

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**FRICCIÓN CUÁNTICA PARA UN ÁTOMO EN
PRESENCIA DE UNA SUPERFICIE**

Aitor Fernández
Maestrando

Dr. César Daniel Fosco
Director

Miembros del Jurado
Marina Huerta (Instituto Balseiro)
Fernando César Lombardo (Universidad de Buenos Aires)
Luis Esteban Oxman (Universidade Federal Fluminense)

8 de febrero de 2023

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov CAB-IB)

Inventario 24695
07/03/2023
Biblioteca Leo Falicov

Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
1. Introducción	1
1.1. Estructura del trabajo	3
1.2. Integrales funcionales y acción efectiva	4
1.3. Amplitud de transición	5
1.4. Notación y convenio	6
2. Modelo escalar	7
2.1. Descripción del sistema	7
2.2. Acción efectiva	8
2.3. Fenómenos disipativos a partir de amplitudes de transición	11
2.3.1. Radiación inducida por el movimiento	11
2.3.2. Efecto Casimir Dinámico	13
2.4. Fricción cuántica para el modelo escalar	15
2.4.1. $u = 0$	16
2.4.2. $u \neq 0$	19
2.5. Fuerza de fricción	21
3. Dipolo interactuando con grafeno	23
3.1. Descripción del modelo	24
3.2. Amplitud de transición para fricción cuántica	25
3.3. Probabilidad por unidad de tiempo	29
3.4. Fuerza de fricción	31
4. Correcciones por curvatura al modelo escalar	33
4.1. Métrica inducida en una superficie	33
4.2. Acción clásica en espacio curvo	34

4.3. Acción efectiva	35
4.4. Amplitud de transición	38
5. Conclusiones	41
A. Cálculos extra	43
A.1. Parte imaginaria de Π	43
B. Gráficas del Modelo escalar	45
B.1. Dependencia espacial de la probabilidad	45
B.2. Probabilidad total	46
B.3. Fuerza de fricción	46
C. Integrales extra del Modelo con grafeno	47
Bibliografía	51
Agradecimientos	53

Resumen

Imponer condiciones de contorno a los campos cuánticos puede dar lugar a fenómenos observables a escala macroscópica. Uno de estos fenómenos es la Fricción Cuántica o Fricción de Casimir, efecto disipativo que ocurre cuando dos objetos neutros se desplazan lateralmente con velocidad relativa constante.

En esta tesis, estudiamos el fenómeno de fricción cuántica para un sistema formado por un átomo, cuya trayectoria está determinada de forma externa, y una superficie bidimensional. Analizaremos distintos casos para la superficie: un espejo imperfecto y plano, una lámina de grafeno, y un espejo imperfecto con curvatura.

Los resultados obtenidos son, como era de esperar, que la probabilidad de que ocurra este fenómeno disminuye con la distancia entre la superficie y el átomo, y aumenta con la velocidad a la que este se mueve. Además, aparece un umbral que la velocidad del átomo debe superar para que ocurra el proceso. En el caso del espejo imperfecto, la velocidad umbral corresponde a la velocidad de propagación de las ondas en tal medio. Para el grafeno, la velocidad del átomo debe superar la velocidad de Fermi en el grafeno, $v_F \approx 0,003c$.

Palabras clave: EFECTO CASIMIR, FRICCIÓN CUÁNTICA, FLUCTUACIONES DE VACÍO

Abstract

Imposing boundary conditions to quantum fields may cause observable macroscopic phenomena. One of these phenomena is Quantum Friction or Casimir Friction, a dissipative effect that takes place when two neutral objects slide laterally with constant relative speed.

In this thesis, we study quantum friction for a system made up of an atom, whose trajectory is externally driven, and a two-dimensional surface. We will analyze different cases for the surface: an imperfect flat mirror, a graphene sheet, and an imperfect curved mirror.

The results obtained are, as expected, that the probability of this process occurring decreases with the distance between the surface and the atom, and increases with its speed. Furthermore, there is a threshold that the speed of the atom must overcome for this process to happen. When the surface is an imperfect mirror, the threshold speed corresponds to the speed of propagation of waves in the medium. For the graphene, the speed that the atom must overcome is the Fermi velocity in the graphene, $v_F \approx 0,003c$.

Keywords: CASIMIR EFFECT, QUANTUM FRICTION, VACUUM FLUCTUATIONS

Capítulo 1

Introducción

Una de las características más distintivas e importantes de la Mecánica Cuántica es el principio de indeterminación de Heisenberg, responsable de las fluctuaciones cuánticas. La existencia de estas fluctuaciones puede a su vez producir ciertos fenómenos observables a nivel macroscópico. Un subconjunto de estos fenómenos son los provocados por la existencia de condiciones de contorno no triviales para los campos cuánticos. El ejemplo paradigmático es el Efecto Casimir, descubierto por Hendrik Casimir en 1948 [1]. Este efecto, en su formulación original, consiste en la aparición de una fuerza atractiva entre dos placas paralelas, estáticas y perfectamente conductoras. Por supuesto, esta configuración a nivel clásico no produce ningún efecto similar, ya que la única fuerza que aparecería es la gravitatoria; luego el fenómeno es debido a la naturaleza cuántica del campo electromagnético confinado entre ambas placas, y las fluctuaciones de vacío de este. La magnitud de la fuerza atractiva (por unidad de área) que aparece, siendo a la distancia entre las placas, es

$$\mathcal{F} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} = \frac{1,3 \cdot 10^{-27} \text{N} \cdot \text{m}^2}{a^4}, \quad (1.1)$$

que como vemos es muy débil. Por ejemplo, es necesario que las láminas estén a una distancia de 10 nanómetros para que la fuerza por unidad de área sea aproximadamente una atmósfera. Que la magnitud de esta fuerza sea tan baja hizo que su detección experimental se demorara varias décadas [2, 3].

Más tarde se descubrió que si una de las placas está en movimiento acelerado, se puede dar lugar a la creación espontánea de fotones a partir del vacío, lo que es conocido como Efecto Casimir Dinámico (una revisión de este efecto y los avances recientes en esta área se puede encontrar en [4]). Este es un efecto disipativo que ocurre siempre y cuando haya uno o varios cuerpos neutros acelerados inmersos en un campo de vacío. De manera más general, los efectos disipativos son consecuencia de que las condiciones de contorno impuestas a los campos tengan cierta dependencia temporal. Si esta dependencia cambia con el tiempo, es decir, hay aceleraciones involucradas o las

propiedades del medio dependen del tiempo, tiene lugar el Efecto Casimir Dinámico. Por otro lado, cuando la dependencia temporal es constante, como lo sería en el caso de dos objetos moviéndose con velocidad relativa constante, puede aparecer la Fricción Cuántica o Fricción de Casimir, también conocida como fricción sin contacto, ya que sucede incluso en el vacío (a temperatura cero).

Como hemos mencionado al inicio de la introducción, todos estos fenómenos son consecuencia de las fluctuaciones cuánticas del vacío. Pero, ¿qué es el vacío? En el contexto de la mecánica cuántica, se conoce como *estado de vacío* al estado cuántico de mínima energía de un sistema [5], y a esta energía se le conoce como la *energía de punto cero*, que resulta ser infinita pero no observable. Como veremos, esta divergencia tiene que ver con que el proceso de cuantizar canónicamente una teoría no establece en qué orden deben aparecer los operadores cuánticos (que en general no conmutan) en el Hamiltoniano, operador que sirve para determinar la energía de un estado. Para teorías que no consisten únicamente en un campo libre, como puede ser una teoría interactuante o con condiciones de contorno no triviales, existe una cantidad que es finita y observable, conocida como *energía de vacío*. Esta cantidad consiste en la diferencia que hay entre la energía de punto cero de la teoría completa y la de su versión libre, es decir, sin interacciones o condiciones de contorno. Este es el caso de la típica configuración del Efecto Casimir, en el que la teoría completa consiste en el campo electromagnético junto con las condiciones de contorno en las placas conductoras, y la versión libre sería sin tener en cuenta estas placas. Tras hallar la energía de vacío de este sistema, que va a depender de la distancia entre las placas, se puede calcular la variación de esa energía con respecto a la distancia entre las placas, lo que daría como resultado la expresión de la Fuerza de Casimir (1.1).

Para ilustrar la divergencia de la energía de punto cero, veamos un ejemplo con un modelo sencillo. Al cuantizar canónicamente un campo escalar masivo, se puede ver que el Hamiltoniano del sistema es una suma continua de Hamiltonianos asociados a osciladores armónicos. Escrito en términos de operadores de creación y aniquilación de cuantos de energía, el operador Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{k} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{a}(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \right) \quad (1.2)$$

$$= \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k}| \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})] \right), \quad (1.3)$$

donde se ha usado que $[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Si se calcula el valor de expectación del Hamiltoniano para el estado de vacío (que cumple $\hat{a}(\mathbf{k})|0\rangle = 0$), es decir, la energía

de punto cero, se obtiene

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k}| = \infty. \quad (1.4)$$

Primero, la delta de Dirac evaluada en 0 ya es divergente, pero aunque hubiéramos tomado el campo confinado en un espacio de volumen V , tal que $\delta^{(3)}(0) \propto V$, la densidad de energía seguiría siendo divergente debido a la integral de momentos. Una manera de solucionar esta situación es redefinir el Hamiltoniano extrayendo la energía de punto cero, ya que no es una cantidad observable. Esto se puede hacer definiendo el producto temporalmente ordenado, que consiste en mover todos los operadores de aniquilación a la derecha de los de creación. De esta manera, (1.2) se convierte en

$$\hat{H} \rightarrow :\hat{H}: = \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k}| \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}), \quad (1.5)$$

y desaparece el problema de la energía de punto cero, ya que con este nuevo Hamiltoniano normalmente ordenado la energía del estado de vacío es nula.

Existe otra manera de calcular la energía de punto cero para una teoría cualquiera, y es a través de las integrales funcionales o de caminos [6].

1.1. Estructura del trabajo

En este trabajo, nos centraremos en el fenómeno de la Fricción Cuántica. Los cálculos que aparecen a lo largo de la tesis se realizan bajo el marco de la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés). Si bien no es intención de esta tesis explicar aspectos generales de QFT (varias referencias son [7-9]), en las siguientes secciones de este capítulo se tratarán algunas herramientas útiles a la hora de poder seguir los cálculos que aparecen en el resto de capítulos.

En el Capítulo 2 analizaremos la fricción cuántica para un modelo sencillo, en el que tanto el átomo como el campo de vacío y los grados de libertad de la superficie estarán modelados por grados de libertad escalares. Esto permite captar la esencia de la fenomenología sin añadir complicación a los cálculos. En el Capítulo 3, se tendrá en cuenta un modelo más sofisticado para el átomo, además de que se considerará el campo electromagnético como campo de vacío. La superficie de este capítulo representará una lámina de grafeno, por lo que el sistema completo describe una situación realista. En el Capítulo 4, se añadirá una modificación al sistema del segundo capítulo, que consistirá en añadir curvatura a la superficie. Veremos cuáles son las correcciones que introduce esta curvatura. Finalmente, en el Capítulo 5, se hará un repaso del trabajo realizado y se presentarán las conclusiones.

1.2. Integrales funcionales y acción efectiva

En algunas de las secciones de la tesis, se van a realizar cálculos usando el formalismo de las integrales funcionales. Por ello, conviene recopilar en esta sección algunos resultados que van a ser útiles para seguir los desarrollos de los capítulos posteriores.

Supongamos que tenemos una acción libre para la variable dinámica ϕ , que puede representar tanto a un campo como a un grado de libertad bosónico, que además está acoplada a una fuente externa J . Esta acción toma la forma $\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\phi \cdot K \cdot \phi + J \cdot \phi$, donde cada punto \cdot representa integración sobre el argumento de la variable dinámica. La integral funcional para esta acción es

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}} = \exp\left(-\frac{1}{2}J \cdot \Delta \cdot J\right), \quad (1.6)$$

donde $\Delta = -iK^{-1}$ es el propagador libre de ϕ y \mathcal{N} es una constante de normalización, tal que $\mathcal{Z}[0] = 1$.

Cuando la fuente externa J está construida a partir de otra variable dinámica independiente de ϕ , la expresión (1.6) representa la exponencial de i por la acción efectiva para esa nueva variable dinámica. Siguiendo el formalismo *in-out*, esta acción efectiva Γ_{eff} es útil a la hora de calcular la amplitud de probabilidad correspondiente a tener el vacío como estado cuántico tanto en el pasado lejano $t \rightarrow -\infty$ como en el futuro lejano $t \rightarrow +\infty$, que está dada por

$$\langle \text{vacío out} | \text{vacío in} \rangle = e^{i\Gamma_{\text{eff}}}. \quad (1.7)$$

Tomando el módulo al cuadrado de esta amplitud, se obtiene entonces la probabilidad de transición del estado de vacío en el pasado al estado de vacío en el futuro, es decir, de que el vacío se mantenga estable

$$P_{\text{est}} = |\langle \text{vacío out} | \text{vacío in} \rangle|^2 = e^{-2\text{Im}\{\Gamma_{\text{eff}}\}}. \quad (1.8)$$

Esta probabilidad es complementaria a la probabilidad de que se creen partículas en el estado final, situación en la que decimos que el vacío ha decaído. Si consideramos que la parte imaginaria de la acción efectiva es pequeña, podemos desarrollar la exponencial y vemos que

$$P_{\text{dec}} = 1 - P_{\text{est}} \approx 2\text{Im}\{\Gamma_{\text{eff}}\}. \quad (1.9)$$

Por lo tanto, si queremos hallar la probabilidad de que sucedan ciertos fenómenos disipativos como consecuencia del decaimiento del vacío, podemos calcularla mediante la parte imaginaria de la acción efectiva del sistema.

1.3. Amplitud de transición

Otro enfoque que podemos dar, en lugar de calcular la probabilidad de que aparezcan partículas en el estado final, es establecer cuál es el estado final en el que estamos interesados y ver cuál es la probabilidad de que se dé tal transición. Esto permite obtener información sobre el proceso que en el formalismo de la acción efectiva resulta más complicado, además de que los cálculos son más sencillos en algunos casos. Como vamos a ver en el Capítulo 2, este acercamiento permite ver cuál es la dependencia espacial del fenómeno asociado a la fricción cuántica. Además, en el Capítulo 3, abordar los cálculos desde la perspectiva de amplitudes de transición nos dará información sobre la probabilidad de medir el momento de las partículas creadas.

Cuando queremos calcular la probabilidad de que se dé una transición cuántica entre dos estados, el inicial y el final, usamos la matriz de *scattering* \hat{S} , que es el operador de evolución en la representación de interacción, donde el tiempo inicial es el pasado lejano y el tiempo final es el futuro lejano ($t_i \rightarrow -\infty$ y $t_f \rightarrow \infty$):

$$\hat{S} = \mathbb{T}e^{i\hat{\mathcal{S}}_{\text{int}}}, \quad (1.10)$$

donde \mathcal{S}_{int} es la acción de interacción del sistema y \mathbb{T} es el operador de ordenamiento temporal, que actúa de la siguiente manera

$$\mathbb{T}(\hat{A}(t)\hat{B}(t')) = \begin{cases} \hat{A}(t)\hat{B}(t') & \text{si } t < t' \\ \hat{B}(t')\hat{A}(t) & \text{si } t' < t \end{cases} \quad (1.11)$$

Conviene definir la matriz de transición \hat{T} , que corresponde a la parte no trivial de la matriz de *scattering*, $\hat{S} = \hat{1} + i\hat{T}$. El motivo por el que se define este operador es que en algunos procesos el estado inicial y final tienen el mismo contenido de partículas, por ejemplo el *scattering* de Bhabha¹ o el efecto Compton². Si se calculara la amplitud de probabilidad teniendo en cuenta la matriz de scattering completa, estaríamos teniendo en cuenta procesos en los que no hay interacción entre las partículas involucradas.

Al elemento de matriz entre el estado inicial y el final del operador de transición se le llama amplitud de transición, y está dada por

$$\begin{aligned} T_{\text{fi}} &= \langle \text{f} | \hat{T} | \text{i} \rangle = -i \langle \text{f} | \left(\mathbb{T}e^{i\hat{\mathcal{S}}_{\text{int}}} - \hat{1} \right) | \text{i} \rangle \\ &= \langle \text{f} | \mathbb{T} \left(\hat{\mathcal{S}}_{\text{int}} + \frac{i}{2!} \hat{\mathcal{S}}_{\text{int}}^2 + \dots \right) | \text{i} \rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

¹En el *scattering* de Bhabha, los estados inicial y final consisten en un electrón y un positrón.

²Un electrón y un fotón en los estados inicial y final.

El operador de ordenamiento temporal está relacionado con el ordenamiento normal mediante el Teorema de Wick. Para el caso de únicamente dos operadores, que es lo que va a aparecer en esta tesis, la relación es la siguiente

$$\mathbb{T}(\hat{A}\hat{B}) = :\hat{A}\hat{B}: + \hat{A}\hat{B}, \quad (1.13)$$

donde el segundo término (que no es un operador) se conoce como “contracción de Wick”. Cuando los operadores \hat{A} y \hat{B} corresponden al mismo campo evaluado en distintos puntos del espaciotiempo, esta contracción coincide con el propagador.

Como el producto normalmente ordenado consiste en situar todos los operadores de aniquilación a la derecha de los de creación, se concluye que el valor de expectación en el vacío del producto temporalmente ordenado de dos operadores corresponde a la contracción de Wick de estos, es decir

$$\langle 0 | \mathbb{T}(\hat{A}\hat{B}) | 0 \rangle = \hat{A}\hat{B}. \quad (1.14)$$

1.4. Notación y convenio

A lo largo de toda la tesis vamos a usar unidades naturales, tal que tanto la velocidad de la luz como la constante de Planck reducida sean iguales a la unidad, es decir $c = 1$ y $\hbar = 1$.

Vamos a denotar con $x = (x^\mu)_{\mu=0}^3 = (x^0, \mathbf{x})$ al conjunto de las 4 coordenadas espaciotemporales, siendo x^0 la coordenada temporal. Para hacer referencia a las coordenadas espaciotemporales sobre una superficie bidimensional usaremos $x_{\parallel} = (x^\alpha)_{\alpha=0}^2 = (x^0, \mathbf{x}_{\parallel})$. Salvo en el Capítulo 4 la métrica del espaciotiempo será la de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. El producto de Minkowski entre dos cuadvectores a y b se denotará por $a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

En ocasiones, se abreviarán las integrales de la siguiente manera $\int_x \equiv \int d^4x$ ó $\int_{\mathbf{y}_{\parallel}} \equiv \int d^2\mathbf{y}_{\parallel}$, y siempre que no se especifique el argumento de un integrando, se entiende que está evaluado en el conjunto de variables que se integran. Por ejemplo $\int_{k_{\parallel}} f \equiv \int d^3k_{\parallel} f(k_{\parallel})$.

Capítulo 2

Modelo escalar

En este capítulo vamos a estudiar efectos macroscópicos producidos por las fluctuaciones de vacío para un sistema sencillo [10], que consiste en un átomo, cuyo movimiento estará determinado de manera externa, y grados de libertad microscópicos localizados sobre una superficie plana. Ambos elementos estarán acoplados a un campo real escalar de vacío.

En la sección 2.1 se hará la descripción del modelo a considerar; posteriormente, en la sección 2.2, se calculará detalladamente la acción efectiva a primer orden para el caso en el que la superficie bidimensional no esté presente. A continuación, en la sección 2.3 se obtendrán los resultados de la sección anterior pero calculados mediante amplitudes de transición, lo que permitirá ver de una manera más clara cuáles son los procesos físicos que dan lugar a cada uno de los fenómenos disipativos. Finalmente, en la sección 2.4, se estudiará mediante amplitudes de transición la fricción cuántica que surge cuando hay un medio bidimensional presente. Este acercamiento permite ver la dependencia espacial de las amplitudes de probabilidad [11].

2.1. Descripción del sistema

Uno de los sistemas más sencillos que se puede considerar en el que aparecen fenómenos disipativos es el formado por dos elementos: un átomo que sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ ¹, modelada por un grado de libertad interno q y con frecuencia de excitación Ω_a , y un campo escalar real sin masa ϕ que vive en 3+1 dimensiones y al que nos referiremos como “campo de vacío”. Tiene este nombre ya que no se consideran efectos térmicos, es decir, estamos a temperatura cero. Ver [12] para correcciones térmicas al modelo.

Además, si se incluye como tercer elemento una superficie plana, que introduzca condiciones de contorno para el campo de vacío o interaccione con él de alguna manera, también puede manifestarse la fricción cuántica. En la sección 2.4, que es donde in-

¹Vamos a suponer que el movimiento es no relativista.

Introduciremos esta superficie, se presentará el modelo microscópico que describe a la superficie y su interacción con el campo de vacío. Por ahora, nos ocuparemos únicamente del átomo y del campo de vacío.

La acción clásica completa del sistema está dada por una parte libre para los dos elementos que lo conforman, y por otra parte que da cuenta de la interacción entre el campo de vacío y el átomo.

$$\mathcal{S}[\phi, q; \mathbf{r}(t)] = \mathcal{S}_0[\phi, q] + \mathcal{S}_{\text{av}}[\phi, q; \mathbf{r}(t)] \quad (2.1)$$

$$\mathcal{S}_0[\phi, q] = \underbrace{\int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}_{\mathcal{S}_v[\phi]} + \underbrace{\int dt \frac{1}{2} [\dot{q}^2 - \Omega_a^2 q^2]}_{\mathcal{S}_a[q]} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{S}_{\text{av}}[\phi, q; \mathbf{r}(t)] = \int d^4x \gamma \phi(x) q(x^0) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^0)), \quad (2.3)$$

donde γ es la constante de acoplamiento entre el campo de vacío y el átomo (las dimensiones en energía son $[\gamma] = 1/2$). Este término de interacción describe un acoplamiento mínimo entre el átomo y el campo de vacío, y vemos que es local en la posición del átomo $\mathbf{r}(t)$.

En los apartados 2.3 y 2.4, como vamos a calcular amplitudes de transición, necesitamos conocer el desarrollo de los campos libres en términos de operadores de creación y destrucción para saber cuáles son las correspondientes contracciones de Wick. Dada la forma de la acción para el campo de vacío y para el átomo, se obtiene

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_a}} (\hat{a} e^{-i\Omega_a t} + \hat{a}^\dagger e^{i\Omega_a t}) \quad (2.4)$$

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} (\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}), \quad \text{con } k^0 = |\mathbf{k}| \quad (2.5)$$

donde $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ y $[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

2.2. Acción efectiva

En esta sección vamos a calcular de manera detallada la acción efectiva a primer orden para la trayectoria de la partícula en ausencia de la superficie. Esto nos permitirá ver la probabilidad de decaimiento de vacío al calcular su parte imaginaria, lo que da cuenta de fenómenos disipativos. Estos efectos son debidos a que la trayectoria que sigue la partícula, sea cual sea, está determinada de forma externa.

La integral funcional que hay que hacer es

$$e^{i\Gamma_a[\mathbf{r}]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}q e^{i(\mathcal{S}_a + \mathcal{S}_v + \mathcal{S}_{av})}}{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}q e^{i(\mathcal{S}_a + \mathcal{S}_v)}}. \quad (2.6)$$

Primero, se integra el grado de libertad del átomo q usando (1.6), y se obtiene

$$e^{i\Gamma_a[\mathbf{r}]} = \left\langle \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{x,y} \gamma^2 \phi(x) V_a(x,y) \phi(y) \right] \right\rangle_v, \quad (2.7)$$

donde

$$\langle \dots \rangle_v = \frac{\int \mathcal{D}\phi \dots e^{i\mathcal{S}_v[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}_v[\phi]}} \quad (2.8)$$

y

$$V_a(x,y) = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^0))\Delta_a(x^0 - y^0)\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}(y^0)). \quad (2.9)$$

En esta expresión, Δ_a hace referencia al propagador del átomo, que es

$$\Delta_a(x^0 - y^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{ie^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega^2 - \Omega_p^2 + i\epsilon}. \quad (2.10)$$

Antes de integrar el campo ϕ , observamos que la expresión (2.7) nos indica que hay una autointeracción efectiva no local del campo de vacío debida a la presencia del átomo.

Con la intención de despejar la acción efectiva para la trayectoria, tomamos logaritmo en (2.7), después se desarrolla la exponencial de la derecha en potencias de la constante de acoplamiento γ , y finalmente se desarrolla el logaritmo

$$i\Gamma_a[\mathbf{r}] = \log \left\langle 1 - \frac{i}{2} \int_{x,y} \gamma^2 \phi(x) V_a(x,y) \phi(y) + \dots \right\rangle_v \quad (2.11)$$

$$= -\frac{i}{2} \int_{x,y} \gamma^2 V_a(x,y) G(x-y) + \mathcal{O}(\gamma^4), \quad (2.12)$$

donde

$$G(x-y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_v = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \quad (2.13)$$

es el propagador libre del campo escalar sin masa.

La acción efectiva para la trayectoria, a orden más bajo en la constante de acopla-

miento γ , es entonces

$$\Gamma_a^{(1)}[\mathbf{r}] = -\frac{\gamma^2}{2} \int_{x,y} V_a(x,y)G(x-y) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i\gamma^2}{2} \int_{x^0,y^0} \Delta_a(x^0-y^0)G(x^0-y^0, \mathbf{r}(x^0) - \mathbf{r}(y^0)) \\ &= \frac{i\gamma^2}{2} \int dx^0 \int dy^0 \int \frac{d\nu}{2\pi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_a(\nu)\tilde{G}(k)e^{-i(k^0+\nu)(x^0-y^0)+i\mathbf{p}\cdot[\mathbf{r}(x^0)-\mathbf{r}(y^0)]} \\ &= \frac{i\gamma^2}{2} \int \frac{d\nu}{2\pi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_a(\nu-k^0)\tilde{G}(k)|g(\nu, \mathbf{k})|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\nu}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Pi(\nu, \mathbf{k}, \Omega_a)|g(\nu, \mathbf{k})|^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde en la cuarta línea se ha hecho un corrimiento de variable de integración $k^0+\nu \rightarrow \nu$ y se ha definido

$$g(\nu, \mathbf{k}) = \int dt e^{i\nu t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)}, \quad (2.16)$$

función que depende de cuál sea la trayectoria que sigue el átomo, y

$$\Pi(\nu, \mathbf{k}, \Omega_a) = i\gamma^2 \int \frac{dk^0}{2\pi} \tilde{\Delta}_a(\nu-k^0)\tilde{G}(k). \quad (2.17)$$

Como queremos ver la probabilidad de decaimiento del vacío, nos interesa la parte imaginaria de la acción efectiva. De (2.15) vemos que solo es necesario calcular $\text{Im}\{\Pi(\nu, \mathbf{k}, \Omega_a)\}$. Primero, usando (2.10) y (2.13), e introduciendo un parámetro de Feynman x , se obtiene que

$$\Pi(\nu, \mathbf{k}, \Omega_a) = \frac{\gamma^2}{4} \int_0^1 dx \left[x\Omega_a^2 + (1-x)|\mathbf{k}|^2 - x(1-x)\nu^2 - i\epsilon \right]^{-3/2}. \quad (2.18)$$

En la sección A.1 del Apéndice A se calcula la parte imaginaria de esta integral, y se obtiene²

$$\text{Im}\{\Pi(\nu, \mathbf{k}, \Omega_a)\} = \frac{\pi\gamma^2}{4|\mathbf{k}|\Omega_a} \left[\delta(\nu - |\mathbf{k}| - \Omega_a) + \delta(\nu + |\mathbf{k}| + \Omega_a) \right]. \quad (2.19)$$

²Esta expresión corrige el factor 2 en el denominador de la ecuación (23) de [10]. Las expresiones siguientes son correctas.

Finalmente, se obtiene que la parte imaginaria de la acción efectiva a primer orden es

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\Gamma_a^{(1)}[\mathbf{r}]\} &= \frac{1}{2} \int \frac{d\nu}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |g(\nu, \mathbf{k})|^2 \text{Im}\{\Pi(\nu, \mathbf{k}, \Omega_a)\} \\ &= \frac{\gamma^2}{8\Omega_a} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|} |g(\Omega_a + |\mathbf{k}|, \mathbf{k})|^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esta expresión es válida para cualquiera sea la trayectoria del átomo. Como caso particular, si el átomo se mueve con velocidad constante, su posición está dada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, entonces se puede comprobar que la expresión se anula, ya que la función g es proporcional a una delta de Dirac que exige $\Omega_a + |\mathbf{k}| - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$, algo imposible ya que $\Omega_a > 0$ (y $|\mathbf{v}| < 1$, ya que estamos tomando $c = 1$). Por lo tanto, en la situación del átomo en el vacío sin presencia de superficies, este deberá estar acelerado para que pueda darse algún fenómeno disipativo.

En la próxima sección se van a analizar distintos procesos físicos, y veremos que cada uno de ellos estará asociado a trayectorias diferentes para el átomo.

2.3. Fenómenos disipativos a partir de amplitudes de transición

Calcular amplitudes de transición permite ver de una manera más explícita cuáles son los procesos físicos que están ocurriendo, ya que es necesario considerar el estado inicial y final del proceso.

2.3.1. Radiación inducida por el movimiento

El primer fenómeno que podemos analizar es la radiación inducida por el movimiento acelerado del átomo en el vacío, es decir, cuando el medio bidimensional no está presente. El sistema, por lo tanto, consiste en un átomo, que sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$, inmersa en un campo escalar real sin masa. Los estados cuánticos normalizados asociados a este fenómeno son

$$|i\rangle = |0_a\rangle \otimes |0_v\rangle \quad (2.21)$$

$$|f\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2} \hat{a}^\dagger |0_a\rangle \otimes \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) |0_v\rangle, \quad (2.22)$$

es decir, el estado inicial consta del átomo en su estado fundamental y el vacío para el campo escalar, y el estado final consiste en el átomo excitado y un “fotón” real con momento \mathbf{k} .

La amplitud de transición se calcula tomando el elemento correspondiente de la parte no trivial de la matriz de *scattering*, que en este caso a orden más bajo en la constante de acoplamiento γ está dada por

$$T_{\text{fi}} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2} \langle 0_{\text{a}} | \hat{a} \otimes \langle 0_{\text{v}} | \hat{a}(\mathbf{k}) \mathbb{T} \int d^4x \gamma \hat{\phi}(x) \hat{q}(x^0) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^0)) | 0_{\text{a}} \rangle \otimes | 0_{\text{v}} \rangle \quad (2.23)$$

$$= \gamma \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2} \int d^4x \underbrace{\hat{q}(x^0)} \underbrace{\hat{a}(\mathbf{k}) \hat{\phi}(x)} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^0)). \quad (2.24)$$

Del desarrollo en operadores de creación y destrucción dado en (2.4) y (2.5), se obtiene que las contracciones necesarias son

$$\underbrace{\hat{q}(x^0)} = \frac{e^{i\Omega_{\text{a}}x^0}}{\sqrt{2\Omega_{\text{a}}}} \quad (2.25)$$

$$\underbrace{\hat{a}(\mathbf{k}) \hat{\phi}(x)} = \frac{e^{ik \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\mathbf{k}|}}. \quad (2.26)$$

Con esto, la amplitud de transición resulta ser

$$T_{\text{fi}} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2} \frac{\gamma}{\sqrt{32\pi^3\Omega_{\text{a}}|\mathbf{k}|}} g(\Omega_{\text{a}} + |\mathbf{k}|, \mathbf{k}), \quad (2.27)$$

donde la función g está definida en (2.16).

La probabilidad total de que ocurra esta proceso, cualquiera sea el momento \mathbf{k} del fotón emitido, está dada por

$$P = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3\mathbf{k} |T_{\text{fi}}|^2 = \frac{\gamma^2}{4\Omega_{\text{a}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|} |g(\Omega_{\text{a}} + |\mathbf{k}|, \mathbf{k})|^2. \quad (2.28)$$

Teniendo en cuenta que $P = 2 \text{Im}[\Gamma]$, este resultado coincide con (2.20), donde se ha calculado la probabilidad de decaimiento de vacío a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva a orden más bajo en γ . En ese cálculo, no se había especificado cuál era el proceso físico responsable del decaimiento de vacío, pero ahora podemos ver que a orden más bajo en la constante de acoplamiento el único proceso físico que puede provocar el decaimiento de vacío es la radiación inducida por el movimiento del átomo.

Como hemos visto al final de la sección anterior, es necesario que el movimiento del átomo sea acelerado para que no se anule la probabilidad de decaimiento de vacío. Consideramos entonces una trayectoria dada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}(t)$, con $|\mathbf{s}(t)| \ll 1$, es decir, pequeñas desviaciones alrededor de la posición \mathbf{r}_0 . De esta manera, se puede

hacer un desarrollo de la función (2.16)

$$g(\Omega_a + |\mathbf{k}|, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \left(2\pi\delta(\Omega_a + |\mathbf{k}|) - i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{s}}(\Omega_a + |\mathbf{k}|) - \frac{1}{2}k^i k^j (\tilde{s}^i \star \tilde{s}^j)(\Omega_a + |\mathbf{k}|) + \dots \right) \quad (2.29)$$

donde \star indica convolución, es decir,

$$(F \star G)(\omega) = \int \frac{d\nu}{2\pi} F(\omega - \nu)G(\nu). \quad (2.30)$$

El primer término de (2.29) no contribuye, ya que $\Omega_a > 0$. Este término correspondería a que un átomo estático se excite a la vez que emite un fotón. Si hubiéramos puesto como estado inicial que el átomo esté en su estado excitado, y como estado final en el fundamental, Ω_a aparecería con el signo opuesto, por lo que el primer término daría cuenta de la emisión espontánea, y la energía del fotón emitido sería exactamente la energía de excitación del átomo.

La contribución a orden más bajo en el desplazamiento $\mathbf{s}(t)$ proviene entonces del término lineal en la desviación, y resulta ser

$$P^{(1)} = \frac{\gamma^2}{24\pi^2\Omega_a} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \Theta(\nu - \Omega_a)(\nu - \Omega_a)^3 |\tilde{\mathbf{s}}(\nu)|^2. \quad (2.31)$$

Por ejemplo, para $\mathbf{s}(t) = \mathbf{u} \varepsilon \sin(\omega t)$, donde \mathbf{u} es un vector unitario, la transformada de Fourier es $\tilde{s}^i(\nu) = -i u^i \varepsilon \pi \delta(\nu - \omega)$ con $\nu, \omega > 0$. Teniendo en cuenta que $\delta(\text{frecuencia})^2 = \frac{\text{tiempo}}{2\pi} \delta(\text{frecuencia})$, la probabilidad por unidad de tiempo es

$$\frac{P^{(1)}}{T} = \frac{\gamma^2 \varepsilon^2 (\omega - \Omega_a)^3}{48\pi\Omega_a} \Theta(\omega - \Omega_a). \quad (2.32)$$

Como vemos, para que esta expresión no sea nula, es necesario que la frecuencia mecánica ω a la que se está moviendo el átomo sea superior a la frecuencia de excitación de este, es decir, Ω_a .

2.3.2. Efecto Casimir Dinámico

Ahora vamos a considerar la amplitud de transición correspondiente al Efecto Casimir Dinámico. Este efecto consiste en la creación de pares de fotones a partir del vacío, luego los estados cuánticos normalizados son

$$|i\rangle = |0_a\rangle \otimes |0_v\rangle \quad (2.33)$$

$$|f\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 |0_a\rangle \otimes \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') |0_v\rangle. \quad (2.34)$$

La amplitud de transición a orden más bajo en γ es, en este caso,

$$T_{\text{fi}} = \frac{i}{2} \langle f | \mathbb{T} \hat{\mathcal{S}}_{\text{av}}^2 | i \rangle = \frac{i \gamma^2}{2L^3 \sqrt{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \tilde{\Delta}_a(\nu) g(|\mathbf{k}| - \nu, \mathbf{k}) g(|\mathbf{k}'| + \nu, \mathbf{k}'), \quad (2.35)$$

donde

$$\tilde{\Delta}_a(\nu) = \frac{i}{\nu^2 - \Omega_a^2 + i\epsilon} \quad (2.36)$$

es la transformada de Fourier del propagador del átomo (o de la contracción de Wick de $q(x^0)$ con $q(y^0)$).

Haciendo uso del desarrollo (2.29), se ve que la contribución a orden más bajo en el desplazamiento a la amplitud de transición es

$$T_{\text{fi}}^{(1)} = \frac{\gamma^2 e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_0}}{2L^3 \sqrt{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}} \left(\tilde{\Delta}_a(|\mathbf{k}|\mathbf{k}' + \tilde{\Delta}_a(|\mathbf{k}'|\mathbf{k}) \right) \cdot \tilde{\mathbf{s}}(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}'|). \quad (2.37)$$

Para calcular la probabilidad de que ocurra Efecto Casimir Dinámico, hay que tomar el módulo al cuadrado de esta amplitud de transición e integrar los momentos de los fotones del estado final, lo que da como resultado

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^6 \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \left| T_{\text{fi}}^{(1)} \right|^2 \\ &= \frac{\gamma^4}{24\pi^4} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' |\tilde{\mathbf{s}}(k+k')|^2 k k'^3 |\Delta_a(k)|^2 \\ &= \frac{\gamma^4}{24\pi^4} \int_0^\infty dk \int_k^\infty d\nu |\tilde{\mathbf{s}}(\nu)|^2 k(\nu-k)^3 |\Delta_a(k)|^2 \\ &= \frac{\gamma^4}{12\pi^3} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\nu}{2\pi} |\tilde{\mathbf{s}}(\nu)|^2 \int_0^\nu dk \frac{k(\nu-k)^3}{(k^2 - \Omega_a^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En [10], se calcula la parte imaginaria de la acción efectiva a mismo orden en la constante de acoplamiento que el cálculo anterior. Vemos que (2.38) coincide con la expresión (35) del artículo citado, tomando únicamente el término correspondiente al Efecto Casimir Dinámico (Σ_1 en el artículo). De esta manera, y a diferencia de lo que pasa a orden más bajo en γ , nos damos cuenta de que hay más procesos físicos que pueden ocurrir a orden γ^4 además de la creación de un par de fotones a partir del vacío. Estos fenómenos, como mencionan en el artículo, corresponden a la emisión de un único fotón mediante procesos de excitación-desexcitación del átomo.

De nuevo, tomando $\mathbf{s}(t) = \mathbf{u} \varepsilon \sin(\omega t)$, la probabilidad por unidad de tiempo es

$$\frac{P^{(1)}}{T} = \frac{\gamma^4 \varepsilon^2}{48\pi^3} \int_0^\omega dk \frac{k(\omega - k)^3}{(k^2 - \Omega_a^2)^2}. \quad (2.39)$$

Podemos observar que en este caso no hay ningún umbral que se deba superar para que ocurra el fenómeno, pues este ocurrirá incluso cuando la frecuencia ω a la que se está moviendo el átomo sea menor que su frecuencia de excitación Ω_a . En el caso contrario, cuando $\omega > \Omega_a$, el integrando diverge en un punto de la región de integración. Esta es una de las tantas manifestaciones de cantidades que divergen en teoría cuántica de campos, y que se solucionan mediante la renormalización. Esta técnica se realiza en el marco de la acción efectiva, y consiste en añadir contratérminos al lagrangiano que subsanen las divergencias que aparecen al calcular amplitudes de transición. En el caso de esta divergencia particular, se puede ver que no aparece al nivel de la acción efectiva, ya que las otras contribuciones a este orden en la constante de acoplamiento cancelan el polo. Sin embargo, al añadir esas contribuciones, surge otra divergencia que tiene que ver con el comportamiento de la teoría en el ultravioleta, y se soluciona renormalizando la frecuencia del átomo [10].

2.4. Fricción cuántica para el modelo escalar

La fricción cuántica es un fenómeno disipativo que surge cuando hay dos elementos que se mueven con velocidad relativa constante y paralela. El origen de este fenómeno reside en la excitación de los grados de libertad microscópicos de los cuerpos, mediado por el campo de vacío que hay entre ellos. Esto resulta en una fuerza disipativa que aparece sin que haya contacto entre los elementos.

En este caso, los dos elementos van a ser el átomo y una superficie plana. Esta superficie puede representar distintos materiales. Por ejemplo, se puede considerar que la superficie es un espejo perfecto, y para modelarlo se imponen condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann para el campo de vacío en el borde del espejo. En [13] se estudia esta situación para el caso de radiación inducida por el movimiento y Efecto Casimir Dinámico, ya que no aparece fricción cuántica [14]. También se puede considerar que la superficie es una lámina de grafeno, situación que se presentará en el Capítulo 3. En lo que respecta a este capítulo, vamos a considerar que la superficie se comporta como un espejo imperfecto [15]. El modelo microscópico vendrá dado por la siguiente acción clásica para los grados de libertad de la superficie

$$\mathcal{S}_m[Q] = \int d^3x_{\parallel} \frac{1}{2} [(\partial_0 Q)^2 - u^2 |\nabla_{\parallel} Q|^2 - \Omega_m^2 Q^2], \quad (2.40)$$

donde $Q(x_{\parallel})$ es un campo escalar extendido en toda la superficie $z = 0$ y u es la

velocidad de propagación de las excitaciones de dicho campo. Si $u = 0$, el sistema consta de infinitos osciladores armónicos unidimensionales desacoplados situados en $z = 0$. Además, la interacción entre la superficie y el campo de vacío estará dada por la siguiente acción

$$\mathcal{S}_{\text{mv}}[Q, \phi] = \int d^4x \lambda \phi(x) Q(x_{\parallel}) \delta(x^3), \quad (2.41)$$

que junto con \mathcal{S}_{av} formarán la acción de interacción completa del sistema $\mathcal{S}_{\text{int}} = \mathcal{S}_{\text{av}} + \mathcal{S}_{\text{mv}}$. En (4.8), la constante λ da cuenta del acoplamiento entre el campo de vacío y el campo de la superficie (dimensiones de energía $[\lambda] = 3/2$).

En las siguientes subsecciones vamos a calcular las amplitudes de transición correspondientes a la fricción cuántica, diferenciando los casos de $u = 0$ y $u \neq 0$ [11]. Como hemos adelantado, este fenómeno ocurre cuando la velocidad relativa entre el átomo y la superficie es constante y paralela, así que tomaremos que $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{v}t, a)$, donde a es la distancia entre el átomo y la superficie.

2.4.1. $u = 0$

Cuando el medio está modelado por osciladores armónicos desacoplados, los campos en la representación de interacción en términos de operadores de creación y destrucción están dados por

$$\hat{Q}(x_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_m}} \left(\hat{\alpha}(\mathbf{x}_{\parallel}) e^{-i\Omega_m x^0} + \hat{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{\parallel}) e^{i\Omega_m x^0} \right), \quad (2.42)$$

donde $[\hat{\alpha}(\mathbf{x}_{\parallel}), \hat{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{y}_{\parallel})] = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Vamos a tomar como estado final para la superficie la situación en la que haya un oscilador excitado en la posición \mathbf{x}_{\parallel} , con una densidad de probabilidad dada por la función $h(\mathbf{x}_{\parallel})$, que tiene que cumplir $\int d^2\mathbf{x}_{\parallel} |h(\mathbf{x}_{\parallel})|^2 = 1$ para que el estado esté normalizado. Por lo tanto, el estado final para la superficie se puede escribir como

$$|f_m\rangle = \int d^2\mathbf{x}_{\parallel} h(\mathbf{x}_{\parallel}) \hat{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{\parallel}) |0_m\rangle. \quad (2.43)$$

La amplitud de transición a orden más bajo en el acoplamiento para un estado final caracterizado por la función h es

$$T_{\text{fi}}[h] = \frac{i\gamma\lambda}{\sqrt{4\Omega_a\Omega_m}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} g(\Omega_a + \Omega_m, \mathbf{k}) \underbrace{\int d^2\mathbf{y}_{\parallel} e^{-i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{y}_{\parallel}} h^*(\mathbf{y}_{\parallel})}_{\tilde{h}^*(\mathbf{k}_{\parallel})} \quad (2.44)$$

$$= \frac{\gamma\lambda\pi}{2\sqrt{\Omega_a\Omega_m}} \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \delta(\Omega_a + \Omega_m + \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}) \frac{e^{-a\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 - \Omega_m^2}}}{\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 - \Omega_m^2}} \tilde{h}^*(\mathbf{k}_{\parallel}), \quad (2.45)$$

donde (2.44) es válida para cualquier trayectoria del átomo, y en (2.45) se ha usado que

$$g(\nu, \mathbf{k}) = 2\pi e^{-ik^3 a} \delta(\nu - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \quad (2.46)$$

para $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{v}t, a)$.

Consideremos el caso en el que h es una gaussiana centrada en la posición $\boldsymbol{\xi}$, con distintas desviaciones típicas en las dos direcciones σ

$$h_g(\mathbf{x}_\parallel) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1\sigma_2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{(x_1 - \xi_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]. \quad (2.47)$$

Su transformada de Fourier es

$$\tilde{h}_g(\mathbf{k}_\parallel) = \sqrt{8\pi\sigma_1\sigma_2} \exp(-i\mathbf{k}_\parallel \cdot \boldsymbol{\xi} - k_1^2\sigma_1^2 - k_2^2\sigma_2^2), \quad (2.48)$$

luego

$$T_{\text{fi}}[h_g] = \sqrt{\frac{\gamma^2\lambda^2 2\pi^3\sigma_1\sigma_2}{\Omega_a\Omega_m}} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \delta(\Omega_a + \Omega_m + \mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{v}) \frac{e^{-a\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 - \Omega_m^2}}}{\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 - \Omega_m^2}} e^{-i\mathbf{k}_\parallel \cdot \boldsymbol{\xi} - k_1^2\sigma_1^2 - k_2^2\sigma_2^2}. \quad (2.49)$$

Sin perder generalidad, se puede tomar $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, y definiendo

$$\Omega^2 = \left(\frac{\Omega_a + \Omega_m}{v}\right)^2 - \Omega_m^2, \quad (2.50)$$

la amplitud de transición toma la forma

$$T_{\text{fi}}[h_g] = \sqrt{\frac{\gamma^2\lambda^2\pi\sigma_1\sigma_2}{2\Omega_a\Omega_mv^2}} e^{-\left(\frac{\Omega_a+\Omega_m}{v}\right)^2\sigma_1^2} e^{i\xi_1\left(\frac{\Omega_a+\Omega_m}{v}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \frac{e^{-a\sqrt{k_2^2+\Omega^2}}}{\sqrt{k_2^2+\Omega^2}} e^{-ik_2\xi_2} e^{-k_2^2\sigma_2^2}. \quad (2.51)$$

Si definimos $\rho(\boldsymbol{\xi}) \equiv |T_{\text{fi}}|^2/\sigma_1\sigma_2$, que es una probabilidad por unidad de área³, y tomamos las desviaciones típicas tendiendo a cero, obtenemos la probabilidad por unidad de área de que el estado final corresponda a un oscilador excitado en la posición $\boldsymbol{\xi}$, lo que es equivalente a haber tomado $h(\mathbf{x}_\parallel) \propto \delta^{(2)}(\mathbf{x}_\parallel - \boldsymbol{\xi})$.

$$\rho(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0} \frac{|T_{\text{fi}}|^2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\gamma^2\lambda^2}{8\pi\Omega_a\Omega_mv^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik\xi_2} \frac{e^{-a\sqrt{k^2+\Omega^2}}}{\sqrt{k^2+\Omega^2}} \right|^2, \quad (2.52)$$

que no depende de ξ_1 , es decir, de la coordenada en la dirección de la velocidad del átomo. Dando diferentes valores a la combinación adimensional Ωa para Ω_a fijo, se puede

³Se define esta cantidad salvo por un factor numérico de normalización, que obtendremos más adelante comparando con resultados previos.

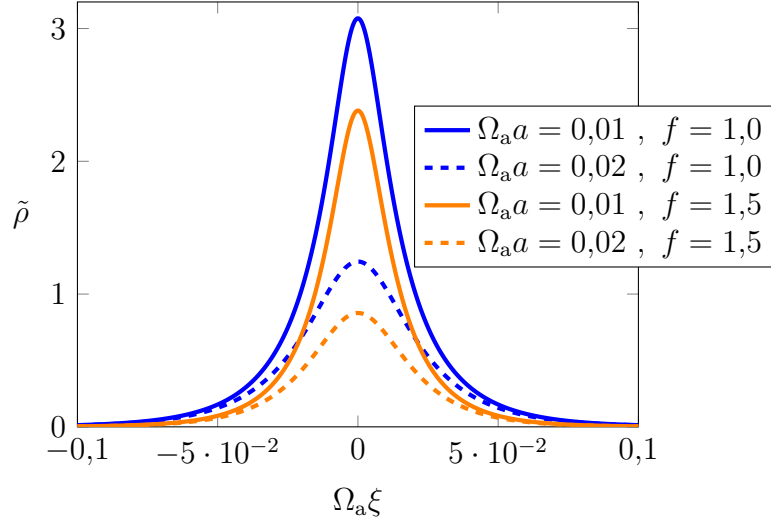


Figura 2.1: $\tilde{\rho} = \rho / \left(\frac{\gamma^2 \lambda^2}{2\pi \Omega_a \Omega_m v^2} \right)$ como función de a (distancia entre el átomo y la superficie), y el cociente entre frecuencias. Las cuatro curvas son para $v = 0,1$, aumentar la velocidad tiene un efecto similar a aumentar f .

ver en la figura 2.1 cómo depende esta distribución de la distancia entre el átomo y la superficie, y del cociente $f \equiv \Omega_m / \Omega_a$. Vemos que la densidad de probabilidad se concentra en la región que está inmediatamente debajo del átomo, y decrece rápidamente al alejarnos de él. Por otro lado, alejar el átomo de la superficie tiene el efecto de disminuir la probabilidad, pero el ancho de la distribución no cambia mucho, luego la interacción tiene un alcance similar. Sin embargo, aumentar el cociente entre la frecuencia de excitación de los grados de libertad del medio y la del átomo, no solo hace que la probabilidad disminuya, sino que también reduce el alcance de la interacción, ya que podemos observar que la anchura de la distribución disminuye. En el Apéndice B se explica detalladamente cómo han sido realizadas las gráficas de este capítulo.

Integrando $\rho(\xi_2)$ para todo ξ_2 y multiplicando por una distancia característica en la dirección de movimiento del átomo, vT , donde se puede pensar a T como el tiempo que el átomo ha estado moviéndose con velocidad constante v , se obtiene la probabilidad de que ocurra este proceso. Después, dividiendo por T , se obtiene la probabilidad por unidad de tiempo

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} vT \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \rho(\xi_2) = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{2v\Omega_a \Omega_m} \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-2a\sqrt{k^2 + \Omega^2}}}{k^2 + \Omega^2}, \quad (2.53)$$

que, salvo el factor numérico de normalización mencionado en la anterior nota al pie de página, coincide con el resultado obtenido en la ecuación (69) de [10], donde se ha calculado la contribución a la probabilidad de decaimiento de vacío producida por la presencia de la superficie a orden más bajo en las constantes de acoplamiento. En la figura 2.2 se puede ver cómo depende la probabilidad total de la distancia entre el

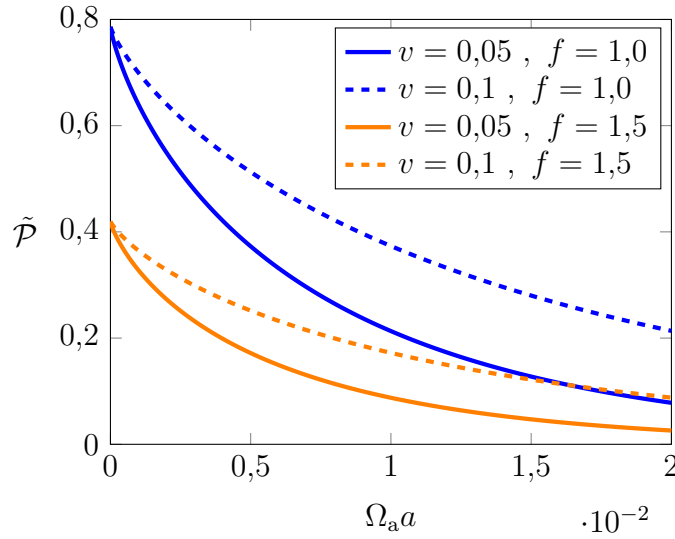


Figura 2.2: Dependencia de la probabilidad con la distancia entre el átomo y la superficie. En las distintas gráficas se puede ver cómo cambia la probabilidad con la velocidad a la que se mueve el átomo y el cociente entre las frecuencias de excitación.

átomo y la partícula, así como de la velocidad a la que se mueve el átomo y del cociente entre las frecuencias de excitación. Se puede comprobar, como era de esperar, que la probabilidad decrece con la distancia a . Además, vemos que cuanto más rápido vaya la partícula, más probable será que ocurra este fenómeno. También observamos que, a mayor cociente $f = \Omega_m/\Omega_a$, menor probabilidad. Esto se debe a que será más difícil excitar los grados de libertad de la superficie, y por lo tanto la probabilidad de que ocurra este proceso será menor.

2.4.2. $u \neq 0$

Consideramos ahora el caso en el que se pueden propagar ondas en la superficie con velocidad $u \neq 0$. Ahora, el campo Q se expresa en términos de operadores de creación y destrucción de la siguiente manera

$$\hat{Q}(x_{||}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}_{||}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (\hat{\alpha}(\mathbf{k}_{||})e^{-ik_{||}x_{||}} + \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}_{||})e^{ik_{||}x_{||}}), \quad (2.54)$$

con $k_0 = \sqrt{u^2\mathbf{k}_{||}^2 + \Omega_m^2}$ y $[\hat{\alpha}(\mathbf{k}_{||}), \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_{||})] = \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{||} - \mathbf{p}_{||})$. El otro cambio que habrá respecto al caso de velocidad nula, será que como estado final tendremos una excitación de dicho campo con momento lineal $\mathbf{p}_{||}$ en lugar de una distribución espacial de osciladores excitados

$$|f\rangle = \frac{2\pi}{L} \hat{a}^\dagger |0_a\rangle \otimes \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_{||}) |0_m\rangle \otimes |0_v\rangle. \quad (2.55)$$

Cuando $u = 0$, se puede ver que esto es equivalente a haber tomado una onda plana en (2.43), es decir, $h(\mathbf{x}_{||}) \propto e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{||}}$.

Calculando la amplitud de transición, esta toma la forma

$$T_{\text{fi}} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\gamma\lambda}{4\pi\sqrt{\Omega_a p_0}} \delta(\Omega_a + p_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel}) \int dk_z \frac{e^{ik_z a}}{k_z^2 - p_{\parallel}^2 - i\epsilon}. \quad (2.56)$$

La delta de Dirac que aparece nos da información sobre el proceso.

- En primer lugar, como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel} = \Omega_a + p_0 > 0$, vemos que el momento lineal de la excitación de la superficie tiene que tener una componente positiva a lo largo de la dirección del átomo.
- Por otro lado, de $\Omega_a + p_0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel}$, se obtiene $p_0 < \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel} < |\mathbf{p}_{\parallel}| \Rightarrow p_0^2 < |\mathbf{p}_{\parallel}|^2$, luego el vector de Lorentz p_{\parallel} es tipo espacio ($p_{\parallel}^2 < 0$).
- Finalmente, recordando que $p_0 = \sqrt{u^2 |\mathbf{p}_{\parallel}|^2 + \Omega_m^2}$ para las excitaciones del medio, y usando $u|\mathbf{p}_{\parallel}| < \Omega_a + \sqrt{u^2 |\mathbf{p}_{\parallel}|^2 + \Omega_m^2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel} < v|\mathbf{p}_{\parallel}|$, vemos que aparece un umbral para que ocurra el proceso: la velocidad del átomo tiene que ser superior a la velocidad de propagación de las excitaciones del medio bidimensional, es decir, $v > u$.

Teniendo en cuenta la segunda de estas consecuencias, se obtiene⁴

$$T_{\text{fi}} = \frac{2\pi}{L} \frac{\gamma\lambda}{4\sqrt{\Omega_a p_0}} \frac{e^{-a\sqrt{-p_{\parallel}^2}}}{\sqrt{-p_{\parallel}^2}} \delta(\Omega_a + p_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel}), \quad (2.57)$$

donde $-p_{\parallel}^2 = |\mathbf{p}_{\parallel}|^2(1 - u^2) - \Omega_m^2$ *on shell*. Podemos definir ahora la probabilidad por unidad de tiempo de que se cree una excitación con momento \mathbf{p}_{\parallel} mediante este proceso,

$$\rho(\mathbf{p}_{\parallel}) = \frac{1}{T} |T_{\text{fi}}|^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\gamma^2 \lambda^2}{32\pi\Omega_a p_0} \frac{e^{-2a\sqrt{-p_{\parallel}^2}}}{-p_{\parallel}^2} \delta(\Omega_a + p_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\parallel}). \quad (2.58)$$

Si ahora integramos esta cantidad para cualquiera sea momento lineal de la excitación del medio, obtenemos la probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra este proceso. Si tomamos el límite $u \rightarrow 0$ antes de integrar, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \lim_{u \rightarrow 0} \rho(\mathbf{p}_{\parallel}) \\ &= \frac{\gamma^2 \lambda^2}{16\pi v \Omega_a \Omega_m} \int_0^{\infty} dp_y \frac{e^{-2a\sqrt{p_y^2 + \Omega^2}}}{p_y^2 + \Omega^2}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

⁴El factor 4 de esta expresión corrige la expresión (28) de [11]. Las siguientes expresiones de esta sección también aparecen corregidas.

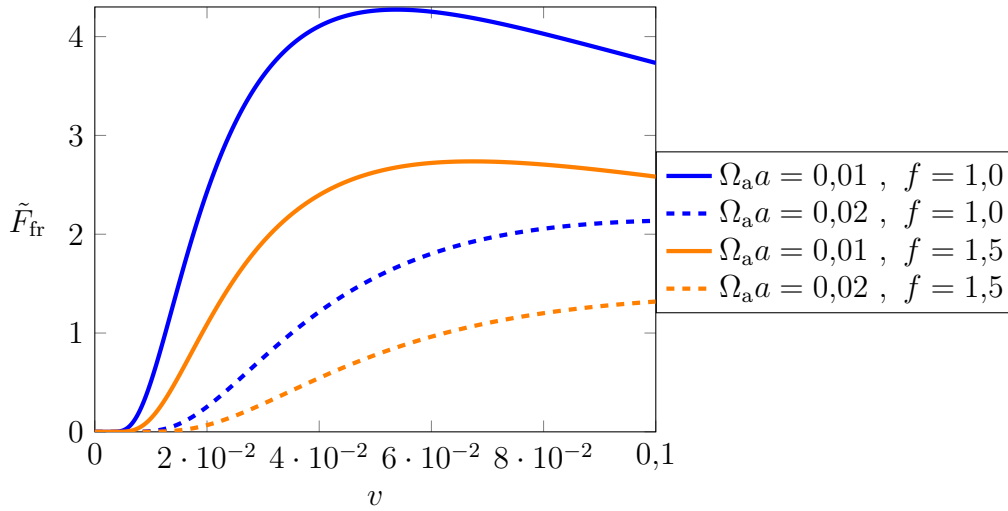


Figura 2.3: Dependencia de la fuerza de fricción con la velocidad para distintos valores de la distancia entre el átomo y la superficie, y el cociente entre las frecuencias de excitación.

que es exactamente lo mismo que la expresión (69) de [10], y esencialmente lo mismo que (2.53) (salvo por el factor de normalización mencionado).

2.5. Fuerza de fricción

Para ver cuál es la fuerza de fricción que aparece, podemos calcularla a partir de la potencia transmitida del átomo a los grados de libertad de la superficie mediante el campo de vacío. La potencia transmitida cuando el momento lineal de la excitación es $\mathbf{p}_{||}$ está dada por $p_0(\mathbf{p}_{||})\rho(\mathbf{p}_{||})$, luego si integramos esta cantidad para todos los momentos posibles, obtenemos la potencia total transmitida

$$\mathcal{W}(v) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int d^2\mathbf{p}_{||} p_0(\mathbf{p}_{||}) \lim_{u \rightarrow 0} \rho(\mathbf{p}_{||}) = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{16\pi v \Omega_a} \int_0^\infty dp_y \frac{e^{-2a\sqrt{p_y^2 + \Omega(v)^2}}}{p_y^2 + \Omega(v)^2}, \quad (2.60)$$

que es una función de la velocidad a la que se mueve el átomo. Por balance de energía, se puede ver que esta potencia corresponde a $\mathcal{W}(v) = vF_{\text{fr}}$, luego

$$F_{\text{fr}} = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{16\pi v^2 \Omega_a} \int_0^\infty dp_y \frac{e^{-2a\sqrt{p_y^2 + \Omega(v)^2}}}{p_y^2 + \Omega(v)^2} = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{16\pi \Omega_a^2} \tilde{F}_{\text{fr}}(v), \quad (2.61)$$

donde \tilde{F}_{fr} es una cantidad adimensional que da cuenta de la dependencia de la fuerza de fricción con la velocidad. Como vemos en la figura 2.3, esta fuerza de fricción está muy suprimida para velocidades bajas. En cuanto a la dependencia con los otros parámetros (a y f), se puede comentar lo mismo que al final de la sección 2.4.1.

Capítulo 3

Dipolo interactuando con grafeno

En este capítulo vamos a considerar un sistema más realista, en el que el átomo estará modelado por un dipolo eléctrico que se acopla a una lámina de grafeno mediante el campo electromagnético. Únicamente estudiaremos el fenómeno de fricción cuántica de manera detallada.

Esta configuración ya ha sido estudiada en [16] mediante la acción efectiva y la probabilidad de persistencia de vacío, analizando tanto el caso de fricción cuántica como el Efecto Casimir Dinámico. En resultados obtenidos para este último fenómeno se observa que la presencia de la lámina de grafeno aumenta la probabilidad de emisión para el átomo cuando su movimiento acelerado es en la dirección perpendicular al grafeno. Por el contrario, esta probabilidad disminuye cuando la dirección de movimiento del átomo es paralela a la lámina. En el caso de la fricción cuántica, como veremos, aparece un umbral que la velocidad del átomo tiene que superar para que ocurra el fenómeno.

A diferencia del análisis realizado en [16] para el mismo sistema en términos de la acción efectiva, en este capítulo se calculará la amplitud de transición correspondiente al proceso de *scattering* responsable de la fricción cuántica. Además, se tendrán en cuenta correcciones relativistas a orden más bajo en la velocidad para el acoplamiento del dipolo al campo electromagnético.

En la sección 3.1 se hará una descripción del modelo considerado, especificando cuáles son las acciones que intervienen. En la sección 3.2 se calculará paso a paso la amplitud de transición responsable del fenómeno de fricción cuántica, y veremos que aparece un umbral para que este proceso ocurra. Al tomar el módulo cuadrado de esta amplitud de transición, se obtiene la probabilidad de que se de tal transición, cantidad calculada en la sección 3.3. Finalmente, en la sección 3.4, se hará un comentario sobre cómo calcular la potencia disipada y la fuerza de fricción que aparece en el sistema.

3.1. Descripción del modelo

El sistema a estudiar está formado por una lámina de grafeno que se extiende en el plano $z = 0$ y un átomo en la aproximación dipolar eléctrica, que se mueve de manera forzada a velocidad constante en el plano $z = a$. Ambos elementos se acoplan al campo electromagnético.

La acción clásica completa para el sistema a considerar consta de una parte libre para cada uno de los elementos que la forman, es decir, el átomo, el campo electromagnético y el grafeno; y un término de interacción, que da cuenta de el acoplamiento entre el campo electromagnético y los otros dos elementos.

$$\mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, A, \mathbf{q}; \mathbf{r}(t)] = \mathcal{S}_0[\bar{\psi}, \psi, A, \mathbf{q}] + \mathcal{S}_{\text{int}}[\bar{\psi}, \psi, A, \mathbf{q}; \mathbf{r}(t)], \quad (3.1)$$

$$\mathcal{S}_0[\bar{\psi}, \psi, A, \mathbf{q}] = \mathcal{S}_a[\mathbf{q}] + \mathcal{S}_{\text{em}}[A] + \mathcal{S}_g[\bar{\psi}, \psi]. \quad (3.2)$$

Empecemos describiendo el término correspondiente al átomo. La posición del centro de masas del átomo (haremos la aproximación de que coincide con el núcleo del mismo) está dada por $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{v}t, a)$. Si consideramos que el electrón del átomo está en la posición $\mathbf{r} + \mathbf{q}$, se puede caracterizar al átomo utilizando como grados de libertad las componentes del vector \mathbf{q} , ya que la posición del núcleo está determinada de forma externa. Entonces, la acción clásica que da cuenta de la dinámica del átomo, o del momento dipolar eléctrico en el sistema de referencia de reposo del átomo $\mathbf{d} = e\mathbf{q}$, es

$$\mathcal{S}_a[\mathbf{q}] = \int dt \left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{q}}^2 - V(|\mathbf{q}|) \right) \approx \int dt \frac{M}{2} (\dot{\mathbf{q}}^2 - \Omega_a^2 \mathbf{q}^2), \quad (3.3)$$

donde M es la masa del electrón del átomo y Ω_a caracteriza el potencial de interacción.

El campo electromagnético libre tiene su dinámica dada por la acción usual, junto con un término de fijación de *gauge*

$$\mathcal{S}_{\text{em}}[A] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right], \quad (3.4)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

El grafeno es una lámina de átomos de carbono con una estructura cristalina hexagonal plana. Esto hace que pueda describirse de manera efectiva como un material bidimensional. Además, sus grados de libertad electrónicos pueden describirse, a bajas energías, como fermiones de Dirac [17], y satisfacen una relación de dispersión lineal. Es decir, se comportan como fermiones sin masa que se propagan con velocidad de Fermi $v_F \approx 0,003$ [18].

La acción de interacción para este sistema es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{int}}[\bar{\psi}, \psi, A, \mathbf{q}; \mathbf{r}(t)] = & e \int d^4x \left[\bar{\psi}(x_{\parallel}) \gamma^{\sigma} \psi(x_{\parallel}) A_{\sigma}(x) \delta(x^3) + \right. \\ & \left. + \mathbf{q}(x^0) \left(\mathbf{E}(x) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(x) \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^0)) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

El primer término de de (3.5) es el acoplamiento entre los electrones del grafeno, que viven en el plano $z = x^3 = 0$, con el campo electromagnético, presente en todo el espacio y evaluado en el plano del grafeno. El segundo término, corresponde al acoplamiento del momento dipolar eléctrico del átomo, ubicado en $\mathbf{r}(t)$, con el campo electromagnético teniendo en cuenta correcciones relativistas a orden $|\mathbf{v}|/c$ [19].

Con la acción completa del sistema, ya podemos empezar a calcular amplitudes de interacción.

3.2. Amplitud de transición para fricción cuántica

Como hemos comentado al inicio de la sección 2.4, el único papel que cumple el campo de vacío (en el Capítulo 2 era un campo escalar sin masa, y ahora se trata del campo electromagnético) es mediar las excitaciones de los grados de libertad microscópicos de los cuerpos involucrados en la fricción cuántica. Por ello, en el estado final no van a aparecer fotones. En su lugar, al considerar el fenómeno de fricción cuántica, los estados cuánticos normalizados asociados al estado inicial y final son respectivamente

$$|i\rangle = |0_a\rangle \otimes |0_{\text{em}}\rangle \otimes |0_g\rangle \quad (3.6)$$

$$|f\rangle = \hat{a}_i^{\dagger} |0_a\rangle \otimes |0_{\text{em}}\rangle \otimes \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \hat{b}^{\dagger}(\mathbf{p}, \alpha) \hat{d}^{\dagger}(\mathbf{q}, \beta) |0_g\rangle. \quad (3.7)$$

Es decir, en el estado inicial tenemos el vacío de la teoría, y en el estado final tomamos una excitación del átomo en la dirección dada por el índice i y un par fermión-antifermión en el grafeno, con momentos \mathbf{p} y \mathbf{q} y orientación de spin α y β . Dados estos estados, la contribución no nula a orden más bajo en la constante de acoplamiento e a la amplitud de transición vendrá del término cruzado que aparece al elevar la acción de interacción (3.5) al cuadrado

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i(\alpha, \beta, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = & \frac{i}{2!} \langle f | \mathbb{T} \left(\hat{S}_{\text{int}}^2 \right) | i \rangle = ie^2 \langle f | \int d^4x \int d^4y \mathbb{T} \left[\bar{\psi}(x_{\parallel}) \gamma^{\sigma} \psi(x_{\parallel}) A_{\sigma}(x) \delta(x^3) \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{q}(y^0) \cdot \left(\mathbf{E}(y) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(y) \right) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}(y^0)) \right] | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por el teorema de Wick, se van a dar las siguientes contracciones

$$\underline{a_j q_k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2M\Omega_a}} e^{i\Omega_a t} \delta_{jk} \quad (3.9)$$

$$\underline{b(\mathbf{p}, \alpha) \bar{\psi}}(x_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{p_0}} e^{ip \cdot x_{\parallel}} \bar{u}(\mathbf{p}, \alpha) \quad (3.10)$$

$$\underline{d(\mathbf{q}, \beta) \psi}(x_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{q_0}} e^{iq \cdot x_{\parallel}} v(\mathbf{q}, \beta), \quad (3.11)$$

donde, para los fermiones en el grafeno, la relación de dispersión es $p_0 = v_F |\mathbf{p}|$, con $v_F \approx 0,003$ la velocidad de Fermi en el grafeno. Además, aparece la contracción entre el campo A_σ y $C_i = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$, cantidad de la cual nos encargaremos más adelante. Entonces, la amplitud de transición (3.8) queda

$$\mathcal{M}_i(\alpha, \beta, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = K^\sigma \int d^4 x \int d^4 y e^{iy_0 \Omega_a} e^{ip \cdot x_{\parallel}} e^{iq \cdot x_{\parallel}} \underline{A_\sigma(x) C_i(y)} \delta(x^3) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}(y^0)) \quad (3.12)$$

con

$$K^\sigma = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{ie^2 m}{(2\pi)^2 \sqrt{2M\Omega_a p_0 q_0}} \bar{u}(\mathbf{p}, \alpha) \gamma^\sigma v(\mathbf{q}, \beta). \quad (3.13)$$

Llamamos $\underline{A_\sigma C_i}(k)$ a la transformada de Fourier de la contracción de Wick $\underline{A_\sigma(x) C_i(y)}$, tal que

$$\underline{A_\sigma(x) C_i(y)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \underline{A_\sigma C_i}(k) e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (3.14)$$

Con esto, e integrando las deltas, la amplitud de transición resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i(\alpha, \beta, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= K^\sigma \int d^3 x_{\parallel} \int dy^0 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(p+q-k_{\parallel}) \cdot x_{\parallel}} e^{i(k^0 + \Omega_a) y^0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(y^0)} \underline{A_\sigma C_i}(k) \\ &= K^\sigma \frac{1}{2\pi} \int d^4 k \delta^{(3)}(p + q - k_{\parallel}) g(k^0 + \Omega_a, \mathbf{k}) \underline{A_\sigma C_i}(k), \end{aligned} \quad (3.15)$$

con $g(\nu, \mathbf{p})$ definida en (2.16), que para la trayectoria considerada en este capítulo, recordamos que vale $g(\nu, \mathbf{k}) = 2\pi \delta(\nu - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{\parallel}) e^{-ik^3 a}$. La expresión hasta ahora para la amplitud de transición es entonces

$$\mathcal{M}_i(\alpha, \beta, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = K^\sigma \delta(p^0 + q^0 + \Omega_a - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q})) \int dk^3 e^{-ik^3 a} \underline{A_\sigma C_i}(p + q, k^3). \quad (3.16)$$

Usando la relación de dispersión del grafeno mencionada con anterioridad, $p_0 = v_F |\mathbf{p}|$, vemos que la delta de Dirac exige que para que este proceso ocurra tiene que cumplirse

$$\chi \equiv \Omega_a + v_F (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 0, \quad (3.17)$$

lo que nos da la siguiente información:

- Como $v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) + \Omega_a = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) > 0$, vemos que el vector $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ tiene que tener una componente positiva a lo largo de la dirección en la que se mueve el átomo.
- Usando

$$|\mathbf{p} + \mathbf{q}||\mathbf{v}| \geq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \Omega_a + v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) > v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) \geq v_F|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \quad (3.18)$$

se concluye que la velocidad a la que se mueve el átomo tiene que ser mayor que la velocidad de Fermi para el grafeno $|\mathbf{v}| > v_F$, es decir, existe un umbral para que ocurra el fenómeno de fricción cuántica.

- Usando que $c = 1 \Rightarrow |\mathbf{v}| < 1$ y

$$(p_0 + q_0) < \Omega_a + p_0 + q_0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) < |\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \quad (3.19)$$

se obtiene que el cuadrivector $p+q$ es tipo espacio $(p+q)^2 < 0$, dato necesario a la hora de hacer la integral (3.16). Respecto a esto, se pueden hacer más comentarios. Como ya hemos mencionado, los fermiones en el grafeno tienen una relación de dispersión aparentemente relativista, ya que se comportan como partículas sin masa que se mueven a velocidad de Fermi en el grafeno, que obviamente es menor que la velocidad de la luz en el vacío. Esto implica que pueden tener momentos tipo espacio sin ser partículas superlumínicas no físicas. Que el momento $p+q$ sea tipo espacio, que es el transmitido del átomo al grafeno por medio del campo electromagnético, significa que en la interacción entre el átomo y el grafeno domina la parte instantánea de Coulomb. Además, $(p+q)^2 < 0$ es consistente con el estado final considerado para la transición, ya que no aparecen fotones reales. Es decir, los fotones que median esta interacción y transmiten un momento $p+q$, son fotones virtuales.

Veamos ahora cuánto vale $\underline{A}_\sigma C_i(p+q, k^3)$. Para calcularlo, necesitamos, por una parte, el propagador (o la contracción de Wick) para el campo electromagnético A , que con la fijación de *gauge* de Feynmann-'t Hooft¹ es

$$\underline{A}_\mu(x)\underline{A}_\nu(y) = G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (3.20)$$

Por otro lado, las componentes del campo eléctrico y magnético se relacionan con el

¹Esta fijación de *gauge* consiste en tomar $\lambda = 1$ en (3.4).

campo de *gauge* de la siguiente manera

$$(\mathbf{E})_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad (3.21)$$

$$(\mathbf{B})_i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk} = -\epsilon^{ijk} \partial_j A_k, \quad (3.22)$$

donde $(\mathbf{u})_i$ hace referencia a la i -ésima componente contravariante del vector \mathbf{u} . Por lo tanto, juntando (3.20) y (3.21) se obtiene

$$\underline{A}_\sigma(x)(\mathbf{E})_i(y) = \partial_0^y G_{\sigma i}(x-y) - \partial_i^y G_{\sigma 0}(x,y), \quad (3.23)$$

y lo correspondiente para la contracción con el campo magnético. De esta manera, se obtiene que la transformada de Fourier de las contracciones de Wick son

$$\underline{A}_\sigma(\mathbf{E})_i(k) = \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} (k_0 \delta_{\sigma i} + k_i \delta_{\sigma 0}) \quad (3.24)$$

$$\underline{A}_\sigma(\mathbf{B})_\ell(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \epsilon^{\ell ij} k_i \delta_{\sigma j}. \quad (3.25)$$

En lo que resta de capítulo, con la intención de simplificar la notación, los índices del alfabeto latino (i, j, k, \dots) siempre aparecerán como subíndice y harán referencia a la componente contravariante del vector. Por lo tanto, $u_i = -u^i \equiv -(\mathbf{u})_i \rightarrow -u_i$, y las expresiones anteriores quedan

$$\underline{A}_\sigma E_i(k) = \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} (k_0 \delta_{\sigma i} - k_i \delta_{\sigma 0}) \quad (3.26)$$

$$\underline{A}_\sigma B_\ell(k) = \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} \epsilon_{\ell ij} k_i \delta_{\sigma j}. \quad (3.27)$$

Finalmente, juntando estos dos resultados, obtenemos

$$\underline{A}_\sigma C_i(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - k_0) \delta_{\sigma i} + k_i (\delta_{\sigma 0} - v_\sigma)] \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} [\Omega_a \delta_{\sigma i} + k_i (\delta_{\sigma 0} - v_\sigma)], \quad (3.29)$$

donde en la última igualdad se ha usado la delta de Dirac que aparece en la amplitud de transición.

Definiendo ahora

$$I_{\sigma i}(p+q) = \int dk^3 e^{-ik^3 a} \underline{A}_\sigma C_i(p+q, k^3), \quad (3.30)$$

y teniendo en cuenta que $p+q$ es un vector de Lorentz tipo espacio como consecuencia de la delta de Dirac de la amplitud, se obtiene

$$I_{\sigma i}(p+q) = \begin{cases} \frac{-\pi}{\sqrt{-(p+q)^2}} e^{-a\sqrt{-(p+q)^2}} [\Omega_a \delta_{\sigma i} + k_i(\delta_{\sigma 0} - v_\sigma)] & i = 1, 2 \\ i\pi e^{-a\sqrt{-(p+q)^2}} (\delta_{\sigma 0} - v_\sigma) & i = 3 \end{cases} \quad (3.31)$$

Después de hacer todos estos cálculos, obtenemos que la amplitud de transición correspondiente a pasar del estado cuántico (3.6) al (3.7) a orden más bajo en la constante de acoplamiento es

$$\mathcal{M}_i(\alpha, \beta, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = K^\sigma \delta(p^0 + q^0 + \Omega_a - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q})) I_{\sigma i}(p+q), \quad (3.32)$$

con K^σ definido en (3.13). Vemos que la amplitud de probabilidad decrece exponencialmente con la distancia que hay entre el átomo y la lámina de grafeno. Además, la amplitud de transición es una función simétrica bajo el cambio de \mathbf{p} con \mathbf{q} . Teniendo en cuenta que las partículas creadas tienen carga opuesta, esta propiedad nos dice que no va a aparecer carga neta en ninguna dirección.

3.3. Probabilidad por unidad de tiempo

La amplitud de transición calculada en la sección anterior corresponde a un estado final en el que tanto el spin de los fermiones como sus momentos lineales y la orientación de la excitación del átomo toman un valor particular. Sin embargo, estamos interesados en la probabilidad de que ocurra este proceso para cualesquiera sean estos valores. Para ello, primero podemos sumar la densidad de probabilidad para todo valor de spin y de orientación de la excitación del átomo, con el fin de obtener una probabilidad que dependa del momento lineal de los fermiones que se crean. Esta cantidad es importante a la hora de calcular la fuerza de fricción, como hemos visto en la sección 2.5. Si además dividimos esta probabilidad por un tiempo característico, obtenemos la probabilidad por unidad de tiempo de que se creen dos fermiones con momentos \mathbf{p} y \mathbf{q}

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{T} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^3 |\mathcal{M}_i(\alpha, \beta, \mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 = \frac{1}{T} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{e^4 m^2}{(2\pi)^4 2M\Omega_a p_0 q_0} [\delta(\chi)]^2 \times \quad (3.33)$$

$$\times \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^3 \text{tr} [\gamma^\sigma v(\mathbf{q}, \beta) \bar{v}(\mathbf{q}, \beta) \gamma^\lambda u(\mathbf{p}, \alpha) \bar{u}(\mathbf{p}, \alpha)] I_{\sigma i}(p+q) I_{\lambda i}^*(p+q) \quad (3.34)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{e^4 \text{tr} \{ \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \}}{(2\pi)^5 8M\Omega_a p_0 q_0} \delta(\chi) q_\mu p_\nu \sum_{i=1}^3 I_{\sigma i}(p+q) I_{\lambda i}^*(p+q), \quad (3.35)$$

donde se ha usado

$$\sum_{\alpha} u(\mathbf{p}, \alpha) \bar{u}(\mathbf{p}, \alpha) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad \text{y} \quad \sum_{\beta} v(\mathbf{q}, \beta) \bar{v}(\mathbf{q}, \beta) = \frac{\not{q} - m}{2m}, \quad (3.36)$$

y se ha tomado el límite $m \rightarrow 0$, que es lo que ocurre para el grafeno.

Las matrices de Dirac satisfacen el álgebra de Clifford en cualquier dimensión espaciotemporal d

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_d, \quad (3.37)$$

y se cumple que $\text{tr}(\mathbf{1}_d) = 2^{d/2}$. Con esto, se puede ver que en $2 + 1$ dimensiones la traza de cuatro matrices de Dirac es

$$\text{tr}\{\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\} = 2(\eta^{\sigma\mu}\eta^{\lambda\nu} - \eta^{\sigma\lambda}\eta^{\mu\nu} + \eta^{\sigma\nu}\eta^{\lambda\mu}). \quad (3.38)$$

Tras un largo cálculo, se obtiene que la probabilidad por unidad de tiempo de que se creen dos fermiones con momentos \mathbf{p} y \mathbf{q} es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \frac{\pi^2 e^4 e^{-2a\sqrt{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|^2 - v_F^2(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|)^2}}}{(2\pi)^5 2M\Omega_a v_F^2 |\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \times \\ &\times \delta\left(v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) + \Omega_a - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q})\right) F(v_F|\mathbf{p}|, \mathbf{p}; v_F|\mathbf{q}|, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

con

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \frac{1}{-(p+q)^2} \left\{ \left[|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 - (p+q)^2 \right] \left[(p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) - p \cdot q (1 - |\mathbf{v}|^2)/2 \right] + \right. \\ &\left. + p_0 q_0 \Omega_a^2 + \Omega_a (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \left[(p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + (q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{p} - p \cdot q \mathbf{v} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por último, si se quisiera calcular la probabilidad (por unidad de tiempo) de que ocurra este proceso sin importar cuáles son los momentos de los fermiones que aparecen en el grafeno, habría que integrar estos momentos, es decir,

$$P = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4 \int d^2\mathbf{p} \int d^2\mathbf{q} \mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (3.41)$$

La delta de Dirac que aparece en la amplitud de transición restringe el espacio de momentos sobre el que hay que integrar, en el Apéndice C se explica este aspecto.

3.4. Fuerza de fricción

Para calcular la fuerza de fricción, primero debemos conocer la potencia disipada, transferida del sistema mecánico que mueve el átomo a la lámina de grafeno mediante el campo electromagnético. Esta se obtiene introduciendo la energía del par de fermiones del grafeno en la integral de (3.41), es decir

$$\mathcal{W} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4 \int d^2\mathbf{p} \int d^2\mathbf{q} v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) \mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (3.42)$$

Esta potencia disipada se relaciona con la fuerza de fricción de la siguiente manera: $\mathcal{W} = F_{\text{fr}}v$, luego haciendo la integral de la expresión anterior se podría ver la dependencia de la fuerza de fricción con la velocidad del átomo. Como hemos visto, para que este proceso se lleve a cabo, es necesario que la velocidad del átomo sea superior que la velocidad de Fermi del grafeno.

Capítulo 4

Correcciones por curvatura al modelo escalar

En este capítulo vamos a considerar el mismo sistema que en el Capítulo 2, pero la superficie bidimensional ya no será plana. Como habíamos descrito los grados de libertad de la superficie mediante un campo, vamos a necesitar el formalismo de teoría cuántica de campos en espacios curvos [20]. En términos de la acción clásica, este formalismo consiste esencialmente en sustituir el diferencial de volumen por un elemento de volumen invariante bajo cambios arbitrarios de coordenadas $d^n x \rightarrow d^n x \sqrt{g}$, donde g es el módulo del determinante de la métrica, y sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, que incluyen los símbolos de Christoffel.

Con el fin de poder hacer un desarrollo perturbativo, vamos a considerar superficies que disten poco del caso plano. En la sección 4.1 se obtendrá la métrica inducida en la superficie a considerar y los símbolos de Christoffel asociados. Con estos ingredientes, se puede construir la acción clásica, cosa que se hará en la sección 4.2 hasta segundo orden en el parámetro de curvatura. Esto permitirá ver cuáles son las correcciones que introduce la curvatura de la superficie en la acción efectiva (sección 4.3) y en la amplitud de transición (sección 4.4). En esta última sección, estudiaremos los casos en los que las corrugaciones de la superficie sean, por una parte paralelas, y por otra parte perpendiculares a la dirección de movimiento del átomo.

4.1. Métrica inducida en una superficie

Cuando tenemos una superficie embebida en un espacio y queremos medir distancias sobre ella, necesitamos conocer la métrica que se induce en tal superficie. En este caso, el espaciotiempo ambiente es de Minkowski en 3+1 dimensiones, cuya métrica es

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dz^2, \quad (4.1)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, y los índices toman los valores $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ y $\alpha, \beta = 0, 1, 2$. La superficie que vamos a considerar está dada por $z = \varepsilon f(x, y)$ con $\varepsilon \ll 1$, entonces la métrica del espaciotiempo inducida en tal superficie toma la forma¹

$$ds_I^2 = (\eta_{\alpha\beta} - \varepsilon^2 \partial_\alpha f \partial_\beta f) dx^\alpha dx^\beta \quad (4.2)$$

con tensor métrico $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \varepsilon^2 \partial_\alpha f \partial_\beta f$. Su inversa se puede escribir como

$$h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \eta^{\alpha\delta} \eta^{\epsilon\beta} \partial_\delta f \partial_\epsilon f + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = 1 + \varepsilon^2 \partial^\alpha f \partial^\beta f + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (4.3)$$

donde $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1)$, y en la última igualdad se ha tenido en cuenta que $a^\alpha - \eta^{\alpha\beta} a_\beta \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Otro ingrediente que necesitamos para construir la acción clásica es un elemento de volumen invariante bajo transformaciones de coordenadas. Esto se consigue multiplicando el elemento de volumen usual por la raíz cuadrada del determinante de la métrica. En este caso, se tiene

$$\det h_{\alpha\beta} \equiv h = 1 - \varepsilon^2 \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 1 - \varepsilon^2 (\partial f)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (4.4)$$

con $(\partial f)^2 = \partial_\alpha f \partial^\alpha f = (\partial_t f)^2 - (\nabla f)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Por último, es necesario sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes, que tengan en cuenta la curvatura del espacio. La derivada covariante se construye a partir de los símbolos de Christoffel, que en este caso son

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} h^{\gamma\delta} (\partial_\alpha h_{\beta\delta} + \partial_\beta h_{\alpha\delta} - \partial_\delta h_{\alpha\beta}) = -\varepsilon^2 (\partial_\alpha \partial_\beta f) \partial^\gamma f + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.5)$$

4.2. Acción clásica en espacio curvo

En esta sección vamos a ver cómo cambia la acción clásica cuando la superficie en la que vive el campo del medio no es plana. Estamos interesados en hacer un desarrollo perturbativo en el parámetro de curvatura ε , y quedarnos con las correcciones a orden más bajo en este. Con lo comentado en la sección anterior, la acción libre para un

¹Esta expresión es válida incluso cuando f depende de t .

campo escalar situado en la superficie $z = \varepsilon f(x, y)$ está dada por

$$\mathcal{S}_m[Q] = \int d^3x_{\parallel} \sqrt{h} \frac{1}{2} (\partial_\alpha Q \partial^\alpha Q - \Omega_m^2 Q^2) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int d^3x_{\parallel} \sqrt{h} Q \left(h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma) + \Omega_m^2 \right) Q \\ &= \mathcal{S}_m^{(0)} - \frac{\varepsilon^2}{2} \int d^3x_{\parallel} Q \left[\frac{-(\partial f)^2}{2} (\square + \Omega_m^2) + \partial^\alpha f \partial^\beta f \partial_\alpha \partial_\beta + \square f \partial^\alpha f \partial_\alpha \right] Q + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $d^3x_{\parallel} = dt dx dy$, y $\mathcal{S}_m^0[Q]$ es la acción en el caso sin curvatura, es decir, con $f(x, y) = \text{cte}$. Por otro lado, la acción de interacción con acoplamiento mínimo entre el medio y el campo que vive en 3+1 dimensiones es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{mv}}[Q, \phi] &= \int d^3x_{\parallel} \sqrt{h} \lambda Q(x_{\parallel}) \phi(x_{\parallel}, \varepsilon f) = \mathcal{S}_{\text{mv}}^{(0)}[Q, \phi] + \varepsilon \int d^4x \lambda Q f \delta(x^3) \partial_{x^3} \phi(x) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int d^4x \lambda Q \delta(x^3) \left[f^2 \partial_{x^3}^2 - (\partial f)^2 \right] \phi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En (4.7) vemos que la primera corrección es de orden ε^2 , luego las correcciones tanto al propagador como a las contracciones de Wick serán de ese mismo orden. Sin embargo, en la acción de interacción (4.8) aparece una corrección a orden ε .

Por conveniencia para la siguiente sección, conviene escribir la acción libre para el caso en el que el campo Q describe osciladores desacoplados. En ese caso, no aparecen derivadas espaciales en (4.6), y teniendo en cuenta que la superficie en la que viven estos osciladores no depende del tiempo, se puede ver que la acción libre es

$$\mathcal{S}_{\text{m-des}}[Q] = -\frac{1}{2} \int d^3x_{\parallel} Q \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (\nabla f)^2 \right) (\partial_{x^0}^2 + \Omega_m^2) Q + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.9)$$

4.3. Acción efectiva

El cálculo de la acción efectiva es similar al realizado en la sección 2.2, solo que ahora contamos con un campo más. En este caso, la acción efectiva para el sistema, con la trayectoria de la partícula como argumento, es

$$e^{i\Gamma[\mathbf{r}]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}q \mathcal{D}Q e^{i\mathcal{S}[\phi, q, Q; \mathbf{r}]}}{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}q \mathcal{D}Q e^{i\mathcal{S}_0[\phi, q, Q]}}. \quad (4.10)$$

Después de hacer la integral funcional de q y Q se obtiene

$$e^{i\Gamma[\mathbf{r}]} = \left\langle \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{x,y} \phi(x) \left(\gamma^2 V_a(x,y) + \lambda^2 V_m(x,y) \right) \phi(y) \right] \right\rangle_{\mathbf{v}}, \quad (4.11)$$

donde

$$\langle \dots \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \dots e^{i\mathcal{S}_{\mathbf{v}}[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}_{\mathbf{v}}[\phi]}}, \quad (4.12)$$

y los potenciales que aparecen son

$$V_a(x,y) = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^0))\Delta_a(x^0 - y^0)\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}(y^0)) \quad (4.13)$$

y

$$\begin{aligned} V_m(x,y) = & -i\delta(y^3)\Delta_m(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \left\{ \delta(x^3) + 2\varepsilon\delta(x^3)f(y_{\parallel})\partial_{y^3} + \right. \\ & \left. + \varepsilon^2 \left[\delta(x^3)(f(y_{\parallel})^2\partial_{y^3}^2 - (\partial f(y_{\parallel}))^2) - f(x_{\parallel})f(y_{\parallel})\partial_{x^3}\delta(x^3)\partial_{y^3} \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (4.14)$$

En estas expresiones, Δ_a hace referencia al propagador del átomo, que es igual que en el Capítulo 2, es decir

$$\Delta_a(x^0 - y^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{ie^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega^2 - \Omega_a^2 + i\epsilon}. \quad (4.15)$$

Hay que tener en cuenta que, debido a las correcciones a la acción libre (4.7), el propagador de los grados de libertad de la superficie Δ_m también tiene correcciones de orden ≥ 2 en ε al propagador libre, que está dado por

$$\Delta_m^{(0)}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) = \begin{cases} \int \frac{d^3k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{ie^{-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})}}{k_{\parallel}^2 - \Omega_m^2 + i\epsilon} & \text{osciladores acoplados} \\ \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel}) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{ie^{-i\nu(x^0 - y^0)}}{\nu^2 - \Omega_m^2 + i\epsilon}}_{\Delta_m^{(0)}(x^0 - y^0)} & \text{osciladores desacoplados} \end{cases} \quad (4.16)$$

En el caso de osciladores desacoplados, se puede ver que el propagador del medio

toma la forma

$$\Delta_m(x_{\parallel}, y_{\parallel}) = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(\nabla f)^2\right) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel}) \Delta_m^{(0)}(x^0 - y^0) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.17)$$

Si desarrollamos el potencial efectivo debido a la interacción entre los grados de libertad de la superficie y el campo de vacío en potencias de ε , es decir, $V_m(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_m^{(n)}(x, y)$, las primeras correcciones que aparecen son

$$V_m^{(1)}(x, y) = -2i\delta(x^3)\delta(y^3)\delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel}) \Delta_m^{(0)}(x^0 - y^0) f(y_{\parallel}) \partial_{y^3} \quad (4.18)$$

y

$$V_m^{(2)}(x, y) = -i\delta(y^3)\delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel}) \Delta_m^{(0)}(x^0 - y^0) \left\{ \delta(x^3) \left[f(\mathbf{y}_{\parallel})^2 \partial_{y^3}^2 + \frac{1}{2}(\nabla_y f)^2 \right] + \right. \quad (4.19)$$

$$\left. - f(\mathbf{x}_{\parallel})^2 \partial_{x^3}(\delta(x^3)) \partial_{y^3} \right\}. \quad (4.20)$$

Desarrollando la exponencial de la parte derecha de (4.11) hasta segundo orden, tomando el logaritmo en ambas partes y desarrollando este en Taylor de nuevo hasta segundo orden, se ve que el término de interacción entre la partícula y el medio a orden más bajo en las constantes e acoplamiento está dado por

$$\Gamma_{\text{int}}[\mathbf{r}] = \frac{i}{2} \gamma^2 \lambda^2 \int_{x, y, x', y'} V_m(x, y) V_a(x', y') G(x, x') G(y, y'). \quad (4.21)$$

Haciendo $\Gamma_{\text{int}}[\mathbf{r}] = \Gamma_{\text{int}}^{(0)}[\mathbf{r}] + \varepsilon \Gamma_{\text{int}}^{(1)}[\mathbf{r}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, y teniendo en cuenta las correcciones a V_m , se obtiene que los aportes a la acción efectiva de interacción por parte de la curvatura son

$$\Gamma_{\text{int}}^{(1)}[\mathbf{r}] = \gamma^2 \lambda^2 \int_{x, y, x', y'} V_a(x', y') G(x, x') \delta(x^3) \delta(y^3) \Delta_m^{(0)}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) f(y_{\parallel}) \partial_{y^3} G(y, y') \quad (4.22)$$

y

$$\Gamma_{\text{int}}^{(2)}[\mathbf{r}] = \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \int_{x, y, x', y'} V_a(x', y') \delta(x^3) \delta(y^3) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel}) \Delta_m^{(0)}(x^0 - y^0) \times \quad (4.23)$$

$$\times \left\{ G(x, x') \left[f(\mathbf{x}_{\parallel})^2 \partial_{y^3}^2 + \frac{1}{2}(\nabla_x f)^2 \right] G(y, y') + f(\mathbf{x}_{\parallel})^2 \partial_{x^3} G(x, x') \partial_{y^3} G(y, y') \right\}. \quad (4.24)$$

Se puede evaluar la corrección a la acción efectiva a primer orden, y resulta

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{int}}^{(1)}[\mathbf{r}] &= \gamma^2 \lambda^2 \int \frac{d\nu}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(-\omega - \nu, \mathbf{k}) g(\omega - \nu, \mathbf{k}') \times \\ &\quad \times \tilde{\Delta}_a(\nu) \tilde{\Delta}_m^{(0)}(\omega) \tilde{G}(-\omega, \mathbf{k}) \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}') k'_z \tilde{f}(\mathbf{k}_\parallel + \mathbf{k}'_\parallel) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\gamma^2 \lambda^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} k'_z e^{-ia(k_z + k'_z)} \tilde{f}(\mathbf{k}_\parallel + \mathbf{k}'_\parallel) \tilde{\Delta}_a(\mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_\parallel + \mathbf{k}'_\parallel)/2) \times \\ &\quad \times \tilde{\Delta}_m^{(0)}(\mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{k}'_\parallel)/2) \tilde{G}(\mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{k}'_\parallel)/2, \mathbf{k}) \tilde{G}(\mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{k}'_\parallel)/2, \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde la primera expresión es válida para cualquier trayectoria del átomo, y en la segunda se ha tomado $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{v}t, a)$. Se podría seguir operando, y tomar la parte imaginaria de esta acción efectiva para ver cuál es la contribución a primer orden en la curvatura a la probabilidad de que ocurra la fricción cuántica. Sin embargo, resulta más sencillo calcular esta probabilidad mediante amplitudes de transición, cálculo que se presenta en la siguiente sección.

4.4. Amplitud de transición

Estamos interesados en hacer el mismo cálculo de la sección 2.4.1 pero tomando únicamente la parte de la acción de interacción que es lineal en ε , para ver cuál es la contribución a orden más bajo de la curvatura. Recordamos que si tomamos como estado final para el medio

$$|f_m\rangle = \int d^2\mathbf{x}_\parallel h(\mathbf{x}_\parallel) \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{x}_\parallel) |0_m\rangle, \quad (4.27)$$

la amplitud de transición a orden más bajo en el acoplamiento y sin curvatura toma la forma

$$T_{\text{fi}}^{(0)}[h] = \frac{g\lambda\pi}{2\sqrt{\Omega_a\Omega_m}} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \delta(\Omega_a + \Omega_m + \mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{v}) \frac{e^{-a\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 - \Omega_m^2}}}{\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 - \Omega_m^2}} \underbrace{\int d^2\mathbf{y}_\parallel e^{-i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{y}_\parallel} h^*(\mathbf{y}_\parallel)}_{\tilde{h}^*(\mathbf{k}_\parallel)}. \quad (4.28)$$

Si hacemos un desarrollo de la amplitud de transición a distintos órdenes en ε , es decir, $T_{\text{fi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n T_{\text{fi}}^{(n)}$, se puede ver que la corrección a primer orden, que viene del término lineal en ε de (4.8), satisface

$$T_{\text{fi}}^{(1)}[h] = -\frac{\partial}{\partial a} T_{\text{fi}}^{(0)}[h \cdot f], \quad (4.29)$$

donde f es la función que define la superficie. Esta relación se puede interpretar como

que la primera corrección en la curvatura es equivalente a que la distancia entre el átomo y la superficie plana esté cambiando con peso f , que es la función que caracteriza la diferencia de distancia vertical entre el caso plano y el curvado. Es decir, cuando f sea positiva, (4.29) da a entender que la amplitud de transición es como hacer el cálculo en el caso plano pero tomando una distancia a menor (debido al signo negativo en la expresión) entre el átomo y la superficie.

Al tomar el módulo cuadrado de $T_{fi}^{(0)} + \varepsilon T_{fi}^{(1)}$, la corrección a la probabilidad a primer orden en ε es

$$\mathcal{P}^{(1)}[h] = 2 \operatorname{Re} \left\{ T_{fi}^{(0)}[h] T_{fi}^{(1)}[h]^* \right\} = -2 \operatorname{Re} \left\{ T_{fi}^{(0)}[h] \frac{\partial}{\partial a} T_{fi}^{(0)}[h \cdot f]^* \right\}. \quad (4.30)$$

Tomando $h(\mathbf{x}_{ii}) = \frac{L}{2\pi} \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{ii} - \boldsymbol{\xi})$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(1)}[\delta] &= \frac{\gamma^2 \lambda^2 L^2}{8\Omega_a \Omega_m} f(\boldsymbol{\xi}) \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{ii}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{ii}}{(2\pi)^2} \delta(\Omega_m + \Omega_a + \mathbf{k}_{ii} \cdot \mathbf{v}) \delta((\mathbf{k}_{ii} - \mathbf{q}_{ii}) \cdot \mathbf{v}) \times \\ &\times \frac{e^{-a\sqrt{\mathbf{k}_{ii}^2 - \Omega_m^2}}}{\sqrt{\mathbf{k}_{ii}^2 - \Omega_m^2}} e^{-a\sqrt{\mathbf{q}_{ii}^2 - \Omega_m^2}} \cos((\mathbf{k}_{ii} - \mathbf{q}_{ii}) \cdot \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Vemos que es proporcional a $f(\boldsymbol{\xi})$, luego la corrección a primer orden se anulará al menos (ya que $\boldsymbol{\xi}$ también aparece dentro de la integral) en las regiones en las que no haya diferencia de distancia con el caso plano.

Sin perder generalidad, se puede tomar $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, y la distribución queda

$$\mathcal{P}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\gamma^2 \lambda^2 L^2}{32\pi^2 v^2 \Omega_a \Omega_m} f(\boldsymbol{\xi}) F(\xi_2) \quad (4.32)$$

con²

$$F(\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{2\pi} \frac{e^{-a\sqrt{k_2^2 + \Omega^2}}}{\sqrt{k_2^2 + \Omega^2}} e^{-a\sqrt{q_2^2 + \Omega^2}} \cos[(k_2 - q_2)\xi_2]. \quad (4.33)$$

La contribución a la probabilidad total se obtiene integrando (4.32), es decir,

$$P^{(1)} = \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \mathcal{P}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.34)$$

Ahora vamos a considerar dos casos particulares:

1. En la primera situación, la función que define la superficie solo dependerá de la coordenada paralela al movimiento de la partícula, es decir, tomaremos $f(\boldsymbol{\xi}) =$

²Usamos $\Omega^2 = \left(\frac{\Omega_a + \Omega_m}{v}\right)^2 - \Omega_a^2$

$f(\xi_1)$. En este caso, la contribución a la probabilidad dada por la curvatura es

$$P^{(1)} = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{32\pi^2 v^2 \Omega_a \Omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 f(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \frac{e^{-2a\sqrt{k_2^2 + \Omega^2}}}{\sqrt{k_2^2 + \Omega^2}}. \quad (4.35)$$

Vemos que las regiones en las que el átomo esté más cercano a la superficie que en el caso plano ($f(\xi_1) > 0$) contribuirán favorablemente a la probabilidad de que ocurra el fenómeno. Por el contrario, en las regiones en las cuales el átomo y la superficie estén más alejados que en el caso plano, la contribución a la probabilidad será negativa. Si la función que define la superficie tiene promedio nulo (como sería el caso de corrugaciones sinusoidales), la integral en ξ_1 es 0, por lo que no habrá diferencia a primer orden con el caso de superficie plana.

2. En la segunda situación, consideraremos que hay corrugaciones cuyos surcos son paralelos al movimiento del átomo, es decir, tomaremos $f(\boldsymbol{\xi}) = \sin[\kappa(\xi_2 - b)]$. Como la posición del átomo es $\mathbf{r}(t) = (vt, 0, a)$, la “distancia efectiva” o distancia vertical entre el átomo y la superficie en este caso es $d = a - \epsilon \sin(\kappa b)$. El parámetro κ da cuenta de la “densidad” de corrugaciones, y el parámetro b controla sobre qué punto de la senoide está moviéndose el átomo. Por ejemplo, cuando $\kappa b = n\pi$ con n un entero, el átomo estará moviéndose sobre un punto de la senoide que vale 0, luego la distancia efectiva será igual que en el caso de la superficie plana. Si $\kappa b = \pi/2 + 2\pi n$, el átomo se estará moviendo a lo largo de un valle, por lo que se esperaría una disminución en la probabilidad de que ocurra el fenómeno. En el caso contrario, cuando $\kappa b = -\pi/2 + 2\pi n$, el átomo estará moviéndose sobre una cumbre, y sería de esperar que la contribución de la curvatura sea máxima.

Al calcular (4.34) para este caso, como la densidad de probabilidad no depende de ξ_1 , en lugar de integrar esta coordenada basta con multiplicar la densidad por una distancia característica de ese eje, vT en este caso. De esta manera, la contribución es

$$P^{(1)} = -\sin(\kappa b) vT \frac{\gamma^2 \lambda^2}{64\pi^2 v^2 \Omega_a \Omega_m} \int \frac{dk_2}{2\pi} \frac{e^{-a\sqrt{k_2^2 + \Omega^2}}}{\sqrt{k_2^2 + \Omega^2}} \times \\ \times \left[e^{-a\sqrt{(k_2 + \kappa)^2 + \Omega^2}} + e^{-a\sqrt{(k_2 - \kappa)^2 + \Omega^2}} \right]. \quad (4.36)$$

Vemos que la contribución es proporcional a la variación en la distancia efectiva entre el átomo y la superficie con respecto al caso de la superficie plana, $\Delta d = -\sin(\kappa b)$.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos visto que las fluctuaciones de vacío son responsables de fenómenos observables a escala macroscópica, como lo es la Fricción Cuántica.

Primero, con el fin de ilustrar cómo se realizan los cálculos en términos de integrales funcionales, hemos calculado la probabilidad a orden más bajo en la constante de acoplamiento de que ocurran fenómenos disipativos cuando el sistema a considerar es un átomo inmerso en un campo de vacío, sin presencia de superficies. Después, hemos obtenido los mismos resultados pero a través del cálculo de amplitudes de transición, método para el que es necesario especificar cuál es el estado inicial y final correspondientes al proceso. Tras esto, hemos incluido un espejo imperfecto al sistema, describiendo su modelo microscópico. Después, se ha procedido a calcular la amplitud correspondiente a la transición responsable de la fricción cuántica, cantidad cuyo módulo al cuadrado permite ver la dependencia espacial de la excitación de los grados de libertad del medio. Mediante la Figura 2.1, se ha analizado cómo depende esta distribución de los parámetros del sistema: frecuencias de excitación, velocidad del átomo y distancia entre el átomo y la superficie. Después se ha considerado el caso en el que hay una velocidad de propagación en el medio, que tiene como consecuencia la aparición de un umbral para que ocurra la fricción cuántica: la velocidad del átomo debe ser superior a la velocidad de propagación de las ondas en la superficie. Para concluir con este modelo, se ha calculado la fuerza de fricción, ilustrando en la Figura 2.3 su dependencia con los parámetros.

El siguiente sistema a considerar ha sido un átomo en la aproximación dipolar, moviéndose forzosamente con velocidad constante e interactuando con una lámina de grafeno mediante el campo electromagnético. Se ha calculado la amplitud de transición correspondiente a la creación de un par fermiónico en el grafeno partiendo del vacío de la teoría, proceso responsable de la fricción cuántica. De nuevo, aparece un umbral para la velocidad del átomo, que corresponde a la velocidad de Fermi del grafeno.

Finalmente, se ha considerado una modificación al modelo escalar, consistente en

añadir una pequeña curvatura a la superficie plana. Hemos obtenido la acción clásica que describe los grados de libertad microscópicos que viven en la superficie curvada. Tras esto, se han obtenido las contribuciones a primer y segundo orden en el parámetro de curvatura a la acción efectiva del sistema. A continuación, mediante amplitudes de transición, se ha calculado la corrección a primer orden en el parámetro de curvatura a la probabilidad de que ocurra el proceso responsable de la fricción cuántica. Para finalizar, se han analizado dos configuraciones para la curvatura de la superficie, una en la que las corrugaciones son paralelas a la velocidad del átomo, y otra en la que son perpendiculares.

Como aspecto general, hemos visto que siempre que aparece una velocidad de propagación característica de la superficie, hay un umbral que la velocidad del átomo debe superar para que ocurra el fenómeno de fricción cuántica. A pesar de que las magnitudes de las fuerzas que aparecen son tan pequeñas que son difíciles de detectar experimentalmente, la existencia de este umbral es un factor importante a tener en cuenta en posibles aplicaciones tecnológicas de los sistemas analizados si se quieren evitar efectos disipativos.

Apéndice A

Cálculos extra

A.1. Parte imaginaria de Π

Con $a, b, \epsilon > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, metiendo la siguiente integral en Mathematica se obtiene

$$I = \int_0^1 dx \left[xa^2 + (1-x)b^2 - x(1-x)c^2 - i\epsilon \right]^{-3/2} \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{2}{[c^2 - (a+b)^2][c^2 - (a-b)^2] + 4ic^2\epsilon} \left[\frac{b^2 - a^2 - c^2}{\sqrt{a^2 - i\epsilon}} + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt{b^2 - i\epsilon}} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Como $a, b \neq 0$ y $\epsilon \ll 1$, podemos hacer $\epsilon = 0$ dentro del corchete, por lo que la parte imaginaria de la expresión vendrá solo del factor de fuera del corchete.

$$\text{Im}\{I\} = 2\frac{a+b}{ab} [c^2 - (a-b)^2] \frac{4c^2\epsilon}{\left\{ [c^2 - (a+b)^2][c^2 - (a-b)^2] \right\}^2 + (4c^2\epsilon)^2} \quad (\text{A.3})$$

Teniendo en cuenta

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} = \pi\delta(x), \quad (\text{A.4})$$

obtenemos entonces

$$\text{Im}\{I\} = 2\pi \frac{a+b}{ab} [c^2 - (a-b)^2] \delta\left\{ [c^2 - (a+b)^2][c^2 - (a-b)^2] \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Para que se cumpla la delta, tiene que ocurrir que $c^2 = (a+b)^2$ ó $c^2 = (a-b)^2$. En el segundo caso, el corchete de la expresión se anula, por lo que no habrá contribución de esta parte. Entonces, podemos extraer el factor $[c^2 - (a-b)^2]^2$ del denominador en

(A.3), tal que

$$\operatorname{Im}\{I\} = 2 \frac{a+b}{ab} \frac{\frac{4c^2\epsilon}{[c^2-(a-b)^2]}}{\left[c^2 - (a+b)^2 \right]^2 + \left(\frac{4c^2\epsilon}{[c^2-(a-b)^2]} \right)^2}. \quad (\text{A.6})$$

Usando ahora (A.4), se obtiene finalmente

$$\operatorname{Im}\{I\} = 2\pi \frac{a+b}{ab} \delta[c^2 - (a+b)^2] \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left(\delta(c-a-b) + \delta(c+a+b) \right) \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Gráficas del Modelo escalar

En este apéndice se explica cómo se han realizado las gráficas que aparecen en el capítulo 2.

Recordamos la definición de Ω dada en (2.50), e introducimos nueva notación que será útil a la hora de poder graficar cantidades adimensionales

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{\Omega_a + \Omega_m}{v}\right)^2 - \Omega_m^2} = \Omega_a g(v), \quad (\text{B.1})$$

donde

$$g(v) = \sqrt{\left(\frac{1+f}{v}\right)^2 - f^2}, \quad (\text{B.2})$$

y $f = \Omega_m/\Omega_a$. Definimos también el parámetro adimensional $b = a\Omega_a$, donde a es la distancia entre el átomo y la superficie plana.

B.1. Dependencia espacial de la probabilidad

La expresión que da cuenta de la dependencia espacial de la fricción cuántica es

$$\rho(\xi_2) = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{8\pi \Omega_a \Omega_m v^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik\xi_2} \frac{e^{-a\sqrt{k^2 + \Omega^2}}}{\sqrt{k^2 + \Omega^2}} \right|^2 \equiv \frac{\gamma^2 \lambda^2}{2\pi \Omega_a \Omega_m v^2} \tilde{\rho}(\xi_2), \quad (\text{B.3})$$

con

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{\rho}(\xi_2)} &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik\xi_2} \frac{e^{-a\sqrt{k^2 + \Omega^2}}}{\sqrt{k^2 + \Omega^2}} \right| = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-a\Omega\sqrt{t^2 + 1}}}{\sqrt{t^2 + 1}} \cos(t\Omega\xi_2) \\ &= \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-b g(v)\sqrt{t^2 + 1}}}{\sqrt{t^2 + 1}} \cos(t \Omega_a \xi_2 g(v)). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En la figura 2.1, se ha representado la cantidad adimensional $\tilde{\rho}(\xi_2)$ en función de $\Omega_a \xi_2$, que también es adimensional, para Ω_a fijo. En las cuatro gráficas se ha considerado $v = 0, 1$, y se ha cambiado el valor de $b = a\Omega_a$ y f , que corresponde a cambiar a y Ω_m , para ver cómo depende de estos parámetros la distribución.

B.2. Probabilidad total

Hemos visto en la sección 2.4.1 que la probabilidad total por unidad de tiempo de que ocurra la transición responsable de la fricción cuántica a orden más bajo en las constantes de acoplamiento es

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\gamma^2 \lambda^2}{2v\Omega_a\Omega_m} \int_0^\infty dk \frac{e^{-2a\sqrt{k^2+\Omega^2}}}{k^2 + \Omega^2} \\ &= \frac{\gamma^2 \lambda^2}{2\Omega_a^3} \underbrace{\frac{1}{fvg(v)} \int_0^\infty dt \frac{e^{-2bg(v)\sqrt{t^2+1}}}{t^2 + 1}}_{\tilde{\mathcal{P}}}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En la figura 2.2 se ha representado la cantidad adimensional $\tilde{\mathcal{P}}$ en función de la distancia (ya que consideramos Ω_a fijo) entre el átomo y la superficie, y para distintos valores de la velocidad del átomo y frecuencia de excitación del medio.

B.3. Fuerza de fricción

Para la figura 2.3, tenemos que la fuerza de fricción es

$$F_{\text{fr}} = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{16\pi v^2 \Omega_a} \int_0^\infty dp_y \frac{e^{-2a\sqrt{p_y^2 + \Omega(v)^2}}}{p_y^2 + \Omega(v)^2} = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{16\pi \Omega_a^2} \tilde{F}_{\text{fr}}(v), \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\tilde{F}_{\text{fr}}(v) = \frac{1}{v^2 g(v)} \int_0^\infty dt \frac{e^{-2bg(v)\sqrt{t^2+1}}}{t^2 + 1} \quad (\text{B.7})$$

da cuenta de toda la dependencia en la velocidad. De nuevo, se ha representado la cantidad adimensional \tilde{F}_{fr} en función de la velocidad. Las distintas gráficas corresponden a diferentes valores para los otros dos parámetros adimensionales, $b = a\Omega_a$ y $f = \Omega_m/\Omega_a$, que, al estar considerando Ω_a fijo, es como estar cambiando la distancia entre el átomo y la superficie y la frecuencia de excitación de los grados de libertad microscópicos del medio bidimensional.

Apéndice C

Integrales extra del Modelo con grafeno

En este apéndice se explica cómo se puede integrar la expresión (3.39) para obtener distintas cantidades de interés.

Teníamos que la probabilidad por unidad de tiempo de que se cree un par de fermiones en el grafeno con momentos \mathbf{p} y \mathbf{q} es

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \frac{\pi^2 e^4 e^{-2a\sqrt{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|^2 - v_F^2(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|)^2}}}{(2\pi)^5 2M\Omega_a v_F^2 |\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \times \\ \times \delta\left(v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) + \Omega_a - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q})\right) F(v_F|\mathbf{p}|, \mathbf{p}; v_F|\mathbf{q}|, \mathbf{q}), \quad (\text{C.1})$$

con

$$F(p, q) = \frac{1}{-(p+q)^2} \left\{ \left[|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 - (p+q)^2 \right] \left[(p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) - p \cdot q(1 - |\mathbf{v}|^2)/2 \right] + \right. \\ \left. + p_0 q_0 \Omega_a^2 + \Omega_a (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \left[(p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + (q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{p} - p \cdot q\mathbf{v} \right] \right\}. \quad (\text{C.2})$$

Sin perder generalidad, se puede considerar $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Con esto, la delta de Dirac exige que se satisfaga

$$\chi \equiv \Omega_a + v_F \left[\sqrt{p_x^2 + p_y^2} + |\mathbf{q}| \right] - v(p_x + q_x) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Podemos tomar esta expresión como una función de la componente p_y , y transformar la delta en

$$\delta[\chi(p_y)] = \frac{1}{|\chi'(p_y^0)|} \left(\delta(p_y - p_y^0) + \delta(p_y + p_y^0) \right), \quad (\text{C.4})$$

con

$$|\chi'(p_y^0)| = \frac{v_F |p_y^0|}{\left| \frac{v}{v_F}(p_x + q_x) - \frac{\Omega_a}{v_F} - |\mathbf{q}| \right|} \quad (\text{C.5})$$

y

$$p_y^0 = \sqrt{\left[\frac{v}{v_F}(p_x + q_x) - \frac{\Omega_a}{v_F} - |\mathbf{q}| \right]^2 - p_x^2}. \quad (\text{C.6})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \delta\left(v_F(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) + \Omega_a - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q})\right) &= \\ &= \frac{\left| \frac{v}{v_F}(p_x + q_x) - \frac{\Omega_a}{v_F} - |\mathbf{q}| \right|}{v_F p_y^0} \left(\delta(p_y - p_y^0) + \delta(p_y + p_y^0) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Además de fijar el valor de la componente p_y , la delta de Dirac también restringe la región de integración de las otras componentes. Introduciendo (C.6) en (C.3), vemos que se tiene que satisfacer

$$\frac{v}{v_F}(p_x + q_x) - \frac{\Omega_a}{v_F} - |\mathbf{q}| \geq 0. \quad (\text{C.8})$$

Si además pedimos que p_y^0 sea real, es necesario que

$$\frac{v}{v_F}(p_x + q_x) - \frac{\Omega_a}{v_F} - |\mathbf{q}| \geq |p_x|. \quad (\text{C.9})$$

Definiendo $s(\mathbf{q}) = \Omega_a + v_F |\mathbf{q}| - v q_x$, la anterior expresión se convierte en

$$p_x \geq \begin{cases} \frac{s(\mathbf{q})}{v + v_F} & \text{si } p_x < 0 \\ \frac{s(\mathbf{q})}{v - v_F} & \text{si } p_x > 0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Veamos cómo afecta esta condición a la región de integración de p_x , que a priori era de $-\infty$ a ∞ . Primero, si $s(\mathbf{q}) > 0$, vemos de la primera línea de (C.10) que no va a haber contribución de p_x negativos a la integral. Por lo tanto, si $s(\mathbf{q}) > 0$, la región de integración será $p_x \in \left[\frac{s(\mathbf{q})}{v - v_F}, \infty \right]$. Por otro lado, si $s(\mathbf{q}) < 0$, la región de integración

para $p_x < 0$ será de $\frac{s(\mathbf{q})}{v+v_F}$ a 0, y los p_x positivos se integrarán de 0¹ a ∞ . Es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \longrightarrow \Theta \left[-s(\mathbf{q}) \right] \int_{\frac{s(\mathbf{q})}{v+v_F}}^{\infty} dp_x + \Theta \left[s(\mathbf{q}) \right] \int_{\frac{s(\mathbf{q})}{v-v_F}}^{\infty} dp_x. \quad (\text{C.11})$$

Con esto y (C.7), podríamos integrar el momento \mathbf{p} en la expresión (C.1), lo que daría la probabilidad de detectar un fermión con momento \mathbf{q} . Si además integramos también este momento, se obtendría la probabilidad total de que ocurra la transición correspondiente a la creación de un par fermiónico en el grafeno. De manera similar se puede realizar la integral de la expresión (3.42) para ver la dependencia de la potencia disipada (o la fuerza de fricción, si dividimos la potencia entre la velocidad) con la velocidad a la que se mueve el átomo.

¹Ya que $\frac{s(\mathbf{q})}{v-v_F}$ sería menor que 0.

Bibliografía

- ¹H. B. G. Casimir, «On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates», *Indag. Math.* **10**, 261-263 (1948).
- ²S. K. Lamoreaux, «Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to $6\mu\text{m}$ Range», *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5-8 (1997).
- ³U. Mohideen y A. Roy, «Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to $0,9\mu\text{m}$ », *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549-4552 (1998).
- ⁴V. Dodonov, «Fifty Years of the Dynamical Casimir Effect», *Physics* **2**, 67-104 (2020).
- ⁵G. Plunien, B. Müller y W. Greiner, «The Casimir effect», *Physics Reports* **134**, 87-193 (1986).
- ⁶J. Zinn-Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, 1.^a ed., Oxford Graduate Texts (OUP Oxford, 2010).
- ⁷M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Reading, USA, 1995).
- ⁸B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and String*, 1.^a ed., Frontiers in Physics (Perseus, 1992).
- ⁹J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3.^a ed., The International Series of Monographs on Physics (Book 32) (Oxford University Press, 1996).
- ¹⁰M. B. Farías, C. D. Fosco, F. C. Lombardo y F. D. Mazzitelli, «Motion induced radiation and quantum friction for a moving atom», *Physical Review D* **100**, 036013 (2019).
- ¹¹A. Fernández y C. D. Fosco, *Spatial dependence of quantum friction amplitudes in a scalar model*, 2022.
- ¹²L. Viotti, M. Belén Farías, P. I. Villar y F. C. Lombardo, «Thermal corrections to quantum friction and decoherence: A closed-time-path approach to atom-surface interaction», *Phys. Rev. D* **99**, 105005 (2019).
- ¹³C. D. Fosco, F. C. Lombardo y F. D. Mazzitelli, «Motion induced excitation and radiation from an atom facing a mirror», *Phys. Rev. D* **105**, 045019 (2022).

-
- ¹⁴J. B. Pendry, «Shearing the vacuum - quantum friction», *Journal of Physics: Condensed Matter* **9**, 10301 (1997).
- ¹⁵M. Belén Farías, C. D. Fosco, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli y A. E. Rubio López, «Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force», *Phys. Rev. D* **91**, 105020 (2015).
- ¹⁶C. D. Fosco, F. C. Lombardo y F. D. Mazzitelli, «Motion-Induced Radiation Due to an Atom in the Presence of a Graphene Plane», *Universe* **7**, 158 (2021).
- ¹⁷M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko y V. M. Petrov, «Quantum field theoretical description for the reflectivity of graphene», *Phys. Rev. D* **91**, 045037 (2015).
- ¹⁸A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov y A. K. Geim, «The electronic properties of graphene», *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109-162 (2009).
- ¹⁹V. Hnizdo, «Comment on ‘Electromagnetic force on a moving dipole’», *European Journal of Physics* **33**, L3 (2011).
- ²⁰L. Parker y D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2009).

Agradecimientos

A la República Argentina por haberme permitido vivir y formarme en este país.

A la Comisión Nacional de Energía Atómica por financiarme durante la maestría.

A los y las profesoras que he tenido durante mi formación aquí: Roberto Trincherro, Diego Mazzitelli, Silvia Mollerach, Leandro Da Rold, Marina Huerta, Gerardo Aldazabal, Horacio Casini, y, por supuesto, a César Fosco, por su amabilidad, paciencia y comprensión.

Al personal no docente del Centro Atómico y del Instituto Balseiro: seguridad, limpieza, mantenimiento y administración.

A (mi gente del Pabellón 6 2022)+1.

