-	-
Híbrido	4,134	4	0,35	1	0,6	-0,15	0,005	0,3	0,4	0,11	-	-	-
Avanzado	6,634	5	0,35	0	0,55	-0,1	0,0007	0,3	0,4	0,11	0,4	0,35	0,12

Tabla 5.3: Valores de los parámetros utilizados en los perfiles de $q(\rho)$ y $p(\rho)$ elegidos.

las figuras 5.1 a 5.3 y los perfiles del factor de seguridad en la figura 5.4.

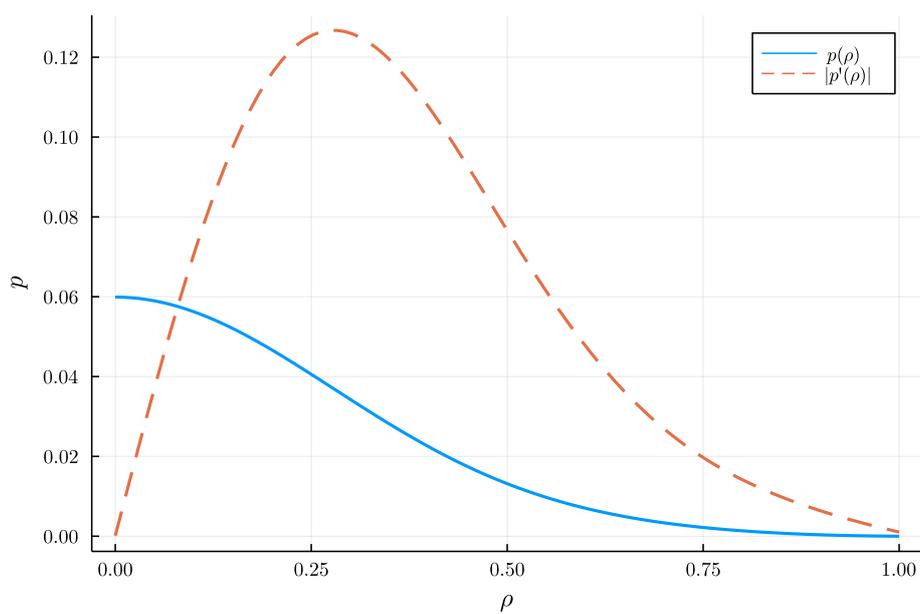


Figura 5.1: Perfil de $p(\rho)$ y $|p'(\rho)|$ diseñados para el escenario inductivo.

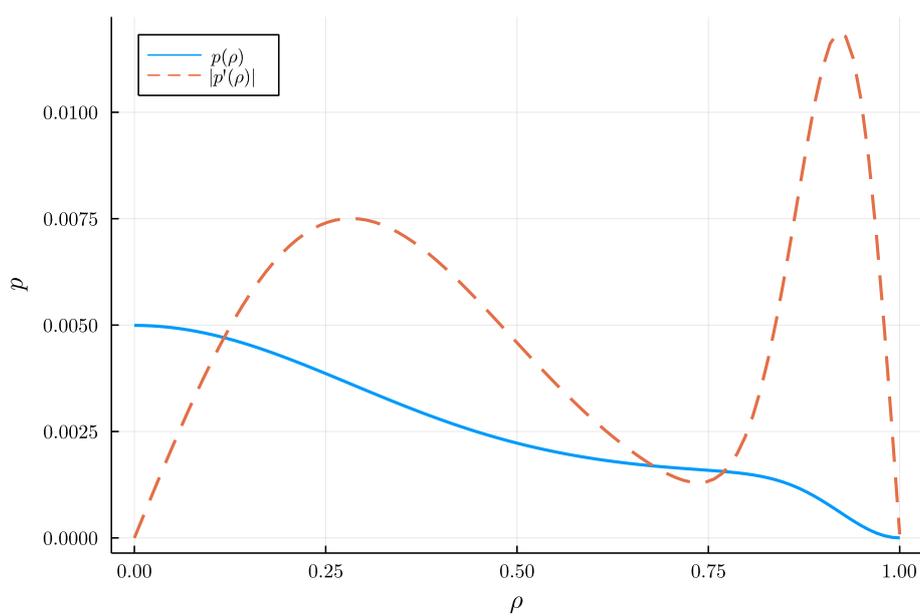


Figura 5.2: Perfil de $p(\rho)$ y $|p'(\rho)|$ diseñados para el escenario híbrido.

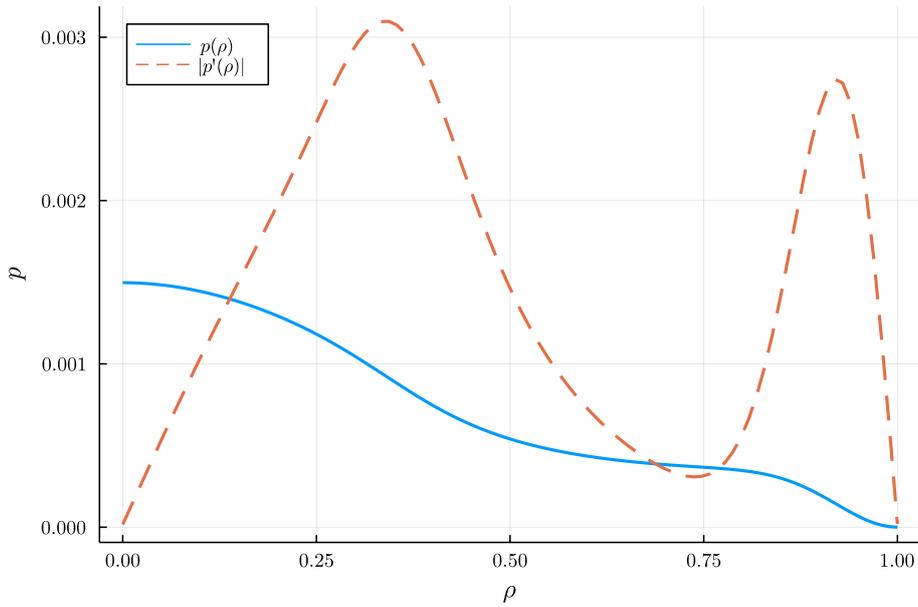


Figura 5.3: Perfil de $p(\rho)$ y $|p'(\rho)|$ diseñados para el escenario avanzado.

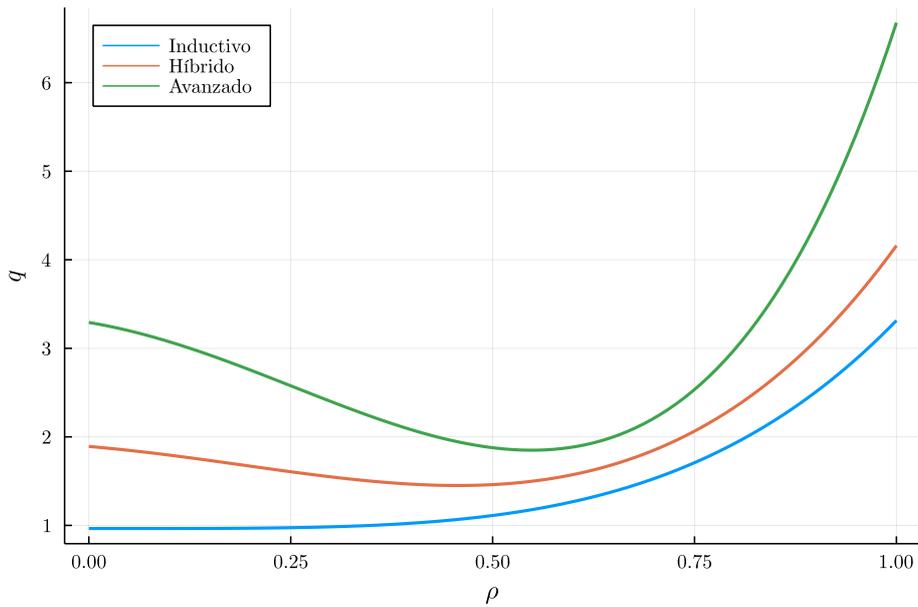


Figura 5.4: Perfiles de $q(\rho)$ diseñados para cada escenario de operación.

5.2. Cálculo del equilibrio mediante el q -solver

Los equilibrios de cada escenario se resolvieron en primera instancia por medio del q -solver, con un mallado que posee 400 puntos en la separatriz, con elementos tipo P3. El mallado se realizó de manera automática, utilizando el algoritmo de triangulación de Delaunay [63] que tiene implementado FreeFem++. Además, los perfiles dependientes de ρ se encuentran discretizados con 100 puntos, mientras que los perfiles dependientes de R se encuentran discretizados con 200 puntos. La figura 5.5 muestra la evolución del residuo en cada caso, calculados con la ecuación 4.15 utilizando los perfiles de $q(\rho)$.

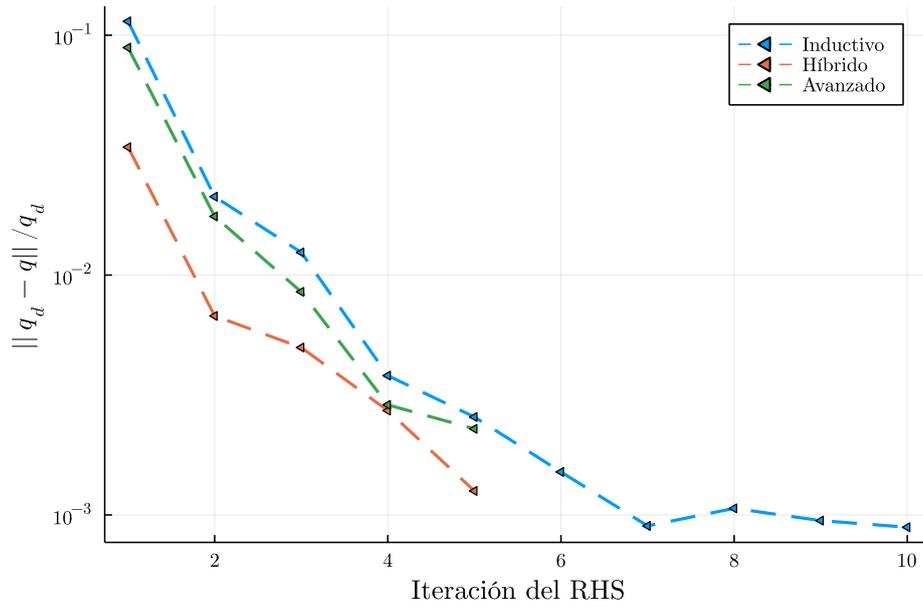


Figura 5.5: Evolución del residuo en cada iteración del RHS para cada escenario, utilizando el q -solver.

El criterio de corte utilizado es detener la simulación si ocurre que en dos instancias el residuo aumenta su valor entre iteraciones. Si ocurre una vez, se continúa la simulación, pero se detiene al haber un segundo aumento. Esta situación se puede observar entre las iteraciones 7 y 8 del escenario inductivo, en donde ocurre el primer aumento del residuo pero la simulación continúa.

Se observa que en todos los casos el residuo final alcanza valores por debajo de 10^{-2} , lo que habilita a suponer que las soluciones pueden considerarse convergidas. A continuación en la figura 5.6 se muestran comparaciones de los perfiles de q , entre los perfiles obtenidos y los suministrados como dato. La tabla 5.4 muestra el valor del último residuo de cada simulación, en conjunto con las diferencias en los valores de q_0 y q_{95} .

Escenario	Residuo final	Δq_0	Δq_{95}
Inductivo	$8,95 \cdot 10^{-4}$	$-1,04 \cdot 10^{-4}$	$-2,52 \cdot 10^{-3}$
Híbrido	$1,34 \cdot 10^{-3}$	$7,64 \cdot 10^{-3}$	$-4,21 \cdot 10^{-3}$
Avanzado	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$1,83 \cdot 10^{-2}$	$-9,17 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5.4: Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado por medio del q -solver.

Las figuras 5.7 y 5.8 muestran los valores de las funciones $\frac{dp}{d\psi}$ y $\frac{df^2}{d\psi}$ calculadas en cada equilibrio, respectivamente. Cabe aclarar, estas son las funciones del RHS de la ecuación de G-S estimadas a partir del planteo del problema inverso.

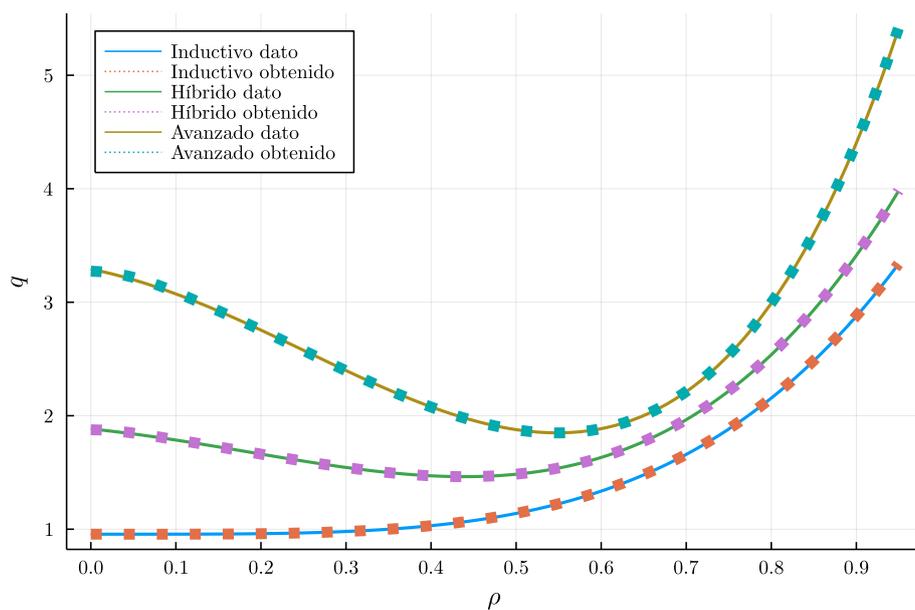


Figura 5.6: Comparación entre los perfiles de $q(\rho)$ dato y obtenidos en cada escenario mediante el q -solver.

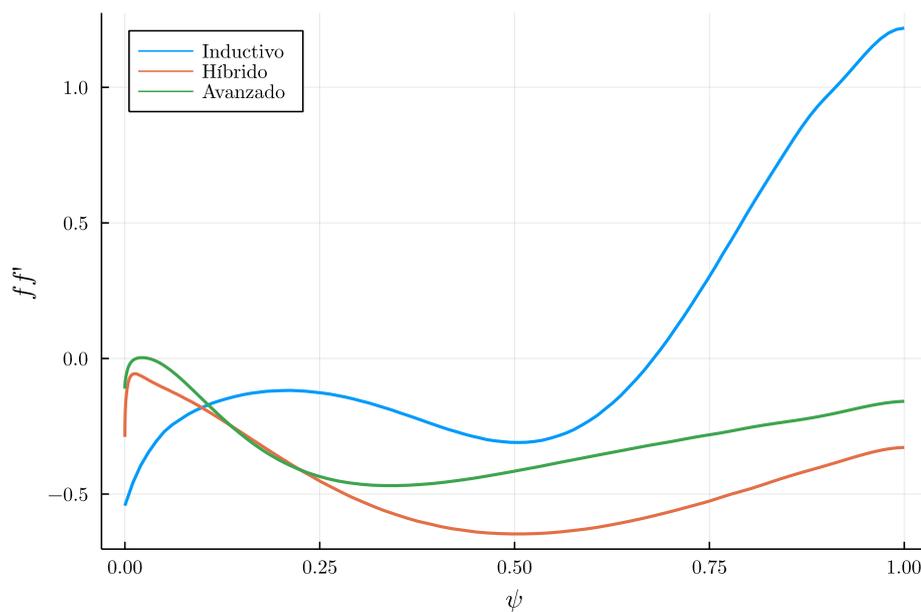


Figura 5.7: Perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ finales calculados para cada escenario, mediante el q -solver. Se puede observar que su estructura funcional es compleja, lo que dificulta la capacidad de estimar estos perfiles para resolver la ecuación de G-S directamente, en un equilibrio realista.

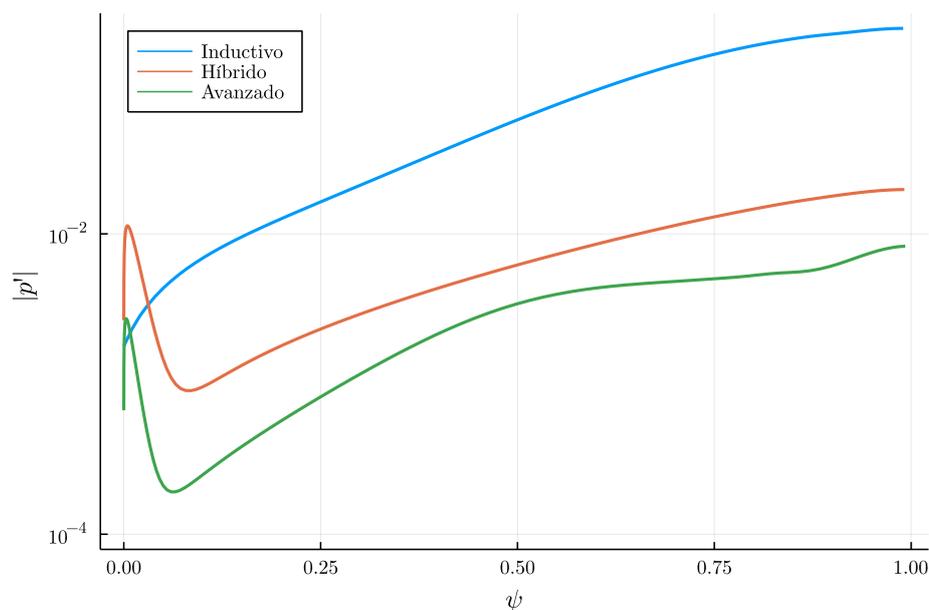


Figura 5.8: Perfiles de $\frac{dp}{d\psi}$ finales calculados para cada escenario, mediante el q -solver. Similar a los perfiles de $f \frac{df}{d\psi}$, los perfiles pueden resultar complejos funcionalmente, teniendo las mismas dificultades para su estimación *a priori*.

La figura 5.9 compara los perfiles de densidad de corriente toroidal $J(R)$ calculados en el plano ecuatorial.

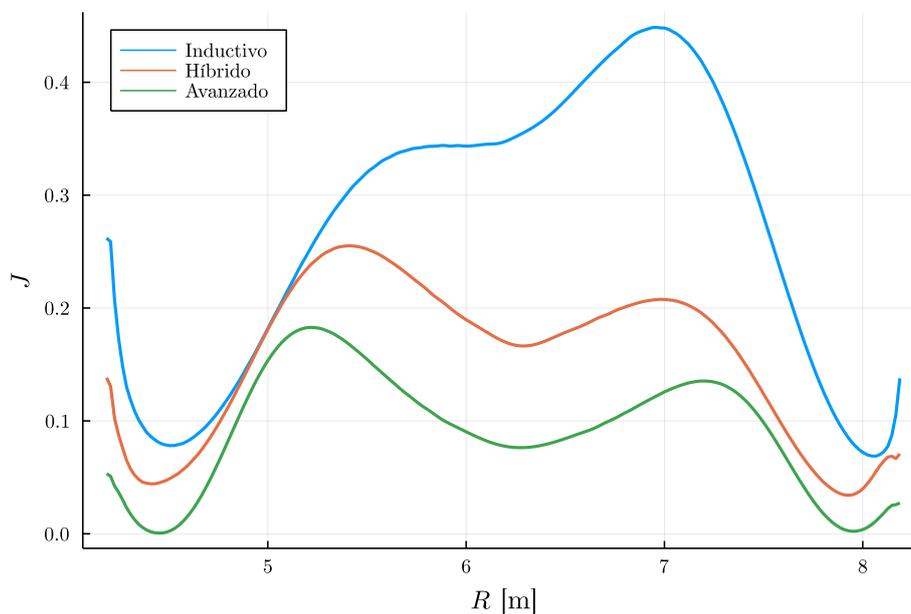


Figura 5.9: Comparación de perfiles de $J(R)$ entre escenarios, calculados en el plano ecuatorial mediante el q -solver.

El escenario inductivo posee una mayor corriente toroidal, en acuerdo con las corrientes totales del plasma para cada escenario. Se puede observar que los valores de densidad de corriente no se anulan en la separatriz. Esta situación sucede en los solvers que utilizan q como dato, dado que al proveer dicho perfil como referencia también se suministra la forma del campo de densidad de corriente. Es posible entonces que los

perfiles que se suministran produzcan este tipo de resultados. Las figuras 5.10 a 5.12 muestran las superficies de nivel de ψ y \mathbf{J} para cada escenario.

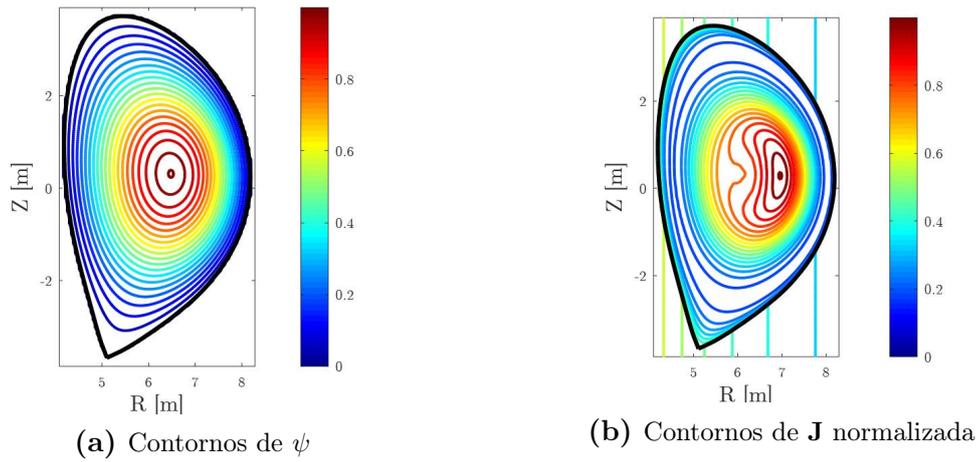


Figura 5.10: Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario inductivo, utilizando el q -solver.

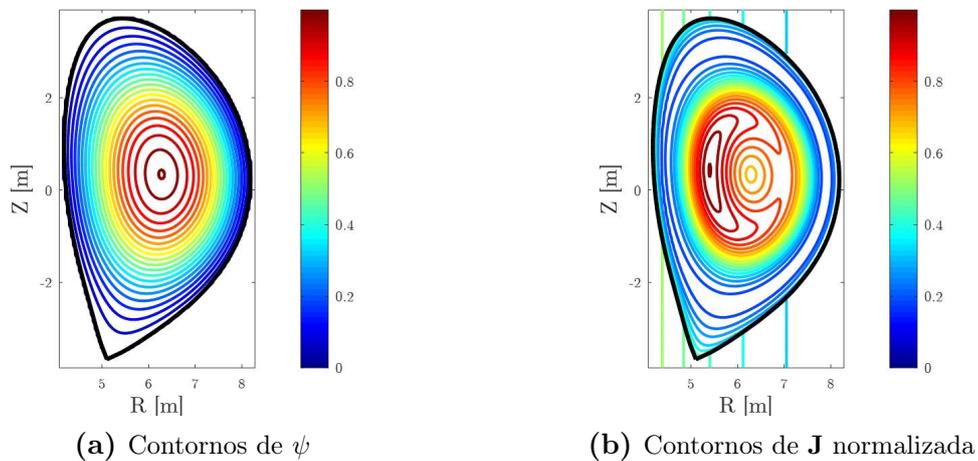


Figura 5.11: Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario híbrido, utilizando el q -solver.

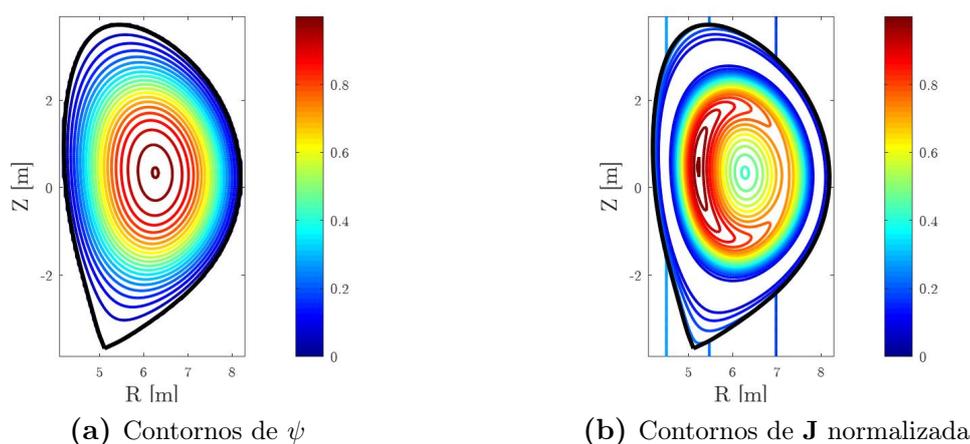


Figura 5.12: Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario avanzado, utilizando el q -solver.

Observando los contornos obtenidos, se deduce que los campos de ψ son monótonos en todos los escenarios, y donde la mayor diferencia entre los mismos radica en la posición del eje magnético. Por otra parte, en los contornos de \mathbf{J} se observa que el pico de densidad de corriente se dá en el LFS para el escenario inductivo, y en los demás escenarios los valores máximos se corren hacia el HFS. Además, se observa el efecto del reversed magnetic shear en los contornos de corriente, en donde el valor de la zona central disminuye conforme aumenta el valor de $q(\rho)$ cerca del eje magnético.

5.2.1. Corrimiento de Shafranov

Para analizar la variabilidad del Shafranov shift con respecto a β , se procedió a realizar un barrido sobre p_0 . La figura 5.13 muestra el valor del Shafranov shift (definido según la ecuación 3.12), para un equilibrio libre de fuerzas hasta el máximo valor de p_0 antes de que el esquema de cálculo se vuelva inestable y presente dificultades de convergencia. El escenario avanzado posee un gradiente mayor respecto a los demás escenarios, siendo además la solución que presenta problemas de convergencia a menor p_0 . Se observa también que el barrido puede extenderse a valores de p_0 significativamente mayores que los propuestos inicialmente para cada escenario. De la figura 5.13 se infiere que el escenario avanzado resulta más sensible a los cambios de presión que los demás escenarios, siendo el escenario híbrido el que permite alcanzar valores de β mayores que los demás escenarios. Por otra parte, en todos los casos la dependencia funcional de Δ_s con respecto a p_0 es a primer orden lineal, con una ligera curvatura para los escenarios híbrido e inductivo. Este resultado muestra que el comportamiento está en concordancia con la teoría [53], por lo que el uso del método de la secante propuesto en el capítulo 4 es viable.

En las figuras 5.14 a 5.16 se muestra cómo varía el perfil de $J(R)$ según aumenta la presión, para cada escenario. Los valores de p_0 utilizados son 0, la mitad del valor de p_0 máximo antes de que el solver no converja y el el valor máximo alcanzado.

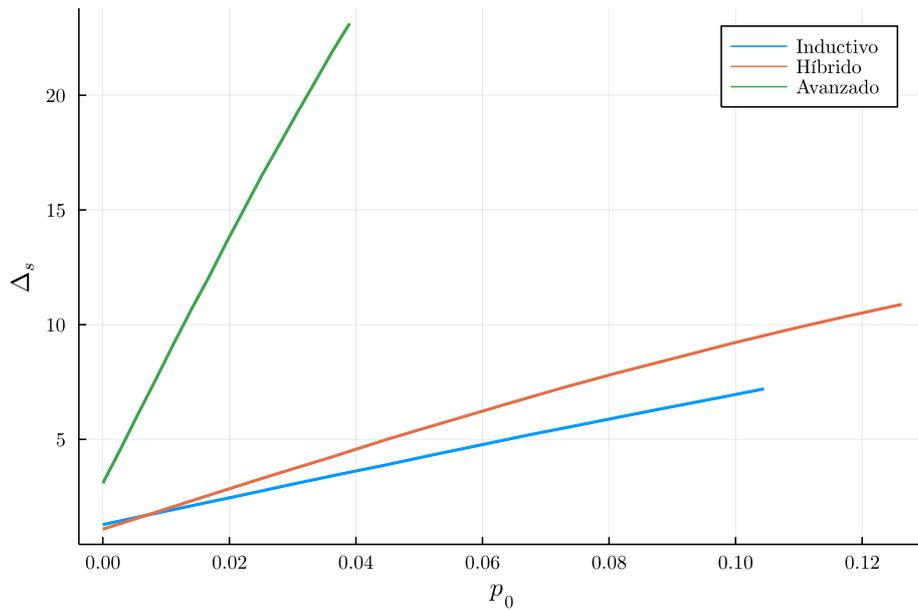


Figura 5.13: Valores obtenidos de Δ_s para ciertos valores de p_0 en cada escenario elegido. Los valores de p_0 van desde 0 hasta el valor máximo antes de que la solución no converja, según sea el caso.

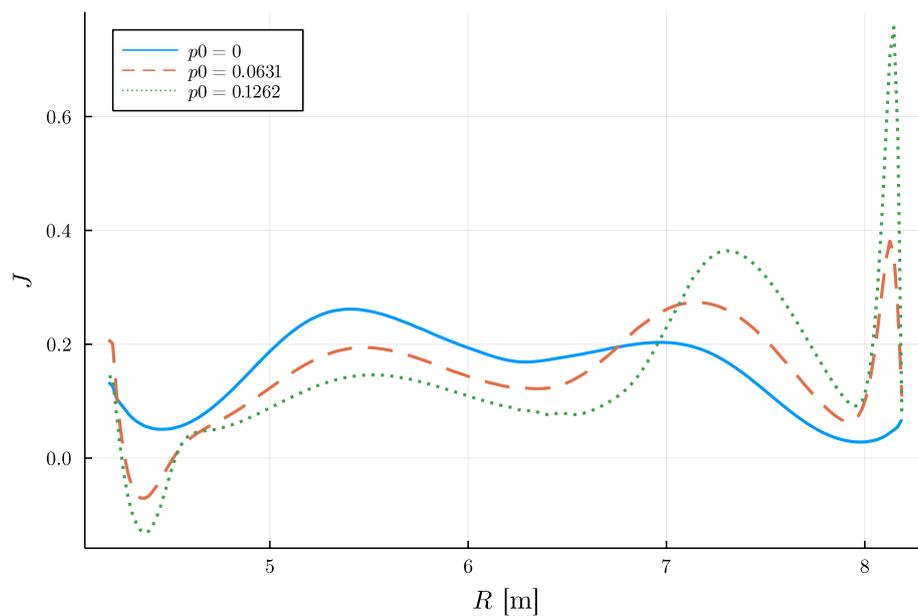


Figura 5.15: Perfiles de $J(R)$ del escenario híbrido para distintos valores de p_0 . Los valores utilizados son $p_0 = 0$, la mitad del valor máximo de p_0 antes de que el solver deje de converger y el valor máximo alcanzado.

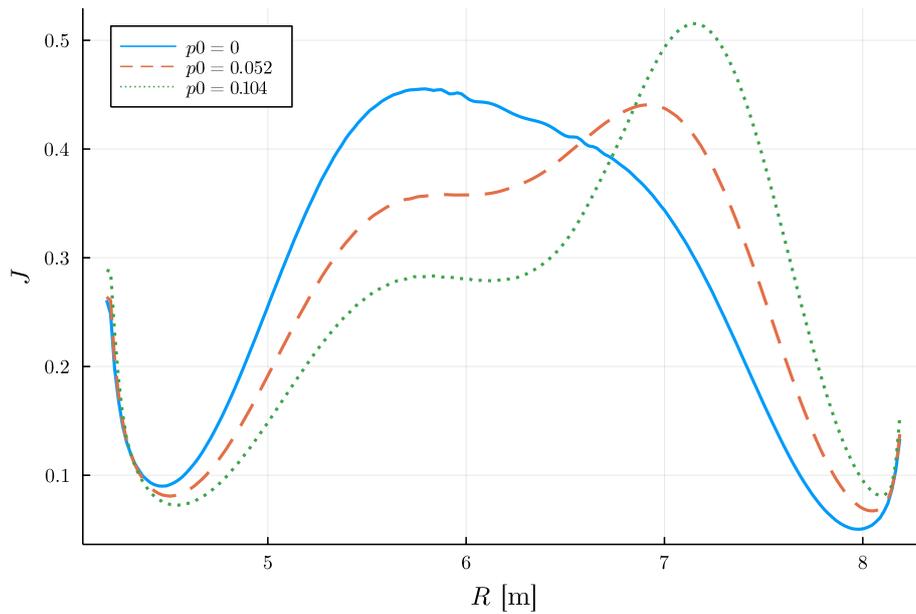


Figura 5.14: Perfiles de $J(R)$ del escenario inductivo para distintos valores de p_0 . Los valores utilizados son $p_0 = 0$, la mitad del valor máximo de p_0 antes de que el solver deje de converger y el valor máximo alcanzado.

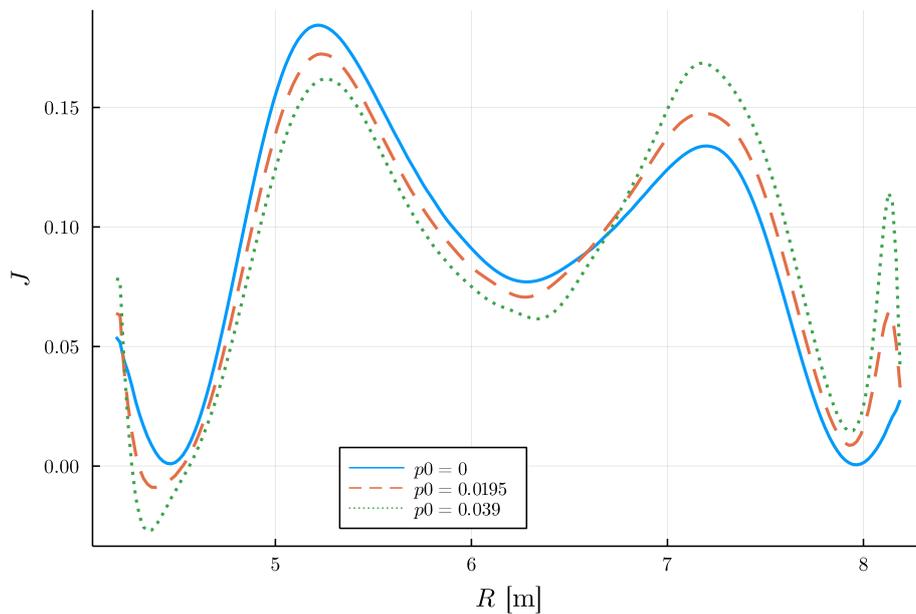


Figura 5.16: Perfiles de $J(R)$ del escenario avanzado para distintos valores de p_0 . Los valores utilizados son $p_0 = 0$, la mitad del valor máximo de p_0 antes de que el solver deje de converger y el valor máximo alcanzado.

Se observa que en todos los escenarios el perfil de densidad de corriente se ve modificado. En el escenario híbrido ocurren picos de densidad de corriente que en una situación real serían mucho menores debido al efecto de difusión magnética que no se tiene en cuenta en este estudio. Estos picos están asociados al gradiente de presión de la ETB, y pueden interpretarse como una contribución de la corriente de bootstrap. Por ello también se observan para el escenario avanzado.

En los escenarios híbrido y avanzado se obtuvieron valores de densidad de corriente

negativos. Este es un resultado de cuestionable validez física, pues no es común que la corriente se invierta en la zona periférica del un tokamak, ya que por diseño la corriente toroidal del plasma se impone externamente y es mucho mayor que la corriente poloidal. Esta imposición disminuye las posibilidades de un evento de relajación magnética que invierta la dirección del campo y la corriente como sucede en los reactores RFP.

5.2.2. Densidad de corriente en la separatriz

Para obtener un valor de \mathbf{J} que represente mejor la física del problema en la zona periférica, se puede forzar a que la función $\frac{df^2}{d\psi}$ del RHS de la ecuación de G-S sea 0 en la frontera del plasma. Esta imposición en la resolución es posible a costa de modificar el perfil de $q(\rho)$ calculado cerca de la separatriz. Para ello, en el calculo de la ecuación 4.24, se multiplicó al perfil por una función que hace tender suavemente a 0 el perfil en el borde. La expresión de dicha modificación es

$$\left(\frac{df^2}{d\psi}\right)_{mod} = \frac{df^2}{d\psi} \left(1 - e^{\left(\frac{\rho-1}{\Delta_f}\right)^2}\right), \quad (5.3)$$

donde Δ_f esta asociado al ancho del área afectada cerca de la separatriz. Al resolver los equilibrios con esta imposición, el residuo obtenido en cada caso fue similar al caso sin corrección, con $\Delta_f = 0,07$. Resultados similares se obtienen con Δ_s en el rango 0,05 a 0,1. La figura 5.17 muestra los perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ calculados.

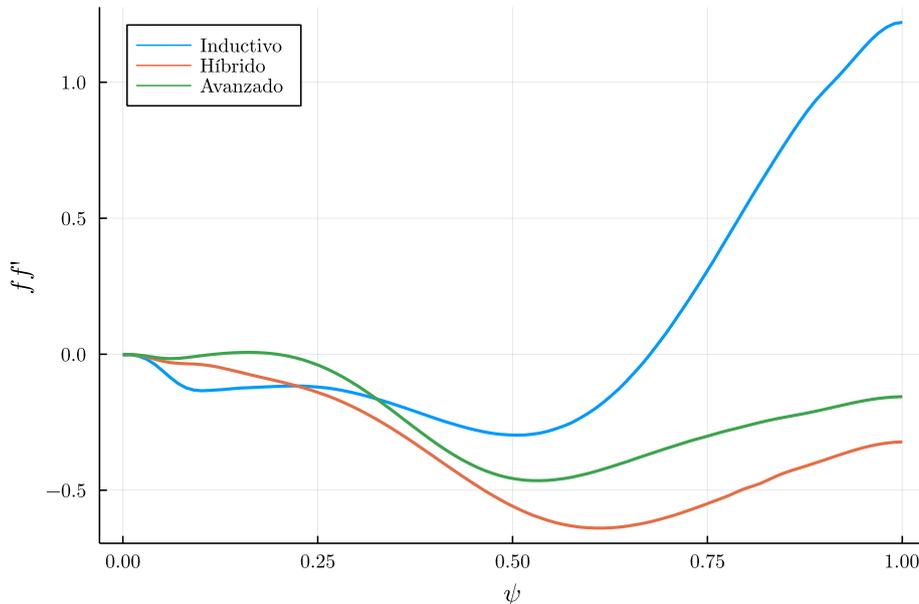


Figura 5.17: Perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ calculados, imponiendo la nulidad en la separatriz mediante la ecuación 5.3, utilizando el $q - solver$.

La figura 5.18 compara los perfiles de $J(R)$ en el plano ecuatorial calculados. Los perfiles logran anularse en la separatriz y no se ven modificados en el seno del plasma, al compararse con la figura 5.9. Este resultado indica que la modificación afecta localmente

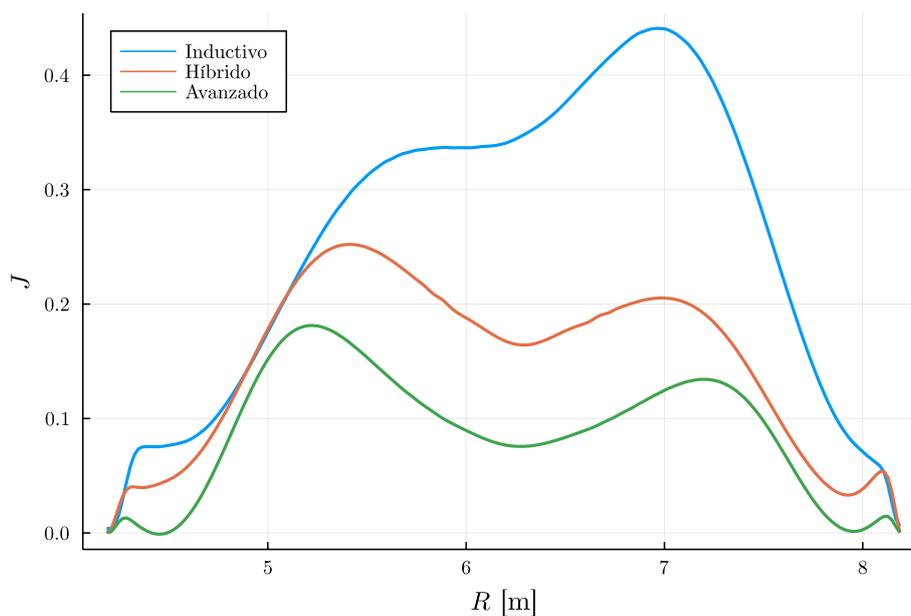


Figura 5.18: Comparación de perfiles de $J(R)$ entre escenarios, calculados en el plano ecuatorial, con la imposición de $\mathbf{J} = 0$ en la separatriz.

a la zona de la separatriz, sin modificar el resto del campo de \mathbf{J} . La figura 5.19 compara los perfiles de $q(\rho)$ obtenidos con los perfiles dato.

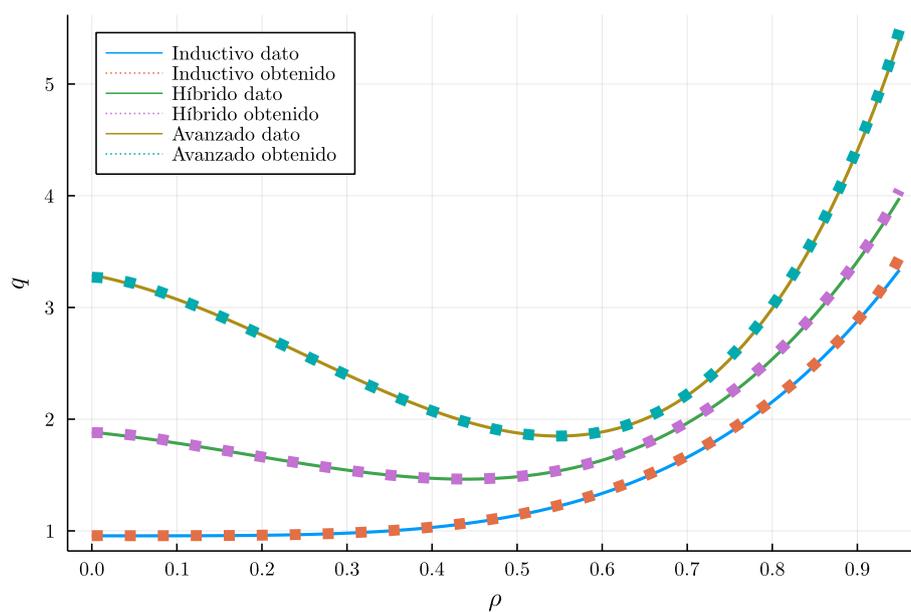


Figura 5.19: Comparación de perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para cada escenario, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz, utilizando el q -solver.

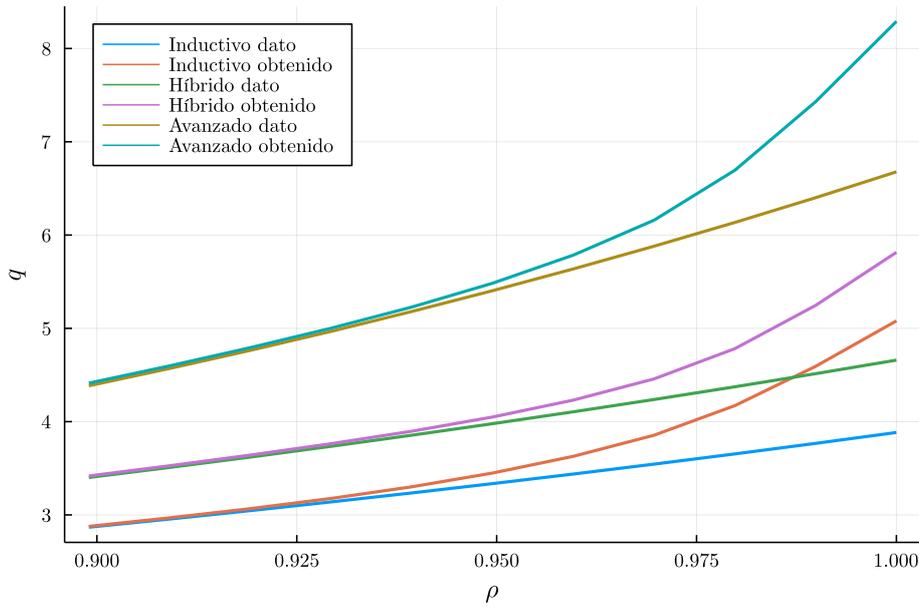


Figura 5.20: Ampliación de la figura 5.19 cerca de la separatriz e incluyendo valores de $q(\rho)$ por encima de q_{95} .

La tabla 5.5 muestra el residuo final y diferencias obtenidas entre los perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para el caso $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz.

Escenario	Residuo	Δq_0	Δq_{95}
Inductivo	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$-1,59 \cdot 10^{-3}$	$-1,13 \cdot 10^{-1}$
Híbrido	$6,38 \cdot 10^{-3}$	$3,72 \cdot 10^{-3}$	$-7,15 \cdot 10^{-2}$
Avanzado	$6,77 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-2}$	$-1,01 \cdot 10^{-1}$

Tabla 5.5: Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz mediante el q -solver.

Se obtuvo que la imposición de $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz no modificó en gran medida a los perfiles calculados desde el eje magnético hasta q_{95} . A su vez, el residuo del perfil de $q(\rho)$ calculados se encuentran en el mismo orden de magnitud que el residuo obtenidos dejando libre el valor de \mathbf{J} en la separatriz del plasma.

5.2.3. Perfiles dato de $\gamma(R)$

De los equilibrios con \mathbf{J} libre en la separatriz se obtuvieron los perfiles del ángulo de inclinación magnética $\gamma(R)$ en el plano ecuatorial en cada escenario. Estos perfiles fueron suministrados como perfiles dato al γ -solver, para luego resolver cada equilibrio. Los perfiles se pueden ver en la figura 5.21.

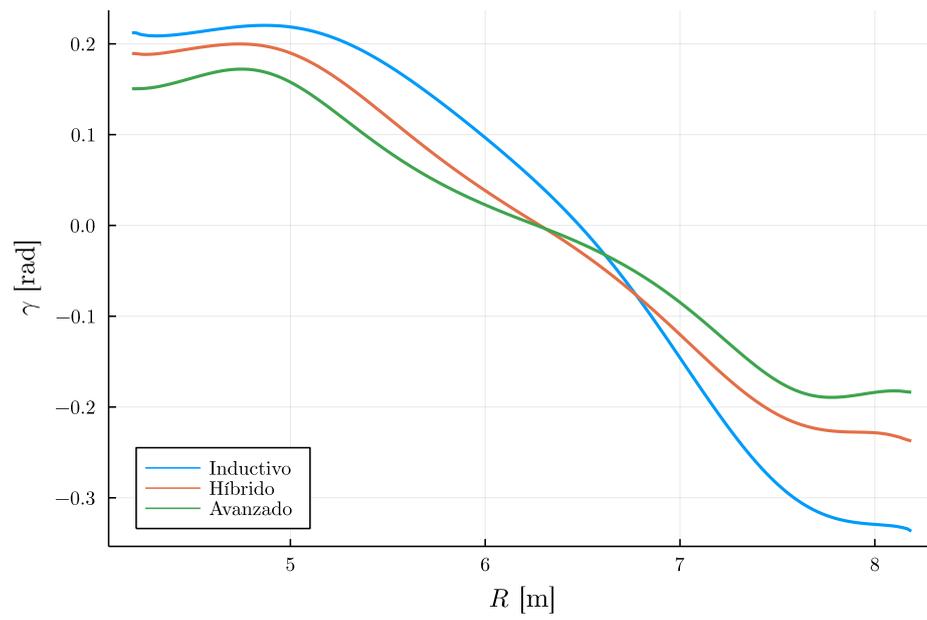


Figura 5.21: Perfiles de $\gamma(R)$ obtenidos de cada equilibrio, calculados mediante el q -solver.

Capítulo 6

Cálculo del equilibrio a partir del ángulo de inclinación magnético

“Victory begets enmity; the defeated dwell in pain. Happily the peaceful live, discarding both victory and defeat.”
— Buddha, Dhammapada 201, 500 BC.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos del γ -solver. Además de estudiar el desempeño del código en los casos elegidos, se discuten las soluciones obtenidas y se comparan con las calculadas mediante el q -solver. También se estudia la sensibilidad del perfil de q ante variaciones de perfil de presión, cuando se mantiene fijo el dato $\gamma(R)$.

6.1. Resultados

El mallado en este caso se realizó con las mismas características que los utilizados para los equilibrios del capítulo 5, esta vez utilizando 300 puntos en la separatriz. Nuevamente, los perfiles dependientes de ρ se encuentran discretizados con 100 puntos, mientras que los perfiles dependientes de R se encuentran discretizados con 200 puntos. Repasando la metodología desarrollada para este solver (detallada en el capítulo 4), además del loop iterativo en donde se estima la ecuación a resolver, existe un loop externo en donde se estima el valor de p_0 . Es decir, para cada iteración n de p_0 se realizan k iteraciones del RHS de la ecuación de G-S. El ajuste de p_0 se realiza mediante el método de la secante, buscando coincidir la posición radial del eje magnético con el cruce por 0 del perfil de $\gamma(R)$ dato, utilizando la expresión 4.37. Por tanto, se debe suministrar además un valor semilla de p_0 .

Los valores iniciales de p_0 para el método de la secante utilizados para cada escenario fueron de 1/3 del valor original utilizado para el análisis de escenarios del capítulo 5. En las figuras 6.1 a 6.3 se puede observar cómo evoluciona el residuo de $\gamma(R)$ y R_m en cada escenario, conforme mejora la estimación de p_0 , además de la evolución de dicho parámetro.

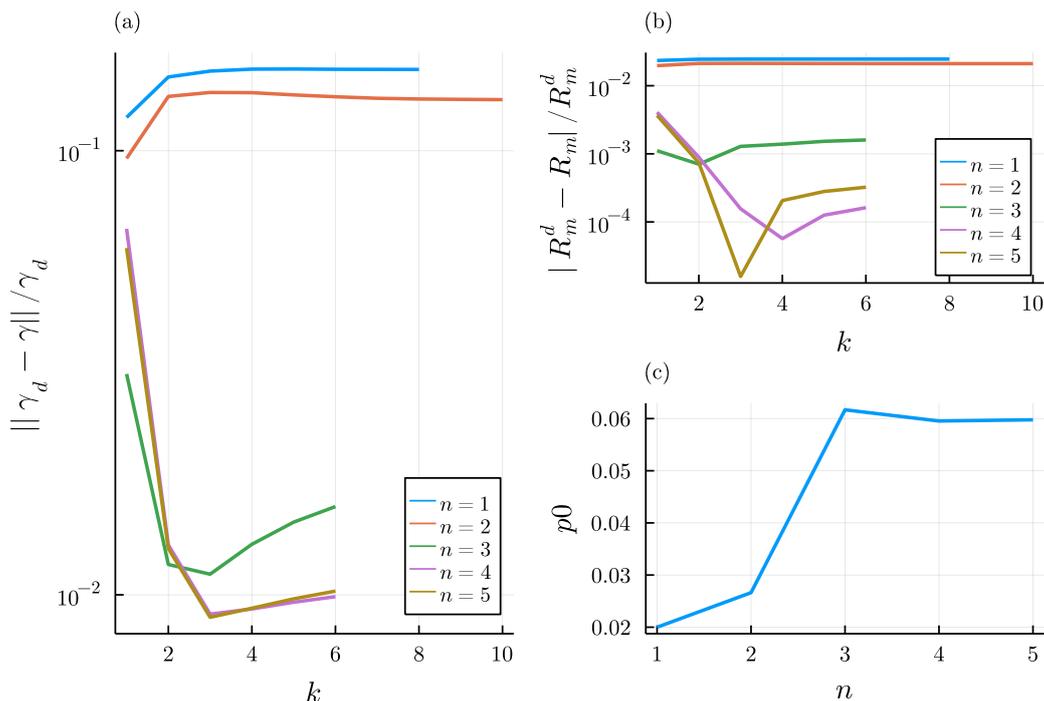


Figura 6.1: Evolución de parámetros numéricos del escenario inductivo. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.

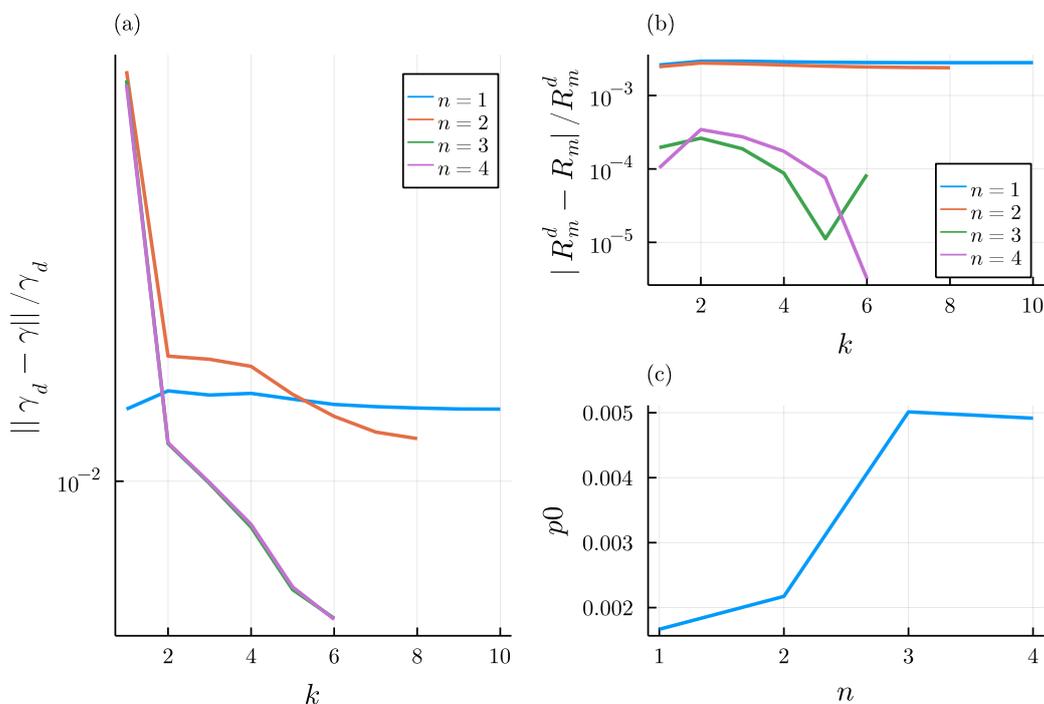


Figura 6.2: Evolución de parámetros numéricos del escenario híbrido. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.

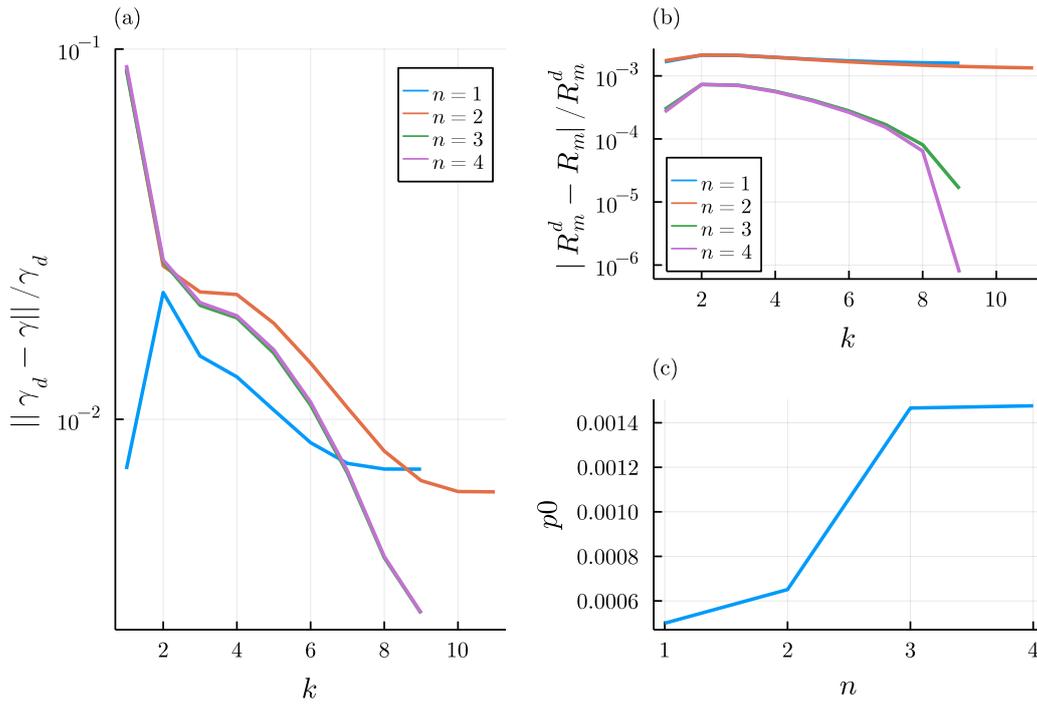


Figura 6.3: Evolución de parámetros numéricos del escenario avanzado. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.

En la realización de las simulaciones, para cada iteración n de p_0 se realizaron 6 iteraciones k , sin utilizar un criterio de corte. Luego, para las siguientes iteraciones, se aplicó un criterio en el cuál se admite que el residuo en $\gamma(R)$ aumente hasta 2 veces, además de una cantidad máxima de iteraciones de 15. Una vez cumplido el criterio de corte, para la siguiente estimación de p_0 se utiliza el equilibrio que obtuvo el menor valor de residuo en la actual estimación.

El criterio de corte para la estimación de p_0 está definido en la sección 4.4. Los perfiles y valores reportados corresponden al equilibrio cuyo residuo en $\gamma(R)$ fue globalmente menor, que en todos los casos se obtuvo con la mejor estimación de p_0 .

El residuo se redujo por debajo de 10^{-2} en todos los escenarios, en donde se puede apreciar una mejoría en la evolución del residuo conforme mejora la estimación de p_0 . En los escenarios inductivo e híbrido el corte del método de la secante se produjo por el criterio de tolerancia en p_0 , mientras que en el escenario avanzado el corte se produjo por superar alcanzar la tolerancia fijada en R_m . Se observa también que la estimación de R_m sigue la misma tendencia que el residuo para los 3 escenarios.

En todos los casos se obtuvo que para las primeras 2 estimaciones de p_0 el residuo no evoluciona monótonamente. En particular, en el escenario inductivo se puede observar que el residuo en $\gamma(R)$ aumenta después de cierto valor de k para las estimaciones $n = 4$ y $n = 5$. Para $n = 1, 2$ es esperable que la convergencia no sea monótona, dado que se utilizan soluciones parciales con un valor de p_0 alejado del valor original. Para los casos en donde $n > 2$, puede deberse a pequeñas variaciones generadas al volver a estimar el RHS, que modifican ligeramente la solución obtenida y, por consiguiente, el perfil de $\gamma(R)$ calculado. Estas modificaciones pueden ser tales que alejen de la convergencia las siguientes soluciones parciales del equilibrio.

Los perfiles de $\gamma(R)$ dato y calculados se pueden observar en la figura 6.4. Las fun-

ciones $\frac{df^2}{d\psi}$ y $\frac{dp}{d\psi}$ obtenidas se pueden observar en las figuras 6.5 y 6.6.

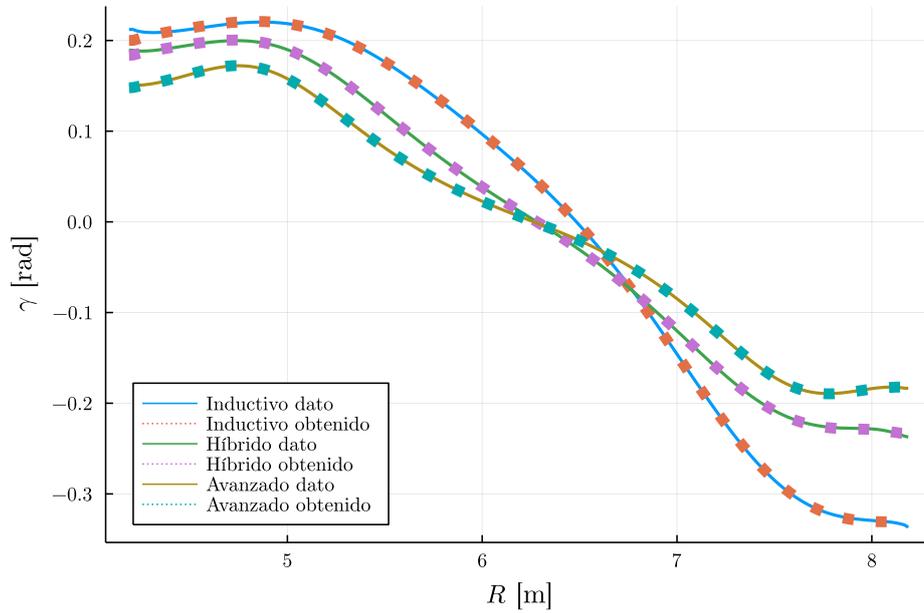


Figura 6.4: Comparación de perfiles de $\gamma(R)$ dato y calculados para cada escenario.

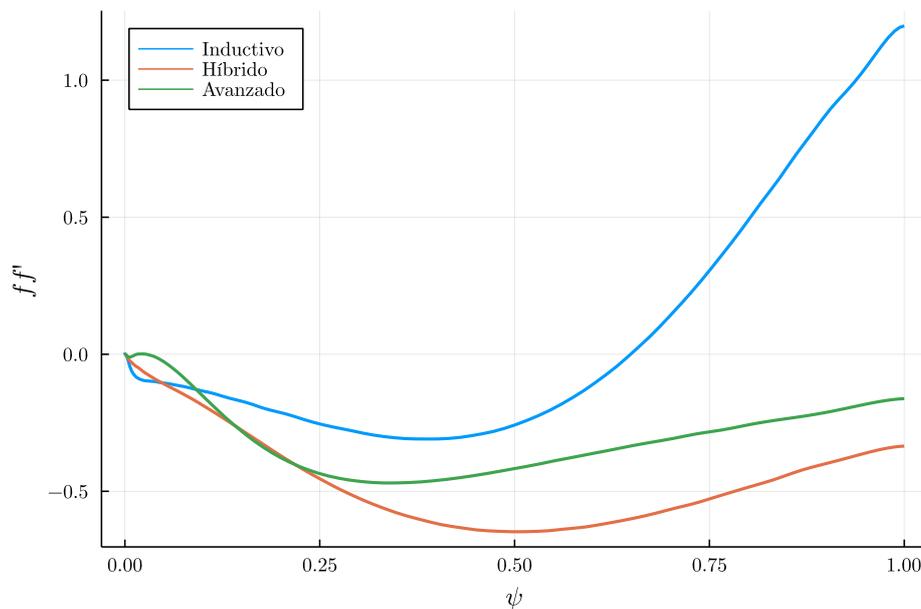


Figura 6.5: Perfiles de $\frac{df^2}{d\psi}$ calculados en cada escenario. Nótese que tienden a 0 para $\psi = 0$, lo que indica que \mathbf{J} se anula en la separatriz. Este resultado es una característica del γ -solver.

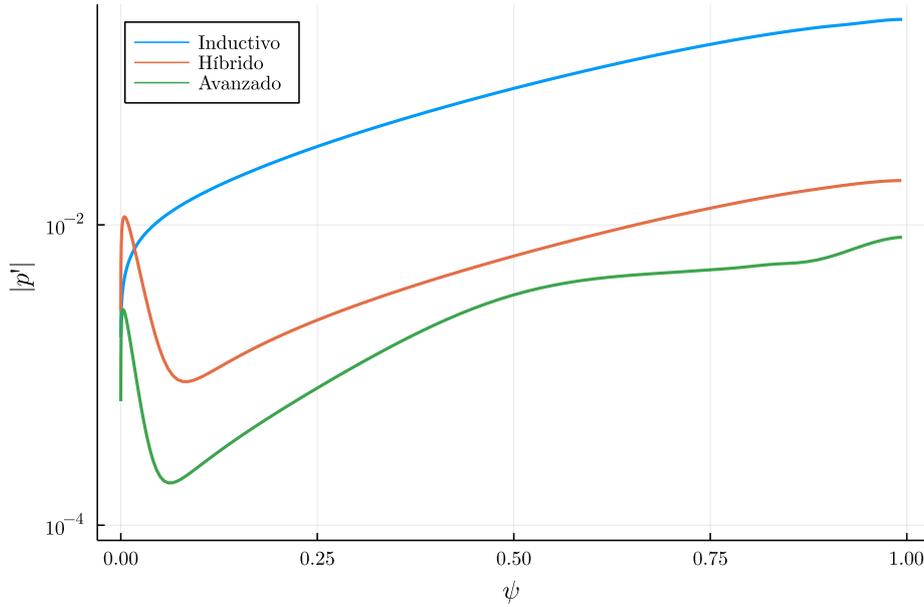


Figura 6.6: Perfiles de $\frac{dp}{d\psi}$ calculados en cada escenario.

La tabla 6.1 muestra los valores de residuos obtenidos para cada solución propuesta. Los resultados anteriores muestran que es posible hallar un equilibrio con un perfil del

Escenario	Residuo mínimo γ_{dato} vs γ_{calc}	p_0 objetivo	p_0 final calculado
Inductivo	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$5,97 \cdot 10^{-2}$
Híbrido	$5,19 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4,91 \cdot 10^{-3}$
Avanzado	$3 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,47 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6.1: Valores mínimos de residuos obtenidos para cada escenario, por medio del γ -solver.

ángulo de inclinación magnético aproximadamente igual al impuesto como objetivo, dentro de una tolerancia aceptable. Como se menciona en el capítulo 3, el factor de seguridad q juega un rol importante en el diagnóstico de la descarga, por lo que resulta de interés que la solución obtenida mediante el γ -solver sea capaz de recuperar los perfiles de $q(\rho)$ correspondientes a los equilibrios cuyos perfiles $\gamma(R)$ se tomaron como dato de entrada. La figura 6.7 muestra los perfiles obtenidos por el γ -solver, contrastados con los perfiles dato utilizados en el q -solver. La tabla 6.2 compara los parámetros principales del perfil, entre los calculados por el γ -solver y los perfiles dato. Se observa

Escenario	Residuo q_{dato} vs q_{calc}	Δq_0	Δq_{95}
Inductivo	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$6,01 \cdot 10^{-3}$	$-1,14 \cdot 10^{-1}$
Híbrido	$6,21 \cdot 10^{-3}$	$1,71 \cdot 10^{-2}$	$-4,05 \cdot 10^{-2}$
Avanzado	$6,74 \cdot 10^{-3}$	$3,64 \cdot 10^{-2}$	$-6,24 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6.2: Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado, por medio del γ -solver.

un buen acuerdo entre los perfiles, en donde la mayor diferencia se encuentra en el valor de q_{95} del escenario inductivo. Esto se debe a que los perfiles de densidad de corriente obtenidos con el q -solver mantienen el valor en la separatriz del equilibrio utilizado

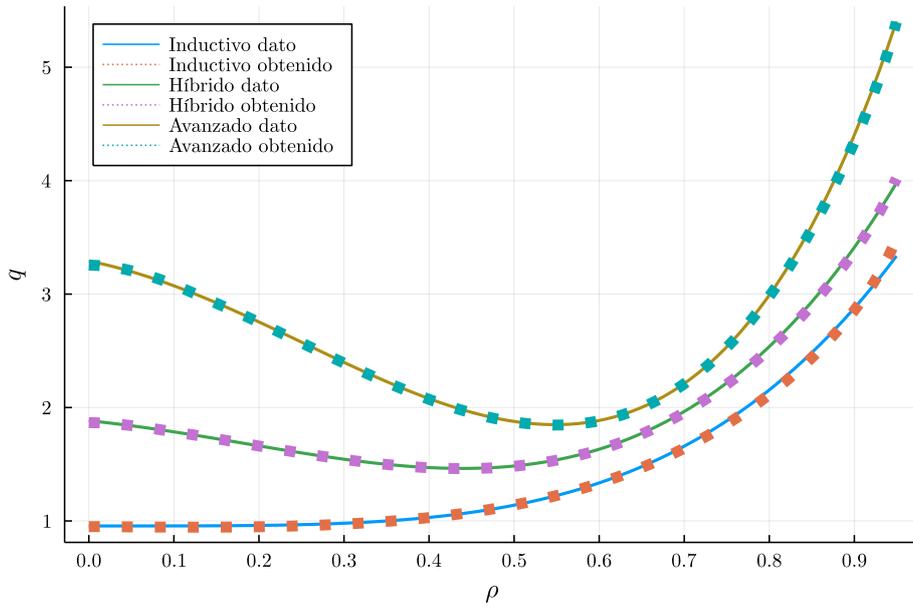


Figura 6.7: Comparación de perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para cada escenario, utilizando el γ -solver.

como semilla. Como en este caso parte de la autofunción del problema lineal con $J=0$ en el borde, los equilibrios obtenidos tienen valores muy bajos de corriente en la separatriz. Este comportamiento se analiza con mayor detalle en la sección 6.3. Como el valor de q en la separatriz está relacionado con la corriente total, esta característica del solver impacta mayormente en el caso inductivo al poseer la mayor corriente total de los 3 escenarios. Los perfiles de $J(R)$ calculados se pueden observar en la figura 6.8.

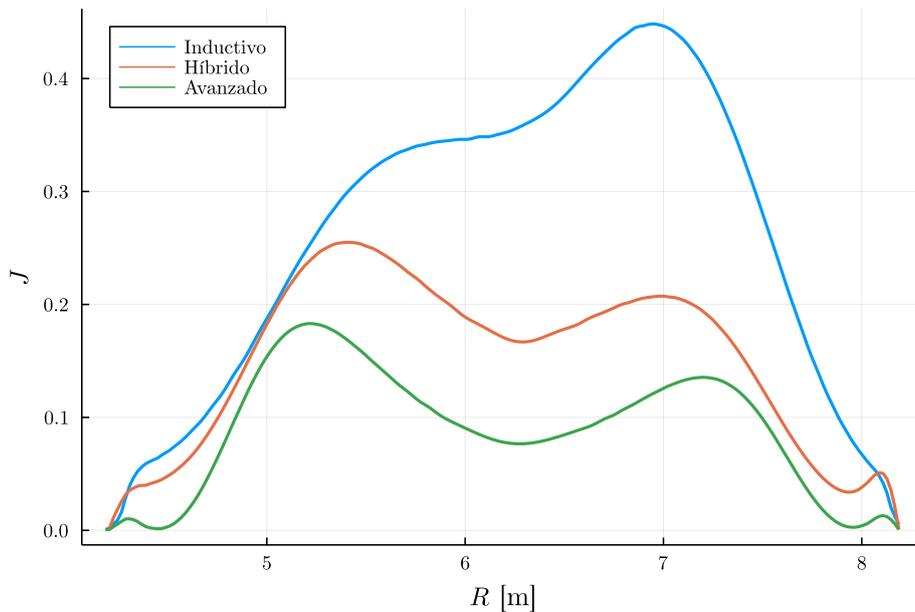


Figura 6.8: Comparación de perfiles de $J(R)$ entre escenarios, calculados en el plano ecuatorial mediante el γ -solver.

Las figuras 6.9 a 6.11 muestran los contornos de ψ y \mathbf{J} calculados para cada escenario. Los contornos calculados de ψ resultan idénticos que los contornos obtenidos

mediante el q -solver. En el caso de los contornos de corriente, se observa que la mayor diferencia está en la separatriz, en donde los valores de \mathbf{J} se anulan para los equilibrios resueltos mediante el γ -solver.

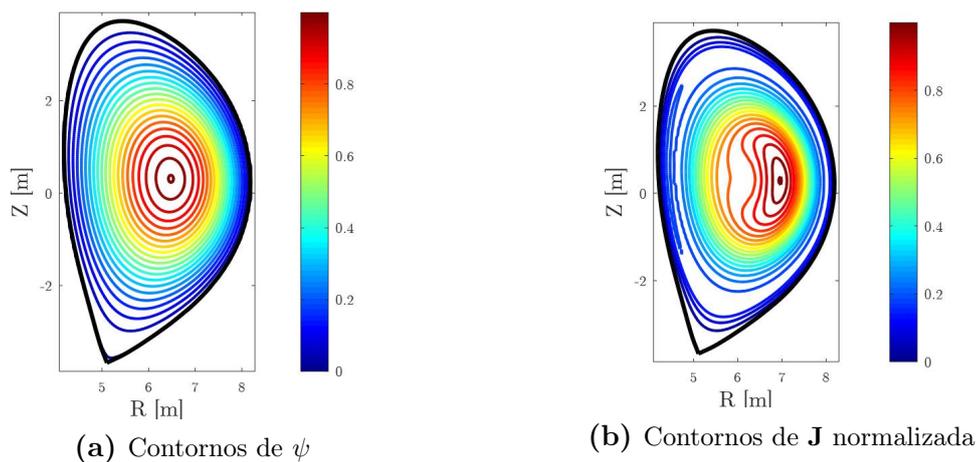


Figura 6.9: Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario inductivo, utilizando el γ -solver.

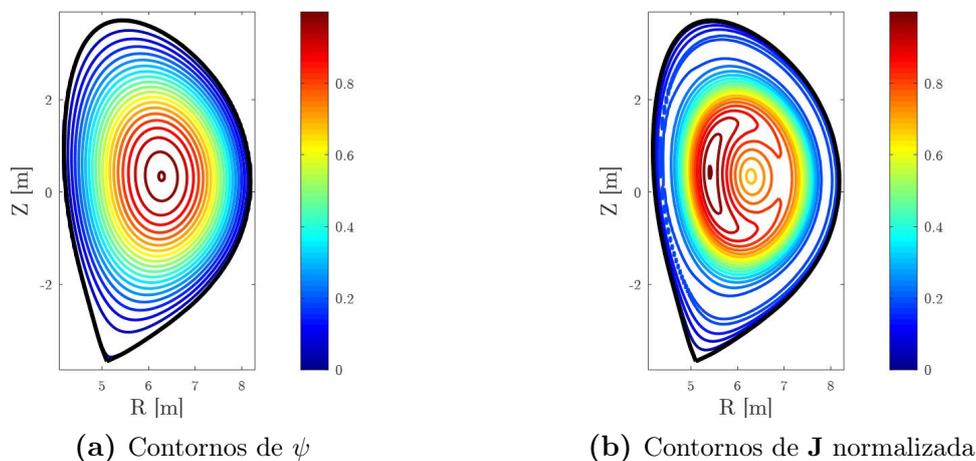


Figura 6.10: Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario híbrido, utilizando el γ -solver.

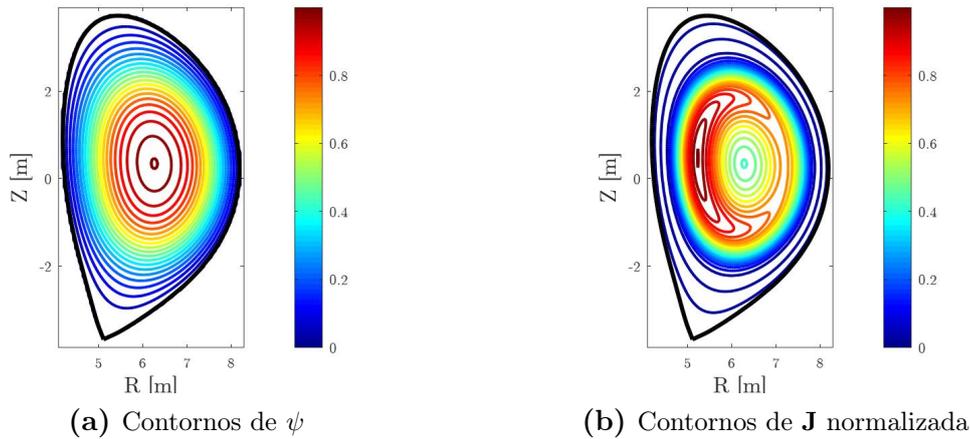


Figura 6.11: Superficies de nivel obtenidas de los campos de ψ y \mathbf{J} calculados, para el escenario avanzado, utilizando el γ -solver.

6.2. Resolución de los equilibrios con imposición de $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ para el q -solver

Dada las características que posee el γ -solver con respecto al campo de densidad de corriente, se procedió a resolver los equilibrios de cada escenario nuevamente, esta vez utilizando como perfiles dato los calculados a partir del q -solver forzando $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz. La figura 6.12 compara los perfiles dato y los calculados para este caso y la tabla 6.3 muestra los residuos finales obtenidos en cada caso.

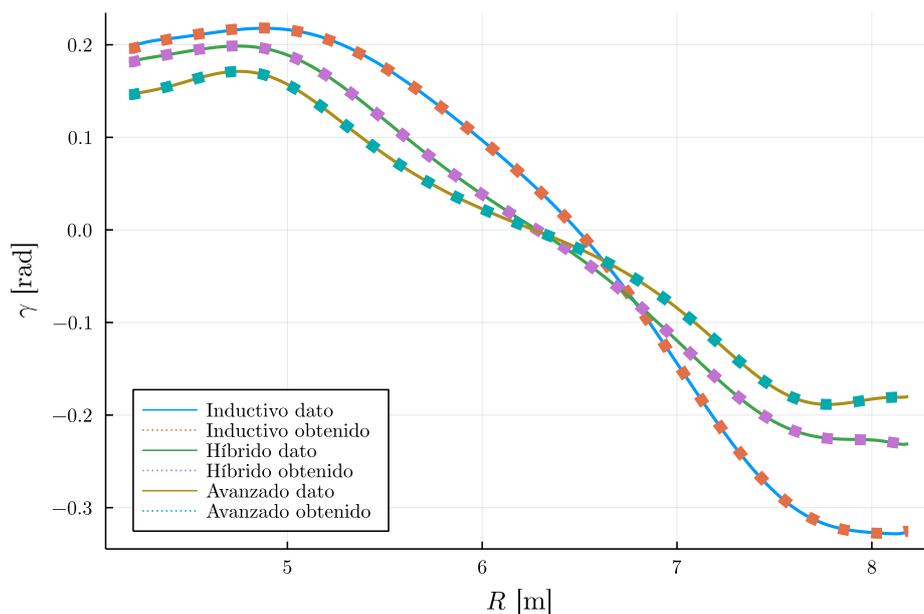


Figura 6.12: Comparación de perfiles de $\gamma(R)$ dato y calculados para cada escenario, habiendo forzado $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en el q -solver para la obtención de los perfiles dato.

Escenario	Residuo mínimo γ_{dato} vs γ_{calc}	p_0 objetivo	p_0 calculado
Inductivo	$7,65 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$5,93 \cdot 10^{-2}$
Híbrido	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4,95 \cdot 10^{-3}$
Avanzado	$5,96 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,48 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6.3: Valores mínimos de residuos obtenidos para cada escenario, por medio del γ -solver.

Para estas simulaciones se halla que los residuos se reducen en todos los escenarios respecto a las simulaciones anteriores reportadas en la tabla 6.1. Por último, se compararon los perfiles de $q(\rho)$ calculados con los perfiles dato del q -solver. La tabla 6.4 muestra la diferencia entre los parámetros principales del perfil de factor de seguridad. Se obtuvo que las diferencias se modifican ligeramente respecto a usar perfiles

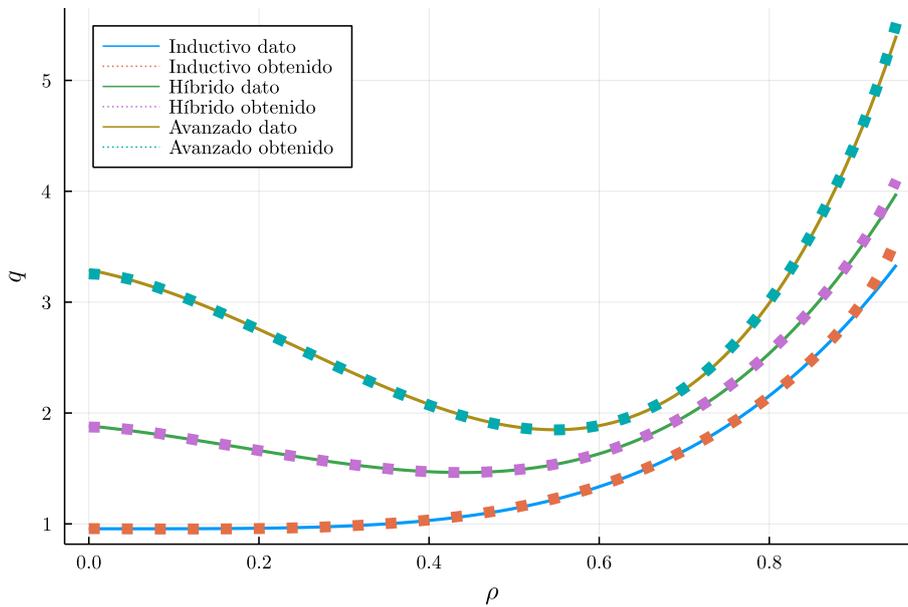


Figura 6.13: Comparación de perfiles de $q(\rho)$ dato y calculados para cada escenario, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz, utilizando el γ -solver.

Escenario	Residuo	Δq_0	Δq_{95}
Inductivo	$2,13 \cdot 10^{-2}$	$-1,14 \cdot 10^{-3}$	$-2,41 \cdot 10^{-1}$
Híbrido	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$-1,12 \cdot 10^{-1}$
Avanzado	$6,05 \cdot 10^{-3}$	$3,73 \cdot 10^{-2}$	$-1,12 \cdot 10^{-1}$

Tabla 6.4: Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre los perfiles calculados y dato, para cada escenario estudiado, imponiendo $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz mediante el γ -solver.

dato obtenidos mediante el q -solver sin forzar $\mathbf{J} = 0$ en la separatriz, excepto para el parámetro q_{95} .

6.3. Densidad de corriente en la separatriz

Como se observa en los resultados anteriores, del q -solver se obtienen soluciones en donde el campo de \mathbf{J} no tiende a 0 en la separatriz, lo que da lugar a situaciones de

poca relevancia física. A su vez, en las soluciones obtenidas por el γ -solver el campo de \mathbf{J} sí se anula en la separatriz. Sin embargo, siguen existiendo picos que, aún siendo menores que en los perfiles de $J(R)$ obtenidos del q -solver, su relevancia física no es certera. En un escenario real, estos picos podrían desaparecer por consecuencia de la difusión magnética, aunque su existencia esté relacionada con la contribución de la corriente de bootstrap. Por otra parte, si bien que \mathbf{J} tienda a 0 es un resultado deseado, surge la incógnita de por qué si se suministra al γ -solver un perfil de $\gamma(R)$ obtenido de una solución con \mathbf{J} arbitrario en la separatriz, el código no logre reproducir el campo de \mathbf{J} .

Estas características pueden deberse a que los solvers obtienen la relación entre flujos magnéticos de maneras fundamentalmente diferentes. Observando las ecuaciones 4.27 y 4.35 utilizadas para estimar esta relación, que tienen por expresiones

$$\left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)_{k+1} = \frac{B_0(\rho_b^k)^2}{\Psi_0^{k+1}} \frac{\rho}{q_{dato}(\rho)}$$

para el q -solver y

$$\left(\frac{d\Psi}{d\rho}\right)_{k+1} = \frac{\tan(\gamma_{dato,k})}{\tan(\gamma_k)} \left(\frac{d\Psi}{d\rho}\right)_k$$

para el γ -solver, se puede diferenciar que en el q -solver la forma funcional de la relación de flujos está dada por el perfil de $q(\rho)$, mientras que en el γ -solver dicha forma se construye mediante sucesivas iteraciones. En otras palabras, la relación de flujos se calcula para cada nueva solución parcial en el q -solver, mientras que dicha relación se actualiza de una solución a otra en el γ -solver. Esta diferencia sugiere que algunas características de la solución lineal pueden preservarse en el γ -solver, en particular la nulidad de \mathbf{J} en la separatriz.

Para verificar esta hipótesis, se resolvió el equilibrio del escenario inductivo por medio del:

- q -solver
- q -solver con imposición de $\mathbf{J} = 0$ en la separatriz
- γ -solver
- γ -solver con imposición de $\mathbf{J} = 0$ en la separatriz
- γ -solver con \mathbf{J} inicial mayor a 0 en la separatriz
- γ -solver con imposición de $\mathbf{J} = 0$ en la separatriz y con \mathbf{J} inicial mayor a 0

La imposición utilizada para el γ -solver es la misma que la descrita en el capítulo 5, y se utilizó $\Delta_f = 0,05$ para estas simulaciones. Para obtener $\mathbf{J} > 0$ en la separatriz inicialmente en el γ -solver, se procedió a simular el escenario con el q -solver, para luego volver a calcular el equilibrio con el γ -solver, utilizando la solución final del primero como semilla inicial. La comparación de los perfiles, junto con el perfil del equilibrio lineal, se puede observar en la figura 6.14.

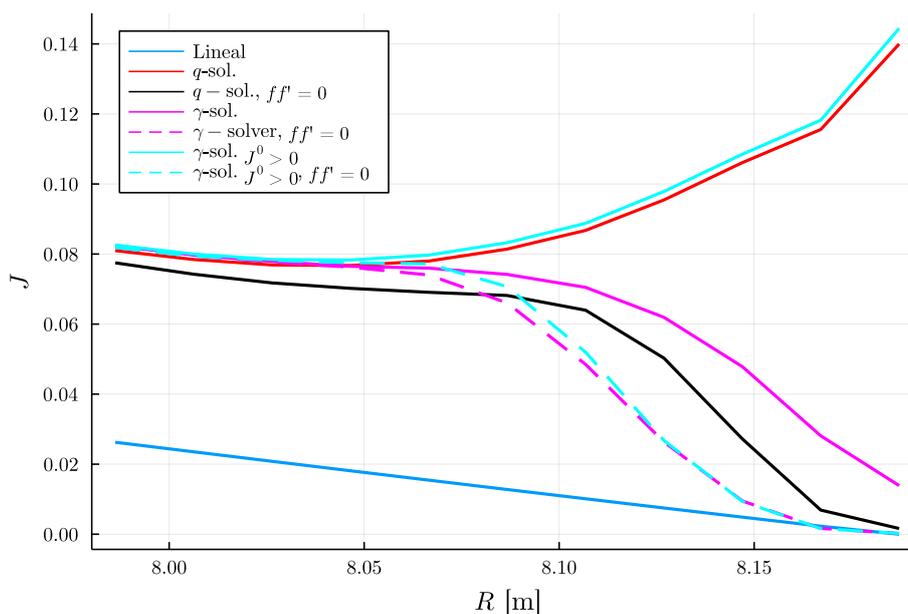


Figura 6.14: Comparación del perfil de $J(R)$ cerca de la separatriz de distintas soluciones del escenario inductivo, comentadas en la lista de la sección 6.3, junto con el perfil de la solución lineal

Se observa que en las situaciones en donde se impuso $\frac{df^2}{d\psi} = 0$ en la separatriz la densidad de corriente tiende a 0 en el borde. Por otra parte, se observa que para el equilibrio calculado con el γ -solver que tiene un equilibrio semilla con la densidad de corriente mayor a 0 en la separatriz, de la solución final también se obtiene un perfil de $J(R)$ con $J > 0$. Este resultado indica que el método de actualización de la relación de flujos empleado para el γ -solver tiene poca influencia sobre el valor de \mathbf{J} en la pared, quedando este valor prácticamente establecido por el equilibrio que se utilice como semilla inicial.

6.4. Cálculo del equilibrio con perfiles de presión imprecisos

Como el objetivo del γ -solver es su uso en análisis de datos experimentales, resulta de interés observar cómo varían los perfiles calculados en el caso que exista un elevado nivel de incertidumbre en el campo de presiones. Para ello, se modificó el perfil de presión del escenario híbrido, en pos de generar dos perfiles diferentes al original. Estos perfiles se pueden observar en la figura 6.15.

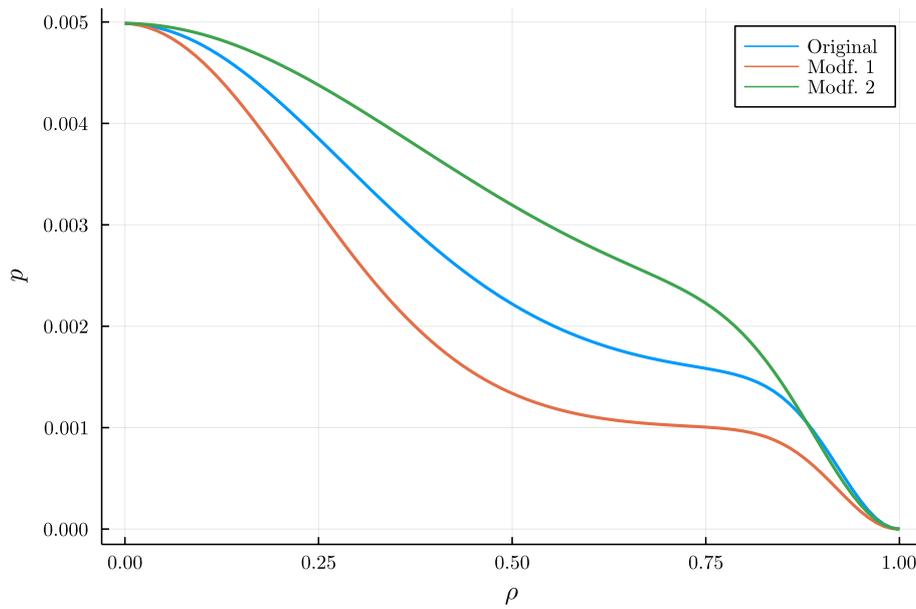


Figura 6.15: Perfiles de $p(\rho)$ del escenario híbrido modificados.

La tabla 6.5 compara los parámetros utilizados para definir los perfiles de $p(\rho)$ mediante la ecuación 5.1.

Perfil	p_0	D_0	a	D_e
Original	0,005	0,3	0,4	0,11
Modf. 1	0,005	0,2	0,32	0,11
Modf. 2	0,005	0,53	0,4	0,15

Tabla 6.5: Valores de los parámetros utilizados en los perfiles de $p(\rho)$ elegidos para el escenario híbrido, en pos de analizar la variabilidad de la solución frente a perfiles de presión imprecisos.

La metodología de resolución consiste en obtener el perfil de $\gamma(R)$ del q -solver, utilizando el perfil de presión original, para luego suministrar dicho perfil de $\gamma(R)$ y los perfiles de presión modificados al γ -solver. La evolución de los parámetros numéricos se pueden observar en las figuras 6.16 y 6.17.

El escenario con el perfil modificado 1 obtuvo un valor mínimo de residuo semejante al escenario sin modificar. En contraparte, el escenario con el perfil modificado 2 obtuvo un valor de residuo mínimo por encima de 10^{-2} . A su vez, el valor final de p_0 difiere en una medida considerable al valor suministrado al q -solver en ambos casos modificados, como se puede apreciar en la tabla 6.6.

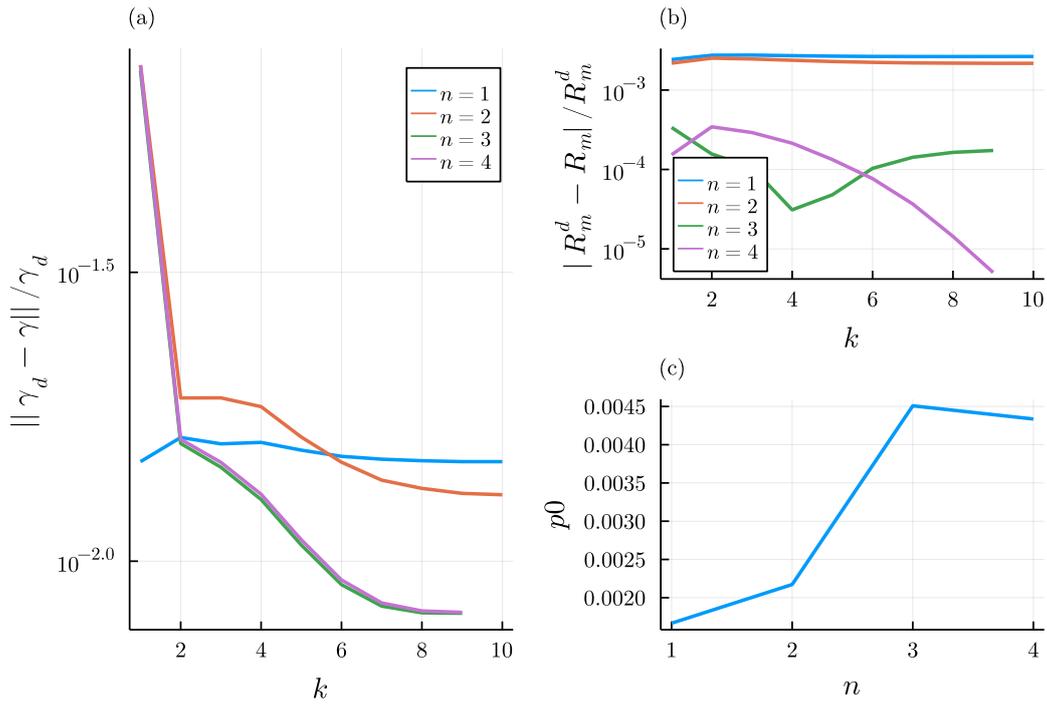


Figura 6.16: Evolución de parámetros numéricos del escenario híbrido, con la modificación 1. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.

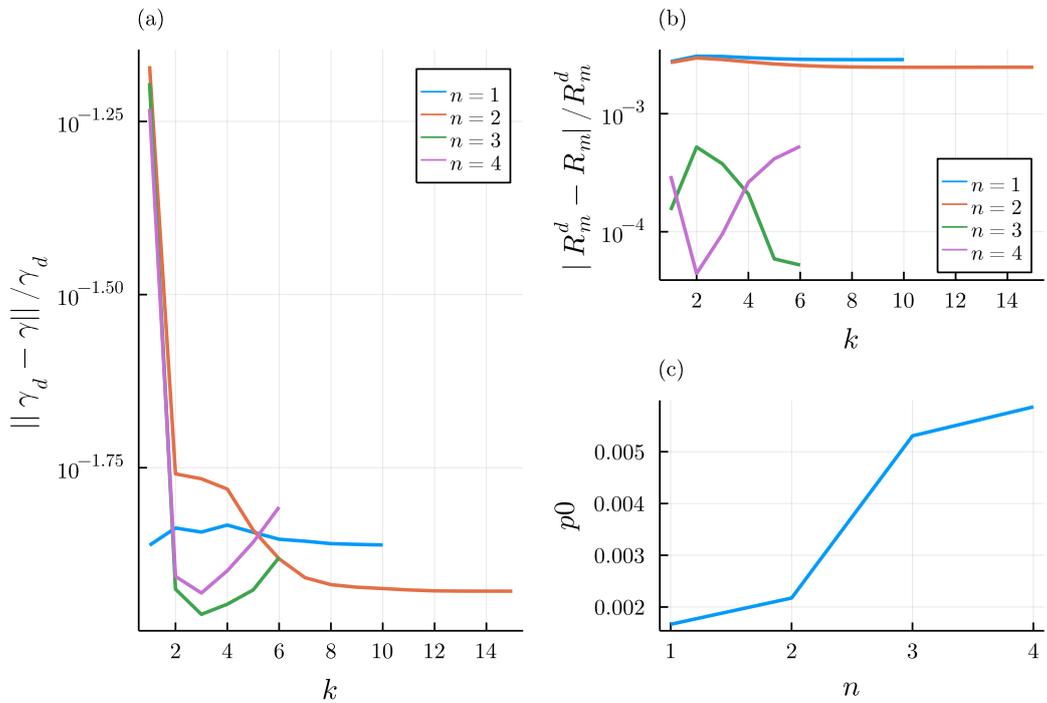


Figura 6.17: Evolución de parámetros numéricos del escenario híbrido, con la modificación 2. El gráfico (a) muestra la evolución del residuo de $\gamma(R)$ conforme mejora la estimación de p_0 . El gráfico (b) es similar al gráfico (a), en donde se muestra el residuo de R_m . El gráfico (c) muestra las sucesivas estimaciones de p_0 obtenidas por el método utilizado.

Escenario	Residuo mínimo γ_{dato} vs γ_{calc}	p_0 objetivo	p_0 calculado
Original	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4,91 \cdot 10^{-2}$
Modf. 1	$8,15 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4,33 \cdot 10^{-2}$
Modf. 2	$1,17 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5,86 \cdot 10^{-2}$

Tabla 6.6: Valores mínimos de residuos obtenidos para el escenario híbrido y sus modificaciones, así como la diferencia entre, por medio del γ -solver.

La figura 6.18 compara los perfiles de $q(\rho)$ calculados con los escenarios modificados con el perfil dato. Las diferencias entre los parámetros de interés se pueden ver en la tabla 6.7.

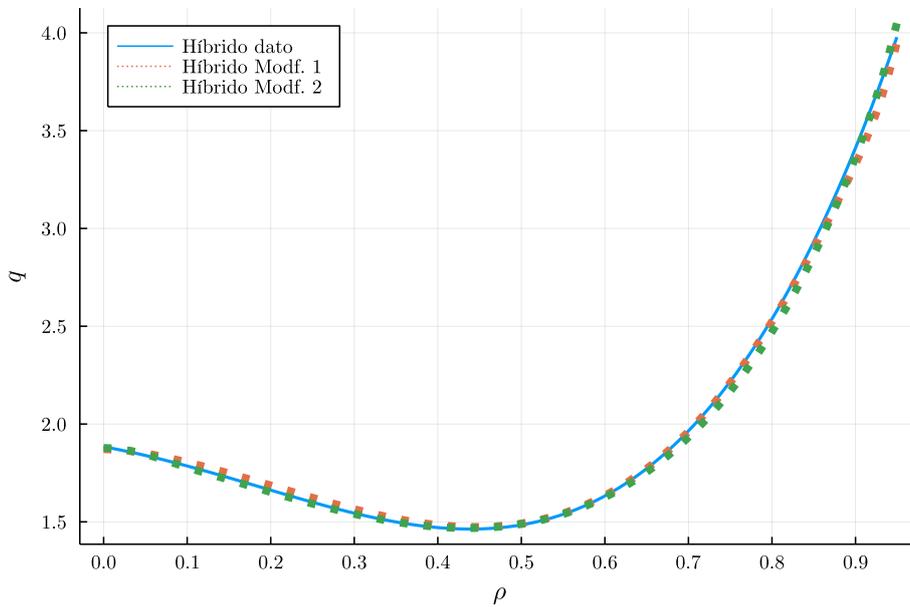


Figura 6.18: Comparación de perfiles de $q(\rho)$ calculados mediante el γ -solver, entre el perfil dato y los perfiles calculados con los escenarios modificados.

Escenario	Residuo	Δq_0	Δq_{95}
Modf. 1	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$2,88 \cdot 10^{-2}$
Modf. 2	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$5,84 \cdot 10^{-3}$	$-7,12 \cdot 10^{-2}$

Tabla 6.7: Comparación de parámetros del perfil de $q(\rho)$ entre el perfil dato y los escenarios híbridos modificados, mediante el γ -solver.

Se observa un buen acuerdo entre los perfiles de $q(\rho)$, lo que sugiere que una información no tan precisa del perfil de presión en el γ -solver no tiene un gran impacto en la estimación del perfil del factor de seguridad. También se obtuvo que el perfil de $J(R)$ no se vió afectado por la modificación de los perfiles de $p(\rho)$, como se puede ver en la figura 6.19.

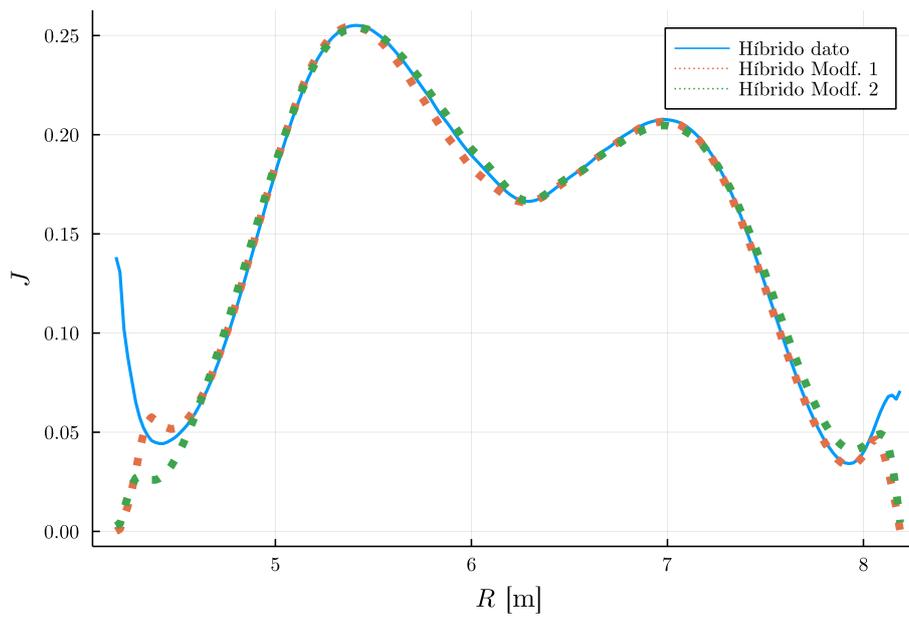


Figura 6.19: Comparación de perfiles de $J(R)$ entre el escenario híbrido calculado mediante el q -solver, y los escenarios modificados calculados con el γ -solver.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

“Evañ me sutañ.”
— Así he oído.

7.1. Objetivo

Se desarrolló con éxito un código de resolución de equilibrio magnetohidrodinámico de frontera fija para configuraciones con simetría de revolución, que utiliza como parámetros de entrada el perfil del ángulo de inclinación en el plano ecuatorial $\gamma(R)$, así como también el perfil de presión adimensional normalizado en función del radio medio normalizado $p(\rho)$. La motivación y objetivo de este código radican en su uso como parte de las herramientas de diagnóstico de un reactor tokamak, además de mejorar las capacidades de diseño de leyes de control.

El código resuelve la ecuación de Grad-Shafranov formulada como un problema inverso. Partiendo de un equilibrio semilla, se procede a estimar el lado derecho de la ecuación mediante los perfiles $\gamma(R)$ y $p(\rho)$, construyendo así la ecuación a resolver de manera iterativa. Además, por medio de la relación entre el corrimiento de Shafranov y la presión, se estima la magnitud del perfil de presión normalizado por el método de la secante, utilizando la posición radial del cruce por 0 del perfil de $\gamma(R)$. Por tanto el código posee 2 niveles de iteración: el externo que estima la amplitud de $p(\rho)$ y el interno que construye la ecuación de Grad-Shafranov para cada iteración del perfil de presión. La ecuación de Grad-Shafranov se resuelve en cada instancia por el método de elementos finitos, utilizando iteraciones de Newton-Raphson.

7.2. Casos de estudio

Este código, al que denominamos γ -solver, se utilizó para resolver el equilibrio MHD simulando los plasmas planeados para el reactor avanzado del experimento ITER (inductivo, híbrido y avanzado) publicados en los fundamentos físicos del proyecto [10] y descritos en el capítulo 5, en conjunto con otro código desarrollado en el grupo en trabajos anteriores [1, 62]. Este último, denominado q -solver, acepta como parámetros de entrada el perfil del factor de seguridad $q(\rho)$ y el perfil de presión adimensional sin normalizar $\bar{p}(\rho)$, ambos en función del radio medio normalizado. Este código también

plantea un problema inverso de frontera fija, pero no posee un nivel externo de iteraciones como el γ -solver. Así mismo, el código también resuelve el problema diferencial en cada instancia mediante iteraciones de Newton-Raphson en mallas de elementos finitos.

7.3. Resultados

Se procedió a resolver el problema de equilibrio en los escenarios de ITER por medio del q -solver, con perfiles de entrada basados en la referencia [10]. Luego, de la solución obtenida se calcularon los perfiles de $\gamma(R)$ y $p(\rho)$ para utilizarlos en el γ -solver. Se obtuvo un buen acuerdo entre los perfiles dato y calculados, en donde el residuo en todos los casos resultó menor al 1%, siendo éste calculado mediante la ecuación 4.15, y también se logró recuperar la amplitud del perfil de presión, con diferencias del orden del 1%. Estos valores de residuo se obtuvieron tanto para los perfiles de $\gamma(R)$ como para los perfiles de $q(\rho)$. De estos resultados, se concluye que el código desarrollado en el presente trabajo logra obtener una solución del problema del equilibrio tal que los perfiles derivados de la misma coinciden con los perfiles dato, dentro de una tolerancia aceptable, para los 3 escenarios estudiados. Las soluciones obtenidas por el γ -solver en los 3 escenarios también lograron recuperar el perfil de $q(\rho)$ dato utilizado para el q -solver, dentro de las mismas tolerancias. De esto se concluye que mediante el perfil de $\gamma(R)$ de los equilibrios estudiados es posible aproximar adecuadamente el perfil del factor de seguridad de cada equilibrio.

Una característica de los códigos que resuelven el equilibrio por medio del perfil de $q(\rho)$ es que la densidad de corriente toroidal \mathbf{J} puede no anularse en la separatriz del plasma. Se calcularon los perfiles ecuatoriales de densidad de corriente toroidal $J(R)$ en ambos códigos, y se halló que en las soluciones obtenidas mediante el q -solver no se anulaba \mathbf{J} en la separatriz. En cambio, los perfiles de $J(R)$ sí se anulaban para el γ -solver. Dado que este resultado del q -solver es de poca relevancia física, se procedió a modificar el código para imponer la nulidad de \mathbf{J} en la separatriz. Observando los perfiles de \mathbf{J} calculados, se concluye que la modificación logra su objetivo, y el cambio que sufre el perfil de $J(R)$ es local en la separatriz y no afecta al seno del perfil. Luego de obtener los perfiles de $\gamma(R)$ con esta imposición en el q -solver, se resolvieron los equilibrios con el γ -solver. Se obtuvo que para este caso el perfil de $q(\rho)$ se lograba recuperar con valores de residuo similares al caso sin imposición en el γ -solver, pero había una marcada diferencia en el valor de q_{95} respecto a los equilibrios resueltos utilizando los perfiles de $\gamma(R)$ obtenidos del q -solver sin modificar. Se concluye de estos resultados que el método de imposición de nulidad de \mathbf{J} para el q -solver requiere un tratamiento más exhaustivo.

Para verificar por qué existe una diferencia entre el q -solver y el γ -solver con respecto al valor de la densidad de corriente en el borde del dominio, se compararon distintas soluciones obtenidas del escenario inductivo, siendo particular la resolución del equilibrio por medio del γ -solver partiendo de la solución final de q -solver para el mismo escenario. Se obtuvo que en las soluciones del γ -solver poseen una tendencia a mantener el valor de \mathbf{J} en la separatriz del equilibrio semilla utilizado. Se concluye que esta propiedad del γ -solver es debida a cómo el código calcula las siguientes estimaciones de la ecuación de Grad-Shafranov, en donde se actualiza en base a la anterior iteración, en vez de recalcularse como en el q -solver, como se explica en el capítulo 6.

Dado que el objetivo del código es su uso en la práctica, se procedió a resolver el equilibrio del escenario híbrido por medio del γ -solver, esta vez modificando el perfil de presión suministrado. Es decir, del equilibrio original resuelto con el q -solver se obtuvo el perfil $\gamma(R)$, y se suministró al γ -solver dicho perfil y perfiles de $p(\rho)$ modificados, los cuáles difieren del perfil sin normalizar. Se obtuvo que se logra recuperar el perfil de $q(\rho)$ dato suministrado al q -solver, aún con los perfiles de presión modificados, con un nivel de acuerdo similar al obtenido en las simulaciones sin modificar. También se observó que la forma del perfil de $\mathbf{J}(R)$ obtenida mediante el γ -solver y los perfiles de presión modificados coinciden con el perfil calculado mediante el q -solver, exceptuando el valor en las cercanías de la separatriz. De estos resultados se concluye de que el γ -solver podría ser robusto frente a estimaciones poco precisas del perfil de $p(\rho)$, siendo solamente necesario un perfil de $\gamma(R)$ preciso para obtener los perfiles de $q(\rho)$ y $\mathbf{J}(R)$ de un equilibrio dado.

7.4. Trabajos futuros

Como pasos a seguir, en líneas de lo desarrollado hasta el momento, se propone contrastar el γ -solver con mediciones experimentales de $\gamma(R)$, así como también la posibilidad de que utilice perfiles que no hayan sido medidos en el plano ecuatorial de una descarga.

En una descarga de plasma dentro de un reactor, las cantidades tales como la presión y corriente deben de anularse en la interfaz con el vacío. En la ecuación de Grad-Shafranov, significa que los perfiles de presión y corriente deben anularse en la separatriz, lo que en el problema diferencial habilita a que exista la solución trivial. Se propone estudiar la cuenca de atracción de las soluciones, dada la certera existencia de la solución nula.

Por otro lado, verificamos que resolver el equilibrio a partir del perfil de q lleva, en general, a un valor de corriente no nulo en la separatriz, lo que puede resultar de poca relevancia física ya que representa una discontinuidad de corriente. Sin bien propusimos una regularización que anula el lado derecho de la ecuación de Grad-Shafranov cerca del borde, la forma funcional de la corrección es arbitraria. Se propone el estudio de una corrección basada en la física del plasma en la zona periférica, considerando los efectos de la difusión magnética y la corriente de bootstrap, entre los procesos que dominan la forma de los perfiles en esa región.

Por último, se proponen realizar experimentos numéricos, en pos de obtener correlaciones contrastables con resultados experimentales o estudios similares, una vez corroborada la validez de ambos códigos.

Bibliografía

- [1] Montes, P. E. Cálculo de equilibrios toroidales en plasmas de fusión nuclear. Proyecto Fin de Carrera, Instituto Balseiro, 2017. [ix](#), [x](#), [x](#), [5](#), [23](#), [24](#), [43](#), [46](#), [83](#)
- [2] Wurzel, S. E., Hsu, S. C. Progress toward fusion energy breakeven and gain as measured against the lawson criterion. *Physics of Plasmas*, **29** (6), 062103, 2022. [ix](#), [ix](#), [ix](#), [ix](#), [x](#), [6](#), [7](#), [8](#), [10](#), [12](#)
- [3] Wikimedia Commons. Imágenes de páginas relacionadas. [ix](#), [ix](#), [x](#), [7](#), [9](#), [13](#)
- [4] Wolf, R. C., Alonso, A., Äkäslompolo, S., Baldzuhn, J., Beurskens, M., Beidler, C. D., *et al.* Performance of wendelstein 7-x stellarator plasmas during the first divertor operation phase. *Physics of Plasmas*, **26** (8), 082504, 2019. URL <https://doi.org/10.1063/1.5098761>. [ix](#), [8](#)
- [5] Taccetti, J. M., Intrator, T. P., Wurden, G. A., Zhang, S. Y., Aragonéz, R., Assmus, P. N., *et al.* Frx-l: A field-reversed configuration plasma injector for magnetized target fusion. *Review of Scientific Instruments*, **74** (10), 4314–4323, 2003. URL <https://doi.org/10.1063/1.1606534>. [x](#), [10](#)
- [6] Slough, J., Votroubek, G., Pihl, C. Creation of a high-temperature plasma through merging and compression of supersonic field reversed configuration plasmoids. *Nuclear Fusion*, **51** (5), 053008, apr 2011. URL <https://doi.org/10.1088/0029-5515/51/5/053008>. [x](#), [10](#), [11](#)
- [7] Rosenbluth, M. N., Bussac, M. N. Mhd stability of spheromak. *Nuclear Fusion*, **19**, 489–498, 1979. [x](#), [11](#), [12](#)
- [8] Wesson, J. Tokamaks. 3^a ed^{ón}. Oxford University Press, 2011. [x](#), [x](#), [xi](#), [2](#), [24](#), [25](#), [26](#), [28](#), [29](#), [30](#), [33](#)
- [9] Zohm, H. Magnetohydrodynamic stability of tokamaks. John Wiley & Sons, 2015. [x](#), [24](#), [33](#), [35](#)
- [10] Shimada, M., Campbell, D., Mukhovatov, V., Fujiwara, M., Kirneva, N., Lackner, K., *et al.* Overview and summary. *Nuclear Fusion*, **47** (6), S1, 2007. [x](#), [xv](#), [xv](#), [30](#), [31](#), [51](#), [52](#), [83](#), [84](#)
- [11] Murari, A., Mazon, D., Martin, N., Vagliasindi, G., Gelfusa, M. Exploratory data analysis techniques to determine the dimensionality of complex nonlinear phenomena: The l-to-h transition at jet as a case study. *IEEE Transactions on Plasma Science - IEEE TRANS PLASMA SCI*, **40**, 1386–1394, 05 2012. [xi](#), [31](#)

- [12] Heidbrink, W. W., Victor, B. S. The motional stark effect diagnostic reliably measures significant deviations in safety factor profile during diii-d sawteeth. *Physics of Plasmas*, **27** (8), 080701, 2020. URL <https://doi.org/10.1063/5.0011135>. xi, 35
- [13] Verlini, G. Nuclear fusion basics, 2010. URL <https://www.iaea.org/newscenter/news/nuclear-fusion-basics>. 1
- [14] Roederer, J. G., Zhang, H. Dynamics of magnetically trapped particles. Springer, 2016. 3, 13
- [15] Bodin, H. The reversed field pinch. *Nuclear Fusion*, **30** (9), 1717–1737, sep 1990. 4
- [16] Marrelli, L., Martin, P., Puiatti, M., Sarff, J., Chapman, B., Drake, J., *et al.* The reversed field pinch. *Nuclear Fusion*, **61** (2), 023001, jan 2021. 4
- [17] Helander, P. Theory of plasma confinement in non-axisymmetric magnetic fields. *Reports on Progress in Physics*, **77** (8), 087001, jul 2014. 4
- [18] Tuszewski, M. Field reversed configurations. *Nuclear Fusion*, **28** (11), 2033–2092, nov 1988. 4
- [19] Bellan, P. M. Spheromaks: a practical application of magnetohydrodynamic dynamics and plasma self-organization. *Icp*, 2000. 4, 11, 12, 13, 19
- [20] Cowley, S. C. The quest for fusion power. *Nature Physics*, **12** (5), 384–386, May 2016. URL <https://doi.org/10.1038/nphys3719>. 5
- [21] Aymar, R., Barabaschi, P., Shimomura, Y. The ITER design. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **44** (5), 519–565, apr 2002. URL <https://doi.org/10.1088/0741-3335/44/5/304>. 5
- [22] Duan, Y., Li, Y., Zhou, L. The progress of superconducting magnet designing for iter. *En: 2022 IEEE Asia-Pacific Conference on Image Processing, Electronics and Computers (IPEC)*, págs. 456–460. 2022. 5
- [23] The DIII-D Team. Diii-d capabilities and tools for plasma science research. URL https://fusion.gat.com/global/_media/diii-d/frontier/diii-d_capabilities_document_v5.pdf. 5
- [24] Sartori, F., de Tommasi, G., Piccolo, F. The joint european torus. *IEEE Control Systems Magazine*, **26** (2), 64–78, 2006. 5
- [25] GAO, X., ZHANG, T., WU, M., LI, G., ZENG, L. Recent results of fusion triple product on EAST tokamak. *Plasma Science and Technology*, **23** (9), 092001, jul 2021. URL <https://doi.org/10.1088/2058-6272/ac1165>. 5, 6
- [26] Lee, G., Kwon, M., Doh, C., Hong, B., Kim, K., Cho, M., *et al.* Design and construction of the KSTAR tokamak. *Nuclear Fusion*, **41** (10), 1515–1523, oct 2001. URL <https://doi.org/10.1088/0029-5515/41/10/318>. 5

- [27] Herrmann, A., Gruber, O. Chapter 1: Asdex upgrade-introduction and overview. *Fusion Science and Technology*, **44** (3), 569–577, 2003. 5
- [28] Ninomiya, H., Ando, T., Horie, T., Horiike, H., Koizumi, K., Kushima, T., *et al.* Jt-60 upgrade device for confinement and steady state studies. *Plasma Devices and Operations*, **1** (1), 43–65, 1990. 5
- [29] Creely, A., Greenwald, M., Ballinger, S., Brunner, D., Canik, J., Doody, J., *et al.* Overview of the sparc tokamak. *Journal of Plasma Physics*, **86** (5), 2020. 5
- [30] Bachmann, C., Aiello, G., Albanese, R., Ambrosino, R., Arbeiter, F., Aubert, J., *et al.* Initial demo tokamak design configuration studies. *Fusion Engineering and Design*, **98**, 1423–1426, 2015. 5
- [31] Kim, K., Im, K., Kim, H., Oh, S., Park, J., Kwon, S., *et al.* Design concept of k-demo for near-term implementation. *Nuclear Fusion*, **55** (5), 053027, 2015. 5
- [32] Kwon, S., Kim, H.-T., Hong, S.-H., Kwag, S. W., Chang, Y. B., Song, N. H., *et al.* Cfd analyses for the upgrade divertor system of kstar. *Fusion Science and Technology*, **77** (7-8), 699–709, 2021. 6
- [33] Bodin, H. The reversed field pinch. *Nuclear Fusion*, **30** (9), 1717, 1990. 6
- [34] Malesani, G., Rostagni, G. The rfx experiment. En: Fusion technology 1986. 1987. 7
- [35] Dexter, R., Kerst, D., Lovell, T., Prager, S., Sprott, J. The madison symmetric torus. *Fusion Technology*, **19** (1), 131–139, 1991. 7
- [36] Peruzzo, S., Bernardi, M., Berton, G., Cavazzana, R., Dal Bello, S., Dalla Palma, M., *et al.* Technological challenges for the design of the rfx-mod2 experiment. *Fusion Engineering and Design*, **146**, 692–696, 2019. 7
- [37] Ryzhkov, S. V. A field-reversed magnetic configuration and applications of high-temperature frc plasma. *Plasma Physics Reports*, **37** (13), 1075–1081, Dec 2011. URL <https://doi.org/10.1134/S1063780X11030135>. 9
- [38] Glen, W., Richard, E., Michel, T., Fred, J. L., Richard, M. Magnetized target fusion: A burning frc plasma in an imploded metal can. 1999. 9
- [39] Sutherland, D., Jarboe, T., Morgan, K., Pfaff, M., Lavine, E., Kamikawa, Y., *et al.* The dynamak: An advanced spheromak reactor concept with imposed-dynamo current drive and next-generation nuclear power technologies. *Fusion Engineering and Design*, **89** (4), 412–425, 2014. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920379614002518>. 12
- [40] Long, K., Tahir, N. Heavy ion beam icf fusion: The thermodynamics of ignition and the achievement of high gain in icf fusion targets. *Physics Letters A*, **91** (9), 451–456, 1982. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960182907472>. 12

- [41] Edwards, M. J., Patel, P. K., Lindl, J. D., Atherton, L. J., Glenzer, S. H., Haan, S. W., *et al.* Progress towards ignition on the national ignition facility. *Physics of Plasmas*, **20** (7), 070501, 2013. URL <https://doi.org/10.1063/1.4816115>. 13
- [42] Zylstra, A. B., Hurricane, O. A., Callahan, D. A., Kritcher, A. L., Ralph, J. E., Robey, H. F., *et al.* Burning plasma achieved in inertial fusion. *Nature*, **601** (7894), 542–548, Jan 2022. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-021-04281-w>. 13
- [43] Chu, P. K., Lu, X. Low temperature plasma technology: methods and applications. CRC press, 2013. 13
- [44] Freidberg, J. P. Ideal MHD. Cambridge University Press, 2014. 15, 20
- [45] Goedbloed, H., Keppens, R., Poedts, S. Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas. Cambridge University Press, 2019. 15, 16
- [46] Batchelor, G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2000. 17
- [47] García-Martínez, P. L. Procesos de relajación y auto-organización en plasmas de fusión. Tesis Doctoral, Instituto Balseiro, 2010. 17
- [48] Priest, E., Forbes, T. Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications. Cambridge University Press, 2007. 17, 18, 20
- [49] Cohen, R. S., Spitzer Jr, L., Routly, P. M. The electrical conductivity of an ionized gas. *Physical Review*, **80** (2), 230, 1950. 17
- [50] Kulsrud, R. M. Plasma Physics for Astrophysics. Princeton University Press, 2004. 18, 19
- [51] Eisenberg, M., Guy, R. A proof of the hairy ball theorem. *The American Mathematical Monthly*, **86** (7), 571–574, 1979. URL <https://doi.org/10.1080/00029890.1979.11994857>. 19
- [52] Jardin, S. Computational Methods in Plasma Physics. CRC press, 2010. 22, 44
- [53] Woods, L. C. Theory of Tokamak Transport: New aspects for Nuclear Fusion Reactor Design. Wiley-VCH, 2006. 25, 26, 59
- [54] Wolf, R. C., Bock, A., Ford, O., Reimer, R., Burckhart, A., Dinklage, A., *et al.* Motional stark effect measurements of the local magnetic field in high temperature fusion plasmas. *Journal of Instrumentation*, **10** (10), P10008, 2015. 27
- [55] Institute, M. P. Plasma discharge. URL <https://www.ipp.mpg.de/ippcms/eng/pr/exptypen/tokamak/plasmaentladungen/index>. 28
- [56] Team, A., *et al.* The h-mode of asdex. *Nuclear Fusion*, **29** (11), 1959, 1989. 30
- [57] Sakamoto, Y., Matsunaga, G., Oyama, N., Suzuki, T., Aiba, N., Takenaga, H., *et al.* Development of reversed shear plasmas with high bootstrap current fraction towards reactor relevant regime in jt-60u. *Nuclear Fusion*, **49** (9), 095017, 2009. 31

-
- [58] Porcelli, F., Boucher, D., Rosenbluth, M. N. Model for sawtooth period and amplitude. *Plasma Physics Controlled Fusion*, **38**, 2163–2186, 1996. [31](#)
- [59] LoDestro, L. L., Pearlstein, L. D. On the grad–shafranov equation as an eigenvalue problem, with implications for q solvers. *Physics of Plasmas*, **1**, 90–95, 1994. [38](#)
- [60] Johnson, C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Courier Corporation, 2012. [40](#)
- [61] Hecht, F. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, **20** (3-4), 251–265, 2012. URL <https://freefem.org/>. [40](#), [41](#)
- [62] García-Martínez, P. L., Montes, P. E. An efficient mhd equilibrium solver for control oriented transport models. *Fusion Engineering and Design*, **152**, 2020. [46](#), [83](#)
- [63] Cheng, S.-W., Dey, T. K., Shewchuk, J., Sahni, S. Delaunay mesh generation. CRC Press Boca Raton, 2013. [54](#)

Agradecimientos

A mi director, Pablo, por proponerme este trabajo y por su incesante disposición para su desarrollo. He aprendido mucho a lo largo de la maestría, y gran parte se lo debo a su tutela.

A los jurados de esta tesis, Enzo, Pampa y Federico, por aceptar el cargo de corregir este trabajo.

A mi compañera Andre, que me apoyo incondicionalmente desde el inicio.

Y por último, pero no menos importante, al lector.

