

TESIS CARRERA DE LICENCIATURA EN FÍSICA

**DINÁMICA DE CIRCUITOS CUÁNTICOS BAJO
FORZAMIENTO FUERTE: TRATAMIENTO DE CAMPO
MEDIO Y FENÓMENOS DE INVERSIÓN DE
POBLACIONES**

Francisco José Divi
Licenciando

Dr. Daniel Dominguez
Director

Miembros del Jurado

Dr. Gonzalo Álvarez (Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)

19 de Diciembre de 2023

Grupo de Materia Condensada – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Inventario:

24818

Biblioteca Leo Falicov

A mi familia.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
1. Introducción y motivación	1
1.1. Sistemas de dos niveles	2
1.2. Hamiltonianos de Rabi y Jaynes-Cummings	3
1.2.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	3
1.3. Efecto Purcell	6
1.4. Sistema en estudio	7
2. Formalismo de Floquet-Born-Markov	9
2.1. Formalismo de Floquet	9
2.2. Ecuación de Born-Markov	10
2.2.1. Forma de Lindblad	12
2.2.2. Modelo de Caldeira-Legget	14
2.3. Ecuación de Floquet-Born-Markov	15
2.3.1. Dinámica de Poblaciones	17
2.3.2. Observables en el estado estacionario	17
2.3.3. Procedimiento numérico	18
3. Campo Medio en Sistemas Forzados	21
3.1. Planteo	22
3.2. Resolución en la RWA	23
3.2.1. Problema para el resonador	23
3.2.2. Problema para el <i>qubit</i>	24
3.2.3. Autoconsistencia	26
3.2.4. Resultados y discusión	27

4. Resultados numéricos	31
4.1. Transformación a un sistema con <i>drive</i> en el <i>qubit</i>	31
4.1.1. Motivación	31
4.1.2. Transformación de la ecuación de Born-Markov	32
4.1.3. Determinación de la amplitud de forzamiento efectiva	35
4.1.4. Caso Resonante	35
4.2. Baño estructurado	36
4.3. Resultados numéricos	37
4.3.1. Mapas de poblaciones	38
4.3.2. Mapas de Fotones	39
4.3.3. Baño estructurado y óhmico	42
4.3.4. Inversión de poblaciones	45
5. Conclusiones y Perspectivas Futuras	49
Bibliografía	51
Agradecimientos	57

Índice de figuras

1.1.	Esfera de Bloch empleada para representar el estado de un <i>qubit</i>	2
1.2.	Espectro de energías en función de la frecuencia del <i>qubit</i> para el hamiltoniano no interactuante (línea de rayas gris), el hamiltoniano de Jaynes-Cummings (línea continua roja) y el hamiltoniano de Rabi (línea continua negra) con $g = 0,05 \omega_r$	5
1.3.	Población del estado excitado del <i>qubit</i> para el estado inicial $ 0, e\rangle$ para los hamiltonianos de Jaynes-Cummings y Rabi con $\Delta = \omega_q - \omega_r = 0$ para $g = 0,05 \omega_r$ (izquierda) y $g = \omega_r$ (derecha).	6
2.1.	Evolución de $\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \vec{\sigma})$ en la esfera de Bloch para $\Gamma_{\downarrow} = \Gamma_{\phi} = 0$ (círculos amarillos), $\Gamma_{\phi} \neq 0$ (cuadrados azules) y $\Gamma_{\downarrow} \neq 0$ (diamantes rojos). La condición inicial es $\vec{\sigma} = \hat{x}$	14
3.1.	Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q acoplado a un resonador forzado con una amplitud A_r en la aproximación de campo medio. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$ y $\kappa/\omega_d = 0,001$	28
3.2.	Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de una cavidad forzada con una amplitud A_r acoplada a un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q en la condición de resonancia $\omega_r = \omega_d$ calculada en la aproximación de campo medio. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$ y $\kappa/\omega_d = 0,001$ (izquierda) y $g/\omega_d = \kappa/\omega_d = 0,1$ (derecha). En la figura de la derecha la línea punteada indica la curva con $\bar{n} = 1,5$	29
4.1.	Densidad espectral para el baño estructurado. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r/\omega_d = 1$, $\eta = 0,001$	37
4.2.	Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar \omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.	38

4.3. Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_q/\omega_d = 0,5$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.	40
4.4. Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_q/\omega_d = 0,5$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.	41
4.5. Para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación graficamos el número medio de fotones del resonador (\bar{n}) (izquierda) y la población del estado excitado (P_e)(derecha). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.	42
4.6. Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió empleando $2n_{max} + 2$ estados.	42
4.7. Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación (izquierda) y un <i>qubit</i> forzado acoplado a un baño estructurado (derecha). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$	43
4.8. Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> forzado acoplado a una cavidad con disipación (línea negra), un <i>qubit</i> forzado acoplado a un baño estructurado (línea roja) y un <i>qubit</i> forzado acoplado a un baño óhmico (línea azul). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y $A_q = 0,5 \omega_d$ (izquierda) y $A_q = \omega_d$ (derecha).	44
4.9. Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un <i>qubit</i> forzado acoplado a una cavidad con disipación (línea negra), un <i>qubit</i> forzado acoplado a un baño estructurado (línea roja) y un <i>qubit</i> forzado acoplado a un baño óhmico (línea azul). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y $\omega_q = 0,722 \omega_d$ (izquierda) y $\omega_q = 4,75 \omega_d$ (derecha).	44
4.10. Para el baño estructurado graficamos (de arriba hacia abajo) la población del estado excitado (P_e), el espectro de cuasienergías (ϵ), las tasas efectivas de transición entre $ e\rangle$ y $ g\rangle$ calculadas usando la Ec. (4.32) y las componentes $\Gamma_{ge}^{(q)}$ en función de la frecuencia del <i>qubit</i> (izquierda) y de la amplitud de forzamiento (derecha).	46

Resumen

Los avances experimentales en circuitos cuánticos superconductores han facilitado el acceso a regímenes de forzamiento cada vez más intensos, permitiendo poblar resonadores con hasta centenares de fotones. En estos regímenes, se manifiestan fenómenos inesperados como la inversión de poblaciones donde, en el estado estacionario, existe una mayor probabilidad de encontrar al *qubit* en su estado excitado que en su estado fundamental. La descripción y el tratamiento de estos sistemas ha de realizarse en el marco de sistemas forzados abiertos, trascendiendo las aproximaciones convencionales de onda rotante y secular.

En esta tesis, proponemos y aplicamos técnicas para abordar problemas sujetos a forzamiento fuerte, enfocándonos en un *qubit* acoplado a una cavidad forzada en resonancia. Presentamos un esquema para realizar aproximaciones de campo medio en sistemas periódicos con disipación y demostramos su aplicabilidad en *circuit QED*, al emplearla en el problema mencionado.

Dado que este tipo de aproximación no predice inversión de poblaciones, resolvimos el problema numéricamente. Para reducir el costo computacional asociado al gran número de fotones, realizamos un desplazamiento del resonador en una ecuación maestra de Born-Markov. Esta transformación permite separar la parte clásica del campo, reduciendo el problema a un *qubit* forzado acoplado a una cavidad con un número medio de fotones reducido. A partir de este problema efectivo, determinamos observables en el estado estacionario y encontramos inversión de poblaciones. Además, al modelar el sistema como un *qubit* acoplado a un baño estructurado, obtuvimos un excelente acuerdo. Esto nos permitió concluir que no son efectos de coherencia y entrelazamiento los que conducen a la inversión de poblaciones, sino que esta se produce gracias a la intensificación de transiciones entre los niveles del *qubit* causada por el resonador. Como trabajo futuro, se planea determinar el mecanismo específico por el que ocurre este fenómeno.

Palabras clave: INVERSIÓN DE POBLACIONES, CAMPO MEDIO, SISTEMAS CUÁNTICOS ABIERTOS, FLOQUET, BORN-MARKOV

Abstract

Advancements in superconducting quantum circuits have enabled access to increasingly intense driving regimes, allowing to populate resonators with up to hundreds of photons. Within these regimes, unexpected phenomena arise such as population inversion, where the likelihood of finding the qubit in its excited state exceeds that of the ground state in a steady-state scenario. Describing and addressing these systems must be done within the framework of open driven systems, surpassing conventional approaches like rotating wave and secular approximations.

In this thesis, we propose and apply techniques to address issues in strong driving regimes, focusing on a qubit coupled to a resonantly driven cavity. We present a scheme for implementing mean-field approximations in dissipative periodic systems and we demonstrate its applicability in circuit QED by utilizing it to the aforementioned problem.

Given that the mean-field approach does not predict population inversion, the issue is addressed numerically. To reduce the computational cost associated with the large number of photons, we perform an oscillator displacement in a Born-Markov master equation. This transformation allows us to separate the classical part of the field, reducing the problem to a forced qubit coupled to a cavity with a reduced average number of photons. From this effective problem, we determine observables in the steady state and find population inversion. Furthermore, by modeling the system as a qubit coupled to a structured bath, we obtained excellent agreement. This led us to conclude that coherence and entanglement effects are not the driving forces behind population inversion; rather, it occurs due to enhanced transitions between the qubit levels caused by the resonator. As future work, we plan to determine the specific mechanism by which this phenomenon occurs.

Keywords: POPULATION INVERSION, MEAN FIELD, OPEN QUANTUM SYSTEMS, FLOQUET, BORN-MARKOV

Capítulo 1

Introducción y motivación

La electrodinámica de circuitos cuánticos (*Circuit QED*, por sus siglas en inglés) destaca como uno de los campos más prometedores en la actualidad, con posibles aplicaciones revolucionarias en comunicación, simulaciones y computación cuántica [1]. Ejemplos paradigmáticos de algoritmos de computación cuántica como el de Shor [2], para factorizar números grandes en tiempo polinomial, y el de búsqueda de Grover [3, 4], motivan al diseño e ingeniería de sistemas cuánticos para atacar problemas complejos o intratables para la computación clásica. En este contexto, *circuit QED* se posiciona como un campo crucial, enfocado en el estudio, diseño y optimización de circuitos superconductores que sólo pueden comprenderse dentro del marco de sistemas cuánticos abiertos y forzados.

Esta rama emergió como una alternativa a la tradicional *cavity QED*, la cual estudia la interacción entre modos confinados del campo electromagnético (es decir, fotones) y átomos. En un trabajo seminal [5], Blais *et al.* propusieron que la dinámica de un circuito superconductor acoplado a una línea de transmisión podía pensarse como un átomo “artificial” en una cavidad, ofreciendo numerosas ventajas. Por un lado, proporciona el acceso a regímenes de forzamiento fuerte [6] y ultra-fuerte [7], difíciles de alcanzar para átomos en cavidades [5]. Por otro lado, el entrelazamiento entre el átomo artificial y la línea de transmisión permite determinar el estado del primero de manera confiable y eficiente mediante una lectura del estado del resonador [6, 8].

Desde la publicación de dicho trabajo, el atractivo de *Circuit QED* no ha dejado de crecer. A las ventajas mencionadas se han sumado la escalabilidad y los tiempos largos de coherencia, que hacen de los circuitos cuánticos superconductores una de las arquitecturas más prometedoras para realizar computación cuántica [9]. A pesar de los grandes esfuerzos realizados por grupos teóricos y experimentales, aún queda un largo tramo para alcanzar el máximo potencial de las denominadas “tecnologías cuánticas”. Parte de estas dificultades se asocian a la complejidad que requiere describir y modelar sistemas en regímenes de forzamiento fuerte, esenciales para el desarrollo de compuertas

rápidas [10]. En esta tesis, nos vamos a enfocar en el tratamiento numérico y analítico de ciertos sistemas en regímenes donde las aproximaciones habituales de *Circuit QED* no pueden aplicarse.

1.1. Sistemas de dos niveles

Mientras que en computación clásica la unidad básica de información es el *bit*, una variable clásica que puede tomar valores 0 ó 1, en computación cuántica la unidad fundamental de información es el *qubit* y es una variable cuántica. Como tal, vive en un espacio de Hilbert de dimensión 2 y puede ser representado por

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.1)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ satisfaciendo $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Por consiguiente, exceptuando una fase compleja arbitraria, un *qubit* está descrito por dos grados de libertad reales, que pueden elegirse como ángulos θ y φ para escribir

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (1.2)$$

Estos ángulos θ y φ pueden interpretarse como los ángulos azimutal y polar en una esfera, conocida como esfera de Bloch. De esta forma, el estado del *qubit* puede representarse por un punto en la superficie de dicha esfera, tal como se muestra en la Fig. 1.1.

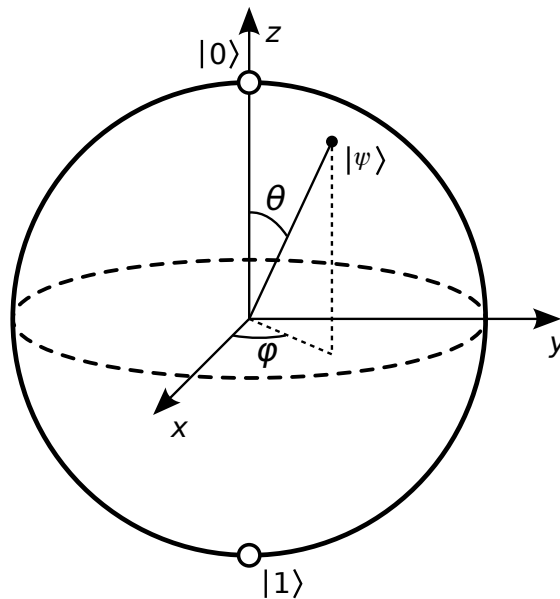


Figura 1.1: Esfera de Bloch empleada para representar el estado de un *qubit*.

El siguiente elemento necesario para poder realizar computación es la capacidad

operar sobre un *qubit* mediante compuertas. Si bien no nos detendremos demasiado en cómo implementarlas, mencionamos que para realizar computación universal se puede descomponer cualquier compuerta de n *qubits* en operaciones de unos y dos *qubits* [11, 12].

Una de las compuerta más simples para un *qubit* que podemos pensar es aquella que intercambia $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, es decir, que opere como la matriz de Pauli σ_x . Este tipo de operación, conocida como pulso π , puede implementarse de diversas maneras, siendo una de las más sencillas las oscilaciones de Rabi, como veremos a continuación.

1.2. Hamiltonianos de Rabi y Jaynes-Cummings

A pesar de las diferencias sistemáticas entre *cavity* y *circuit QED*, ambas áreas comparten conceptos, técnicas e incluso hamiltonianos. Un ejemplo de ello es el emblemático hamiltoniano de Rabi [13] ($\hbar = 1$)

$$H_{\text{RABI}} = \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g(a + a^\dagger)\sigma_x. \quad (1.3)$$

Este describe la interacción entre un modo bosónico de frecuencia ω_r y un sistema de dos niveles de frecuencia ω_q . En el contexto de *circuit QED*, el modo bosónico se corresponde con una línea de transmisión, modelada como un circuito LC resonante, y el *qubit* es un circuito superconductor arbitrario [14, 15].

A pesar de su aparente simplicidad, las soluciones de este problema son relativamente complejas e involucran funciones trascendentes [16]. De hecho, la cuestión de cómo tomar el límite semiclásico de este problema aún continúa en discusión [17]. Esta imprevista complejidad nace de la ausencia de cantidades conservadas, aparte de la energía. Por suerte, mucha de la física resultante de la interacción entre la materia y la radiación es capturada por una versión simplificada del hamiltoniano de Rabi, conocida como el hamiltoniano Jaynes-Cummings [18].

1.2.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Para introducir este modelo, primero notemos que si escribimos $\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-$, el término de interacción tiene 4 componentes. En la representación de interacción ($H_0 = \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + \omega_r a^\dagger a$), los términos $a^\dagger\sigma_+$ y $a\sigma_-$ adquieren una fase $e^{\pm i(\omega_r + \omega_q)t}$, mientras que los términos $a\sigma_+$ y $a^\dagger\sigma_-$ adquieren una fase $e^{\pm i(-\omega_r + \omega_q)t}$. De esta forma, si: $g, |\omega_q - \omega_r| < \omega_q + \omega_r$ ($\omega_q > 0$), los primeros dos dan lugar a una dinámica rápida que, en la escala temporal en la que evolucionan los segundos, pueden ignorarse. Esta aproximación se conoce como *Rotating Wave Approximation* (RWA) y es ampliamente empleada en

circuit QED. De esta forma, se obtiene el hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$H_{\text{JC}} = \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \quad (1.4)$$

Existe un segundo y más práctico motivo para despreciar los términos contrarrotantes $a\sigma_-$ y $a^\dagger\sigma_+$. Notemos que $a^\dagger\sigma_-$ representa la desexcitación del *qubit* y subsecuente emisión de un fotón y que $a\sigma_+$ representa la absorción de un fotón y excitación del *qubit*. Es decir, los términos rotantes transforman excitaciones del *qubit* en excitaciones del resonador y viceversa, y por ende conservan el número total de excitaciones. De hecho, si $\omega_r \approx \omega_q$ los términos rotantes conservan aproximadamente la energía, mientras que los contrarrotantes no.

En consecuencia, al eliminar los términos contrarrotantes se tiene que $[H_{\text{JC}}, N_{\text{TOT}}] = 0$, siendo

$$N_{\text{TOT}} = a^\dagger a + \sigma_+ \sigma_- . \quad (1.5)$$

La conservación del número total de excitaciones N_{TOT} representa una simplificación enorme del problema ya que permite resolverlo en un subespacio con N_{TOT} definido. En concreto, si denotamos por $|n, e\rangle$ y $|n, g\rangle$ a los estados con n fotones y *qubit* excitado y desexcitado, respectivamente, entonces los únicos elementos con $N_{\text{TOT}} = n > 0$ son $|n-1, e\rangle$ y $|n, g\rangle$. Luego, podemos escribir el hamiltoniano de la Ec. (1.4) en la base $\{|n-1, e\rangle, |n, g\rangle\}$

$$H_{\text{JC}}^{(n)} = \omega_r \left(n - \frac{1}{2}\right) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & -\frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

donde introducimos el *detuning* $\Delta = \omega_q - \omega_r$. La forma de la Ec. (1.6) es sugestiva de un *qubit* de frecuencia Δ y *gap* $g\sqrt{n}$. Diagonalizando esta matriz de 2×2 , se obtiene el espectro de energía

$$E_{n,\pm} = \omega_r \left(n - \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}, \quad (1.7)$$

mientras que los autoestados son los *dressed states*

$$\begin{aligned} |\overline{n}, g\rangle &= \cos \theta_n |n, g\rangle - \sin \theta_n |n-1, e\rangle \\ |\overline{n-1}, e\rangle &= \sin \theta_n |n, g\rangle + \cos \theta_n |n-1, e\rangle, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde $2\theta_n = \arctan\left(\frac{2g\sqrt{n}}{\Delta}\right)$. Para $N_{\text{TOT}} = 0$, el bloque se compone sólo de $|0, g\rangle$ y tiene energía $E_0 = -\frac{\omega_q}{2}$.

En la Fig. 1.2 graficamos el espectro del hamiltoniano de Jaynes-Cummings y el hamiltoniano de Rabi para $g = 0,05 \omega_r$ para distintas frecuencias del *qubit*. Vemos que para $\Delta \gg \omega_r$ el efecto del término de interacción es despreciable y los estados

“vestidos” son muy similares a los estados no interactuantes, cómo se puede verificar explícitamente en la Ec. (1.8). Al acercarnos a la condición de resonancia $\omega_q \approx \omega_r$ vemos que los espectros de Jaynes-Cummings y Rabi difieren significativamente del espectro no interactuante ya que se abren *gaps*. Estos *gaps* son no equiespaciados y dependen del número de fotones, tal cómo predice la Ec. (1.7). El acuerdo entre los espectros de Jaynes-Cummings y Rabi es muy bueno cerca de la resonancia $\Delta = 0$, donde es válida la RWA, pero para $\omega_q < 0$ difieren significativamente ya que los roles de rotante y contrarrotante se invierten.

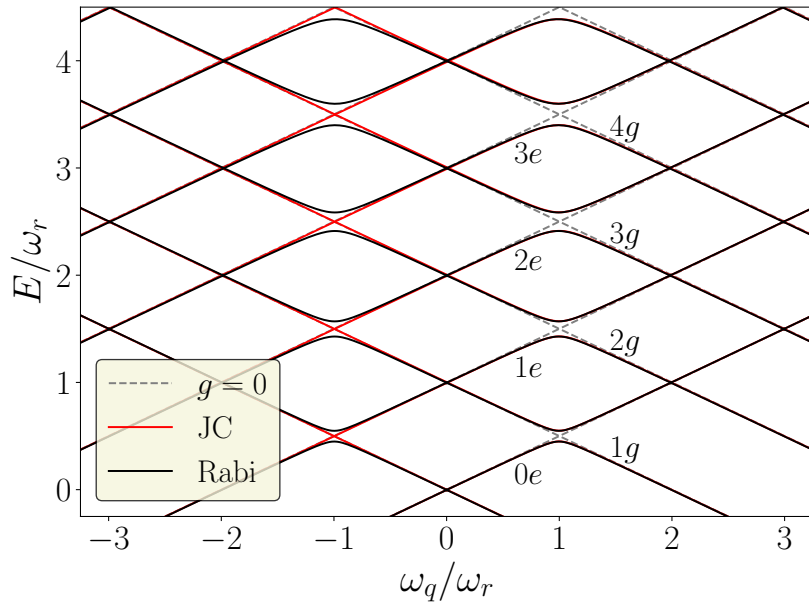


Figura 1.2: Espectro de energías en función de la frecuencia del *qubit* para el hamiltoniano no interactuante (línea de rayas gris), el hamiltoniano de Jaynes-Cummings (línea continua roja) y el hamiltoniano de Rabi (línea continua negra) con $g = 0,05 \omega_r$.

El punto de máximo entrelazamiento entre el resonador y el *qubit* ocurre en la condición de resonancia $\Delta = 0$. En este punto, ambos pierden sus identidades individuales, dando lugar a los estados vestidos par e impar

$$\begin{aligned} |n, g\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|n, g\rangle - |n-1, e\rangle) \\ |n-1, e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|n, g\rangle + |n-1, e\rangle). \end{aligned} \quad (1.9)$$

En la Fig. 1.3 podemos seguir la evolución temporal del estado $|0, e\rangle$ a través de la población del estado excitado $P_e = \langle \psi(t) | \sigma_+ \sigma_- | \psi(t) \rangle$ para $\Delta = 0$. Cuando $g = 0,05 \omega_r$, el modelo de Jaynes-Cummings describe adecuadamente la dinámica y se observan oscilaciones coherentes entre los estados $|0, e\rangle$ y $|1, g\rangle$. De hecho, empleando los *dressed states* de la Ec. (1.8) se puede ver que el estado evoluciona

$$|\psi(t)\rangle = \cos(gt) |0, e\rangle - i \sin(gt) |1, g\rangle. \quad (1.10)$$

Por consiguiente, la probabilidad de estar en el estado excitado oscila entre 0 y 1 con periodo π/g . Estas oscilaciones coherentes se denominan oscilaciones de Rabi y pueden emplearse para excitar y desexcitar el *qubit* eligiendo el tiempo de duración de la evolución coherente.

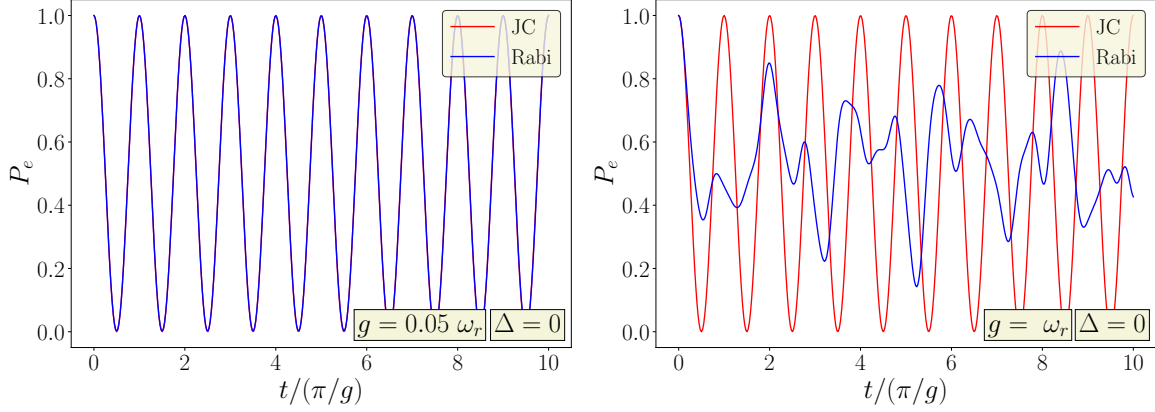


Figura 1.3: Población del estado excitado del *qubit* para el estado inicial $|0, e\rangle$ para los hamiltonianos de Jaynes-Cummings y Rabi con $\Delta = \omega_q - \omega_r = 0$ para $g = 0,05 \omega_r$ (izquierda) y $g = \omega_r$ (derecha).

Por otro lado, cuando $g = \omega_r$, vemos que la RWA no es válida y los términos contrarrotantes juegan un papel relevante aún para $\Delta = 0$. Si bien este régimen de acoplamiento ultra fuerte ($g/\omega_r > 0,1$) puede ser accedido experimentalmente [7], los valores de g que consideraremos en esta tesis son del orden de $0,01 \omega_r$. Sin embargo, existe un escenario en el cuál la RWA puede romperse aún para $\Delta \approx 0$ y $g/\omega_r \approx 0,01$ y es que, como $g(a + a^\dagger) \propto 2g\sqrt{\bar{n}}$, trabajar con un gran número medio de fotones ($\bar{n} > 100$) se corresponde a un acoplamiento efectivo grande. En estos casos, el hamiltoniano de Jaynes-Cummings no es una buena aproximación y se debe considerar esquemas de aproximación alternativos tales como la *Generalized Rotating Wave Approximation* (GRWA) [19] o la *Counter Hybridized Rotating Wave Approximation* (CHRW) [20, 21].

1.3. Efecto Purcell

Hasta este punto, hemos abordado la dinámica unitaria entre un sistema de dos niveles y un modo bosónico del campo electromagnético, sin considerar efectos disipativos o influencias del entorno. Pero, en un modelado realista, es esencial contemplar aspectos como la pérdida de fotones del resonador, la excitación y desexcitación espontánea del *qubit* y los fenómenos de decoherencia [5, 22, 23]. Estos elementos se incorporan naturalmente en el formalismo de sistemas abiertos, tal como describiremos en el capítulo 2 y aplicaremos en los capítulos 3 y 4.

A pesar de esto, podemos anticipar un aspecto crucial. Si consideramos una cavidad con un gran número medio de fotones $\bar{n} \gg 1$ y un *rate* de pérdida de fotones κ grande

comparado con las otras tasas, esperamos que la forma de disipación predominante sea a través del resonador. Debido a que los estados ahora están entrelazados según la Ec. (1.8), la pérdida de un fotón implica la pérdida de una excitación y, con cierta probabilidad, una desexcitación efectiva del *qubit*. Este fenómeno se conoce como el efecto Purcell [5, 14, 24, 25].

En el régimen dispersivo $\Delta \gg g$ del hamiltoniano de Jaynes-Cummings, la tasa relajación del *qubit* puede entenderse como que la fracción del estado “vestido” que está en la forma de fotón tiene probabilidad de decaer por unidad de tiempo κ , es decir [5, 25]

$$\Gamma_q = \kappa \frac{g^2}{\Delta^2}. \quad (1.11)$$

Reiteramos que el tratamiento adecuado de esta dinámica no unitaria se da en el marco de sistemas abiertos y ecuaciones maestras.

1.4. Sistema en estudio

En las últimas décadas, los avances experimentales en circuitos superconductores acoplados a resonadores han permitido alcanzar regímenes de forzamiento sin precedentes, generando cavidades con un gran número de fotones. Este progreso ha llevado a interacciones entre cavidades y *qubits* tan intensas que las aproximaciones seculares y de onda rotante, como es el caso de la RWA, resultan inviables. Un trabajo reciente [8] demostró esta problemática al medir un qubit acoplado a una cavidad forzada, alcanzando un régimen con hasta 300 fotones en promedio. Aunque los autores lograron explicar aspectos cualitativos, se enfrentaron a limitaciones teóricas en el modelado del problema.

Un fenómeno intrigante observado en este tipo de experimentos es la inversión de poblaciones donde, en el estado estacionario, la población del estado excitado del *qubit* supera a la de su estado fundamental. Este fenómeno ha sido previamente observado y explicado en sistemas con forzamiento en el *qubit* [26, 27]. No obstante, en el caso donde el forzamiento es fuerte y resonante con la cavidad, existe un desafío adicional asociado a la gran cantidad de fotones requeridos para describir el problema y la subsecuente demanda de recursos computacionales asociada.

En esta tesis, abordamos estos desafíos explorando alternativas analíticas y numéricas para estudiar sistemas cuánticos con disipación en regímenes de forzamiento fuerte. Nos vamos a enfocar en el hamiltoniano

$$H_{dr} = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + g(a + a^\dagger) \sigma_x + \omega_r a^\dagger a + A_r \cos(\omega_d t)(a + a^\dagger), \quad (1.12)$$

y vamos a considerar una dinámica abierta al acoplar la cavidad a un reservorio. Par-

ticularmente interesante será la configuración en la que el forzamiento resuena con la cavidad $\omega_r = \omega_d$, que fue donde se midió la inversión en [8].

El esquema de la tesis es el siguiente: en el capítulo 2 presentamos las herramientas necesarias para abordar la dinámica de sistemas forzados y abiertos, desde el formalismo de Floquet hasta la ecuación maestra de Born-Markov. Posteriormente, en el capítulo 3 proponemos un esquema de aproximación de campo medio para tratar analíticamente problemas forzados con disipación, aplicándolo al sistema descrito por el Hamiltoniano de la Ec. (1.12). Por último, en el capítulo 4 demostraremos que, mediante una transformación adecuada, el problema con forzamiento en la cavidad puede mapearse a un problema con el forzamiento en el *qubit* en σ_x

$$H_{dq} = \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + A_q \cos(\omega_d t)\sigma_x + g(a + a^\dagger)\sigma_x + \omega_r a^\dagger a. \quad (1.13)$$

Entre los beneficios de realizar esta transformación, veremos una reducción en el número medio de fotones que nos facilitará la resolución numérica y nos permitirá explorar el origen de la inversión de poblaciones.

Capítulo 2

Formalismo de Floquet-Born-Markov

Una amplia variedad de problemas que se surgen en *circuit QED*, incluyendo los detallados en la Sec. 1.4, involucran sistemas forzados abiertos. La descripción adecuada de estos problemas requiere introducir ciertas técnicas y conceptos que serán el enfoque de este capítulo. Comenzaremos introduciendo el formalismo de Floquet, que proporciona un marco para describir la dinámica de problemas que dependen periódicamente del tiempo. Posteriormente, discutiremos cómo modelar el acoplamiento de un sistema cuántico a un baño térmico y, por último, estableceremos las ecuaciones que determinan la dinámica no unitaria de un sistema abierto forzado periódicamente.

2.1. Formalismo de Floquet

En problemas independientes del tiempo, la base más conveniente para estudiar la evolución temporal es la de autoestados del hamiltoniano, dado que el operador de evolución es diagonal allí. Esta simplicidad se puede asociar a la simetría de traslación temporal y su cantidad conservada asociada, la energía. Por ello, para hamiltonianos que dependen explícitamente del tiempo, la ausencia de esta simetría complejiza el problema.

La cuestión es qué sucede cuando la dependencia temporal no es arbitraria, sino que el problema es periódico, por lo que presenta una simetría de traslación temporal pero discreta. Una situación totalmente análoga se presenta en la teoría de sólidos con la invariancia traslacional y la conservación del momento. En este caso, el potencial es periódico en el espacio, y el teorema de Bloch nos asegura que las soluciones pueden escribirse como el producto de una onda plana por una función que respete la simetría de la red [28]. La versión de este teorema para hamiltonianos periódicos en el tiempo se conoce como teorema de Floquet [29] y simplifica notablemente el problema original,

como veremos a continuación.

Formalmente, el teorema de Floquet afirma que la ecuación de Schrödinger para un hamiltoniano $H(t)$ con período τ admite una base completa de soluciones de la forma

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha t/\hbar} |u_\alpha(t)\rangle, \quad (2.1)$$

donde ϵ_α son cantidades reales denominadas cuasienergías y $|u_\alpha(t)\rangle$ son estados τ -periódicos denominados estados de Floquet. Introduciendo la Ec. (2.1) en la ecuación de Schrödinger, se obtiene un problema de autovalores para las cuasienergías y estados de Floquet

$$\left[H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] |u_\alpha(t)\rangle = \epsilon_\alpha |u_\alpha(t)\rangle. \quad (2.2)$$

Es importante hacer un par de observaciones. En primer lugar, notemos que las cuasienergías en la Ec. (2.1) están definidas a menos de un múltiplo entero de $\hbar\omega$, donde $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. Esto es análogo a la redundancia que se presenta en una red de Bravais, donde el cuasi-momento está definido salvo por un vector en la red recíproca [28]. En nuestro caso, podemos eliminar esta redundancia eligiendo las cuasienergías en la “primera zona de Brillouin”: $\epsilon_\alpha \in [-\hbar\omega/2, \hbar\omega/2)$.

En segundo lugar, dado que tanto $H(t)$ como el modo $|u_\alpha(t)\rangle$ son periódicos en el tiempo, podemos escribir

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{H}(q) e^{iq\omega t} \\ |u_\alpha(t)\rangle &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\tilde{u}_\alpha(q)\rangle e^{iq\omega t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

e introduciendo estas expansiones en la Ec. (2.2) obtenemos

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[\left(\tilde{H}(q-p) + \delta_{q,p} \omega q \right) |\tilde{u}_\alpha(p)\rangle \right] = \epsilon_\alpha |\tilde{u}_\alpha(q)\rangle. \quad (2.4)$$

Por lo tanto, el teorema de Floquet nos dice que un problema dependiente del tiempo puede resolverse exactamente diagonalizando un problema independiente del tiempo pero de dimensión infinita. En la práctica, podemos resolver numéricamente el problema de autovalores de la Ec. (2.4) truncando la matriz o empleando esquemas de aproximación [30, 31].

2.2. Ecuación de Born-Markov

Todo sistema cuántico con el que podamos interactuar, ya sea realizando operaciones, midiendo o controlando, estará inevitablemente influenciado por su entorno. La descripción de cómo estos grados de libertad externos modifican la dinámica unitaria

del sistema recae en la teoría de sistemas abiertos. En esta sección, presentamos las herramientas básicas de esta teoría, imprescindibles para el modelado de los problemas descritos en la Sec. 1.4.

Comencemos considerando un sistema de interés descrito por un hamiltoniano $H_S(t)$, acoplado a un reservorio descrito por H_R . El hamiltoniano total es

$$H_T(t) = H_s(t) + V + H_R, \quad (2.5)$$

donde V es el operador que acopla el sistema y el reservorio. El sistema total (baño + reservorio) se encuentra descrito por la matriz densidad total ρ_T que satisface la ecuación de von Neumann

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_T = -\frac{i}{\hbar} [H_T(t), \rho_T] \quad (2.6)$$

Sabemos que el entorno influirá en la dinámica del sistema, pero no nos interesa su evolución. Por tanto, buscamos una ecuación maestra que describa los grados de libertad del sistema exclusivamente, sin considerar los grados de libertad del entorno. En otras palabras, buscamos una ecuación maestra para

$$\rho(t) = \text{Tr}_R(\rho_T(t)), \quad (2.7)$$

donde la traza se toma sobre los grados de libertad del reservorio.

Para que la ecuación maestra resultante sea lineal y local en el tiempo, tendremos que realizar una serie de consideraciones y aproximaciones. Para ello, es conveniente introducir la representación de interacción donde definimos

$$\begin{aligned} \tilde{O}(t) &= U^\dagger(t) O U(t) \\ U(t) &= \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_s(t') + H_R dt'\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde \mathcal{T} es el operador de ordenamiento temporal que considera que el integrando puede no conmutar consigo mismo para distintos tiempos [32].

La ecuación maestra deseada se denomina ecuación de Born-Markov y una derivación detallada puede encontrarse en [32, 33]. Aquí nos limitamos a mencionar las aproximaciones empleadas:

1. El estado inicial es no correlacionado: $\rho_T(0) = \rho(0) \otimes \rho_R(0)$.
2. Aproximación de Born:¹ Como para $t > 0$ la interacción V produce correlaciones de orden V , podemos suponer que esta interacción es débil y desprestigiar las correlaciones. En adición, suponemos que la matriz densidad del reservorio es

¹Este nombre proviene de la teoría de colisiones, donde se realiza una aproximación análoga en la ecuación de integral de Lippmann-Schwinger dando lugar a la serie de Born [34].

independiente del tiempo y tiene la forma de un baño térmico: $\tilde{\rho}_R = \frac{1}{Z_R} e^{-\beta H_R}$ donde $1/\beta = k_B T$ y $Z_R = \text{Tr}(e^{-\beta H_R})$.

3. La interacción con el baño es de la forma $V = A \otimes X$, donde A y X son operadores hermíticos que actúan sobre los grados de libertad del sistema y del baño, respectivamente.
4. Aproximación markoviana: Si bien la aproximación de Born permite obtener una ecuación lineal, la dinámica resultante es no local en el tiempo. Para evitar esto supondremos que la función de correlación del baño decae rápidamente en una escala de tiempo de correlación τ_c y que esta es la menor de todas las escalas temporales del problema. Como consecuencia de esta aproximación, los cambios que se produzcan en escalas menores a τ_c no pueden ser resueltos.

El resultado de estas aproximaciones y consideraciones, es la ecuación maestra de Born-Markov

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_s(t), \rho(t)] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' G(t') \left(A(t) \tilde{A}(t-t') \rho(t) - \tilde{A}(t-t') \rho(t) A(t) \right) \\ & + G^*(t') \left(\rho(t) \tilde{A}(t-t') A(t) - A(t) \rho(t) \tilde{A}(t-t') \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde se definió la función de autocorrelación del baño

$$G(t-t') = G(t, t') = \text{Tr}_R \left(\tilde{X}(t) \tilde{X}(t') \rho_R \right). \quad (2.10)$$

La ecuación de Born-Markov tiene numerosas ventajas. Además de que es lineal y local en el tiempo, tiene la propiedad de que conserva la traza de ρ y su hermiticidad. Además, la interacción con el baño se reduce a definir una temperatura T , computar la función de autocorrelación del baño $G(t)$ y acoplarlo mediante A al sistema.

2.2.1. Forma de Lindblad

Una de las desventajas de la ecuación de Born-Markov, es que no admite una forma de Lindblad [33, 35]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_s, \rho] + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \left(L_{\alpha} \rho L_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\alpha} L_{\alpha}^{\dagger} \rho - \frac{1}{2} \rho L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha} \right). \quad (2.11)$$

donde L_{α} son operadores de “salto” (*jump operators*) y los Γ_{α} escalares.

Este tipo de ecuación maestra es particularmente interesante por diversos motivos. En primer lugar, la forma de Lindblad asegura la positividad de la matriz densidad

[35]. Esto no ocurre para la ecuación de Born-Markov para todos los estados iniciales y puede ser violada para condiciones iniciales singulares [36].

Un segundo punto importante es que, para problemas independientes del tiempo, en la base de autoestados del hamiltoniano y tras realizar una aproximación secular, la ecuación de Lindblad se reduce a una ecuación de *rates* para las poblaciones de los distintos autoestados [35]. Para problemas periódicos en el tiempo, bajo ciertas hipótesis más fuertes también podemos recuperar una ecuación de *rates*. Esto lo exploraremos en la Sec. 2.3.1.

Por último y quizás más importante, la forma de Lindblad tiene una interesante interpretación. Mientras que el primer término del lado derecho de la Ec. (2.11) da la dinámica unitaria, el segundo término describe *quantum jumps* producidos por la acción de L_α con probabilidad por unidad de tiempo Γ_α . Veamos esto con un ejemplo.

Consideremos un sistema de dos niveles forzado cuyo hamiltoniano es $H(t) = \frac{\omega_q}{2}\sigma_z$ y vamos a considerar tres tipos de “saltos”:

1. $L = \sigma_-$: Este tipo de transiciones se corresponde a una desexcitación del *qubit*. Su tasa asociada Γ_\downarrow es un *rate* de relajación.
2. $L = \sigma_+$: Este tipo de salto es el opuesto al anterior y se corresponde con una excitación del *qubit*. Su tasa asociada Γ_\uparrow es un *rate* de excitación.
3. $L = \sigma_z$: A diferencia de los saltos anteriores que producían transiciones entre distintos niveles, fluctuaciones en σ_z pueden pensarse como fluctuaciones en la energía del *qubit* y por ende, fluctuaciones de su fase. Es decir, un baño acoplado a través de σ_z produce pérdida de coherencia con una tasa Γ_ϕ .

Podemos resolver numéricamente la Ec. (2.11) empleando la librería *Qutip* [37] para distintos *rates*. Para visualizar los distintos tipos de efectos que puede tener un baño, en la Fig. 2.1 graficamos la evolución de $\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \vec{\sigma})$ en la esfera de Bloch para la condición inicial $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$, que se corresponde con $\vec{\sigma} = \hat{x}$.

Para $\Gamma_\downarrow = \Gamma_\phi = 0$, tenemos dinámica unitaria y el sistema sólo cambia la fase compleja entre $|e\rangle$ y $|g\rangle$, realizando una precesión alrededor del eje z. Al prender $\Gamma_\phi \neq 0$, la decoherencia produce que se pierda gradualmente la fase compleja relativa entre $|e\rangle$ y $|g\rangle$, lo cuál gráficamente se traduce en que $\langle \vec{\sigma} \rangle$ “cae” al origen. Notar que en este caso las poblaciones del $|e\rangle$ y $|g\rangle$ se mantienen en 1/2. Por último, si $\Gamma_\phi = 0$ y $\Gamma_\downarrow \neq 0$ vemos que el sistema relaja al estado fundamental $|g\rangle$.

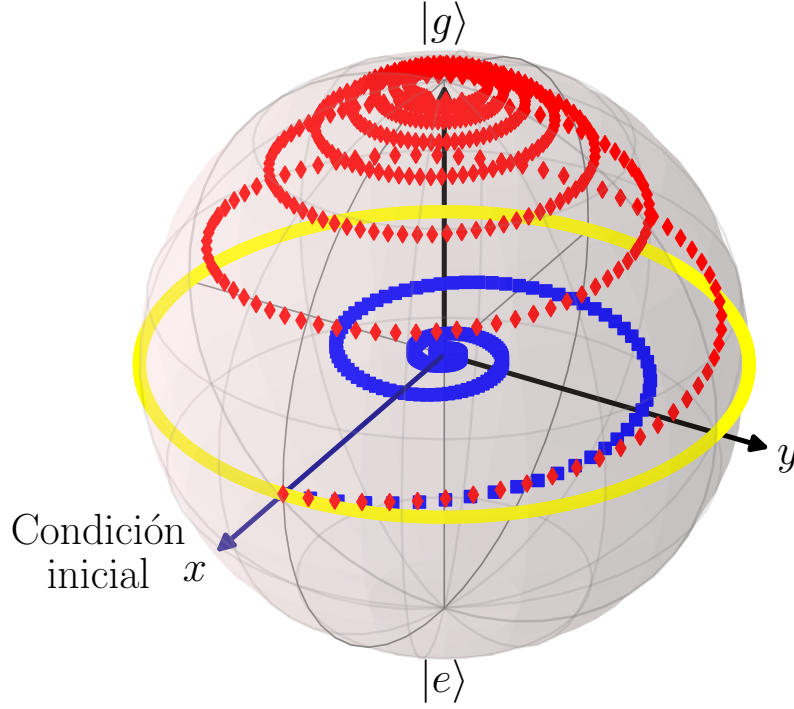


Figura 2.1: Evolución de $\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \vec{\sigma})$ en la esfera de Bloch para $\Gamma_{\downarrow} = \Gamma_{\phi} = 0$ (círculos amarillos), $\Gamma_{\phi} \neq 0$ (cuadrados azules) y $\Gamma_{\downarrow} \neq 0$ (diamantes rojos). La condición inicial es $\vec{\sigma} = \hat{x}$.

2.2.2. Modelo de Caldeira-Legget

Ya sea que trabajemos con la forma de Lindblad o con la ecuación de Born-Markov, las propiedades del baño térmico al cual se acopla el sistema se manifiestan en la dinámica a través de un operador del sistema y los *rates* Γ o la función de autocorrelación G . Como no nos interesa y, de hecho estamos despreciando, la dinámica del baño, buscamos caracterizarlo con algún modelo que involucre la menor cantidad de parámetros posibles. Uno de los modelos disipativos más empleados se conoce como modelo de Caldeira-Legget [32, 38] y considera que el reservorio se compone de un conjunto de osciladores armónicos independientes. En el contexto de *circuit QED*, este baño de modos bosónicos puede corresponderse a los diversos modos del campo electromagnético no resonante no considerados.

Según este modelo el hamiltoniano del reservorio es

$$H_R = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{m_n \omega_n^2}{2} x_n^2 \right) = \sum_n \hbar \omega_n \left(b_n^\dagger b_n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.12)$$

donde m_n y ω_n son la masa y frecuencia del n -ésimo oscilador armónico. En cuanto al

acoplamiento $V = A \otimes X$, tenemos

$$X = \sum_n c_n \sqrt{\frac{\hbar}{m_n \omega_n}} \frac{b_n + b_n^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

donde c_n describe la intensidad del acoplamiento con el n -ésimo modo.

A partir de estas definiciones, podemos evaluar la función de autocorrelación $G(t)$. Pasando a la representación de interacción $\tilde{b}_n = b_n e^{-i\omega_n t}$, usando que $\langle b_n \rangle_T = \langle b_n^\dagger \rangle_T = 0$ y que la ocupación media térmica de un oscilador armónico está dado por la distribución de Bose-Einstein

$$\langle b_n^\dagger b_n \rangle_T = n_\beta(\hbar\omega_n) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_n} - 1}, \quad (2.14)$$

donde $\beta^{-1} = k_B T$, se obtiene

$$G(t) = \sum_n \frac{\hbar c_n^2}{2m_n \omega_n} [e^{i\omega t} n_\beta(\hbar\omega) + e^{-i\omega t} (n_\beta(\hbar\omega) + 1)] \quad (2.15)$$

En este punto, es conveniente definir la densidad espectral del baño como $J(\omega) = \sum_n \frac{c_n^2}{2m_n \omega_n} \delta(\omega - \omega_n)$ y reescribir

$$G(t) = \hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) [e^{i\omega t} n_\beta(\hbar\omega) + e^{-i\omega t} (n_\beta(\hbar\omega) + 1)] \quad (2.16)$$

Mientras que la función de autocorrelación del baño G describe cómo es la respuesta temporal del baño frente a una interacción, su densidad espectral denota como los diferentes modos se acoplan a una interacción. No obstante, ambas funciones contienen la misma información y basta con especificar una para determinar la otra, según la Ec. (2.16). Para obtener una dinámica irreversible se introduce una densidad espectral óhmica [32]

$$J(\omega) = \eta \omega e^{-\omega/\omega_c}, \quad (2.17)$$

donde η es un parámetro adimensional que caracteriza el baño y ω_c es una frecuencia de corte. Así, empleando las Ecs. (2.16) y (2.17), se puede determinar $G(t)$, con lo que el problema de la Ec. (2.9) está bien planteado y puede, en principio, resolverse.

2.3. Ecuación de Floquet-Born-Markov

En las secciones anteriores establecimos cuál es la ecuación maestra que queremos resolver y ahora comenzaremos a pensar en cómo hacerlo. Desde un punto de vista numérico, el primer paso es especificar una base y, dado que los problemas que nos interesan son periódicos en el tiempo, vamos a emplear la base de estados de Floquet $\{|u_\alpha\rangle\}_\alpha$. Por tanto, queremos una ecuación para los elementos de la matriz densidad

en la base de estados de Floquet, es decir, buscamos una ecuación para

$$\rho_{\alpha\beta}(t) = \langle u_\alpha(t) | \rho(t) | u_\beta(t) \rangle. \quad (2.18)$$

Suponiendo A es τ -periódico, podemos desarrollar sus elementos de matriz en los estados de Floquet en armónicos

$$\langle u_\alpha(t) | A(t) | u_\beta(t) \rangle = \sum_q A_{\alpha\beta}^{(q)} e^{iq\omega t} \quad (2.19)$$

Introduciendo estas definiciones en la ecuación de Born-Markov, se obtiene [32]

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \frac{i}{\hbar}(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) \right) \rho_{\alpha\beta}(t) = & -\frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \left(R_{\alpha\mu,\nu\mu}(t) \rho_{\nu\beta}(t) + R_{\beta\mu,\nu\mu}^*(t) \rho_{\alpha\nu}(t) \right. \\ & \left. - R_{\nu\beta,\mu\alpha}(t) \rho_{\mu\nu}(t) - R_{\mu\alpha,\nu\beta}^*(t) \rho_{\mu\nu}(t) \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\mu\nu}(t) &= \sum_q R_{\alpha\beta,\mu\nu}^{(q)} e^{iq\omega t} \\ R_{\alpha\beta,\mu\nu}^{(q)} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_p A_{\alpha\beta}^{(q+p)} A_{\mu\nu}^{(p)*} g(\epsilon_\mu - \epsilon_\nu - p\hbar\omega) \\ g(\epsilon) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt G(t) e^{-i\epsilon t/\hbar} \end{aligned} \quad (2.21)$$

De esta forma la Ec. (2.20) es un problema matricial que permite, conociendo cómo se acopla el baño y su función de autocorrelación $G(t)$, determinar cómo evoluciona la matriz densidad en la base de estados de Floquet.

Con el objetivo de recuperar una forma de Lindblad, puede hacerse una aproximación adicional. Si los efectos de relajación sólo se producen en escalas temporales superiores a un período τ , podemos aproximar $R_{\alpha\beta,\mu\nu}(t)$ por su promedio en un período $\bar{R}_{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau R_{\alpha\beta,\mu\nu}(t) dt$. Esta aproximación se conoce como aproximación secular y da como resultado [32, 33]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\alpha\beta} &= \sum_{\mu,\nu} \Gamma_{\alpha\beta,\mu\nu} \rho_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\alpha\beta,\mu\nu} &= -\frac{i}{\hbar}(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) \delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu} - \frac{1}{2} \left(\sum_\lambda (\bar{R}_{\alpha\lambda,\mu\lambda} \delta_{\beta\nu} + \bar{R}_{\beta\lambda,\nu\lambda}^* \delta_{\alpha\mu}) - \bar{R}_{\nu\beta,\mu\alpha} - \bar{R}_{\mu\alpha,\nu\beta}^* \right) \\ \bar{R}_{\alpha\beta,\mu\nu} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_p A_{\alpha\beta}^{(p)} A_{\mu\nu}^{(p)*} g(\epsilon_\nu - \epsilon_\mu - p\hbar\omega) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Desde un punto de vista operacional, se determinan los estados de Floquet, se

evalúan los elementos de matriz $A_{\alpha\beta}^{(q)}$ y se calcula la evolución de $\rho_{\alpha\beta}(t)$. En nuestro caso, sólo nos interesa el estado estacionario, por lo que basta con resolver el problema algebraico

$$\sum_{\mu,\nu} \Gamma_{\alpha\beta,\mu\nu} \rho_{\mu\nu} = 0. \quad (2.23)$$

2.3.1. Dinámica de Poblaciones

La Ec. (2.22) es un éxito desde el punto de vista numérico y, bajo ciertas consideraciones, es la que emplearemos para atacar los problemas descritos en la Sec. 1.4. Bajo ciertas condiciones, sabemos que para tiempos asintóticos la matriz densidad se vuelve diagonal en la base de Floquet y que, salvo cerca de una resonancia, los *rates* que contribuyen a la dinámica son los que tienen la forma $\Gamma_{\alpha\alpha,\beta\beta}$ [39, 40]. Por estos motivos, lejos de las resonancias podemos centrarnos sólo en las poblaciones $P_\alpha = \rho_{\alpha\alpha}$ y al desprestigiar los elementos no diagonales obtenemos la ecuación

$$\dot{P}_\alpha = \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha\beta} P_\beta - \sum_{\beta} \Gamma_{\beta\alpha} P_\alpha, \quad (2.24)$$

donde definimos $\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\alpha,\beta\beta}$ cuando $\alpha \neq \beta$. La Ec. (2.24) es una ecuación de balance de poblaciones con probabilidades de transición $\beta \rightarrow \alpha$ por unidad de tiempo $\Gamma_{\alpha\beta}$. El primer término indica que la población que aumenta en α se debe a todos los decaimientos desde otros niveles β y el segundo término representa el decrecimiento de la población α debido a todos los decaimientos que ocurren desde α .

Además de su sencilla interpretación, la forma de la Ec. (2.24) tiene dos ventajas prácticas. En primer lugar, conserva la suma de poblaciones totales $\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} P_{\alpha} = 0$. En segundo lugar, dado que todos los rates son positivos, todas las poblaciones se mantienen positivas ya que si $P_{\alpha} = 0$, entonces en $\dot{P}_{\alpha} > 0$.

Las aproximaciones mencionadas permiten reducir el problema hacia una forma intuitiva y simplificada y representan una significativa reducción del costo computacional. No obstante sólo pueden emplearse lejos de las resonancias, por lo que no serán válidas en el caso $\omega_r = \omega_d$, de central interés para esta tesis [39, 40].

2.3.2. Observables en el estado estacionario

Una vez que obtenemos la matriz densidad en el estado estacionario empleando el formalismo de Floquet-Born-Markov, existen numerosos observables de interés. Para el caso de un *qubit* acoplado a un resonador, es relevante la población del estado excitado del *qubit* (P_e), independientemente del estado de la cavidad. En esta sección describiremos cómo obtener esta cantidad y otros observables a partir de los resultados numéricos promediando sobre los grados de libertad adecuados.

Numéricamente, disponemos de $\rho_{\alpha,\beta}^{\text{SS}}$ y los estados de Floquet $|u_\alpha(t)\rangle$ durante un período τ . Por ende, la probabilidad de estar en el estado $|\sigma n\rangle$, siendo $\sigma = e, g$, puede definirse como el siguiente promedio

$$P_{\sigma n} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \langle \sigma n | \rho^{\text{SS}}(t) | \sigma n \rangle dt \quad (2.25)$$

En particular, $\rho^{\text{SS}}(t) = \sum_{\alpha,\beta} \rho_{\alpha,\beta}^{\text{SS}} |u_\alpha(t)\rangle \langle u_\beta(t)|$. Para hacer el promedio temporal es conveniente expandir el estado de Floquet en sus correspondientes modos

$$|u_\beta(t)\rangle = \sum_q e^{iq\omega t} |\tilde{u}_\beta(q)\rangle. \quad (2.26)$$

Introduciendo estas dos consideraciones en la Ec. (2.25), obtenemos que

$$P_{\sigma n} = \sum_{\alpha,\beta,q} \langle \sigma n | \tilde{u}_\alpha(q) \rangle \rho_{\alpha,\beta}^{\text{SS}} \langle \tilde{u}_\beta(q) | \sigma n \rangle \quad (2.27)$$

A partir de $P_{\sigma n}$, determinar valores medios es sencillo. Por ejemplo, la población del estado excitado es

$$P_e = \sum_n P_{en}. \quad (2.28)$$

Mientras que el número medio de fotones de la cavidad es

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n (P_{en} + P_{gn}) \quad (2.29)$$

Si podemos suponer que la matriz densidad es diagonal en la base de Floquet, tal como se describió en la Sec. 2.3.1, la Ec. (2.27) adquiere una forma muy intuitiva

$$P_{\sigma n} = \sum_\alpha P(\sigma n | \alpha) \rho_{\alpha,\alpha}^{\text{SS}} \quad (2.30)$$

donde definimos $P(\sigma n | \alpha) = \sum_q |\langle \sigma n | \tilde{u}_\alpha(q) \rangle|^2$. La Ec. (2.30) puede interpretarse como que la ocupación del estado $|\sigma n\rangle$ es la suma de las probabilidades de estar en el estado $|\sigma n\rangle$ condicionado a que el estado es α por la probabilidad de estar en el estado α .

2.3.3. Procedimiento numérico

Por último, describimos cómo vamos a realizar la integración numérica para determinar la matriz densidad en el estado estacionario empleando la ecuación maestra de Floquet-Born-Markov. Los códigos empleados fueron adaptados de los utilizados en una tesis anterior [41].

Los pasos son los siguientes:

1. Evaluar las cuasienergías y estados de Floquet durante un período. Para ello, se empleó el método de Trotter-Suzuki de segundo orden [42, 43].
2. Evaluar los elementos de matriz de la Ec. (2.22).
3. Resolver el problema algebraico: $\sum_{\mu,\nu} \Gamma_{\alpha\beta,\mu\nu} \rho_{\mu\nu} = 0$. Esto se hizo diagonalizando la matriz $\Gamma_{\alpha\beta,\mu\nu}$ y eligiendo el autoestado con autovalor de menor módulo.
4. Calcular los observables de interés, como se describió en la Sec. 2.3.2.

Capítulo 3

Campo Medio en Sistemas Forzados

Para un sistema abierto independiente del tiempo, sabemos que en el estado de equilibrio la matriz densidad adopta una forma diagonal en la base de autoestados del hamiltoniano. En este estado, los pesos están dados por la distribución de Boltzmann $p_n = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{\sum_k e^{-E_k/k_B T}}$, lo que permite la determinación de valores medios en el estado de equilibrio sin la necesidad de resolver la dinámica durante el transitorio. Sin embargo, muchos problemas de interés en *circuit QED* son dependientes del tiempo, por lo que no disponemos de esta información y precisamos resolver la ecuación maestra asociada para poder determinar valores medios en el estado estacionario.

No obstante, para sistemas periódicos en el tiempo y bajo ciertas condiciones [32, 39, 44], la matriz densidad adquiere una forma diagonal en la base de estados de Floquet en el estado estacionario. Por consiguiente, podemos pensar en hacer estadística para estados asintóticos sin necesidad de resolver la ecuación maestra. En este contexto, en este capítulo proponemos un esquema para realizar aproximaciones de campo medio para estados estacionarios en sistemas periódicos en el tiempo.

Es sabido que este tipo de aproximación no controlada funciona excepcionalmente bien para algunos sistemas, como en el caso de la superconductividad, pero no resulta efectiva para otros, como en el caso de los magnones. Por lo tanto, nuestro propósito no es ofrecer una descripción precisa de fenómenos como la inversión de poblaciones, sino más bien establecer un marco que permita un modelado simple y analítico para ganar intuición. En este enfoque conceptual, nos centraremos en los problemas presentados en la Sec. 1.4 dentro de la RWA para el caso de temperatura nula $T = 0$.

3.1. Planteo

Vamos a comenzar considerando el hamiltoniano de un *qubit* acoplado a una cavidad forzada ($\hbar = 1$)

$$H = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g(a^\dagger + a) \sigma_x + A_r(a + a^\dagger) \cos(\omega_d t). \quad (3.1)$$

En cuanto a la disipación, la modelamos de manera simplificada empleando una forma de Lindblad con operador de salto a y un *rate* de pérdida de fotones κ , independiente del forzamiento. Los efectos de temperatura pueden incorporarse agregando operadores de un salto que exciten el resonador a^\dagger y renormalizando los *rates* empleando la distribución de Bose-Einstein [35]. Por simplicidad nos limitamos a temperatura $T = 0$, por lo que, en principio, debemos resolver la siguiente ecuación a maestra

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -i[H, \rho] + \kappa \left(a \rho a^\dagger - \frac{1}{2} a a^\dagger \rho - \frac{1}{2} \rho a^\dagger a \right), \quad (3.2)$$

Realizamos el siguiente desacople de campo medio

$$(a + a^\dagger) \sigma_x \approx (a + a^\dagger) \langle \sigma_x \rangle + \langle a + a^\dagger \rangle \sigma_x - \langle a + a^\dagger \rangle \langle \sigma_x \rangle. \quad (3.3)$$

El mismo tiene una sutileza y es que, debido a la presencia del *driving* en la cavidad, esperamos que los valores medios $\langle a + a^\dagger \rangle$ y $\langle \sigma_x \rangle$ dependan del tiempo. De hecho, esperamos que en el estado estacionario sean funciones periódicas en el tiempo, de acuerdo a la teoría de Floquet. Llamemos $x(t) = \langle a + a^\dagger \rangle$ y $P_x(t) = \langle \sigma_x \rangle$.

Como resultado de la aproximación de campo medio, obtenemos dos problemas desacoplados para el *qubit* y el resonador que podemos resolver independientemente y definir su interacción al plantear las ecuaciones de autoconsistencia. Notemos que, dado que $x(t)$ y $P_x(t)$ son desconocidas, las ecuaciones de autoconsistencia son a priori, ecuaciones diferenciales. No obstante, sabemos que ambas funciones han de ser periódicas, por lo que tomamos el siguiente *ansatz*

$$\begin{aligned} g x(t) &= \beta \cos(\omega_d t + \phi) \\ A_r \cos(\omega_d t) + g P_x(t) &= G \cos(\omega_d t + \theta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Luego, obtenemos los siguientes hamiltonianos para el *qubit* y el resonador, respectivamente

$$\begin{aligned} H_q &= \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \beta \cos(\omega_d t + \phi) \sigma_x \\ H_r &= \omega_r a^\dagger a + G \cos(\omega_d t + \theta) (a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si bien todavía no resolvimos las ecuaciones de autoconsistencia, ya podemos anticipar cuál será la dinámica resultante en este esquema. A pesar de que el *qubit* no

se encuentre forzado directamente, siente un forzamiento mediado por el resonador de amplitud β . Como consecuencia, esperamos que la población del estado excitado del *qubit* en el estacionario sea no nula pero no esperamos inversión. En cuanto al resonador, vemos que continúa sintiendo un *drive* de frecuencia ω_d pero de amplitud renormalizada por la interacción con el *qubit* y desfasado respecto del forzamiento del *qubit*.

De manera análoga, si hubiéramos considerado el problema con el forzamiento en el *qubit*, esto se habría traducido en un forzamiento efectivo en el resonador. Con esto, la aproximación de campo medio sugiere que los problemas con forzamiento en la cavidad y el *qubit* están íntimamente relacionados. Esta noción será explotada en el capítulo 4 para reducir el número medio de fotones de la cavidad y permitir así la resolución numérica del problema.

3.2. Resolución en la RWA

La RWA es el caso más sencillo en el que podemos resolver los problemas desacoplados y es interesante porque permite ganar intuición sobre las cantidades relevantes. Como mencionamos, la idea de este capítulo es presentar un esquema para realizar campo medio, sin pretender explotar al máximo su potencial. A futuro puede pensarse en resolver los problemas desacoplados incorporando términos contrarrotantes [20].

3.2.1. Problema para el resonador

Para el problema con disipación del resonador, tenemos la siguiente ecuación maestra para su matriz densidad ρ_r en la RWA

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_r &= -i[H_r, \rho_r] + \kappa \left(a \rho_r a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho_r - \frac{1}{2} \rho_r a a^\dagger \right) \\ H_r(t) &= \omega_r a^\dagger a + \frac{G}{2} \left(a e^{i(\omega_d t + \theta)} + a^\dagger e^{-i(\omega_d t + \theta)} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podemos determinar el estado estacionario de este problema realizando dos transformaciones unitarias. Primero, obtenemos un problema independiente del tiempo realizando la siguiente transformación

$$U_r(t) = \exp(-i a^\dagger a (\omega_d t + \theta)). \quad (3.7)$$

Tras esta transformación, la forma de Lindblad no cambia y el nuevo hamiltoniano $H' = U_r^\dagger H U_r - i U_r^\dagger \dot{U}_r$ es independiente del tiempo

$$H' = \delta_r a^\dagger a + \frac{G}{2} (a + a^\dagger). \quad (3.8)$$

Es decir, es un oscilador armónico desplazado con frecuencia efectiva $\delta_r = \omega_r - \omega_d$. Luego, realizamos una transformación de desplazamiento sobre el oscilador armónico

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (3.9)$$

y usamos que $D(\alpha)^\dagger a D(\alpha) = a + \alpha$ para obtener el nuevo problema. En este caso, la forma de Lindblad se modifica pero, reagrupando los términos adicionales, se puede escribir una ecuación análoga a la Ec. (3.6) pero con un hamiltoniano efectivo

$$H_r^{(\text{ef})} = \delta_r a^\dagger a + \left[a^\dagger \left((\delta_r - i\frac{\kappa}{2})\alpha + \frac{G}{2} \right) + h.c. \right]. \quad (3.10)$$

Por consiguiente, eligiendo

$$\alpha = -\frac{G/2}{\delta_r - i\frac{\kappa}{2}}, \quad (3.11)$$

removemos el desplazamiento del oscilador. Como consecuencia, en este sistema de referencia se tiene el problema de un oscilador no forzado con disipación, cuyo estado estacionario es simplemente $|0\rangle$. Volviendo al sistema de referencia original, obtenemos para el estado estacionario $\rho_r(t) = |\psi_r(t)\rangle \langle \psi_r(t)|$, siendo

$$|\psi_r(t)\rangle = U_r(t) D(\alpha) |0\rangle. \quad (3.12)$$

La aproximación de campo medio predice que para tiempos asintóticos el estado del resonador se asemeja a un estado coherente, con número medio de fotones

$$\bar{n} = \langle a^\dagger a \rangle = |\alpha|^2 = \frac{(G/2)^2}{\delta_r^2 + (\kappa/2)^2} \quad (3.13)$$

En cuanto a la relación de autoconsistencia, tenemos que

$$x(t) = \langle a + a^\dagger \rangle = -\frac{G}{\Omega_r} \cos(\omega_d t + \theta - \Phi) \quad (3.14)$$

donde definimos $\Omega_r = \sqrt{\delta_r^2 + (\kappa/2)^2}$ y $\cos \Phi = \delta_r / \Omega_r$.

3.2.2. Problema para el *qubit*

En cuanto al problema del *qubit*, tenemos el siguiente hamiltoniano en la RWA

$$H_q = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \frac{\beta}{2} \left(\sigma_- e^{i(\omega_d t + \phi)} + \sigma_+ e^{-i(\omega_d t + \phi)} \right) \quad (3.15)$$

Si bien el desacople de campo medio resulta en un problema sin disipación para el *qubit*, esto resulta un inconveniente si queremos determinar el estado estacionario. Esto

lo podemos solucionar trabajando en una forma de Lindblad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_q = -i[H_q, \rho_q] + \Gamma_{\downarrow} \left(\sigma_- \rho_q \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho_q - \frac{1}{2} \rho_q \sigma_+ \sigma_- \right), \quad (3.16)$$

donde introducimos el operador de salto σ_- y su tasa de relajación Γ_{\downarrow} que haremos tender a cero una vez que hayamos determinado el estado estacionario.

Para resolver este problema, primero removemos la dependencia temporal mediante

$$U_q(t) = \exp\left(-i \frac{\sigma_z}{2} (\omega_d t + \phi)\right). \quad (3.17)$$

Esta rotación no afecta la forma de Lindblad y da como resultado

$$H'_q = \frac{\delta_q}{2} \sigma_z + \frac{\beta}{2} \sigma_x, \quad (3.18)$$

donde definimos $\delta_q = \omega_q - \omega_d$. Las ecuaciones de movimiento para elementos de matriz de $\rho'_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \rho' | \beta \rangle$ se conocen como ecuaciones ópticas de Bloch [45] y son (por simplicidad omitimos las ')

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{gg} &= -i \frac{\beta}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) + \Gamma_{\downarrow} \rho_{ee} \\ \dot{\rho}_{eg} &= -\left(\frac{\Gamma_{\downarrow}}{2} + i\delta_q\right) \rho_{eg} + i \frac{\beta}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \\ \dot{\rho}_{ge} &= -\left(\frac{\Gamma_{\downarrow}}{2} - i\delta_q\right) \rho_{ge} - i \frac{\beta}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \\ \dot{\rho}_{ee} &= +i \frac{\beta}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) - \Gamma_{\downarrow} \rho_{ee} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para resolverlas, introducimos la inversión $\eta = \rho_{ee} - \rho_{gg}$ y las variables $x_q = \rho_{eg} + \rho_{ge}$ y $y_q = -i(\rho_{eg} - \rho_{ge})$. Notar que $\rho_{eg} = x_q + iy_q$. Con estas variables las ecuaciones de Bloch se reescriben

$$\begin{aligned} \dot{x}_q &= -\frac{\Gamma_{\downarrow}}{2} x_q + \delta_q y_q \\ \dot{y}_q &= -\frac{\Gamma_{\downarrow}}{2} y_q - \delta_q x_q + \beta \eta \\ \dot{\eta} &= -\beta y_q - \Gamma_{\downarrow} (1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

La dinámica puede obtenerse integrando las Ecs. (3.20) para todo tiempo. Para realizar la aproximación de campo medio sólo precisamos el estado estacionario, por lo

que pedimos que $\dot{\eta} = \dot{x}_q = \dot{y}_q = 0$ y obtenemos para los valores asintóticos

$$\begin{aligned} x_q &= \frac{\beta\delta_q}{(\Gamma_{\downarrow}/2)^2 + \delta_q^2} \eta \\ y_q &= \frac{\beta\Gamma_{\downarrow}/2}{(\Gamma_{\downarrow}/2)^2 + \delta_q^2} \eta \\ \eta &= -\frac{\delta_q^2 + (\Gamma_{\downarrow}/2)^2}{\delta_q^2 + (\Gamma_{\downarrow}/2)^2 + \beta^2/2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Notemos que $\eta \leq 0$ lo cuál indica, como habíamos adelantado, que el campo medio no predice inversión de poblaciones.

En este punto, hacemos tender $\Gamma_{\downarrow} \rightarrow 0$ al compararla con cualquier otra frecuencia. Esto implica que $y_q = 0$, por lo que $\rho'_{eg} = \rho'_{ge} = x_q/2$, la matriz densidad ρ' es no diagonal en esta base y $\langle \sigma_x \rangle(t)$ tendrá un valor no trivial. En cuanto a la inversión, tenemos que

$$\eta_{SS} = -\frac{\delta_q^2}{\delta_q^2 + \beta^2/2} \quad (3.22)$$

El campo medio en la RWA predice que existe una única resonancia ubicada $\delta_q = 0$ con $P_e = 1/2$, independientemente de la amplitud de forzamiento. En el capítulo siguiente veremos que al considerar términos contrarrotantes aparecerán nuevas resonancias y sufren un corrimiento dependiente del forzamiento conocido como *Bloch-Siegert shift*.

La relación de autoconsistencia es

$$P_x(t) = \langle \sigma_x \rangle = \text{Tr} \left((U_q(t)^\dagger \sigma_x U_q(t)) \rho'_q \right) = x_q \cos(\omega_d t + \phi) \quad (3.23)$$

con $x_q = \beta\eta_{SS}/\delta_q$. Mientras que la población del estado estacionario es

$$P_e = \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle = \frac{1 + \eta_{SS}}{2}. \quad (3.24)$$

3.2.3. Autoconsistencia

Para poder concretar la resolución el problema y determinar P_e y \bar{n} lo único que falta es resolver la ecuación de autoconsistencia

$$\begin{aligned} -g \frac{G}{\Omega_r} \cos(\omega_d t + \theta - \Phi) &= \beta \cos(\omega_d t + \phi) \\ A_r \cos(\omega_d t) + g x_q \cos(\omega_d t + \phi) &= G \cos(\omega_d t + \theta). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Es inmediato ver de la primera ecuación, que salvo múltiplos de 2π , $\phi = \theta - \Phi + \pi$, mientras que $G = \Omega_r \beta / g$. Expandiendo los cosenos en la segunda ecuación e igualando las funciones dependientes del tiempo se obtiene un sistema de ecuaciones para β y θ .

Podemos eliminar la segunda variable usando que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ y obtener

$$A_r^2 = (gx_q \sin \Phi)^2 + (G + gx_q \cos \Phi)^2. \quad (3.26)$$

Definiendo las cantidades adimensionales

$$\begin{aligned} \lambda_q(\beta) &= \frac{g\delta_q}{\delta_q^2 + \beta^2/2} \\ \lambda_r &= \frac{g}{\Omega_r} = \frac{g}{\sqrt{\delta_r^2 + (\kappa/2)^2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

obtenemos la ecuación de autoconsistencia deseada

$$\beta = \frac{A_r \lambda_r}{\sqrt{\lambda_q^2 \lambda_r^2 - 2\lambda_r \lambda_q \cos \Phi + 1}}. \quad (3.28)$$

Podemos verificar que β no diverge nunca en presencia de disipación ya que, como $\cos \Phi = \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^2 + (\kappa/2)^2}} < 1$, entonces $\lambda_q^2 \lambda_r^2 - 2\lambda_r \lambda_q \cos \Phi + 1 \geq \lambda_q^2 \lambda_r^2 - 2|\lambda_r||\lambda_q| \cos \Phi + 1 > (\lambda_q - \lambda_r)^2 \geq 0$.

La Ec. (3.28) puede resolverse numéricamente, por ejemplo empleando el método del punto fijo, para determinar β y con ello

$$\bar{n} = \left(\frac{\beta}{2g} \right)^2 \quad \text{y} \quad P_e = \frac{1}{2} \frac{\beta^2/2}{\delta_q^2 + \beta^2/2}. \quad (3.29)$$

Reescribiendo la ecuación para \bar{n} , tenemos que $\beta = 2g\sqrt{\bar{n}}$, lo cual es razonable si recordamos que el acoplamiento entre el *qubit* y la cavidad es $\sigma_x(a + a^\dagger) \propto 2\sqrt{\bar{n}}\sigma_x$. Así, la aproximación de campo medio resulta similar a tomar un límite semiclásico donde $a \rightarrow \alpha$, pero manteniendo una interacción entre el *qubit* y el resonador a través de la ecuación de autoconsistencia.

3.2.4. Resultados y discusión

En la Fig. 3.1 graficamos P_e en función de la amplitud de forzamiento y la frecuencia del *qubit* para $\omega_r = \omega_d$, $\kappa/\omega_d = 0,001$ y $g/\omega_d = 0,01$ en la aproximación de campo medio.

Podemos distinguir dos regímenes. En primer lugar, tenemos el caso resonante, caracterizado por $|\delta_q| \ll \beta$ y, según la Ec. (3.29), $P_e = 1/2$ independientemente del estado del resonador. Esto tiene sentido ya que en la Ec. (3.18) desaparece el término σ_z y excitar el *qubit* no cuesta energía. En este caso $\lambda_q \approx 0$ y toda la energía entregada

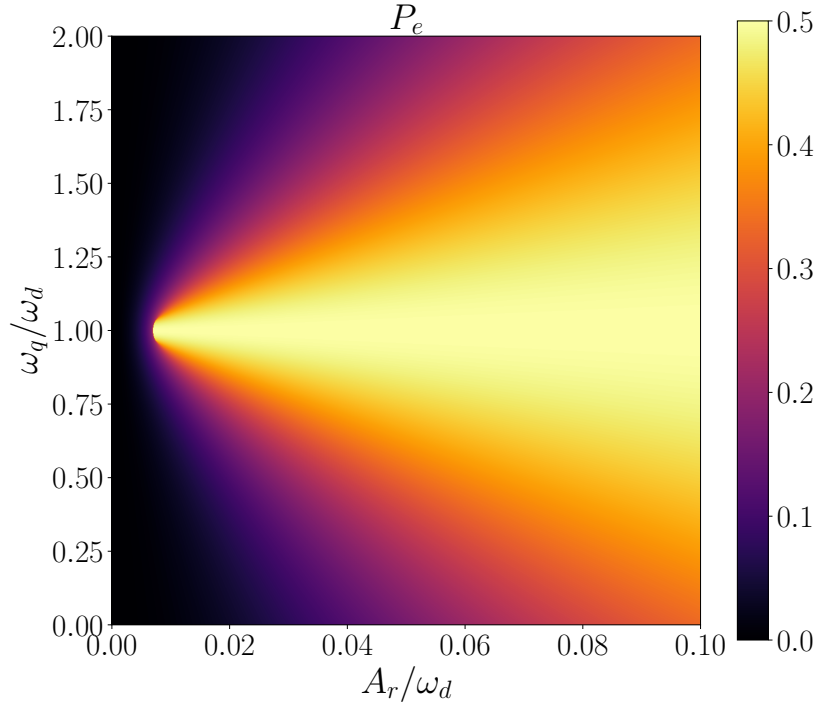


Figura 3.1: Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q acoplado a un resonador forzado con una amplitud A_r en la aproximación de campo medio. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$ y $\kappa/\omega_d = 0,001$.

por el forzamiento puede destinarse a crear fotones, lo cual da como resultado

$$\bar{n}_0 = \frac{(A_r/2)^2}{\delta_r^2 + (\kappa/2)^2}. \quad (3.30)$$

Es decir, el mismo número medio de fotones que en caso en ausencia del *qubit* ($G = A_r$).

El segundo régimen ocurre cuando el *qubit* está fuertemente *detuneado* de forma que $|\delta_q| \gg \kappa, g, A_r$. En este límite dispersivo, el forzamiento débil de la cavidad produce que $\beta \ll \delta_q$ y $P_e \ll 1/2$. Es decir, el *qubit* prácticamente no siente el forzamiento. En cuanto a la cavidad, usamos que $\lambda_q \approx g/\delta_q \ll 1$ y si $\lambda_r \leq 1$ volvemos a recuperar la Ec. (3.30). En otras palabras, si el *qubit* y el resonador están fuera de resonancia y el forzamiento es débil, entonces la interacción entre ellos es débil.

En la Fig. 3.1 graficamos el número medio de fotones \bar{n} en la condición de resonancia $\omega_r = \omega_d$ en función de la ω_q y A_r para $g = 0,01 \omega_d$ y $\kappa = 0,001 \omega_d$ y para $g = \kappa = 0,1 \omega_d$. En el primer caso, vemos que el estado del resonador es independiente del estado del *qubit*. Para ver esto analíticamente, estudiemos el caso $\delta_r = 0$

$$\beta_{\delta_r=0} = \frac{A_r g}{\sqrt{g^2 \lambda_q^2 + (\kappa/2)^2}}. \quad (3.31)$$

Podemos usar la desigualdad matemática $\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1$ para obtener la siguiente cota

en la Ec. (3.27)

$$\lambda_q \leq \frac{g}{\sqrt{2}\beta}. \quad (3.32)$$

Lo cual implica que $\beta \geq \frac{2g}{\kappa} \sqrt{A_r^2 - g^2/2} \approx \frac{2g}{\kappa} A_r$. Por ende, $g\lambda_q \leq \kappa g/\sqrt{8}A_r \ll \kappa/2$. Por consiguiente, podemos despreciar $g\lambda_q$ frente a $\kappa/2$ y obtenemos que $\bar{n} = \bar{n}_0$, es decir, el caso en ausencia del *qubit*.

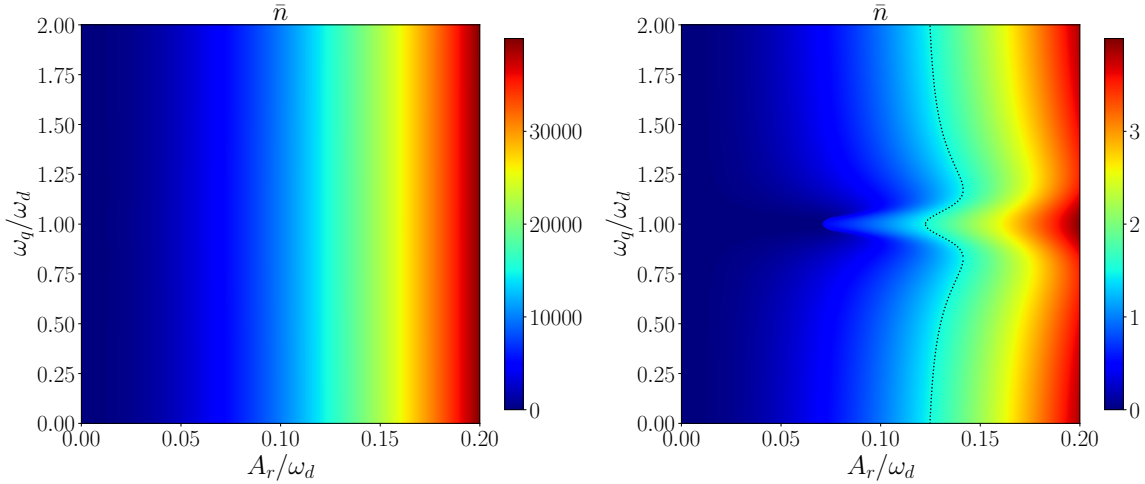


Figura 3.2: Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de una cavidad forzada con una amplitud A_r acoplada a un *qubit* de frecuencia ω_q en la condición de resonancia $\omega_r = \omega_d$ calculada en la aproximación de campo medio. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$ y $\kappa/\omega_d = 0,001$ (izquierda) y $g/\omega_d = \kappa/\omega_d = 0,1$ (derecha). En la figura de la derecha la línea punteada indica la curva con $\bar{n} = 1,5$.

En el caso en el que $g = \kappa = 0,1 \omega_d$, vemos que \bar{n} tiene una dependencia con la frecuencia del *qubit*. Para una dada amplitud de forzamiento A_r fija, vemos que el número medio de fotones es máximo en la condición de $\delta_q = 0$ y cuando $|\delta_q| \rightarrow \infty$. En otras palabras, \bar{n} es máximo cuando excitar al *qubit* no cuesta energía o cuando la interacción con el mismo es mínima.

Para un dado \bar{n} , podemos calcular qué puntos (A_r, ω_q) dan lugar a dicho número medio de fotones empleando las Ecs. (3.27) y (3.29). Un ejemplo de esto para $\bar{n} = 1,5$ se grafica en línea punteada en la Fig. 3.2. Esta curva nos dice para cada δ_q cuál es el mínimo forzamiento $A_r(\delta_q)$ necesario para alcanzar dicho número medio de fotones. Vemos que la menor amplitud de forzamiento se obtiene para $\delta_q = 0$ y $|\delta_q| \rightarrow \infty$, y la máxima amplitud se presenta para un $|\delta_q|$ intermedio. Para esta frecuencia, se requiere entregar la máxima energía al sistema para alcanzar \bar{n} .

La forma de entender esto es que la energía entregada por el forzamiento se reparte entre el *qubit* y el resonador. Cuando $\delta_q = 0$ el *qubit* no puede almacenar energía, por lo que se la lleva el resonador en su totalidad. Cuando $|\delta_q| \rightarrow \infty$ el *qubit* y el resonador están desacoplados ($\lambda_q \rightarrow 0$ en la Ec. (3.27)) y la energía se la vuelve a quedar el resonador. Para frecuencia intermedias hay una competencia entre ambos subsistemas.

El esquema planteado nos permitió determinar la dinámica para los problemas de la Sec. 1.4 dentro de una aproximación de campo medio. Un modelado simple a temperatura cero, empleando una forma de Lindblad y en la RWA, nos facilitó la resolución de los problemas independientes y las ecuación de autoconsistencia, para arribar a una descripción analítica del problema. A pesar de las múltiples aproximaciones empleadas, nuestros resultados demuestran que es posible realizar campo medio en sistemas forzados periódicamente con disipación.

Una de las grandes ventajas de realizar campo medio es que permite emplear las técnicas existentes para los problemas desacoplados. Por ello, a trabajo futuro se buscará extender el esquema para incluir sistemáticamente términos contrarrotantes, especialmente porque la RWA no es válida para forzamiento fuerte. Además, se planea extender la metodología para problemas arbitrarios a temperatura finita ($T > 0$).

Capítulo 4

Resultados numéricos

En el capítulo previo, aplicamos con éxito la aproximación de campo medio, lo que nos permitió realizar un análisis simplificado del problema a temperatura cero, descartando correlaciones. Este enfoque nos llevó a la idea de que existe una estrecha relación entre los problemas con el forzamiento en el *qubit* y en la cavidad, una conexión que exploraremos en este capítulo.

Dado que el tratamiento de campo medio no predice inversión de poblaciones, vamos a abordar numéricamente los problemas presentados en la sección 1.4. Pero, antes de ello, debemos hacer una consideración importante. Para la resolución numérica, necesitaremos realizar un truncamiento, y es crucial asegurarnos de que el número medio de fotones (\bar{n}) sea lo suficientemente bajo para que resulte manejable. Veremos que en la condición de resonancia $\omega_r = \omega_d$, este requisito no siempre se cumple.

4.1. Transformación a un sistema con *drive* en el *qubit*

4.1.1. Motivación

Podemos hacer una estimación de \bar{n} empleando los resultados obtenidos en el capítulo anterior. El caso que nos interesa es cerca de la resonancia $\omega_r \approx \omega_d$, por lo que podemos tomar $\omega_q = \omega_d$ en la Ec. (3.30) y obtener

$$\bar{n} \approx \left(\frac{A_r}{\kappa} \right)^2. \quad (4.1)$$

Como $\kappa \ll \omega_r \approx A_r$, la cavidad se encuentra fuertemente poblada de fotones. Podemos pensar que el forzamiento introduce un flujo de fotones por unidad de tiempo A_r y la cavidad pierde $\kappa \bar{n}$ por unidad de tiempo, por lo que en el estacionario el sistema se equilibra igualando estos flujos. Por ejemplo, para una cavidad con $Q = \omega_r/\kappa = 1000$

como en [8], y para $A_r/\omega_r \approx 0,01$, se tiene $\bar{n} \approx 100$.

Esto representa un desafío considerable para el tratamiento numérico del problema, ya que resolver la ecuación de Floquet-Born-Markov no solo implica evaluar la matriz $\Gamma_{\alpha\beta,\mu\nu}$, sino también diagonalizarla. Por esta razón, abordar el problema presentado en la Ec. (2.22) con el hamiltoniano (1.12) resulta inaccesible desde un punto de vista computacional.

Motivados por la solución en campo medio de la Sec. 3.2.1, esperamos que en el estado estacionario la cavidad se asemeje a un estado coherente. Por ello, vamos a buscar un desplazamiento del oscilador armónico para trabajar en un sistema efectivo que tenga un menor número medio de fotones, manejable computacionalmente. Debido a que $\bar{n} \gg 1$, vamos a trabajar fuera de la RWA, por lo que proponemos un desplazamiento dependiente del tiempo $\alpha(t)$. En el nuevo sistema de referencia, el hamiltoniano será $H' = D(\alpha)^\dagger H D(\alpha) - iD(\alpha)^\dagger \dot{D}(\alpha)$, es decir

$$H' = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g(a^\dagger + a) \sigma_x + g(\alpha + \alpha^*) \sigma_x + \left[(\omega_r \alpha + A \cos(\omega_d t) - i\dot{\alpha}) a^\dagger + h.c. \right], \quad (4.2)$$

a menos de una fase global que no afecta la dinámica. Notemos que si pedimos que $\alpha(t)$ satisfaga la ecuación diferencial

$$i\dot{\alpha} = \omega_r \alpha + A \cos(\omega_d t), \quad (4.3)$$

obtenemos un sistema referencia en el cual el forzamiento se encuentra exclusivamente en el *qubit*, por lo esperamos una reducción del número medio de fotones, ya que en este nuevo sistema de referencia $\bar{n}' \approx \bar{n} - |\alpha|^2$.

No obstante, este análisis está incompleto ya que que el número medio fotones de la cavidad debe depender de $1/\kappa$, la vida media de un fotón, y el desplazamiento encontrado no. El inconveniente es que, al igual que como observamos en la Sec. 3.2.1, debemos considerar cómo se modifica la ecuación maestra, no la ecuación de Schrödinger. En la referencia [46] se realizó una transformación de este tipo pero para una forma de Lindblad y realizando ciertas aproximaciones de onda rotante. Debido a que estamos en el caso resonante, las hipótesis realizadas para arribar a la forma de Lindblad no son adecuadas [35] y la transformación ha realizarse en la ecuación maestra de Born-Markov.

4.1.2. Transformación de la ecuación de Born-Markov

Consideremos, como describiremos en la Sec. 2.2, que la cavidad interactúa con un baño óhmico de constante η y frecuencia de corte ω_c a temperatura T mediante un

término

$$A = a + a^\dagger. \quad (4.4)$$

Al pasar del sistema original al sistema efectivo mediante un desplazamiento $\alpha(t)$, la matriz densidad es $\rho'(t) = D(\alpha)^\dagger \rho D(\alpha)$ y el operador de interacción con el baño se modifica a

$$A' = a + a^\dagger + x(t) \quad (4.5)$$

con $x(t) = \alpha + \alpha^*$. De este modo, en el sistema desplazado se tiene una ecuación maestra de Born-Markov (2.9) pero con $A \rightarrow A'$, $\rho \rightarrow \rho' = D(\alpha)^\dagger \rho D(\alpha)$ y $H \rightarrow H' = D(\alpha)^\dagger H D(\alpha) - i D(\alpha)^\dagger \dot{D}(\alpha)$. Notar que $\tilde{A}'(t) = U^\dagger(t) A'(t) U(t) = U^\dagger(t) A U(t) + x(t)$ y que $G(t)$ se mantiene inalterada. Al usar la Ec. (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho'(t) = & -i [H'(t), \rho'(t)] - \int_0^\infty G(t') \left(A \tilde{A}(t-t') \rho'(t) - \tilde{A}(t-t') \rho'(t) A \right) \\ & + G^*(t') \left(\rho'(t) \tilde{A}(t-t') A - A \rho'(t) \tilde{A}(t-t') \right) dt' \\ & + \int_0^\infty (G(t') - G^*(t')) x(t-t') dt' [A, \rho] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Podemos interpretar la Ec. (4.6) como que en el sistema de referencia desplazado la interacción con el baño continúa siendo $A = a + a^\dagger$, siempre que agreguemos el término hermítico $-i(a + a^\dagger) \int_0^\infty (G(t') - G^*(t')) x(t-t') dt'$ al hamiltoniano. Como resultado, se obtiene el siguiente hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}} = & \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g (a^\dagger + a) \sigma_x + g x(t) \sigma_x + \\ & + \left[\left(\omega_r \alpha + A \cos(\omega_d t) - i \dot{\alpha} + 2 \int_0^\infty \text{Im } G(t') x(t-t') dt' \right) a^\dagger + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por lo tanto, si queremos remover el forzamiento de la cavidad debemos pedir que $\alpha(t)$ satisfaga la ecuación integro-diferencial

$$i \dot{\alpha} = \omega_r \alpha + A \cos(\omega_d t) + 2 \int_0^\infty \text{Im } G(t') x(t-t') dt'. \quad (4.8)$$

Esto da como resultado el hamiltoniano de un *qubit* forzado interactuando con una cavidad que a su vez interactúa con un baño térmico mediante $A = a + a^\dagger$

$$H_{\text{ef}} = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g (a^\dagger + a) \sigma_x + g x(t) \sigma_x. \quad (4.9)$$

Para completar el mapeo, debemos resolver la Ec. (4.8) para determinar $\alpha(t)$ y $x(t) = \alpha(t) + \alpha^*(t)$. Dado que ya se realizó una aproximación Markoviana en la derivación de la Ec. (2.9), es consistente realizarla también en la Ec. (4.8). En este caso, podemos reemplazar $x(t-t')$ por $x(t)$ en el integrando, asumiendo que $G(t')$ está

fuertemente concentrada cerca del origen y obtenemos

$$i\dot{\alpha}(t) = \omega_r \alpha(t) + A \cos(\omega_d t) - 2\gamma x(t) \quad (4.10)$$

donde definimos

$$\gamma = - \int_0^\infty \text{Im } G(t') dt'. \quad (4.11)$$

Introduciendo $y = \alpha - \alpha^*$, podemos sumarle y restarle a la Ec. (4.10) su ecuación conjugada, lo cual da como resultado el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas reales

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= \omega_r y \\ i\dot{y} &= (\omega_r - 4\gamma)x + 2A \cos(\omega_d t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Estas ecuaciones pueden desacoplarse para dar lugar a la ecuación para un oscilador armónico de frecuencia $\Omega^2 = \omega_r^2 - 4\gamma\omega_r$ forzado

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -2A\omega_r \cos(\omega_d t) \quad (4.13)$$

Por consiguiente

$$x(t) = \frac{2A\omega_r}{\omega_d^2 - \omega_r^2 + 4\omega_r\gamma} \cos(\omega_d t). \quad (4.14)$$

Notemos que $x(t)$ no es única, ya que podemos agregarle cualquier solución de la ecuación diferencial homogénea $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$ y seguiría siendo solución de la Ec. (4.13).

De esta forma, en el sistema de referencia efectivo, el problema con el forzamiento en la cavidad se torna en un problema con forzamiento en el *qubit*, como el de la Ec. (1.13) pero con amplitud efectiva

$$A_q = A_r \frac{2g\omega_r}{\omega_d^2 - \omega_r^2 + 4\omega_r\gamma}. \quad (4.15)$$

Así, los problemas con disipación descritos en la Sec. 1.4 son equivalentes a través un desplazamiento del oscilador y podemos atacar el que sea más conveniente numéricamente. De hecho, dado que la transformación que se realizó solamente involucra al oscilador, las poblaciones del estado excitado del *qubit* P_e para ambos problemas coinciden.

Una forma de pensar en esta transformación es que simplemente estamos desplazando el resonador para remover fotones de la cavidad. Una segunda interpretación puede obtenerse al pensar en qué problema ve el *qubit*. Sabemos que el límite semiclásico del hamiltoniano de Rabi puede obtenerse reemplazando $a \rightarrow \alpha$ bajo ciertas condiciones [17]. Por ende, lo que el desplazamiento está haciendo es, en definitiva, separar la parte clásica o coherente del campo de su parte cuántica.

4.1.3. Determinación de la amplitud de forzamiento efectiva

Para que el mapeo este completo, resta determinar γ en función de las propiedades del baño original. Por ejemplo, consideremos un baño óhmico con densidad espectral

$$J(\omega) = \eta \omega e^{-\omega/\omega_c}. \quad (4.16)$$

Introduciendo la densidad espectral en la Ec. (2.16), obtenemos una parte imaginaria independiente de la temperatura

$$\text{Im } G(t) = - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin(\omega t) = -2\eta\omega_c^2 \frac{\omega_c t}{(\omega_c^2 t^2 + 1)^2}. \quad (4.17)$$

Es interesante notar que la parte imaginaria de G no tiene un máximo en el origen, sino en $t = 1/\omega_c$, pero decae fuertemente a partir de allí. Para ser consistentes con la aproximación Markoviana, la frecuencia de corte debe ser la mayor de todas las frecuencias características del sistema. Introduciendo lo obtenido en la Ec. (4.11), obtenemos el simple resultado

$$\gamma = \eta\omega_c. \quad (4.18)$$

Podríamos haber elegido otro tipo de baño ohmico, por ejemplo

$$J(\omega) = \eta \omega \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega^2}. \quad (4.19)$$

En este caso, podemos integrar por residuos para obtener $\text{Im } G(t) = -\frac{\pi}{2} \eta\omega_c^2 e^{-\omega_c t}$ y

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \eta\omega_c. \quad (4.20)$$

El prefactor numérico cambia, pero tenemos a modo cualitativo que $\gamma \propto \eta\omega_c$.

4.1.4. Caso Resonante

El caso de principal interés para esta tesis ocurre cuando el *driving* es resonante con la cavidad ($\omega_d = \omega_r$), pues en esta condición se trabajó en [8] y se midió la inversión. Para esta condición, la amplitud del forzamiento para el problema efectivo se reduce a

$$A_q = \frac{A_r g}{2\omega_r \gamma} \quad (4.21)$$

Además, empleando la solución de la Ec. (4.10):

$$\alpha(t) = \frac{A_r}{2\omega_r \gamma} \left[\cos(\omega_d t) - i \frac{\omega_d}{\omega_r} \sin(\omega_d t) \right]. \quad (4.22)$$

Obtenemos

$$\bar{n}_\alpha = |\alpha|^2 = \frac{A_r^2}{4\omega_r^2\gamma^2}, \quad (4.23)$$

que sería el número medio de fotones si el estado estacionario del problema efectivo fuera $|0\rangle$. En la práctica, si queremos determinar el número medio de fotones en el problema original a partir de la solución en el sistema efectivo, lo hacemos así

$$\bar{n} = \bar{n}_\alpha + \alpha \langle a \rangle + \alpha^* \langle a^\dagger \rangle + \langle a^\dagger a \rangle, \quad (4.24)$$

donde los valores de expectación se toman en el sistema de referencia que tiene el forzamiento en el *qubit* y α está dado por la Ec. (4.22). A modo de estimación, podemos emplear

$$A_q \approx g\sqrt{\bar{n}_\alpha}, \quad (4.25)$$

siempre que la cavidad en el problema efectivo haya reducido significativamente su número medio de fotones.

4.2. Baño estructurado

Remover el forzamiento de la cavidad tiene una segunda ventaja para atacar el problema numéricamente. La idea es que, si sólo nos interesa la dinámica del *qubit*, podemos olvidarnos del estado del resonador pensando que forma parte del baño. En este tratamiento, el sistema está compuesto exclusivamente por un *qubit* que se encuentra acoplado a un baño con una densidad espectral $J_{ef}(\omega)$ que incluye al resonador [26, 47]. De acuerdo a la Ec. (4.9), el operador de acoplamiento del *qubit* con el baño es

$$A = \sigma_x. \quad (4.26)$$

Un detalle importante, es que si no realizamos las aproximaciones de Born y Markov este tratamiento es exacto. Al realizarlas, obtenemos una ecuación maestra lineal y local en el tiempo para la matriz densidad del *qubit*: $\rho_q = \text{Tr}_{R,r}(\rho_T(t))$, donde la traza ahora es sobre el resonador y el baño. Este tratamiento será válido, siempre y cuando el acoplamiento con el resonador sea débil y podamos despreciar fenómenos de entrelazamiento y coherencia entre el *qubit* y el resonador [26, 47]. Por este motivo, remover el forzamiento del resonador y pasarlo al *qubit* es imprescindible para la validez de este tratamiento.

El cálculo de J_{ef} puede verse en [48] y da como resultado

$$J_{ef}(\omega) = \frac{16\eta g^2 \omega_r^2 \omega}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\eta \omega_r \omega)^2}. \quad (4.27)$$

En la Fig. 4.1 se grafica esta densidad espectral efectiva para los parámetros que emplearemos. Notemos que para frecuencias bajas $J_{ef}(\omega) \approx \eta\omega$ y presenta un pico de ancho $\eta\omega_r$ en la frecuencia del resonador $\omega = \omega_r$.

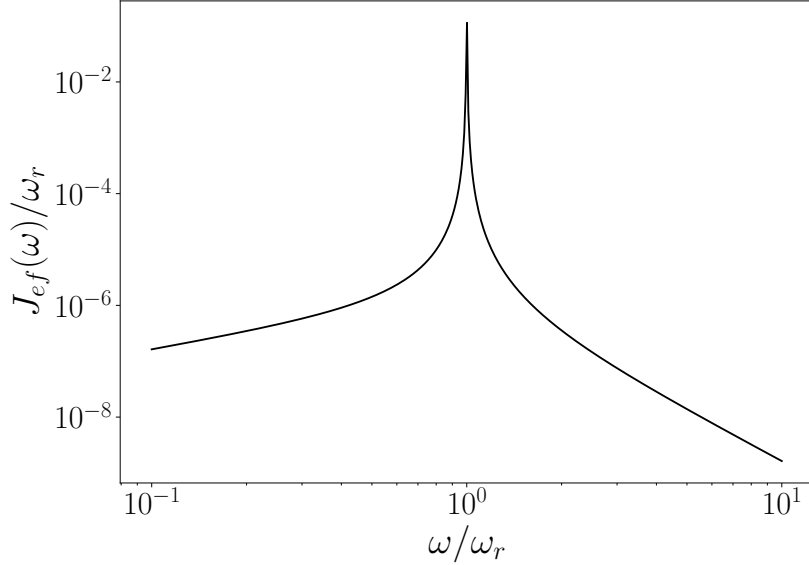


Figura 4.1: Densidad espectral para el baño estructurado. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r/\omega_d = 1$, $\eta = 0,001$.

De esta manera, si tenemos un *qubit* acoplado a un resonador que pierde fotones, se puede pensar que el *qubit* se encuentra acoplado a un baño efectivo que lo excita y desexcita. Esto no es más que la versión del efecto Purcell de la Sec. 1.3 en el formalismo de Born-Markov. La gran ventaja numérica de este tratamiento es que al eliminar el resonador del sistema, el espacio de estados donde vive la matriz densidad ρ_q es de 2×2 .

4.3. Resultados numéricos

Gracias a la reducción del número medio de fotones y la posibilidad de atacar al problema como un sistema de dos niveles acoplado a un baño estructurado, estamos en condiciones de resolver numéricamente el problema. En lo que sigue nos centraremos exclusivamente en el problema con forzamiento en el *qubit*

$$H_{ef} = \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g(a^\dagger + a)\sigma_x + A_q \cos(\omega_d t) \sigma_x. \quad (4.28)$$

Es importante destacar que, además de que ambos problemas son equivalentes, el problema efectivo es interesante de por sí y ha sido medido experimentalmente [49].

4.3.1. Mapas de poblaciones

Vamos a comenzar estudiando cómo es la población del estado excitado en el estado estacionario. Para ello, se obtuvo la matriz densidad en el estado estacionario empleando el formalismo de Floquet-Born-Markov como se describió en la Sec. 2.3 y se determinó P_e como se describió en la Sec. 2.3.2 trazando sobre los estados con n fotones y *qubit* excitado y promediando sobre un período. Notemos que si queremos pasar al problema con el forzamiento en la cavidad, el desplazamiento sobre el oscilador no afecta el valor de P_e .

Se emplearon los siguientes parámetros $g/\omega_d = 0,01$ y $\omega_r = \omega_d$ y se consideró que el resonador se encontraba acoplado a un baño ohmico con $\eta = 0,001$, $\omega_c \gg \omega_r$ y temperatura de $k_B T = 0,001 \hbar \omega_d$. Para realizar las simulaciones es necesario truncar el espacio de estados, por lo que se emplearon 10 niveles. En la Sec. 4.3.2 se analizará la validez de este truncamiento. Los resultados obtenidos se grafican en la Fig. 4.2 en función de ω_q y A_q .

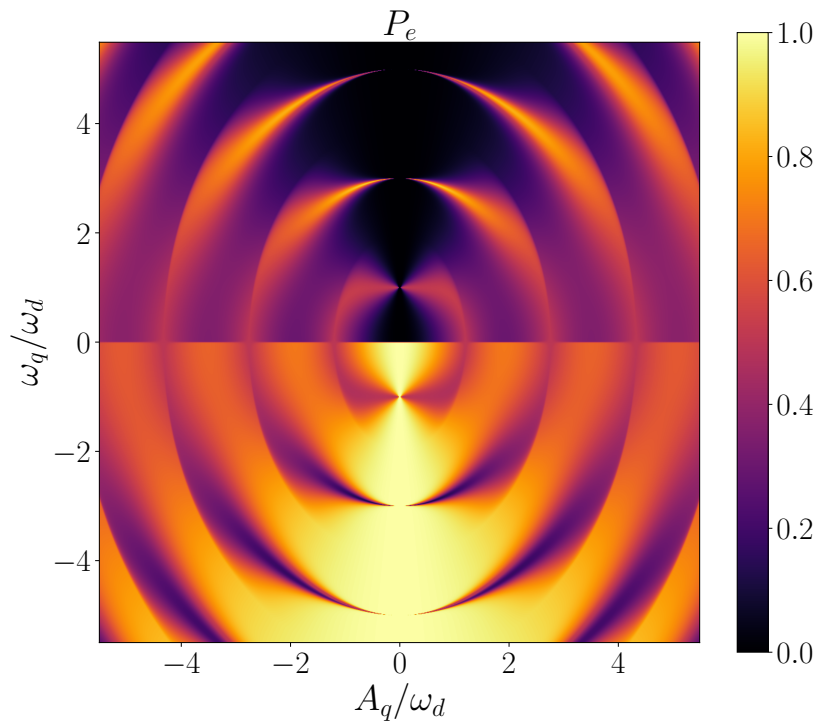


Figura 4.2: Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar \omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.

El resultado del forzamiento, acoplamiento a la cavidad y disipación es un patrón de resonancias en el cuál el *qubit*, dependiendo del régimen de parámetros, puede tener alta o baja probabilidad de encontrarse en el estado excitado. Podemos hacer algunas consideraciones generales del mapa, como que la población del estado excitado P_e no depende del signo de A_q . Esto tiene sentido ya que un cambio de signo en el forzamiento

puede absorberse en una fase dentro de $\cos(\omega_d t)$ que no afecta la dinámica en el estado estacionario. Otro detalle es que si cambiamos de signo $\omega_q \rightarrow -\omega_q$, los roles del estado excitado y fundamental del *qubit* se invierten y lo mismo debe suceder con el mapa: $P_e \rightarrow P_g = 1 - P_e$. Por ello, en lo que sigue podemos centrarnos en el cuadrante $A_q > 0$ y $\omega_q > 0$.

Una de las propiedades más llamativas de la Fig. 4.2 es que cuando $\omega_q > 0$ existen regiones brillantes donde la población del estado excitado es superior a $1/2$, incluso cercana a 1 en algunos casos. Es decir, en el estado estacionario existe un régimen de parámetros dónde el estado excitado está más poblado que el fundamental, lo cual es contraintuitivo. En otras palabras, este sistema presenta inversión de poblaciones.

Notemos que para forzamiento débil ($A_q/\omega_d \rightarrow 0$), las resonancias se ubican en $(2k+1)\omega_d$ y que, a medida que aumentamos la amplitud de forzamiento (A_q), se ensanchan y su centro se corre hacia frecuencias menores. Este corrimiento en la ubicación de las resonancias es el *Bloch-Sieger Shift* y puede observarse aún en ausencia de disipación [20, 46, 50]. Lo que no puede observarse en ausencia de disipación ni forzamiento es la inversión de poblaciones, pero ¿depende del resonador?

4.3.2. Mapas de Fotones

En esta sección vamos a explorar qué sucede en el resonador a través de su número medio de fotones (\bar{n}). Mientras que para el problema con el forzamiento en el *qubit* es una cantidad esencial, es importante resaltar que, debido al desplazamiento realizado, este número de fotones no se relaciona directamente con lo que sucede en la cavidad original. En cualquier caso, debemos verificar que el truncamiento de niveles empleado para resolver el problema numéricamente es adecuado.

Antes de enfocarnos en cuando el forzamiento resuena con la cavidad ($\omega_r = \omega_d$), veamos que sucede a nivel general. En la Fig. 4.3 se muestra un mapa de \bar{n} en función de la frecuencia del resonador (ω_r) y la amplitud de *drive* (A_q) para los parámetros: $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_q/\omega_d = 0,5$, $\eta = 0,001$ y temperatura de $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$. Notar que la barra de colores esta en escala logarítmica.

Se observan grandes fluctuaciones en el número medio de fotones. Mientras que para frecuencias ω_r arbitrarias se observa que la cavidad está vacía con $\bar{n} \ll 1$, existen regiones muy específicas donde aparecen resonancias y la cavidad se llena de fotones ($\bar{n} \gg 1$). Dado que se usaron 10 estados, el máximo número de fotones es tan sólo 4 por lo que \bar{n} no está determinado adecuadamente en estas resonancias.

El mapa de fotones de la Fig. 4.3 presenta abundante estructura. Por un lado tenemos las resonancias ubicadas en múltiplos impares de ω_d , que podemos anticipar se corresponden con una interacción resonante entre el forzamiento y la cavidad, mediada por el *qubit*. Estas resonancias se presentan en forma de lóbulos separados por mínimos

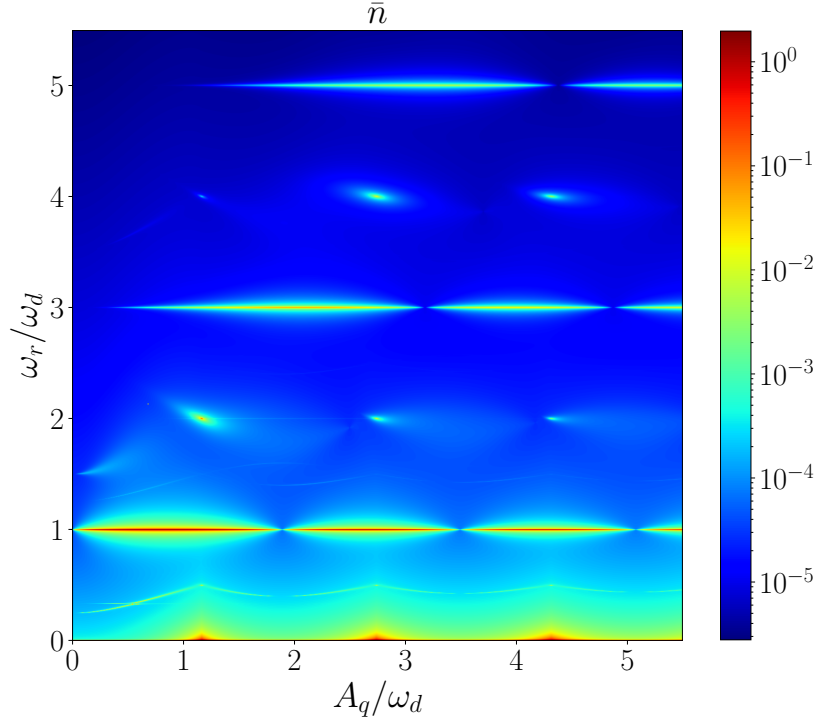


Figura 4.3: Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_q/\omega_d = 0,5$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.

a lo largo de $\omega_r = (2k+1)\omega_d$. Otro tipo de estructura que puede distinguirse se presenta en los múltiplos pares de ω_d pero, a diferencia del caso anterior, sólo se presenta en algunos puntos y no a lo largo de toda la línea $\omega_r = 2k\omega_d$.

Una tercera región donde encontramos numerosa estructura es $\omega_r \leq 0,5\omega_d = \omega_q$ y puede observarse en detalle en el acercamiento realizado en la Fig. 4.4. Distinguimos la presencia de un cruce evitado ubicado cerca de $\omega_r = 0,3\omega_d$ y $A_q = 0,6\omega_d$. Por debajo de este cruce, se observa una línea de resonancia horizontal muy tenue ubicada en $\omega_r = 0,3\omega_d$. Por encima del cruce la curva de resonancias oscila con máximos en $\omega_r < 0,5\omega_d = \omega_q$. Por este motivo, podemos esperar que esta estructura se asocie a una interacción resonante entre la cavidad y el *qubit*. Entender estas estructuras es relevante para comprender la interacción entre el *qubit* y el resonador pero escapa los objetivos de este trabajo.

El régimen de interés para este trabajo es la condición de resonancia $\omega_r = \omega_d$. En la Fig. 4.4 podemos ver en gran detalle que estos lóbulos se encuentran separados por mínimos o “antiresonancias”, donde la cavidad se vacía a pesar de que estamos forzando al sistema en resonancia. Debido a que no estamos forzando el resonador directamente, sino que el *drive* es mediado por el *qubit*, esperamos que la ubicación A_q de estas antiresonancias dependa de la frecuencia ω_q .

Por ello, en la Fig. 4.5 se muestra \bar{n} en función de la frecuencia del *qubit* ω_q y la amplitud de *drive* A_q para la $\omega_r = \omega_d$. El resto de parámetros continúan siendo

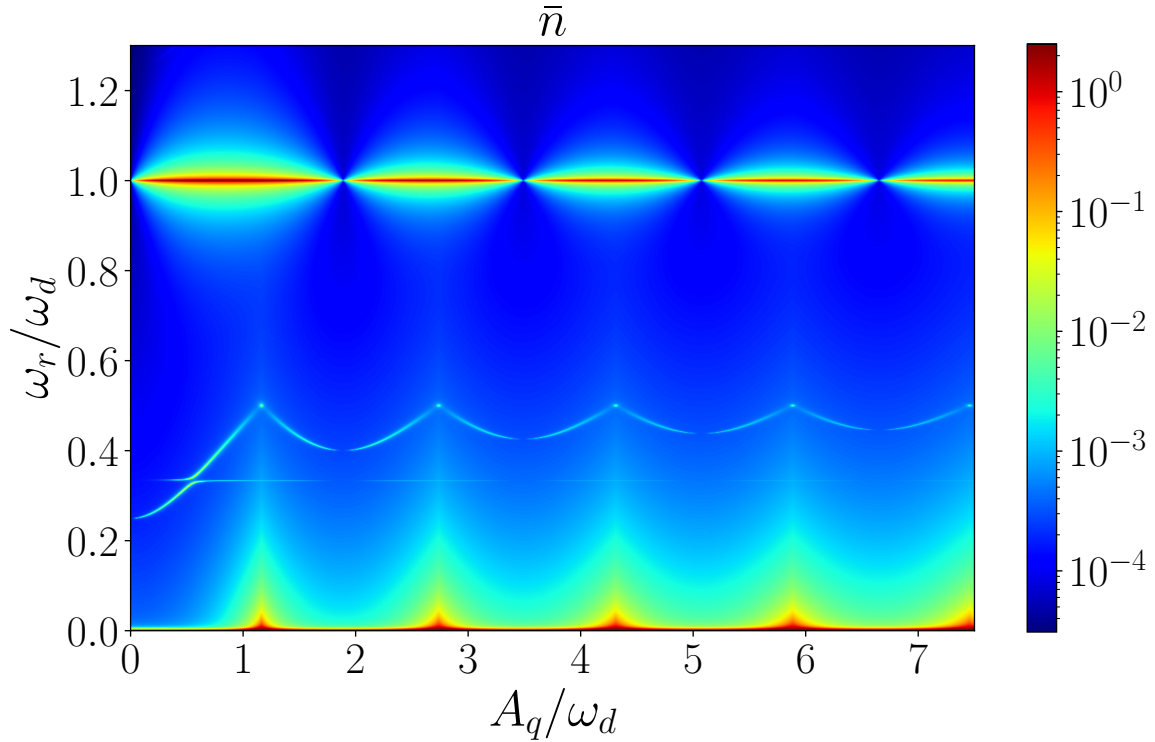


Figura 4.4: Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_q/\omega_d = 0,5$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.

$g/\omega_d = 0,01$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$. En dicha figura también realizamos un acercamiento de la Fig. 4.2 en la región de interés.

En primer lugar, vemos que la ubicación de las antiresonancias dependen fuertemente de la frecuencia del *qubit*. Tienen la particularidad de que para forzamiento débil $A_q/\omega_d \rightarrow 0$ se ubican en $(2k + 1) \omega_d$ al igual que las resonancias del *qubit*. De alguna forma, esto podría indicar que, en el estado estacionario, la energía entregada por el forzamiento se reparte entre excitaciones del *qubit* y el resonador, por lo que cuando las transiciones $g \rightarrow e$ son favorecidas, el resonador tiende a vaciarse. De hecho, para $\omega_q = \omega_r = \omega_d$ se tiene un punto muy particular donde el sistema prácticamente no presenta inversión de poblaciones y el resonador no muestra una antiresonancia. Sin embargo, este reparto de energía entre *qubit* y resonador no es tan directo ya que, como puede observarse para $\omega_q/\omega_d \leq 1,5$ la ubicación de la inversión de poblaciones y la antiresonancia de la cavidad difieren sustancialmente para ambos mapas.

La segunda razón por la que queremos estudiar \bar{n} es verificar que el truncamiento que estamos realizando es adecuado. La Fig. 4.5 fue obtenida empleando 10 estados, por lo que $n_{max} = 4$ y vemos que en la mayoría de puntos $\bar{n} \approx 2$. En la Fig. 4.6 graficamos curvas de \bar{n} en función de ω_q y A_q obtenidas para resoluciones con distintos número máximo de fotones.

Se observa que, salvo cuando la cavidad se vacía en las antiresonancias, \bar{n} crece al

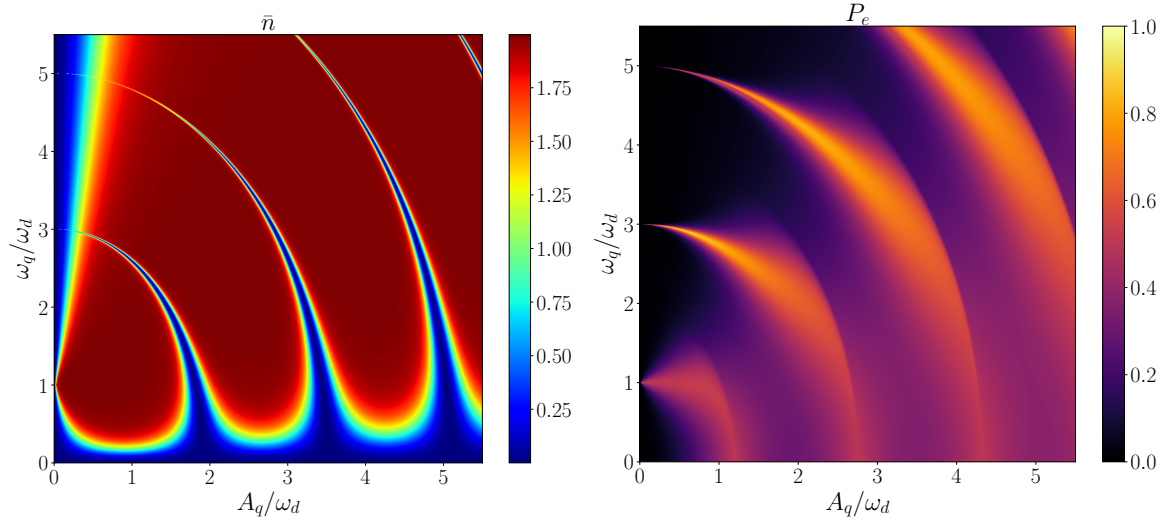


Figura 4.5: Para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación graficamos el número medio de fotones del resonador (\bar{n}) (izquierda) y la población del estado excitado (P_e) (derecha). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió el problema usando 10 estados.

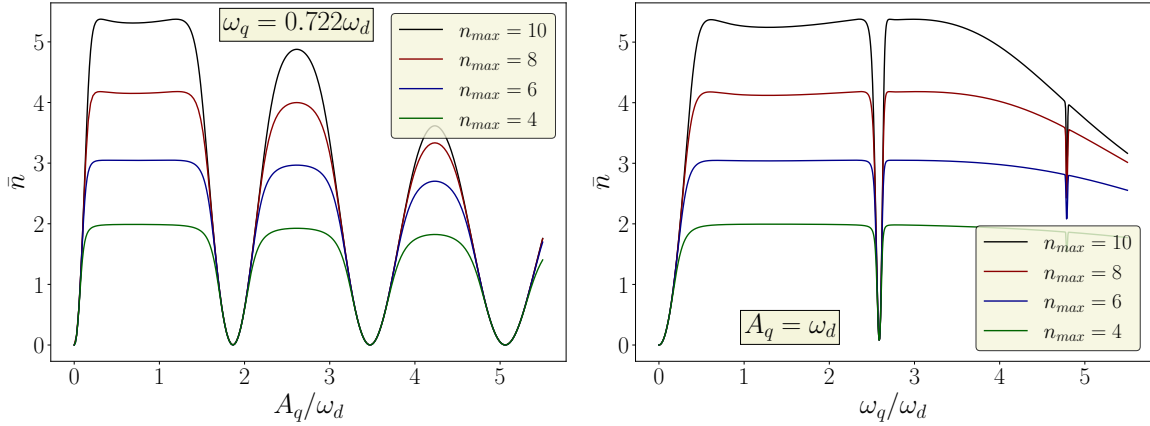


Figura 4.6: Número medio de fotones (\bar{n}) para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación. Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y se resolvió empleando $2n_{max} + 2$ estados.

aumentar el número de niveles empleados para resolver el problema. Esto muestra que a pesar de que la transformación de la Sec. 4.1 remueva el forzamiento de la cavidad y disminuya \bar{n} , no la está terminando de “vaciar”. Esto es razonable, ya que según vimos en la aproximación de campo medio, un forzamiento en el *qubit* acaba siendo un forzamiento efectivo para el resonador.

4.3.3. Baño estructurado y óhmico

Como se describió en la Sec. 4.2, si el acoplamiento entre el *qubit* con el resonador es débil se puede describir la dinámica del *qubit* como si este estuviera acoplado a un baño efectivo que contenga al resonador. Esto reduce notablemente el costo computacional, ya que sólo requiere trabajar con un sistema de dos niveles. Para verificar esta apro-

ximación, en la Fig. 4.7 se grafican las poblaciones del estado excitado (P_e) obtenidas para el sistema descrito por el hamiltoniano de la Ec. (4.28) y para un baño estructurado. Los parámetros empleados son los mismos que en las secciones anteriores. Se observa un excelente acuerdo entre ambos mapas, lo cuál indica que no son fenómenos de entrelazamiento y coherencia con el resonador los que conducen a la inversión de poblaciones.

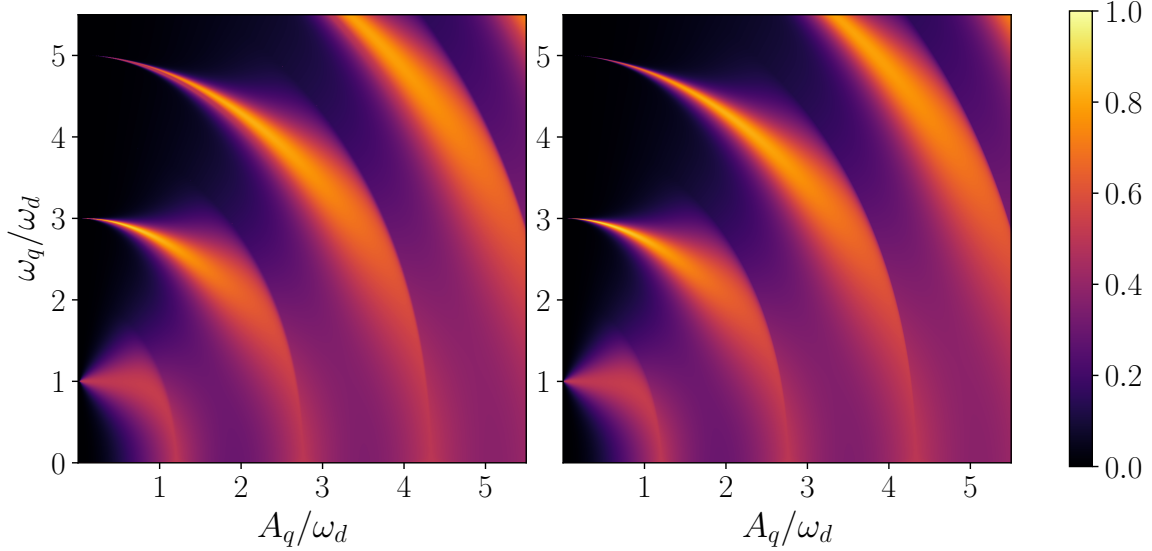


Figura 4.7: Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un *qubit* de frecuencia ω_q forzado con una amplitud A_q acoplado a una cavidad con disipación (izquierda) y un *qubit* forzado acoplado a un baño estructurado (derecha). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar \omega_d$.

Un detalle muy interesante es que el caso sin disipación $\eta = 0$ presenta el mismo tipo de resonancias ubicadas en $\omega_q \rightarrow (2k + 1) \omega_d$ cuando $A_q/\omega_d \rightarrow 0$ pero sin inversión [29]. De hecho, si incluimos disipación acoplado el *qubit* forzado a un baño óhmico, tampoco encontramos inversión, tal como se observa en la Fig. 4.8. En dicha figura presentamos cortes verticales del mapa de la Fig. 4.7, es decir curvas de P_e en función de ω_q para una amplitud A_q fija. Consideramos los casos de un *qubit* acoplado a una cavidad con disipación, un *qubit* acoplado a un baño estructurado y *qubit* acoplado a un baño óhmico.

Para el *qubit* acoplado a un baño óhmico, vemos que si bien presenta resonancias cuando $\omega_q \approx (2k + 1) \omega_d$ en ellas $P_e \leq 1/2$. Podemos concluir que no alcanza con forzamiento y disipación para obtener inversión de poblaciones y que la cavidad está jugando un rol central en este fenómeno. En cuanto al modelo del baño estructurado, vemos que logra un acuerdo excelente para describir P_e para un *qubit* acoplado a una cavidad con disipación. Observamos que las resonancias $\omega_q \approx (2k + 1) \omega_d$ se angostan para k creciente. De hecho, para $k > 1$ apenas se las pudo resolver. La primera resonancia, ubicada en $\omega_q = \omega_d$ es particular, no sólo porque es considerablemente más

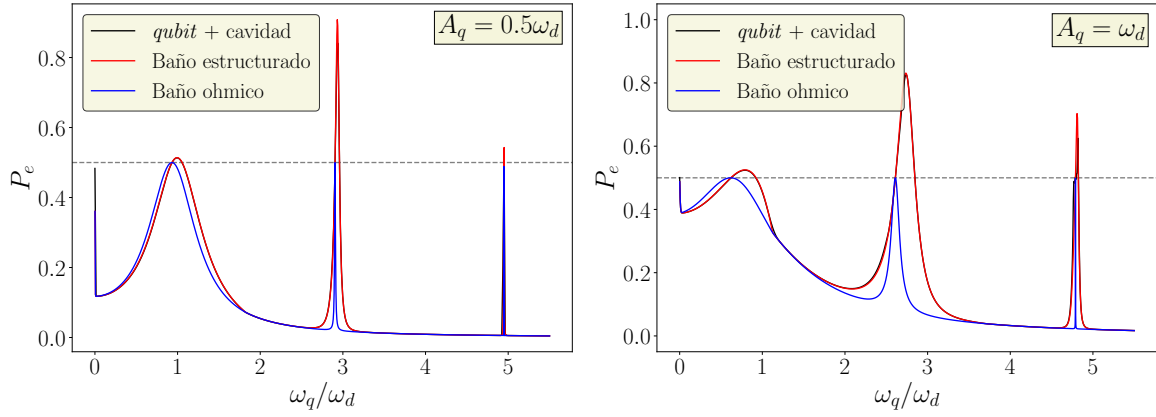


Figura 4.8: Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un *qubit* forzado acoplado a una cavidad con disipación (línea negra), un *qubit* forzado acoplado a un baño estructurado (línea roja) y un *qubit* forzado acoplado a un baño óhmico (línea azul). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y $A_q = 0,5 \omega_d$ (izquierda) y $A_q = \omega_d$ (derecha).

ancha, sino porque es la única que débilmente supera $1/2$ como se observaba en el mapa de la Fig. 4.7.

Además de la inversión de poblaciones, existen otros aspectos cualitativos interesantes en este problema. Para observarlos, en la Fig. 4.9 graficamos cortes horizontales del mapa de la Fig. 4.7, es decir, graficamos las poblaciones P_e en función de la amplitud de forzamiento A_q para frecuencias $\omega_q = 0,722 \omega_d$ y $\omega_q = 4,75 \omega_d$ para los tres casos anteriores.

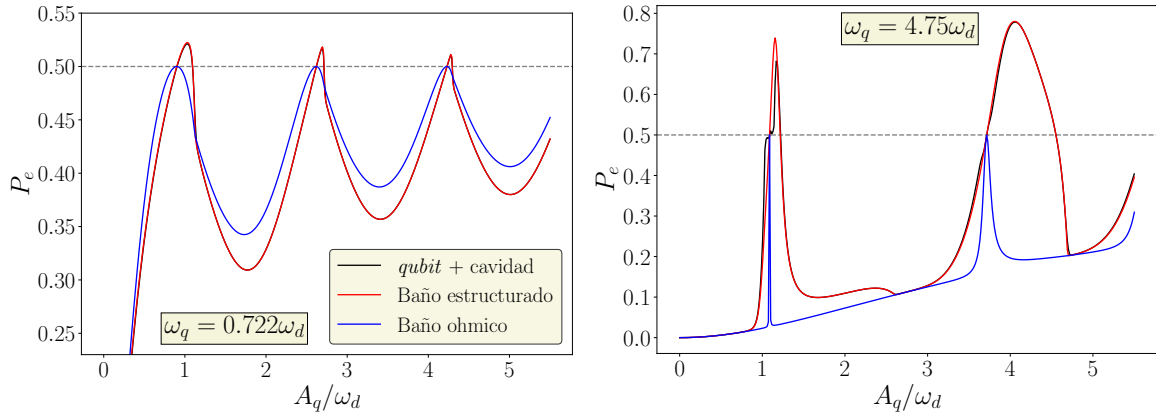


Figura 4.9: Población del estado excitado (P_e) para el estado estacionario de un *qubit* forzado acoplado a una cavidad con disipación (línea negra), un *qubit* forzado acoplado a un baño estructurado (línea roja) y un *qubit* forzado acoplado a un baño óhmico (línea azul). Se empleó $g/\omega_d = 0,01$, $\omega_r = \omega_d$, $\eta = 0,001$ y $k_B T = 0,001 \hbar\omega_d$ y $\omega_q = 0,722 \omega_d$ (izquierda) y $\omega_q = 4,75 \omega_d$ (derecha).

El acuerdo entre el baño estructurado y el *qubit* acoplado a una cavidad con disipación continúa siendo excelente para ambas frecuencias del *qubit*. Para $\omega_q = 0,722 \omega_d$ vemos una sucesión de máximos con una débil inversión de poblaciones $P_e \approx 1/2$, separados por valles. Estos picos, además de ser asimétricos, presentan un “corte” o

discontinuidad en la derivada a la derecha de cada máximo. Esto también se observaba en el mapa de P_e de la Fig. 4.7 donde luego de cada máximo hay un súbito cambio de color.

Para $\omega_q = 4,75 \omega_d$ la estructura de máximos ya no es tan regular, pero sigue presente. En el primer máximo cerca de $A_q = \omega_d$ se observa una discrepancia entre el baño estructurado y el *qubit* acoplado a una cavidad.

4.3.4. Inversión de poblaciones

Debido a que el baño estructurado replica adecuadamente el mapa de P_e , vamos a centrarnos en este modelo para explorar el fenómeno de inversión. El hamiltoniano para este sistema es

$$H_{\text{BE}} = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + A_q \cos(\omega_d t) \sigma_x. \quad (4.29)$$

En un trabajo anterior [29], se analizó la dinámica de este problema sin disipación y se encontraron resonancias cuando $A_q \rightarrow 0$ y $\omega_q \rightarrow (2k + 1) \omega_d$, tales como la de la Fig. 4.7, pero sin inversión.

Para comprender el origen de las resonancias, vamos a reemplazar la descripción de la dinámica a través de la ecuación maestra por una descripción mediante *rates*, tal como presentamos en la Sec. 2.3.1. En este marco, tenemos un conjunto de niveles que transicionan entre sí con probabilidad por unidad de tiempo $\Gamma_{\alpha\beta}$ y determinamos las poblaciones a partir de ecuaciones de balance. Si llamamos $|-\rangle$ y $|+\rangle$ a los dos autoestados de Floquet linealmente independientes con cuasienergías en la primera “zona de Brillouin” ϵ_+ y ϵ_- ($\epsilon_+ \geq \epsilon_-$), el formalismo de Floquet-Born-Markov nos permite computar las tasas de transición entre ellos mediante la Ec. (2.22) ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{+-} &= \sum_q \Gamma_{+-}^{(q)} = 2\pi \sum_q |A_{-+}^{(q)}|^2 g(\epsilon_+ - \epsilon_- - q\omega_d) \\ \Gamma_{-+} &= \sum_q \Gamma_{-+}^{(q)} = 2\pi \sum_q |A_{+-}^{(q)}|^2 g(\epsilon_- - \epsilon_+ - q\omega_d). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La Ec. (4.30) puede interpretarse no en la primera zona sino en un esquema ampliado. En este esquema, $\Gamma_{+-}^{(q)}$ denota la probabilidad de ir $- \rightarrow +$ para estados que difieren en q “bandas”. Ambas descripciones son equivalentes y dan lugar a la misma física por lo que podemos centrarnos en el esquema ampliado.

El paso siguiente es escribir [32]

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i\epsilon t} dt = \frac{1}{\pi} n_\beta(\epsilon) J(\epsilon), \quad (4.31)$$

lo cual nos permite entender algo muy importante. Debido a la forma de la densidad espectral del baño estructurado en la Fig. 4.1, cuando la diferencia de cuasienergías

entre dos bandas se aproxime a ω_r , esperamos que el Γ correspondiente se intensifique y la dinámica se vuelva rápida. Así, lejos de estas resonancias la densidad espectral es casi óhmica y la cavidad no participa activamente de la dinámica. No obstante, cuando nos acercamos a estos puntos particulares del espectro de cuasienergías, la cavidad acelera la dinámica al reforzar ciertas transiciones. Para ver cómo esto se relaciona con la inversión, debemos determinar tasas de transición efectivas entre los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, las cuales pueden aproximarse por

$$\begin{aligned}\Gamma_{eg} &\approx |\langle e|+\rangle|^2 \Gamma_{+-} |\langle -|g\rangle|^2 + |\langle e|-\rangle|^2 \Gamma_{-+} |\langle +|g\rangle|^2 \\ \Gamma_{ge} &\approx |\langle g|+\rangle|^2 \Gamma_{+-} |\langle -|e\rangle|^2 + |\langle g|-\rangle|^2 \Gamma_{-+} |\langle +|e\rangle|^2.\end{aligned}\quad (4.32)$$

En la Fig. 4.10, graficamos la población del estado excitado P_e , el espectro de cuasienergías, los rates Γ_{eg} y Γ_{ge} y los elementos $\Gamma_{ge}^{(q)}$ en función de ω_q para $A_q = \omega_d$ y en función de A_q para $\omega_q = 0,722 \omega_d$.

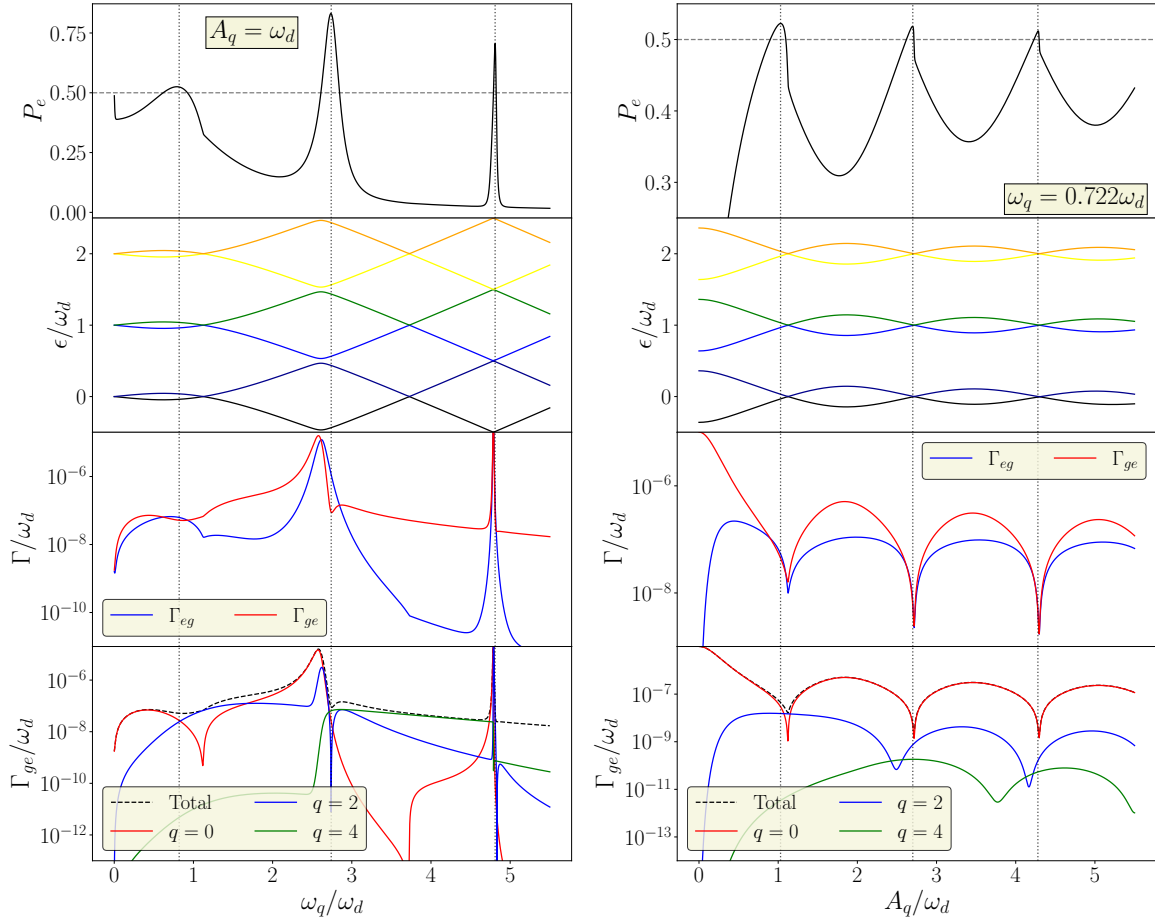


Figura 4.10: Para el baño estructurado graficamos (de arriba hacia abajo) la población del estado excitado (P_e), el espectro de cuasienergías (ϵ), las tasas efectivas de transición entre $|e\rangle$ y $|g\rangle$ calculadas usando la Ec. (4.32) y las componentes $\Gamma_{ge}^{(q)}$ en función de la frecuencia del *qubit* (izquierda) y de la amplitud de forzamiento (derecha).

Comencemos analizando el espectro de cuasienergías en función de ω_q para $A_q = \omega_d$.

Vemos que para $\omega_q \gg A_d$, las cuasienergías son prácticamente rectas de pendiente $\pm\omega_q/2$, correspondientes al caso de forzamiento débil. La condición de transición es, en este caso, $\omega_q = \omega_r + \Delta q \omega_d$, siendo Δq la diferencia entre los índices de bandas. Al computar numéricamente los elementos $\Gamma_{\alpha\beta}^{(q)}$, se encontró que las tasas con q impar se anulaban y, aunque no encontramos una justificación sencilla de esto, sospechamos que se debe a que el elemento de matriz $A_{\alpha\beta}^{(2k+1)}$ se anula por alguna simetría. En cualquier caso, esto nos deja con la condición de resonancia

$$\omega_q \approx 2k \omega_d + \omega_r. \quad (4.33)$$

En la Fig. 4.10, se observa que efectivamente en estos puntos la dinámica se vuelve rápida y los tasas Γ_{eg} y Γ_{ge} crecen significativamente. Para A_q comparable a ω_q , el espectro ya no está compuesto por líneas rectas, sino que presenta cierta curvatura y *gaps* apreciables. Podemos asociar el tamaño de estos *gaps* con el ancho de las resonancias y el corrimiento de las mismas respecto de la ubicación dada por la Ec. (4.33) con el *Bloch-Siegert Shift* [29].

Si bien estamos encontrando el por qué la dinámica se vuelve rápida gracias al resonador, esto aún no explica la inversión de poblaciones. De hecho, y como puede observarse en la Fig. 4.10, la inversión ocurre cuando $\Gamma_{eg} > \Gamma_{ge}$, sin importar su magnitud. Sin embargo, podemos apreciar en la Fig. 4.10 que los máximos para Γ_{eg} y para Γ_{ge} están desfasados ligeramente, lo que permite que momentáneamente la transición $e \rightarrow g$ esté favorecida y se produzca la inversión.

No obstante, la primera resonancia, ubicada cerca de $\omega_q \approx \omega_d$ parece producirse por otro mecanismo. Podemos observar esto en la Fig. 4.10, donde graficamos las tasas para $\omega_q = 0,722 \omega_d$ en función de A_q . Observamos que, para ciertas amplitudes de forzamiento A_q , Γ_{eg} y Γ_{ge} presentan mínimos. De hecho, al descomponer las tasas en sus componentes $\Gamma_{ge}^{(q)}$ vemos que los mínimos se producen cuando el elemento con $q = 0$ decrece súbitamente. En general, podemos pensar que las transiciones intrabandas $\Delta q = 0$ son aquellas que se producen en ausencia de forzamiento, por lo que es razonable que la inhibición de estos elementos sea la causa de la inversión.

Para resumir, el rol de la cavidad no es el de producir correlaciones y fenómenos coherentes, sino todo lo contrario: favorecer transiciones entre distintas bandas de Floquet. Esto explica por qué una densidad óhmica no es capaz de producir la inversión pero no especifica cual es el mecanismo. En un trabajo anterior [26], se exploró el origen de la inversión y se determinó el mecanismo en una situación muy similar. Por lo que, como perspectiva futura, se buscará entender estos resultados con un enfoque análogo.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas Futuras

En esta tesis, abordamos el problema de un *qubit* acoplado a un resonador sometido a disipación y con un forzamiento intenso y resonante. En este tipo de forzamiento, la teoría de perturbaciones, aproximaciones de onda rotante y secular suelen fallar, por lo que las herramientas analíticas usuales de *circuit QED* no pueden emplearse. A su vez, debido a que este tipo de forzamiento suele dar lugar a cavidades con un gran número medio de fotones, el tratamiento numérico requiere una gran base de estados, lo que torna el problema demasiado costoso computacionalmente. Estas dificultades motivan al desarrollo de técnicas numéricas y analíticas alternativas para comprender la dinámica de estos sistemas.

En primer lugar, propusimos un esquema para desarrollar aproximaciones de campo medio en sistemas abiertos con forzamiento periódico en el tiempo. Para ello, realizamos un desacople del tipo $AB \rightarrow A \langle B \rangle (t) + B \langle A \rangle (t) - \langle A \rangle (t) \langle B \rangle (t)$ y planteamos las ecuaciones maestras para los problemas independientes. A priori, dichos valores medios serán funciones arbitrarias del tiempo pero, de acuerdo a la teoría de Floquet, esperamos que en el estado estacionario sean funciones periódicas. Ejemplificamos cómo puede llevarse a cabo este esquema para el problema de un *qubit* acoplado a una cavidad forzada sujeta a una forma de Lindblad. A pesar de las numerosas simplificaciones adoptadas, nuestros resultados analíticos demuestran que es posible realizar este tipo de aproximación en sistemas periódicos con disipación.

Aunque este tipo de aproximaciones proporcionan intuición y un marco simplificado para abordar el problema, no siempre describen con exactitud la dinámica del sistema. En particular, para el problema de un *qubit* acoplado a una cavidad forzada no predice inversión de poblaciones. Por ello, en segundo lugar abordamos este problema numéricamente, empleando la ecuación maestra de Born-Markov en la base de Floquet. Para reducir el número medio de fotones en la cavidad, se realizó una transformación unita-

ria para pasar el forzamiento de la cavidad al *qubit*. Luego, en este problema efectivo, se determinó la población del estado excitado del *qubit* (P_e) y el número medio de fotones del resonador (\bar{n}). Se observaron regiones de parámetros donde el sistema presentaba inversión de poblaciones ($P_e > 1/2$) y exploramos su origen. Encontramos que las regiones que presentan inversión de poblaciones se encuentran en $\omega_q = (2k + 1) \omega_d$ para forzamiento débil y, al aumentar el forzamiento, experimentan un corrimiento conocido como *Bloch-Siegert shift* y se ensanchan.

Una segunda ventaja de la transformación realizada es que nos permitió incorporar el resonador como parte del reservorio y resolver la dinámica para el problema de un *qubit* acoplado a un baño estructurado. El acuerdo para los mapas de poblaciones P_e fue excelente, lo que indica que el origen de la inversión no está en las correlaciones con el resonador, sino con transiciones favorecidas por el mismo. Esto nos permitió explicar por qué hay un acuerdo cualitativo con el caso sin disipación y entender la ubicación de las resonancias a través del espectro de Floquet para un *qubit* forzado. Así, avanzamos en la comprensión del origen de la inversión y por qué requiere de la presencia de una cavidad, pero la determinación del mecanismo específico queda como perspectiva futura.

Otro objetivo a futuro es avanzar con el desarrollo del esquema de realización de campo medio. Una de las mayores simplificaciones empleadas fue trabajar en la RWA, lo que permitió tomar *ansatz* para los valores medios involucrando sólo los dos primeros armónicos. Esta aproximación suele fallar en los límites de forzamiento fuerte, por lo que explorar cómo involucrar sistemáticamente armónicos superiores es el paso siguiente. Además, se planea generalizar la propuesta de campo medio para problemas arbitrarios a temperatura finita.

Bibliografía

- [1] Alexeev, Y., Bacon, D., Brown, K. R., Calderbank, R., Carr, L. D., Chong, F. T., *et al.* Quantum computer systems for scientific discovery. *PRX Quantum*, **2** (1), 017001, 2021. URL <https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.2.017001>. 1
- [2] Shor, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, **41** (2), 303–332, 1999. URL <https://doi.org/10.1137/S0036144598347011>. 1
- [3] Grover, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. En: Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing, págs. 212–219. 1996. 1
- [4] Grover, L. K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Physical review letters*, **79** (2), 325, 1997. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.325>. 1
- [5] Blais, A., Huang, R.-S., Wallraff, A., Girvin, S. M., Schoelkopf, R. J. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Physical Review A*, **69** (6), 062320, 2004. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.062320>. 1, 6, 7
- [6] Wallraff, A., Schuster, D. I., Blais, A., Frunzio, L., Huang, R.-S., Majer, J., *et al.* Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature*, **431** (7005), 162–167, 2004. URL <https://doi.org/10.1038/nature02851>. 1
- [7] Niemczyk, T., Deppe, F., Huebl, H., Menzel, E., Hocke, F., Schwarz, M., *et al.* Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nature Physics*, **6** (10), 772–776, 2010. URL <https://doi.org/10.1038/nphys1730>. 1, 6
- [8] Tosi, L., Lobato, I., Goffman, M., Metzger, C., Urbina, C., Pothier, H. Effects of the measurement power on states discrimination and dynamics in a circuit-qed experiment. *arXiv preprint arXiv:2310.04556*, 2023. URL <https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.04556>. 1, 7, 8, 32, 35

- [9] Gu, X., Kockum, A. F., Miranowicz, A., Liu, Y.-x., Nori, F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, **718**, 1–102, 2017. URL <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>. 1
- [10] Cáceres, J. J., Domínguez, D., Sánchez, M. J. Fast quantum gates based on landau-zener-stückelberg-majorana transitions. *Physical Review A*, **108** (5), 052619, 2023. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.108.052619>. 2
- [11] DiVincenzo, D. P. Two-bit gates are universal for quantum computation. *Physical Review A*, **51** (2), 1015, 1995. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.51.1015>. 3
- [12] Barenco, A., Bennett, C. H., Cleve, R., DiVincenzo, D. P., Margolus, N., Shor, P., *et al.* Elementary gates for quantum computation. *Physical review A*, **52** (5), 3457, 1995. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457>. 3
- [13] Rabi, I. I. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Physical Review*, **51** (8), 652, 1937. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.652>. 3
- [14] Girvin, S. M. Superconducting qubits and circuits: Artificial atoms coupled to microwave photons. *Lectures delivered at Ecole d'Eté Les Houches*, 2011. 3, 7
- [15] Langford, N. K. Circuit qed-lecture notes. *arXiv preprint arXiv:1310.1897*, 2013. URL <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.1897>. 3
- [16] Braak, D. Integrability of the rabi model. *Physical Review Letters*, **107** (10), 100401, 2011. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.100401>. 3
- [17] Irish, E., Armour, A. Defining the semiclassical limit of the quantum rabi hamiltonian. *Physical Review Letters*, **129** (18), 183603, 2022. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.183603>. 3, 34
- [18] Jaynes, E., Cummings, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, **51**, 89, 1963. URL [10.1109/PROC.1963.1664](https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664). 3
- [19] Irish, E. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling. *Physical review letters*, **99** (17), 173601, 2007. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.173601>. 6
- [20] Yan, Y., Lü, Z., Zheng, H. Bloch-siegert shift of the rabi model. *Physical Review A*, **91** (5), 2015. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053834>. 6, 23, 39

- [21] Lü, Z., Zheng, H. Effects of counter-rotating interaction on driven tunneling dynamics: Coherent destruction of tunneling and bloch-siegert shift. *Physical Review A*, **86** (2), 023831, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.023831>. 6
- [22] Ithier, G., Collin, E., Joyez, P., Meeson, P., Vion, D., Esteve, D., *et al.* Decoherence in a superconducting quantum bit circuit. *Physical Review B*, **72** (13), 134519, 2005. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.134519>. 6
- [23] Boissonneault, M., Gambetta, J. M., Blais, A. Nonlinear dispersive regime of cavity qed: The dressed dephasing model. *Physical Review A*, **77** (6), 060305, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.060305>. 6
- [24] Purcell, E. M., Torrey, H. C., Pound, R. V. Resonance absorption by nuclear magnetic moments in a solid. *Physical review*, **69** (1-2), 37, 1946. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRev.69.37>. 7
- [25] Sete, E. A., Gambetta, J. M., Korotkov, A. N. Purcell effect with microwave drive: Suppression of qubit relaxation rate. *Physical Review B*, **89** (10), 104516, 2014. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.104516>. 7
- [26] Ferrón, A., Domínguez, D., Sánchez, M. J. Dynamic transition in landau-zener-stückelberg interferometry of dissipative systems: The case of the flux qubit. *Phys. Rev. B*, **93**, 064521, Feb 2016. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.064521>. 7, 36, 47
- [27] Bonifacio, M., Domínguez, D., Sánchez, M. J. Landau-zener-stückelberg interferometry in dissipative circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. B*, **101**, 245415, Jun 2020. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.101.245415>. 7
- [28] Ashcroft, N. W., Mermin, N. D. Solid state physics. Cengage Learning, 2022. 9, 10
- [29] Shirley, J. H. Solution of the schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time. *Phys. Rev.*, **138**, B979–B987, May 1965. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.138.B979>. 9, 43, 45, 47
- [30] Son, S.-K., Han, S., Chu, S.-I. Floquet formulation for the investigation of multiphoton quantum interference in a superconducting qubit driven by a strong ac field. *Phys. Rev. A*, **79**, 032301, Mar 2009. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.032301>. 10

- [31] Van Vleck, J. H. On σ -type doubling and electron spin in the spectra of diatomic molecules. *Phys. Rev.*, **33**, 467–506, Apr 1929. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.33.467>. 10
- [32] Wustmann, W. Statistical mechanics of time-periodic quantum systems. Tesis Doctoral, Universidad Técnica de Dresden, 2010. 11, 14, 15, 16, 21, 45
- [33] Gramajo, A. L. Interferometría Landau-Zener-Stuckelberg en qubits superconductores: modelado de sistemas fuera del equilibrio, entrelazamiento cuántico, y simuladores cuánticos. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Cuyo, 2021. 11, 12, 16
- [34] Taylor, J. R. Scattering theory: the quantum theory of nonrelativistic collisions. Courier Corporation, 2006. 11
- [35] Breuer, H.-P., Petruccione, F. The theory of open quantum systems. Oxford University Press, USA, 2002. 12, 13, 22, 32
- [36] Pechukas, P. Reduced dynamics need not be completely positive. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1060–1062, Aug 1994. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.1060>. 13
- [37] Johansson, J., Nation, P., Nori, F. Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, **184** (4), 1234–1240, abr. 2013. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019>. 13
- [38] Caldeira, A. O., Leggett, A. J. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 211–214, Jan 1981. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.46.211>. 14
- [39] Hone, D. W., Ketzmerick, R., Kohn, W. Statistical mechanics of floquet systems: The pervasive problem of near degeneracies. *Physical Review E*, **79** (5), 051129, 2009. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.051129>. 17, 21
- [40] Gasparinetti, S., Solinas, P., Pugnetti, S., Fazio, R., Pekola, J. P. Environment-governed dynamics in driven quantum systems. *Physical Review Letters*, **110** (15), 150403, 2013. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.150403>. 17
- [41] Bonifacio, M. C. Electrodinámica cuántica de circuitos de qubits superconductores. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Cuyo, 2019. 18
- [42] Gallardo, S. L. Generación de entrelazamiento en circuitos de qubits superconductores y resonadores cuánticos. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Cuyo, 2022. 19

- [43] Hatano, N., Suzuki, M. Finding Exponential Product Formulas of Higher Orders, pág. 37–68. Springer Berlin Heidelberg, 2005. URL http://dx.doi.org/10.1007/11526216_2. 19
- [44] Mori, T. Floquet states in open quantum systems. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, **14**, 35–56, 2023. 21
- [45] Steck, D. A. Quantum and atom optics. Universidad de Oregon, 2006. URL <http://steck.us/teaching>. 25
- [46] Pietikäinen, I., Danilin, S., Kumar, K. S., Vepsäläinen, A., Golubev, D. S., Tuorila, J., *et al.* Observation of the bloch-siegert shift in a driven quantum-to-classical transition. *Phys. Rev. B*, **96**, 020501, Jul 2017. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.020501>. 32, 39
- [47] Goorden, M., Thorwart, M., Grifoni, M. Entanglement spectroscopy of a driven solid-state qubit and its detector. *Physical review letters*, **93** (26), 267005, 2004. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.267005>. 36
- [48] Garg, A., Onuchic, J. N., Ambegaokar, V. Effect of friction on electron transfer in biomolecules. *The Journal of chemical physics*, **83** (9), 4491–4503, 1985. URL <https://doi.org/10.1063/1.449017>. 36
- [49] Collin, E., Ithier, G., Aassime, A., Joyez, P., Vion, D., Esteve, D. Nmr-like control of a quantum bit superconducting circuit. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 157005, Oct 2004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.157005>. 37
- [50] Bloch, F., Siegert, A. Magnetic resonance for nonrotating fields. *Phys. Rev.*, **57**, 522–527, Mar 1940. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.57.522>. 39

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer al Instituto Balseiro por darme la posibilidad de formarme rodeado de docentes excepcionales y compañeros motivados. Estos últimos años han sido una experiencia increíble y voy a estar siempre orgulloso de haber formado parte de este lugar.

Quiero agradecer a Daniel Dominguez por guiarme en la escritura de la tesis y en la toma de decisiones importantes. Junto a María José Sánchez, me aconsejaron con total honestidad en un momento en el que más los necesitaba, y por ello estoy profundamente agradecido.

El instituto me dió la oportunidad de conocer a MUCHOS docentes increíbles, de los cuales aprendí más que herramientas y conceptos. Algunos de estos profesores incluso se convirtieron en amigos, como es el caso de Leandro Tosi y Néstor Haberkorn. Con ellos también estoy sumamente agradecido.

Quiero agradecer a mis compañeros físicos IB21 por todos los buenos ratos compartidos, fútbol, asados, choris, etc. Ellos hicieron de estos años una experiencia realmente inolvidable. Especialmente le agradezco al Bruge, con quién preparamos el ingreso juntos, compartimos muchas risas, buenos y malos ratos acá. También le agradezco a Santi, a Marti y a Cyn, por las buenas y las malas. Los voy a extrañar mucho.

Por último, quiero agradecerle a mi abuelo, que sembró la semilla para estudiar física, a mi hermano, por ser como un amigo más, al Berna, por todos estos años de amistad, y especialmente a mis padres. Ellos hicieron todo al alcance de sus manos para brindarme la mejor formación posible y sin ellos, nada de esto hubiera sido posible. Con ellos estoy eternamente agradecido.

