

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**COMPACTIFICACIÓN DE SUPERCUERDAS
HETERÓTICAS EN ORBIFOLIOS ASIMÉTRICOS EN
D=7**

L. E. Diaz
Maestrando

Dr. G. Aldazabal
Director

Miembros del Jurado
Dr. C. Fosco (Instituto Balseiro)
Dra. M. Huerta (Instituto Balseiro)
Dra. C. Núñez (Univ. Nac. de Buenos Aires)

4 de Diciembre de 2023

Grupo de Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Inventario: 24827

24.04.24

Biblioteca Leo Falicov

A Lucas y Eva,
quienes supieron
acompañarme y motivarme
durante mi carrera.

Índice de símbolos y convenciones

- Signatura $(a, b) \equiv ((-1)^a, (+1)^b)$
- $q = e^{2\pi i\tau}$, representa el sector derecho en la función de partición mientras que \bar{q} al sector izquierdo.
- Convención para la cuerda heterótica: cuerda bosónica en el sector izquierdo y supercuerda en el sector derecho.

Índice de contenidos

Índice de símbolos y convenciones	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. La cuerda heterótica	1
1.2. Orbifolios	2
1.2.1. Función de partición en orbifolios	3
1.2.2. Acciones de \mathbb{Z}_N	4
1.3. Redes invariantes	5
2. Función de partición	9
2.1. Acción de \mathbb{Z}_3	9
2.2. Subsector $(1, g^l)$	10
2.3. Subsector $(g^k, 1)$	12
2.4. Subsector (g, g^l)	15
2.5. Subsector (g^2, g^l)	17
2.6. Condición de level matching	17
3. Espectro	19
3.1. Sector untwisted	19
3.1.1. Estados con $N_L = 1$ y $P_L^2 = 0$	21
3.1.2. Estados con $N_L = 0$ y $P_L^2 = 2$	23
3.2. Sector twisted	24
3.3. Ejemplo $s = 16$	26

3.3.1. Resolución de la condición de level matching	26
3.3.2. Sector untwisted	28
3.3.3. Sector twisted g	31
4. Conclusión	33
A. Funciones modulares	35
B. Automorfismos	37
Bibliografía	39
Agradecimientos	41

Índice de figuras

1.1. Puntos (r, a) que representan las posibles redes invariantes de $\Gamma_{(19,3)}$ por automorfismos de orden 3.	6
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

Índice de tablas

1.1. Redes invariantes y normales de $\Gamma_{(19,3)}$ ante automorfismos de grado 3	7
3.1. Estados invariantes con momentos en la red invariante	29

Resumen

Construimos modelos de supercuerdas heteróticas compactificadas en orbifolios asimétricos $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3$ con una acción que consiste en rotar dos direcciones derechas y s direcciones izquierdas y realizar a su vez una traslación en las direcciones invariantes. Luego calculamos la función de partición y verificamos su invariancia modular, obteniendo una condición sobre el vector de traslación. Por último, analizamos el espectro de estas teorías, enfocándonos en estados no masivos y taquiónicos.

Palabras clave: TEORÍA DE CUERDAS, ORBIFOLIOS ASIMÉTRICOS, FUNCIÓN DE PARTICIÓN, ESPECTRO

Abstract

We construct models of compactified heterotic superstring theories on asymmetric orbifolds $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3$ with an action that involves rotating two right movers and s left movers, along with a shift in the invariant directions. We then calculate the partition function and verify its modular invariance, obtaining a condition on the shift vector. Finally, we analyze the spectrum of these theories, focusing on massless and tachyonic states.

Keywords: STRING THEORY, ASYMMETRIC ORBIFOLDS, PARTITION FUNCTION, SPECTRUM

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se construyen modelos de la cuerda heterótica en orbifolios asimétricos en 7 dimensiones. Motiva este estudio la dualidad entre la cuerda heterótica y la teoría M compactificadas a 7 dimensiones. En esta última, aparece una clasificación de redes invariantes ante automorfismos de orden 3. Se utiliza esta clasificación para construir orbifolios asimétricos donde los momentos internos se encuentren en dichas redes invariantes.

En las secciones siguientes se presentan conceptos básicos en la construcción de orbifolios asimétricos, sentando las convenciones utilizadas a lo largo de este trabajo.

1.1. La cuerda heterótica

La cuerda heterótica es una construcción híbrida que combina una teoría de cuerdas bosónicas en un sector con una teoría de supercuerdas en el otro sector. La convención en este trabajo será ubicar en el sector izquierdo la teoría de cuerdas bosónicas. Esta teoría contiene 26 campos bosónicos, de los cuales 10 se corresponderán con las coordenadas espaciotemporales de la teoría de supercuerdas derecha. Las 16 direcciones izquierdas restantes estarán compactificadas y la invariancia modular exige que los momentos internos se encuentren en una red Γ_{16} par y autodual. Las únicas redes de rango 16 con estas características son las redes de raíces de $E_8 \times E_8$ y de $SO(32)$, dando lugar a las dos teorías de cuerdas heteróticas.

La función de partición de la cuerda heterótica puede escribirse de la siguiente manera

$$Z(\tau) = \frac{1}{\tau_2^4} \left[\frac{1}{\bar{\eta}^{24}} \sum_{P_L \in \Gamma_{16}} \bar{q}^{P_L^2/2} \right] \left[\frac{1}{\eta^{12}} \sum_{p \in \Gamma_F} q^{p^2/2} \right], \quad (1.1)$$

donde $q = e^{2\pi i\tau}$, p es un peso de $SO(8)$ en las clases de conjugación V y S_p . La suma

sobre Γ_F se refiere a

$$\sum_{p \in \Gamma_F} \equiv \left(\sum_{p \in V} - \sum_{p \in S_p} \right), \quad (1.2)$$

y contiene la información de los fermiones de la hoja de mundo. El factor $1/\tau_2^4$ en 1.1 proviene de los momentos espaciotemporales mientras que el primer corchete surge de los grados de libertad izquierdos y el segundo de los derechos.

La compactificación de la cuerda heterótica en un toro \mathbb{T}^D implica incluir en la red de momentos internos D direcciones derechas y D direcciones izquierdas adicionales a las 16 direcciones izquierdas de la construcción heterótica. Así, ahora los momentos internos están en una red par y autodual $\Gamma_{(16+D,D)}$ de rango $16 + 2D$ y signatura $(16 + D, D)$ ¹. La función de partición en \mathbb{T}^D es

$$Z(\tau) = \frac{1}{\tau_2^{(8-D)/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \left[\sum_{p \in \Gamma_F} q^{p^2/2} \right] \left[\sum_{P \in \Gamma_{(16+D,D)}} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} \right]. \quad (1.3)$$

1.2. Orbifolios

Un orbifolio \mathcal{O} se define como el cociente entre una variedad \mathcal{M} y un grupo de transformaciones isométricas G

$$\mathcal{O} = \frac{\mathcal{M}}{G}. \quad (1.4)$$

Esto es, si $g \in G$ y $x \in \mathcal{M}$, entonces x y gx son equivalentes en \mathcal{O} . En otras palabras, \mathcal{O} es el conjunto de órbitas de \mathcal{M} módulo G , por lo que recibe el nombre de orbifolio.

En lo que sigue se analizarán orbifolios de tipo $\mathbb{T}^D/\mathbb{Z}_N$, esto es, donde $G = \mathbb{Z}_N$ y $\mathcal{M} = \mathbb{T}^D$, el toro D -dimensional definido por

$$\mathbb{T}^D = \frac{\mathbb{R}^D}{\Lambda_D}, \quad (1.5)$$

con Λ_D una red D -dimensional. Así, los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^D$ quedan identificados a menos de un automorfismo de orden N y una traslación por un vector $\vec{L} \in \Lambda_D$

$$\vec{x} \sim g\vec{x} + 2\pi\vec{L}, \quad (1.6)$$

donde g es el generador de \mathbb{Z}_N , es decir, $g^N = 1$.

La condición de periodicidad para una cuerda cerrada en el orbifolio será la siguiente en las direcciones compactas

$$X^i(\tau, \sigma + \ell) = g^k X^i(\tau, \sigma) + 2\pi L^i, \quad (1.7)$$

¹Se tomará una métrica Lorentziana (a, b) como aquella con a elementos iguales a -1 y b elementos iguales a $+1$ en la diagonal.

con $k = 0, \dots, N - 1$. Cada una de estas k condiciones define un sector distinto de la teoría. Al resolver la ecuación de onda de la cuerda con 1.7 como condición de contorno, se obtiene un desarrollo en modos distinto para cada sector. Así, cada sector tendrá un hamiltoniano \mathcal{H}_k , o bien, un operador $L_0^{(k)}$, distinto. Para $k = 0$, la condición 1.7 y $L_0^{(0)}$ coinciden con aquellos en el toro. Este sector se denomina *untwisted* y consiste en estados de cuerdas que se cierran en \mathbb{T}^D sin necesidad de la acción del grupo. Los sectores con $k = 1, \dots, N$ se denominan sectores *twisted*. Estos corresponden a estados anclados a los puntos fijos del orbifolio y se caracterizan por tener *windings* y momentos internos cero.

1.2.1. Función de partición en orbifolios

Para calcular la función de partición $Z(\tau)$ es necesario incluir sólo los estados invariantes ante la acción de \mathbb{Z}_N . Esto se consigue incluyendo en la traza un operador de proyección \mathcal{P} de la forma

$$\mathcal{P} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g^l. \quad (1.8)$$

Además, se debe sumar sobre cada sector *twisted*. La función de partición es entonces

$$Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Tr}_{\mathcal{H}_k} \left(g^l q^{L_0^{(k)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(k)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right), \quad (1.9)$$

donde la traza se hace sobre el hamiltoniano del k -ésimo sector *twisted* \mathcal{H}_k . De manera resumida, se escribe

$$Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k,l=0}^{N-1} Z_{k,l}(\tau), \quad (1.10)$$

con

$$Z_{k,l}(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_k} \left(g^l q^{L_0^{(k)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(k)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right). \quad (1.11)$$

Estos términos de la función de partición definen subsectores. Se denotará con (g^k, g^l) al subsector asociado al término $Z_{k,l}(\tau)$. Los distintos subsectores se relacionan unos con otros gracias a las transformaciones modulares de la siguiente manera

$$Z_{k,l}(\tau) \xrightarrow{T} Z_{k,l+k}(\tau), \quad (1.12a)$$

$$Z_{k,l}(\tau) \xrightarrow{S} Z_{l,-k}(\tau). \quad (1.12b)$$

Así, se puede calcular la función de partición completa conociendo solo el hamiltoniano del sector *untwisted*, con el que se pueden calcular los $Z_{0,l}(\tau)$. Luego, a partir de estos

se obtiene el resto de los términos de $Z(\tau)$ aplicando transformaciones modulares².

1.2.2. Acciones de \mathbb{Z}_N

La acción del grupo \mathbb{Z}_N sobre los distintos grados de libertad de la cuerda en \mathbb{T}^D quedará definida dada una transformación lineal θ automorfismo de orden N de la red de momentos internos Γ .

Para definir la acción de g sobre los campos bosónicos de la hoja de mundo resulta conveniente elegir coordenadas complejas que diagonalicen θ

$$gZ^j = \lambda_j Z^j, \quad (1.13a)$$

$$gZ^{*j} = \lambda_j^* Z^{*j}, \quad (1.13b)$$

con λ_j los autovalores de θ . Este cambio de coordenadas se hace únicamente en las direcciones donde $\lambda_j \neq 1$. Es decir, en las direcciones invariantes no hay cambio de coordenadas.

Como la acción es de orden N , si \mathbf{v} es autovector de θ con autovalor λ_j , se ve que

$$\theta^N \mathbf{v} = \lambda_j^N \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

por lo que los posibles autovalores de θ son las raíces N -ésimas de la unidad. Entonces, se puede escribir

$$\lambda_j = e^{2\pi i v_j}, \quad (1.14)$$

donde $Nv_j = 1, \dots, N-1$.

A partir de las coordenadas usuales de la cuerda, se pueden escribir las coordenadas complejas 1.13 como

$$Z^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^j + iX^{j+1}), \quad (1.15a)$$

$$Z^{*j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^j - iX^{j+1}). \quad (1.15b)$$

En el sector untwisted, la expansión en modos para las nuevas coordenadas es

$$Z^j(\tau - \sigma) = z_0^j + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^j e^{-in(\tau - \sigma)} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^j e^{-in(\tau + \sigma)}, \quad (1.16a)$$

$$Z^{*j}(\tau + \sigma) = z_0^{*j} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{*j} e^{-in(\tau - \sigma)} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^{*j} e^{-in(\tau + \sigma)}. \quad (1.16b)$$

²Existen orbifolios no conectados donde esto no se cumple, pero no se incluye entre estos el orbifolio que estudiaremos.

donde se cumple $z_0^{*j} = (z_0^j)^\dagger$, $\alpha_n^{*j} = (\alpha_{-n}^j)^\dagger$ y $\bar{\alpha}_n^{*j} = (\bar{\alpha}_{-n}^j)^\dagger$. Se imponen las relaciones de conmutación

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^{*j}] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}, \quad (1.17a)$$

$$[\bar{\alpha}_n^i, \bar{\alpha}_m^{*j}] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}. \quad (1.17b)$$

Esto define a $\alpha_{-n}^j, \alpha_{-n}^{*j}$ ($n > 0$) como operadores de creación en el sector derecho y a $\bar{\alpha}_{-n}^j, \bar{\alpha}_{-n}^{*j}$ ($n > 0$) como operadores de creación en el sector izquierdo. La acción 1.13 se transforma en la siguiente sobre los osciladores

$$g\alpha_{-n}^j g^{-1} = e^{2\pi i v_j} \alpha_{-n}^j, \quad (1.18a)$$

$$g\alpha_{-n}^{*j} g^{-1} = e^{-2\pi i v_j} \alpha_{-n}^{*j}, \quad (1.18b)$$

$$g\bar{\alpha}_{-n}^j g^{-1} = e^{2\pi i v_j} \bar{\alpha}_{-n}^j, \quad (1.18c)$$

$$g\bar{\alpha}_{-n}^{*j} g^{-1} = e^{-2\pi i v_j} \bar{\alpha}_{-n}^{*j}. \quad (1.18d)$$

La acción de \mathbb{Z}_N sobre los fermiones de la hoja de mundo estará dada por

$$g|p\rangle = e^{-2\pi i p \cdot v_f} |p\rangle, \quad (1.19)$$

con p un peso de $SO(8)$ en la clase de conjugación V o S_p y

$$v_f = (v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}, v_{j_4}), \quad (1.20)$$

donde los v_j son los definidos para las coordenadas bosónicas.

Sobre la red de momentos internos Γ el grupo actuará rotando los momentos por θ . Además, es posible actuar sobre Γ con una traslación por un vector V en las direcciones que no se ven afectadas por θ . Así, si $P \in \Gamma$

$$g|P\rangle = e^{2\pi i P \cdot V} |\theta P\rangle. \quad (1.21)$$

1.3. Redes invariantes

La red par y autodual $\Gamma_{(19,3)}$ aparece en contextos en principio desconectados. Por una parte, en la cuerda heterótica compactificada en \mathbb{T}^3 , la invariancia modular fuerza a los momentos internos a estar en $\Gamma_{(19,3)}$. Por otra parte, en el contexto de la teoría M compactificada en $K3$, $\Gamma_{(19,3)}$ es isométrica al segundo grupo de cohomologías de $K3$ con la forma intersección de $K3$. En este trabajo se estudiará la cuerda heterótica compactificada en un orbifolio asimétrico $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3$ donde la acción de \mathbb{Z}_3 está dada por un automorfismo θ de $\Gamma_{(19,3)}$ de orden 3 que rota dos direcciones derechas y s direcciones

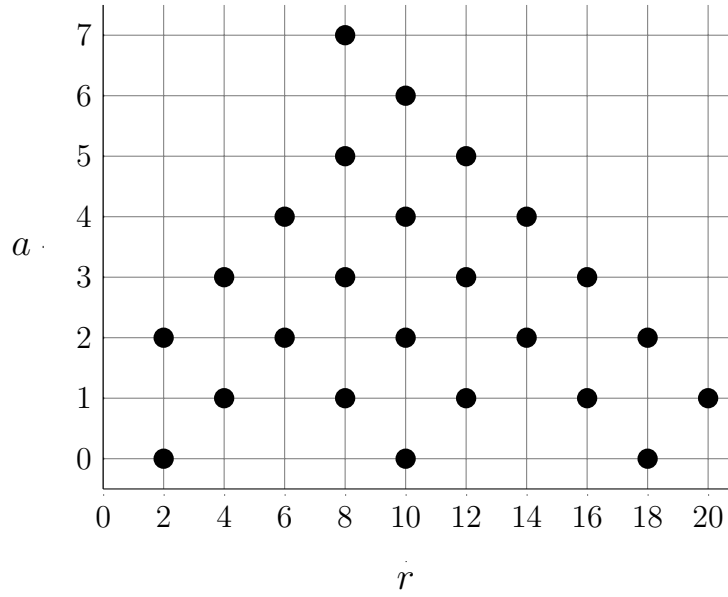


Figura 1.1: Puntos (r, a) que representan las posibles redes invariantes de $\Gamma_{(19,3)}$ por automorfismos de orden 3.

izquierdas. Este automorfismo deja invariante una subred I de rango $r = 20 - s$ y signatura $(r - 1, 1)$. La subred normal a esta en $\Gamma_{(19,3)}$, denotada N , tendrá rango $s + 2$ y signatura $(s, 2)$. En [1] se muestra que un vector $P \in \Gamma_{(19,3)}$ puede escribirse $P = (P_N, P_I)$ con $P_N \in N^*$ y $P_I \in I^*$. Además, vale que $I^*/I = N^*/N$. El automorfismo θ actúa de la siguiente manera sobre un $P \in \Gamma_{(19,3)}$

$$\theta(P_N, P_I) = (\theta P_N, P_I). \quad (1.22)$$

Con esto, se ve que $(1 + \theta + \theta^2)(P_N, P_I) = (P_N + \theta P_N + \theta^2 P_N, 3P_I) = (0, 3P_I)$ es un vector en la red invariante. Pero como P_I es un vector arbitrario en I^* , resulta que $3I^* \subset I$ y por lo tanto

$$I^*/I = N^*/N = (\mathbb{Z}_3)^a. \quad (1.23)$$

Artbani, Sarti y Taki [2–4] demuestran, en el contexto de automorfismos no simplécticos de orden 3 en superficies $K3$, que las redes I, N quedan completamente determinadas por los parámetros (r, a) . Además, dan una lista de los posibles puntos, mostrados en la figura 1.1, y las redes invariantes y normales correspondientes, listadas aquí en la tabla 1.1. La dualidad entre la cuerda heterótica en \mathbb{T}^3 y la teoría M en superficies $K3$ [5, 6] sugiere que estas redes invariantes pueden ser usadas para construir modelos de cuerdas heteróticas cocientadas por \mathbb{Z}_3 . En [7] se construyen modelos de cuerdas heteróticas en orbifolios asimétricos $\mathbb{T}_3/\mathbb{Z}_2$ basándose en la calificación de redes invariantes ante reflexiones hecha por Nikulin [8–10]. En este trabajo se adaptan algunos de los resultados obtenidos en [7] a orbifolios asimétricos $\mathbb{T}_3/\mathbb{Z}_2$ usando las redes de la tabla 1.1.

#	(r, a)	s	I	N
1	(2, 0)	18	U	$U^2 \oplus E_8^2$
2	(2, 2)	18	$U(3)$	$U \oplus U(3) \oplus E_8^2$
3	(4, 1)	16	$U \oplus A_2$	$U^2 \oplus E_6 \oplus E_8$
4	(4, 3)	16	$U(3) \oplus A_2$	$U \oplus U(3) \oplus E_6 \oplus E_8$
5	(6, 2)	14	$U \oplus A_2^2$	$U^2 \oplus E_6^2$
6	(6, 4)	14	$U(3) \oplus A_2^2$	$U \oplus U(3) \oplus E_6^2$
7	(8, 1)	12	$U \oplus E_6$	$U^2 \oplus E_8 \oplus A_2$
8	(8, 3)	12	$U \oplus A_2^3$	$U \oplus U(3) \oplus E_8 \oplus A_2$
9	(8, 5)	12	$U(3) \oplus A_2^3$	$A_2(-1) \oplus E_6 \oplus A_2^3$
10	(8, 7)	12	$U(3) \oplus E_6^*(3)$	$A_2(-1) \oplus A_2^6$
11	(10, 0)	10	$U \oplus E_8$	$U^2 \oplus E_8$
12	(10, 2)	10	$U \oplus E_6 \oplus A_2$	$U \oplus U(3) \oplus E_8$
13	(10, 4)	10	$U \oplus A_2^4$	$U \oplus U(3) \oplus E_6 \oplus A_2$
14	(10, 6)	10	$U(3) \oplus A_2^4$	$A_2(-1) \oplus A_2^5$
15	(12, 1)	8	$U \oplus E_8 \oplus A_2$	$A_2(-1) \oplus E_8$
16	(12, 3)	8	$U \oplus E_6 \oplus A_2^2$	$A_2(-1) \oplus E_6 \oplus A_2$
17	(12, 5)	8	$U \oplus A_2^5$	$A_2(-1) \oplus A_2^4$
18	(14, 2)	6	$U \oplus E_8 \oplus A_2^2$	$A_2(-1) \oplus E_6$
19	(14, 4)	6	$U \oplus E_6 \oplus A_2^3$	$A_2(-1) \oplus A_2^3$
20	(16, 1)	4	$U \oplus E_8 \oplus E_6$	$U^2 \oplus A_2$
21	(16, 3)	4	$U \oplus E_8 \oplus A_2^3$	$A_2(-1) \oplus A_2^2$
22	(18, 0)	2	$U \oplus E_8^2$	U^2
23	(18, 2)	2	$U \oplus E_8 \oplus E_6 \oplus A_2$	$U \oplus U(3)$
24	(20, 1)	0	$U \oplus E_8^2 \oplus A_2$	$A_2(-1)$

Tabla 1.1: Redes invariantes y normales de $\Gamma_{(19,3)}$ ante automorfismos de grado 3.

Capítulo 2

Función de partición

En este capítulo se calcula la función de partición para el orbifold asimétrico $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3$ que se obtiene al rotar dos direcciones derechas, s direcciones derechas y realizar un shift por un vector V . En 2.1 se especifica la acción de \mathbb{Z}_3 sobre los distintos grados de libertad de la teoría. En las secciones siguientes se calculan las funciones de partición $Z_{k,l}$ de los subsectores (g^k, g^l) siguiendo el procedimiento descrito en 1.2.1. Finalmente, en la sección 2.6 se obtiene una condición de level matching sobre el vector de shift para asegurar la invariancia modular.

2.1. Acción de \mathbb{Z}_3

Como se dijo en la sección 1.2.2, es necesario especificar un automorfismo θ de orden 3 de la red $\Gamma_{(19,3)}$ para definir la acción del grupo. En realidad, como θ no actúa sobre la red invariante I , lo que se busca es un automorfismo de la red normal N . Como se muestra en la tabla 1.1, las redes normales son sumas directas de redes U , $U(3)$, A_2 , E_6 y E_8 . Por lo tanto, basta con dar un automorfismo para cada una de estas redes básicas. Luego, se obtiene un automorfismo para una N dada como una matriz con bloques dados por los automorfismos anteriores. Estos serán automorfismos que no mezclan vectores entre las distintas redes que aparecen en la suma directa. En el apéndice B se da un automorfismo para cada una de las redes básicas¹. Como se esperaba, todos los autovalores de estos automorfismos son de la forma $e^{2\pi i v_j}$, con $v_j = 1/3, 2/3$.

La acción de \mathbb{Z}_3 sobre los fermiones de la hoja de mundo estará dada por

$$g|p\rangle = e^{-2\pi i p \cdot v_f} |p\rangle, \quad (2.1)$$

donde $v_f = (0, 0, 0, v)$, ya que sólo se rotan dos direcciones en el sector derecho, y v

¹Para encontrar automorfismos en el caso de las redes U y $U(3)$ fue necesario combinar dos de ellas e intercambiar vectores entre las dos redes. Por esto, se presentan en cambio automorfismos de U^2 y $U \oplus U(3)$, que son justamente los grupos que aparecen en las redes normales de la tabla 1.1.

corresponde al autovalor de θ en las direcciones derechas de N . La elección $v = 1/3$ no da una acción de \mathbb{Z}_3 ya que para $p \in S_p$

$$g^3|p\rangle = e^{-2\pi i p \cdot (3v_f)}|p\rangle = -|p\rangle, \quad (2.2)$$

lo cual lleva en cambio a una acción de \mathbb{Z}_6 . Para evitar esto, se elige $v = 2/3$.

Para definir la acción sobre las coordenadas bosónicas, hay que especificar los v_j con los que transforman los osciladores rotados. El análisis anterior fijó en $v = 2/3$ su valor para los osciladores derechos. Por simplicidad, se elige $v_j = v \forall j$.

Por último, la acción del grupo sobre la red de momentos $\Gamma_{(19,3)}$ será

$$g|P_N, P_I\rangle = e^{2\pi i P_I \cdot V}|\theta P_N, P_I\rangle, \quad (2.3)$$

con V un vector de shift. El requerimiento de que $g^3 = 1$ impone $e^{2\pi i P_I \cdot (3V)} = 1$, de modo que $P_I \cdot (3V) \in \mathbb{Z}$, o bien, $3V \in I$. La invariancia modular impondrá otras condiciones a V .

2.2. Subsector $(1, g^l)$

Como el hamiltoniano en el sector untwisted coincide con el de la cuerda en \mathbb{T}^3 , $Z_{0,0}$ coincide con la función de partición en el toro, que de acuerdo con 1.3 es

$$Z_{0,0}(\tau) = \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \left[\sum_{p \in \Gamma_F} q^{p^2/2} \right] \left[\sum_{P \in \Gamma_{(19,3)}} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} \right]. \quad (2.4)$$

Para calcular $Z_{0,l}$ se incluye una proyección por g^l en la traza. Se escribe

$$Z_{0,l}(\tau) = Z_{0,l}^{(ET)}(\tau) Z_{0,l}^{(\bar{B})}(\tau) Z_{0,l}^{(B)}(\tau) Z_{0,l}^{(F)}(\tau) Z_{0,l}^{(\Gamma)}(\tau), \quad (2.5)$$

definiendo los factores

$$Z_{0,l}^{(ET)}(\tau) = \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}}, \quad (2.6a)$$

$$Z_{0,l}^{(B)}(\tau) = \eta^2 \text{Tr}_B \left(g^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right), \quad (2.6b)$$

$$Z_{0,l}^{(\bar{B})}(\tau) = \bar{\eta}^s \text{Tr}_{\bar{B}} \left(g^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right), \quad (2.6c)$$

$$Z_{0,l}^{(F)}(\tau) = \eta^4 \text{Tr}_F \left(g^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right), \quad (2.6d)$$

$$Z_{0,l}^{(\Gamma)}(\tau) = \text{Tr}_\Gamma \left(g^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right). \quad (2.6e)$$

donde B (\bar{B}) hace referencia a los osciladores bosónicos derechos (izquierdos) afectados

por el orbifold, F al sector fermiónico de la hoja de mundo, Γ a los momentos internos y ET a los grados de libertad espaciotemporales. Se calculan a continuación cada uno de estos factores.

Factores B, \bar{B}

Usando las oscilaciones de las coordenadas complejas 1.13, se puede factorizar $Z_{0,l}^{(B)}$ en estados de la forma

$$|n, k\rangle = (\alpha_{-n})^k |0\rangle, \quad |n^*, k\rangle = (\alpha_{-n}^*)^k |0\rangle.$$

A partir de esto

$$\begin{aligned} Z_{0,l}^{(B)}(\tau) &= \eta^2 \text{Tr}_B \left(\theta^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{\bar{c}}{24}} \right) \\ &= \eta^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \langle n, k | \theta^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} |n, k\rangle \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \langle n^*, k | \theta^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24}} |n^*, k\rangle \right) \\ &= \eta^2 q^{-1/12} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (q^n e^{2\pi i l v})^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (q^n e^{-2\pi i l v})^k \right) \\ &= \eta^2 q^{-1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n e^{2\pi i l v})^{-1} (1 - q^n e^{-2\pi i l v})^{-1}. \end{aligned}$$

Usando la definición A.8 se tiene que

$$\vartheta \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 + lv \end{array} \right] = 2 \sin(\pi l v) \eta q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n e^{2\pi i l v}) (1 - q^n e^{-2\pi i l v}). \quad (2.7)$$

En comparación con lo anterior se ve que

$$Z_{0,l}^{(B)}(\tau) = \left(\frac{2 \sin(\pi l v) \eta^3}{\vartheta \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 + lv \end{array} \right]} \right). \quad (2.8)$$

Siguiendo un cálculo idéntico, se llega a

$$Z_{0,l}^{(\bar{B})}(\tau) = \prod_{i=1}^{s/2} \left(\frac{2 \sin(\pi l v_i) \bar{\eta}^3}{\bar{\vartheta} \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 + l v_i \end{array} \right]} \right) = \left(\frac{2 \sin(\pi l v) \bar{\eta}^3}{\bar{\vartheta} \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 + lv \end{array} \right]} \right)^{s/2}, \quad (2.9)$$

donde se usó que $v_i = v$ para todo i .

Factor Γ

En este factor, la traza es una suma sobre los momentos en la red $\Gamma_{(19,3)}$. Sin embargo, en la proyección por θ^l sólo se conservarán aquellos vectores en la red invariante I . De esta forma

$$\begin{aligned} Z_{0,l}^{(\Gamma)}(\tau) &= \text{Tr}_{\Gamma} \left(\theta^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{c}{24}}} \right) \\ &= \sum_{P \in \Gamma_{(19,3)}} \langle P | \left(\theta^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{c}{24}}} \right) | P \rangle \\ &= \sum_{P \in I} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} e^{2\pi i P \cdot (lv)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Factor F

Análogamente al caso anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} Z_{0,l}^{(F)}(\tau) &= \eta^4 \text{Tr}_F \left(\theta^l q^{L_0^{(0)} - \frac{c}{24} \bar{q}^{\bar{L}_0^{(0)} - \frac{c}{24}}} \right) \\ &= \sum_{p \in \Gamma_F} q^{p^2/2} e^{-2\pi i p \cdot (lv_f)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En resumen

Reemplazando los distintos factores en 2.5, se obtiene

$$\begin{aligned} Z_{0,l}(\tau) &= \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \left(\frac{2 \sin(\pi lv) \bar{\eta}^3}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 + lv \end{smallmatrix} \right]} \right)^{s/2} \left(\frac{2 \sin(\pi lv) \eta^3}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 + lv \end{smallmatrix} \right]} \right) \times \\ &\quad \times \left[\sum_{p \in \Gamma_F} q^{p^2/2} e^{-2\pi i p \cdot (lv_f)} \right] \left[\sum_{P \in I} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} e^{2\pi i P \cdot (lv)} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3. Subsector $(g^k, 1)$

Gracias a la propiedad 1.12b, se puede obtener $Z_{k,0}$ aplicando una transformación S a $Z_{0,l}$. Esto es

$$Z_{k,0}(\tau) = Z_{0,k}^{(ET)}(-1/\tau) Z_{0,k}^{(\bar{B})}(-1/\tau) Z_{0,k}^{(B)}(-1/\tau) Z_{0,k}^{(F)}(-1/\tau) Z_{0,k}^{(\Gamma)}(-1/\tau). \quad (2.13)$$

Factor ET

Usando las propiedades de transformación A.7 y $\tau_2 \xrightarrow{S} \tau_2/|\tau|^2$, se calcula

$$Z_{0,k}^{(ET)}(-1/\tau) = \frac{|\tau|^5}{(i\bar{\tau})^{12}(-i\tau)^6} \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{(i\bar{\tau})^6 |\tau|^7} Z_{k,0}^{(ET)}(\tau), \quad (2.15)$$

definiendo

$$Z_{k,0}^{(ET)}(\tau) = \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}}. \quad (2.16)$$

Factores B, \bar{B}

A partir de las propiedades A.7 y A.11 se obtiene que

$$Z_{0,k}^{(B)}(-1/\tau) = 2 \sin(\pi kv) (-i\tau)^{3/2} \eta^3 (-i\tau)^{-1/2} \vartheta^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 + kv \\ -1/2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Haciendo uso de la propiedad A.12 se reescribe

$$\begin{aligned} \vartheta^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 + kv \\ -1/2 \end{bmatrix} &= \vartheta^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 + kv \\ 1/2 - 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{-2\pi i(1/2+kv)(-1)} \vartheta^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 + kv \\ 1/2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que reemplazando en la expresión anterior da lugar a

$$Z_{0,k}^{(B)}(-1/\tau) = (-i\tau) e^{2\pi i(1/2+kv)} Z_{k,0}^{(B)}(\tau), \quad (2.18)$$

donde se definió

$$Z_{k,0}^{(B)}(\tau) = \left(\frac{2 \sin(\pi kv) \eta^3}{\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 + kv \\ 1/2 \end{bmatrix}} \right). \quad (2.19)$$

Análogamente, para el factor \bar{B} se obtiene

$$Z_{0,k}^{(\bar{B})}(-1/\tau) = (i\bar{\tau})^{s/2} e^{-\pi i s(1/2+kv)} Z_{k,0}^{(\bar{B})}(\tau), \quad (2.20)$$

con

$$Z_{k,0}^{(\bar{B})}(\tau) = \left(\frac{2 \sin(\pi kv) \bar{\eta}^3}{\bar{\vartheta} \begin{bmatrix} 1/2 + kv \\ 1/2 \end{bmatrix}} \right)^{s/2}. \quad (2.21)$$

Factor Γ

Con el objetivo de aplicar la resumación de Poisson [A.13](#), reescribo

$$\begin{aligned}
Z_{0,k}^{(\Gamma)}(\tau) &= \sum_{P \in I} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} e^{2\pi i P \cdot (kV)} \\
&= \sum_{P \in I} \exp[-\pi i \bar{\tau} P_L^2 + \pi i \tau P_R^2 + 2\pi i P \cdot (kV)] \\
&= \sum_{P \in I} \exp[-\pi P^T \cdot A \cdot P + 2\pi i P \cdot (kV)], \tag{2.22}
\end{aligned}$$

donde

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} i\bar{\tau}\mathbb{I}_{19-s} & 0 \\ 0 & -i\tau\mathbb{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

y \mathbb{I}_n es la matriz identidad de $n \times n$. Por otra parte, sea

$$B(\tau) = A(-1/\tau) = \begin{pmatrix} (i\bar{\tau})^{-1}\mathbb{I}_{19-s} & 0 \\ 0 & (-i\tau)^{-1}\mathbb{I}_1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Se ve que $\det B(\tau) = (-i\tau)^{-1}(i\bar{\tau})^{s-19}$ y $B^{-1}(\tau) = A(\tau)$. Ahora bien, aplicando una transformación S a [2.22](#) y usando la resumación de Poisson se tiene que

$$\begin{aligned}
Z_{0,k}^{(\Gamma)}(-1/\tau) &= \sum_{P \in I} \exp[-\pi P^T \cdot B \cdot P + 2\pi i P \cdot (kV)] \\
&= \frac{1}{|I^*/I|\sqrt{\det B}} \sum_{P \in I^*} \exp[-\pi(P+kV)^T \cdot B^{-1} \cdot (P+kV)] \\
&= \frac{1}{|I^*/I|} |\tau| (i\bar{\tau})^{9-s/2} \sum_{P \in I^*} \exp[-\pi(P+kV)^T \cdot A \cdot (P+kV)] \\
&= \frac{1}{|I^*/I|} |\tau| (i\bar{\tau})^{9-s/2} Z_{k,0}^{(\Gamma)}(\tau), \tag{2.25}
\end{aligned}$$

con

$$Z_{k,0}^{(\Gamma)}(\tau) = \sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+kV)_L^2/2} q^{(P+kV)_R^2/2}. \tag{2.26}$$

Factor F

Con un cálculo similar al anterior, se llega a

$$Z_{0,k}^{(F)}(-1/\tau) = (-i\tau)^2 Z_{k,0}^{(F)}(\tau). \tag{2.27}$$

con

$$Z_{k,0}^{(F)}(\tau) = \sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-kv_f)^2/2}. \tag{2.28}$$

En resumen

Se reescribe 2.13 para obtener

$$Z_{k,0}(\tau) = \varepsilon(k, 0) \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \left(\prod_{i=1}^{s/2} \frac{2 \sin(\pi k v) \bar{\eta}^3}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + kv \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right]} \right)^{s/2} \left(\frac{2 \sin(\pi k v) \eta^3}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + kv \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right]} \right) \times \\ \times \left[\sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-kv_f)^2/2} \right] \left[\sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+kV)_L^2/2} q^{(P+kV)_R^2/2} \right], \quad (2.29)$$

donde se definió la constante

$$\varepsilon(k, 0) = \frac{1}{|I^*/I|} e^{\pi i [kv(2-s) + 1 - s/2]}. \quad (2.30)$$

2.4. Subsector (g, g^l)

Gracias a 1.12a, se obtienen los términos $Z_{1,l}$ al aplicar l veces una transformación T a $Z_{1,0}$. Esto es

$$Z_{1,l}(\tau) = \varepsilon(1, 0) Z_{1,0}^{(ET)}(\tau + l) Z_{1,0}^{(\bar{B})}(\tau + l) Z_{1,0}^{(B)}(\tau + l) Z_{1,0}^{(F)}(\tau + l) Z_{1,0}^{(\Gamma)}(\tau + l). \quad (2.31)$$

Factor ET

De las propiedades A.6

$$Z_{1,0}^{(ET)}(\tau + l) = \frac{e^{l(\pi i/12)24} e^{-l(\pi i/12)12}}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \\ = e^{l\pi i} Z_{1,l}^{(ET)}(\tau), \quad (2.32)$$

donde

$$Z_{1,l}^{(ET)}(\tau) = \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}}. \quad (2.33)$$

Factores B y \bar{B}

Por A.6 y A.10, se tiene que

$$Z_{1,0}^{(B)}(\tau + l) = 2 \sin(\pi v) e^{l\pi i/4} \eta^3 e^{l\pi i[(1/2+v)^2 - (1/2+v)]} \vartheta^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + l(1/2 + v - 1/2) \end{smallmatrix} \right] \\ = e^{\pi i l v^2} Z_{k,0}^{(B)}(\tau), \quad (2.34)$$

con

$$Z_{1,l}^{(B)}(\tau) = \left(\frac{2 \sin(\pi v) \eta^3}{\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + lv \end{bmatrix}} \right). \quad (2.35)$$

Análogamente, para el sector izquierdo

$$Z_{1,0}^{(\bar{B})}(-1/\tau) = e^{-\pi i l v^2 s/2} Z_{1,l}^{(\bar{B})}(\tau), \quad (2.36)$$

definiendo

$$Z_{1,l}^{(\bar{B})}(\tau) = \left(\frac{2 \sin(\pi v) \bar{\eta}^3}{\bar{\vartheta} \begin{bmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + lv \end{bmatrix}} \right)^{s/2}. \quad (2.37)$$

Factor Γ

Se define en esta ocasión

$$\begin{aligned} Z_{1,l}^{(\Gamma)}(\tau) &= Z_{1,0}^{(\Gamma)}(\tau + l) \\ &= \sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+V)_L^2/2} q^{(P+V)_R^2/2} e^{\pi i l (P+V)^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Factor F

De manera similar al caso del factor Γ , se obtiene

$$\begin{aligned} Z_{1,l}^{(F)}(\tau) &= Z_{1,0}^{(F)}(\tau + l) \\ &= \sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-v_f)^2/2} e^{\pi i l (p-v_f)^2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

En resumen

Reemplazando lo obtenido en 2.31 y reagrupando los factores constantes, se tiene

$$\begin{aligned} Z_{1,l}(\tau) &= \varepsilon(1, l) \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \left(\frac{2 \sin(\pi v) \bar{\eta}^3}{\bar{\vartheta} \begin{bmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + lv \end{bmatrix}} \right)^{s/2} \left(\frac{2 \sin(\pi v) \eta^3}{\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + lv \end{bmatrix}} \right) \times \\ &\quad \times \left[\sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-v_f)^2/2} e^{\pi i l (p-v_f)^2} \right] \left[\sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+V)_L^2/2} q^{(P+V)_R^2/2} e^{\pi i l (P+V)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde ahora

$$\varepsilon(1, l) = \varepsilon(1, 0) e^{\pi i l [v^2(1-s/2)+1]}. \quad (2.41)$$

2.5. Subsector (g^2, g^l)

Por 1.12a, se obtiene mediante $Z_{2,0} \xrightarrow{T} Z_{2,2} \xrightarrow{T} Z_{2,1}$ el resto de los términos de la función de partición con cuentas similares a las mostradas en las secciones anteriores. En resumen, para $l = 1, 2$ resulta ser

$$Z_{2,l}(\tau) = \varepsilon(2, l) \frac{1}{\tau_2^{5/2} \bar{\eta}^{24} \eta^{12}} \left(\frac{2 \sin(2\pi v) \bar{\eta}^3}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + 2v \\ 1/2 + lv \end{smallmatrix} \right]} \right)^{s/2} \left(\frac{2 \sin(2\pi v) \eta^3}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + 2v \\ 1/2 + lv \end{smallmatrix} \right]} \right) \times \\ \times \left[\sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-2v_f)^2/2} e^{\pi i(3-l)(p-2v_f)^2} \right] \left[\sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+2V)_L^2/2} q^{(P+2V)_R^2/2} e^{\pi i(3-l)(P+2V)^2} \right], \quad (2.42)$$

donde los factores constantes son

$$\varepsilon(2, 1) = \varepsilon(2, 0) e^{\pi i[3v(s/2-1)-4v^2(1-s/2)]}, \quad (2.43)$$

$$\varepsilon(2, 2) = \varepsilon(2, 0) e^{\pi i[4v^2(1-s/2)+1]}. \quad (2.44)$$

2.6. Condición de level matching

La invariancia modular exige que $Z_{k,3} = Z_{k,0}$. Esto impondrá una condición sobre el vector de shift V . A continuación se arregla la expresión 2.40 con $l = 3$ para compararla con 2.29 en el primer sector twisted.

Factores B, \bar{B}

Usando la propiedad A.12, se escribe

$$Z_{1,3}^{(B)}(\tau) = 2 \sin(\pi v) \eta^3 \vartheta^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + 3v \end{smallmatrix} \right] \\ = 2 \sin(\pi v) \eta^3 e^{-2\pi i(1/2+v)(3v)} \vartheta^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right] \\ = e^{-\pi i 3v} e^{-2\pi i 3v^2} Z_{1,0}^{(B)}(\tau). \quad (2.45)$$

De la misma forma, para los osciladores izquierdos se tiene

$$Z_{1,3}^{(\bar{B})}(\tau) = e^{\pi i 3vs/2} e^{\pi i 3v^2 s} Z_{1,0}^{(\bar{B})}(\tau). \quad (2.46)$$

Factor Γ

En este caso

$$\begin{aligned}
Z_{1,3}^{(\Gamma)}(\tau) &= \sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+V)_L^2/2} q^{(P+V)_R^2/2} e^{\pi i 3(P+V)^2} \\
&= \sum_{P \in I^*} \bar{q}^{(P+V)_L^2/2} q^{(P+V)_R^2/2} e^{\pi i 3P^2} e^{2\pi i P \cdot (3V)} e^{\pi i 3V^2} \\
&= e^{\pi i 3V^2} Z_{1,0}^{(\Gamma)}(\tau),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

donde se usó que $P \cdot (3V) \in \mathbb{Z}$ para momentos en la red I^* ya que $3V \in I$, y el hecho de que para todas las redes invariantes mostradas en la tabla 1.1 se cumple que $3P^2$ es par, con $P \in I^*$.

Factor F

Para los fermiones de la hoja de mundo se tiene que

$$\begin{aligned}
Z_{1,3}^{(F)}(\tau) &= \sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-v_f)^2/2} e^{\pi i 3(p-v_f)^2} \\
&= \sum_{p \in \Gamma_F} q^{(p-v_f)^2/2} e^{\pi i 3p^2} e^{2\pi i p \cdot (3v_f)} e^{\pi i 3v_f^2} \\
&= e^{\pi i} e^{\pi i 3v^2} Z_{1,0}^{(F)}(\tau),
\end{aligned} \tag{2.48}$$

donde se usó que $p \cdot (3v_f) \in \mathbb{Z}$ y que los pesos de $SO(8)$ en las clases de conjugación V y S_p tienen norma impar.

Level matching

Reagrupando los factores, y recordando la definición 2.41, se llega a que

$$\begin{aligned}
Z_{1,3} &= e^{\pi i 3[v^2(1-s/2)+1]} e^{-\pi i 3v} e^{-2\pi i 3v^2} e^{\pi i 3vs/2} e^{\pi i 3v^2 s} e^{\pi i 3V^2} e^{\pi i} e^{\pi i 3v^2} Z_{1,0} \\
&= e^{\pi i [3V^2+2s/3]} Z_{1,0},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

donde se usó que $v = 2/3$. La imposición $Z_{1,3} = Z_{1,0}$ da entonces la condición de level matching

$$3V^2 + \frac{2s}{3} = 0 \pmod{2}. \tag{2.50}$$

Se puede verificar que esta condición también asegura que $Z_{2,3} = Z_{2,0}$.

Capítulo 3

Espectro

En este capítulo se analizan características generales del espectro de los orbifolios contruidos sin hacer específica la red (r, a) y centrándose en el espectro no masivo y la presencia de taquiones. En la última sección se considera un ejemplo particular.

3.1. Sector untwisted

Componen este sector los subsectores $(1, 1)$, con función de partición 2.4, y $(1, g^l)$, $l = 1, 2$, con funciones de partición 2.12. De estas funciones de partición es posible obtener los distintos aportes a la fórmula de masa. Así, m_R^2 (m_L^2) está dada por los exponentes de q (\bar{q}). En este sector

$$m_L^2 = \frac{1}{2}P_L^2 + N_L - 1, \quad (3.1a)$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}P_R^2 + N_R - \frac{1}{2}. \quad (3.1b)$$

Aquí, N_L, N_R son los operadores de número, cuya forma se puede deducir de los desarrollos en potencias de q de las funciones η y ϑ . En este caso, tanto los osciladores rotados (en direcciones rotadas) como los no rotados aportan valores enteros a la masa. Por otra parte, es necesario notar que los momentos P estarán, en cada subsector, en la red sobre la que se realiza la suma en la función de partición correspondiente. Así, en el subsector $(1, 1)$ $P \in \Gamma_{(19,3)}$ y en los subsectores $(1, g)$ y $(1, g^2)$ $P \in I$.

Conformarán el espectro únicamente aquellos estados invariantes ante la acción del orbifolio, es decir, estados que no se ven modificados por el operados de proyección \mathcal{P} . Los factores que aparecen en cada subsector al proyectar también pueden ser

leídos de la función de partición. En este caso se tiene

$$\begin{aligned} (1, 1) &: 1 & P \in \Gamma_{(19,3)}, \\ (1, g) &: e^{-2\pi i p \cdot v_f} e^{2\pi i P \cdot V} & P \in I, \\ (1, g^2) &: e^{2\pi i p \cdot v_f} e^{-2\pi i p \cdot V} & P \in I, \end{aligned}$$

donde se usó que $e^{-2\pi i p \cdot 2v_f} = e^{2\pi i p \cdot v_f}$ y $e^{2\pi i p \cdot 2V} = e^{-2\pi i p \cdot V}$. Además, aparecerán fases asociadas a los osciladores, que en este sector son las dadas en 1.18.

Una primera característica del espectro es que, dado que p está en las clases V o S_p de $SO(8)$, $p^2 \geq 1$ y por lo tanto $m_R^2 \geq 0$. Esto, junto con la condición de level matching $m_R^2 = m_L^2$, asegura que no hay taquiones en el sector untwisted.

Para los estados no masivos, $m_R^2 = 0$ y $m_L^2 = 0$. Lo primero se consigue únicamente si $p^2 = 1$, $P_R = 0$ y $N_R = 0$. Se distinguen tres grupos de p que satisfacen $p^2 = 1$:

- $p_0^\pm = (0, 0, 0, \pm 1)$, o p_0 en general. Los estados con p_0 incluyen un oscilador fermiónico rotado. Como $p_0 \in V$, darán lugar a bosones en el espaciotiempo. El aporte a \mathcal{P} es de la forma $e^{-2\pi i p_0^\pm \cdot v_f} = e^{\mp 4\pi i/3} = e^{\pm 2\pi i/3}$.
- $p_v = (\underline{\pm 1}, 0, 0, 0)$, donde el subrayado indica que se incluyen todas las permutaciones. Estos también son vectores en la clase de conjugación V , por lo que darán origen a estados bosónicos. En el lenguaje de operadores de creación en el sector Neveu-Schwarz, se incluyen aquí los estados $b_{-1/2}^\mu |0\rangle_{NS}$, con $\mu = 0, \dots, 6$ índices de espaciotiempo, y $b_{-1/2}^7 |0\rangle_{NS}$, donde se toma como séptima a la dirección en \mathbb{T}^3 sin rotar. Para estos casos la fase en \mathcal{P} es $e^{-2\pi i p_v \cdot v_f} = 1$.
- $p_s = (\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ con un número par de signos menos. Se denotan a su vez p_s^\pm a los vectores de este grupo que tienen $\pm 1/2$ como última componente. Como $p_s \in S_p$, contribuirá al espectro con fermiones del espaciotiempo. La contribución a \mathcal{P} para estos p es $e^{-2\pi i p_s^\pm \cdot v_f} = e^{\mp 2\pi i/3}$.

La masa m_L^2 se anula en dos situaciones, cuando $N_L = 0$ y $P_L^2 = 2$ y cuando $N_L = 1$ y $P_L^2 = 0$. El primer caso dependerá de la cantidad s de direcciones izquierdas rotadas y de la red invariante elegida. Para el segundo caso se distinguen tres grupos de osciladores izquierdos:

- a_{-1}^μ , con $\mu = 0, \dots, 6$ las direcciones espaciotemporales.
- a_{-1}^I , con $I = 1, \dots, 19 - s$. Corresponden a las direcciones internas invariantes.
- α_{-1}^i y α_{-1}^{*i} , con $i = 1, \dots, s/2$. Estos son los osciladores en las direcciones rotadas, definidos a partir de las coordenadas complejas 1.15.

3.1.1. Estados con $N_L = 1$ y $P_L^2 = 0$

Se enumeran a continuación los posibles estados no masivos con $N_L = 1$ y $P_L^2 = 0$ y se analiza la proyección del orbifoldo.

- $a_{-1}^\mu|0\rangle \otimes |p_v\rangle$

Se distinguen dos grupos de estados. Por una parte, aquellos de la forma $a_{-1}^\mu|0\rangle \otimes b_{-1/2}^\nu|0\rangle_{NS}$, que dan lugar al multiplete formado por el gravitón, el tensor antisimétrico y el dilatón en 7 dimensiones. Por otro lado, están aquellos dados por $a_{-1}^\mu|0\rangle \otimes b_{-1/2}^7|0\rangle_{NS}$, que conforman el gravifotón y dan lugar a un grupo de gauge $U(1)_R$. Como intervienen solo direcciones invariantes, tanto en el sector derecho como en el izquierdo, todas las fases en la proyección serán 1 y

$$\mathcal{P} a_{-1}^\mu|0\rangle \otimes |p_v\rangle = a_{-1}^\mu|0\rangle \otimes |p_v\rangle.$$

- $a_{-1}^I|0\rangle \otimes |p_v\rangle$

Nuevamente se diferencian dos tipos de partículas. En primer lugar, se tienen los estados $a_{-1}^I|0\rangle \otimes b_{-1/2}^\mu|0\rangle_{NS}$. Estos son vectores en el espaciotiempo y dan lugar a un gauge $U(1)^{19-s}$. Por otra parte, aparecen los escalares $a_{-1}^I|0\rangle \otimes b_{-1/2}^7|0\rangle_{NS}$. Así como en el primer caso, tanto las direcciones derechas como las izquierdas son invariantes, por lo que estos estados sobreviven la proyección.

- $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_v\rangle, \alpha_{-1}^{*i}|0\rangle \otimes |p_v\rangle$

En este caso, la fase $e^{4\pi i/3}$ la añade el operador α_{-1}^i mientras que $|p_v\rangle$ contribuye con un 1 al proyector. Así

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_v\rangle &= \frac{1 + e^{4\pi i/3} + e^{-4\pi i/3}}{3} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_v\rangle \\ &= \frac{1 + 2 \cos(4\pi/3)}{3} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_v\rangle = 0. \end{aligned}$$

En el caso del estado con α_{-1}^{*i} la fase es $e^{-4\pi i/3}$, pero se llega al mismo resultado.

- $a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_0\rangle$ con $\beta = \mu, I$

Estos estados no sobreviven la proyección, ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle &= \frac{1 + e^{\pm 2\pi i/3} + e^{\mp 2\pi i/3}}{3} a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle \\ &= \frac{1 + 2 \cos(2\pi/3)}{3} a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle = 0 \end{aligned}$$

- $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0\rangle, \alpha_{-1}^{*i}|0\rangle \otimes |p_0\rangle$

Aquí tanto el sector izquierdo como el derecho aportan fases a \mathcal{P} . Para $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle$

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle &= \frac{1 + e^{\pm 2\pi i/3} e^{4\pi i/3} + e^{\mp 2\pi i/3} e^{-4\pi i/3}}{3} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle \\ &= \frac{1 + 2 \cos[(\pm 1 + 2)2\pi/3]}{3} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle,\end{aligned}$$

Así, $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0^+\rangle$ es invariante mientras que $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_0^-\rangle$ es proyectado fuera del espectro. De la misma forma se puede ver que $\alpha_{-1}^{*i}|0\rangle \otimes |p_0^-\rangle$ es invariante mientras que $\alpha_{-1}^{*i}|0\rangle \otimes |p_0^+\rangle$ no lo es.

- $a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_s\rangle$ con $\beta = \mu, I$

Los estados de este tipo son proyectados fuera de la teoría ya que

$$\begin{aligned}\mathcal{P} a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle &= \frac{1 + e^{\mp 2\pi i/3} + e^{\pm 2\pi i/3}}{3} a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle \\ &= \frac{1 + 2 \cos(2\pi/3)}{3} a_{-1}^\beta|0\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle = 0.\end{aligned}$$

- $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_s\rangle, \alpha_{-1}^{*i}|0\rangle \otimes |p_s\rangle$

Gracias al aporte de ambos sectores a la proyección, aparecerán estados invariantes. Para $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_s\rangle$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle &= \frac{1 + e^{\mp 2\pi i/3} e^{4\pi i/3} + e^{\pm 2\pi i/3} e^{-4\pi i/3}}{3} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle \\ &= \frac{1 + 2 \cos[(\pm 1 - 2)2\pi/3]}{3} \alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle,\end{aligned}$$

de modo que los estados invariantes serán $\alpha_{-1}^i|0\rangle \otimes |p_s^-\rangle$ y, con un análisis similar, $\alpha_{-1}^{*i}|0\rangle \otimes |p_s^+\rangle$.

En resumen, los estados invariantes son

$a_{-1}^\mu 0\rangle \otimes p_v\rangle$	Gravitón, tensor antisimétrico, dilatón y gravifotón.
$a_{-1}^I 0\rangle \otimes p_v\rangle$	Bosones de gauge y escalares.
$\alpha_{-1}^i 0\rangle \otimes p_0^+\rangle$	Escalares.
$\alpha_{-1}^{*i} 0\rangle \otimes p_0^-\rangle$	Escalares.
$\alpha_{-1}^i 0\rangle \otimes p_s^-\rangle$	Escalares.
$\alpha_{-1}^{*i} 0\rangle \otimes p_s^+\rangle$	Escalares.

Cabe destacar que estos estados estarán en el espectro sin importar el vector de shift V elegido. Así, el grupo de gauge $U(1)^{19-s} \times U(1)_R$, generado por los bosones de gauge

$a_{-1}^I|0\rangle \otimes b_{-1/2}^\mu|0\rangle_{NS}$ y el gravifotón $a_{-1}^\mu|0\rangle \otimes b_{-1/2}^7|0\rangle_{NS}$, es el grupo de gauge básico para un dado s .

3.1.2. Estados con $N_L = 0$ y $P_L^2 = 2$

Se analiza aquí el espectro que resultan de combinar un estado izquierdo $|P\rangle$ con un estado derecho $|p_v\rangle$, $|p_0\rangle$ o $|p_s\rangle$. Estos últimos aportan distinta fase a la proyección. Se construye la proyección \mathcal{P} para los distintos casos considerando que la acción de g sobre $|P\rangle$ se puede escribir de la siguiente manera

$$g|P\rangle = e^{2\pi i\alpha/3}|P\rangle. \quad (3.2)$$

Para $p = p_v$, la proyección es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|P\rangle \otimes |p^v\rangle &= \frac{1 + e^{2\pi i\alpha/3} + e^{-2\pi i\alpha/3}}{3}|P\rangle \otimes |p^v\rangle \\ &= \frac{1 + 2\cos(2\pi\alpha/3)}{3}|P\rangle \otimes |p^v\rangle, \end{aligned}$$

por lo que $|P\rangle \otimes |p^v\rangle$ es invariante si $\alpha = 0 \pmod{3}$. Para los estados con $p = p_0^\pm$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|P\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle &= \frac{1 + e^{\pm 2\pi i/3} e^{2\pi i\alpha/3} + e^{\mp 2\pi i/3} e^{-2\pi i\alpha/3}}{3}|P\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle \\ &= \frac{1 + 2\cos[2\pi(\pm 1 + \alpha)/3]}{3}|P\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle, \end{aligned}$$

asi, el estado $|P\rangle \otimes |p_0^\pm\rangle$ será invariante dado que $\alpha = \mp 1 \pmod{3}$. Por último, para $p = p_s^\pm$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|P\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle &= \frac{1 + e^{\mp 2\pi i/3} e^{2\pi i\alpha/3} + e^{\pm 2\pi i/3} e^{-2\pi i\alpha/3}}{3}|P\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle \\ &= \frac{1 + 2\cos[2\pi(\pm 1 - \alpha)/3]}{3}|P\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle, \end{aligned}$$

con lo cual $|P\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle$ será invariante siempre y cuando $\alpha = \pm 1 \pmod{3}$.

Si bien $U(1)^{19-s} \times U(1)_R$ será por lo general el grupo de gauge de la teoría, este puede agrandarse gracias a estados del tipo $|P\rangle \otimes |p_v\rangle$. Se ilustra esto con una red genérica $I = U \times K$, con K una red par de signatura $(18 - s, 0)$ y con $K^*/K = \mathbb{Z}_3^a$. Tal como se muestra en [7], se puede elegir $P \in I$ de la forma

$$P = (\gamma, p_L, p_R), \quad (3.3)$$

con $\gamma \in K$ y

$$p_L = \frac{\kappa}{2R} + \omega R; \quad p_R = \frac{\kappa}{2R} - \omega R. \quad (3.4)$$

Así, las fórmulas de masa se transforman en

$$m_L^2 = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{2R} + \omega R\right)^2 + N_L - 1, \quad (3.5a)$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{2R} - \omega R\right)^2 + N_R - \frac{1}{2}. \quad (3.5b)$$

Con $p = p_v$ y para radio R genérico, hay estados no masivos para $\kappa = \omega = 0$ y $\gamma^2 = 2$. Estos, combinados con los bosones de gauge $a_{-1}^I|0\rangle \otimes |p_v\rangle$, pueden agrandar el grupo de gauge a $U(1) \times G_K \times U(1)_R$, con G_K el grupo que tiene a K como red de raíces. En particular, cuando se tiene el radio autodual $R = 1/\sqrt{2}$ aparecen estados no masivos con $\gamma^2 = 0$ y $\kappa = \omega = \pm 1$. Estos pueden promover un grupo $U(1)$ a un $SU(2)$. El grupo resultante dependerá del shift elegido.

Se recuerda que entre los estados $a_{-1}^I|0\rangle \otimes |p_v\rangle$ y $|P\rangle \otimes |p_v\rangle$ se distinguen dos grupos. En primer lugar, se encuentran los vectores de gauge $a_{-1}^I|0\rangle \otimes b_{-1/2}^\mu|0\rangle_{NS}$, $|P\rangle \otimes b_{-1/2}^\mu|0\rangle_{NS}$ que definen un grupo de gauge. En segundo lugar está el conjunto de estados $a_{-1}^I|0\rangle \otimes b_{-1/2}^\tau|0\rangle_{NS}$, $|P\rangle \otimes b_{-1/2}^\tau|0\rangle_{NS}$, los cuales forman un escalar que siempre estará en la representación adjunta del grupo anterior.

En el subsector (1,1) se pueden tomar momentos de la red $\Gamma_{(19,3)}$ completa. Los estados con $P \notin I$ combinados con estados izquierdos $|p_v\rangle$ serán todos invariantes. Para momentos $P \in N$, los estados invariantes serán combinaciones lineales de la forma $a|P_N\rangle + b|\theta P_N\rangle + c|\theta^2 P_N\rangle$. También pueden haber estados $|P_I, P_N\rangle$ con $P_I \neq 0$ y $P_N \neq 0$. Estos estados pueden contener tanto generadores cargados como cartanes, por lo que el grupo de gauge puede agrandarse aún más.

3.2. Sector twisted

Dado que el análisis del espectro en ambos sectores twisted es similar, se centra aquí la atención en el sector twisted g . Este sector se compone de los subsectores (g, g^l) , cuyas funciones de partición $Z_{1,l}(\tau)$ se muestran en 2.40. Nuevamente, se extraen de los exponentes de q y \bar{q} los aportes a la fórmula de masa. En el k -ésimo sector twisted, cada oscilador rotado tiene un aporte adicional a la energía de vacío dada por [11]

$$E_k = \frac{1}{4}\{kv\}(1 - \{kv\}), \quad (3.6)$$

con $\{x\} = x - [x]$ el valor fraccionario de x . Se ve que la energía de vacío será la misma para ambos sectores twisted en las teorías aquí trabajadas. Las fórmulas de masa son

entonces

$$m_L^2 = \frac{1}{2}(P + V)_L^2 + N_L - 1 + \frac{s}{18}, \quad (3.7a)$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}(p - v_f)^2 + \frac{1}{2}(P + V)_R^2 + N_R - \frac{1}{2} + \frac{1}{9}, \quad (3.7b)$$

donde $P \in I^*$ y $N_{L,R}$ pueden tomar valores múltiplos de $1/3$. Los estados deben satisfacer el level matching para las masas, $m_R^2 - m_L^2 = 0$, lo que da el vínculo

$$(p - v_f)^2 + (P + V)^2 + 2(N_R - N_L) + 1 + \frac{2-s}{9} = 0. \quad (3.8)$$

En cuanto al espectro no masivo, es fácil ver que no habrán bosones vectoriales no masivos, ya que con $p = p_v$ se tiene que

$$\begin{aligned} m_R^2 &= \frac{1}{2}(\pm 1, 0, 0, 2/3)^2 + \frac{1}{2}(P + V)_R^2 + N_R - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{2}(P + V)_R^2 + N_R + \frac{1}{3} > 0. \end{aligned}$$

En referencia a la presencia de taquiones, se ve que estos no están presentes cuando $s = 18$. Para $s < 18$ pueden aparecer taquiones, aunque restringidos por el radio R de compactificación en el círculo.

Es fácil mostrar que los estados con $N_L = N_R = 0$ que satisfacen 3.8 son automáticamente invariantes ante la acción de \mathbb{Z}_3 . Para esto, se obtienen las fases de la proyección en el subsector (g, g^l) usando la función de partición 2.40. En primer lugar, el factor global 2.41 aporta una fase dependiente de l de la forma

$$e^{\pi i l [v^2(1-s/2)+1]} = e^{\pi i l (2\frac{2-s}{9}+1)}. \quad (3.9)$$

Por otra parte, hay una fase proveniente de los factores (η/ϑ) . Para ver esto se escribe, según la definición A.9

$$\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 + v \\ 1/2 + lv \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n+1/2+v)^2} e^{2\pi i(n+1/2+v)(1/2+lv)}. \quad (3.10)$$

La potencia más baja de q se da para $n = -1$, por lo que el factor global dependiente de l será $e^{2\pi i(-1/2+v)lv} = e^{\pi i l \frac{2}{9}}$. Considerando que en (η/ϑ) la exponencial tendrá el signo opuesto y añadiendo el aporte de $(\bar{\eta}/\bar{\vartheta})^{s/2}$, la fase proveniente de los osciladores será

$$e^{-\pi i l \frac{2-s}{9}}. \quad (3.11)$$

Por último, $Z_{1,l}^{(\Gamma)}(\tau)$ aporta un factor $e^{\pi i l (P+V)^2}$ y $Z_{1,l}^{(F)}(\tau)$ un factor $e^{\pi i l (p-v_f)^2}$. Así, la

fase total para el sector (g, g^l) es

$$\exp \left[\pi i l \left((p - v_f)^2 + (P + V)^2 + 1 + \frac{2-s}{9} \right) \right] = 1, \quad (3.12)$$

donde se usó 3.8 con $N_L = N_R = 0$. En conclusión, todos los estados sin osciladores que satisfagan el level matching de masas sobrevivirán la proyección del orbifold. Se puede mostrar que lo mismo es válido para el sector twisted g^2 .

3.3. Ejemplo $s = 16$

Se estudia a continuación el espectro taquónico y no masivo de la teoría que se obtiene al rotar $s = 16$ direcciones izquierdas. En particular, se elige el punto $(r, a) = (4, 1)$, donde las redes invariante y normal son

$$I = U \oplus A_2; \quad N = U^2 \oplus E_6 \oplus E_8. \quad (3.13)$$

En las secciones anteriores se analizaron resultados generales del espectro. En particular, se mostró que aparecerá un grupo de gauge $U(1)^{19-s} \times U(1)_R$ independientemente de la elección del shift V . Así, en este ejemplo el grupo de gauge de partida $U(1)^3 \times U(1)_R$ puede verse incrementado gracias a estados con $N_L = 0$ y $P_L^2 = 2$, dependiendo de V .

3.3.1. Resolución de la condición de level matching

El vector de shift debe satisfacer

$$3V^2 \in I, \quad (3.14)$$

y la condición de level matching 2.50, que para $s = 16$ se transforma en

$$3V^2 + \frac{2s}{3} = 3V^2 + \frac{32}{3} = 0 \pmod{2}, \quad (3.15)$$

o bien

$$3V^2 + \frac{2}{3} = 0 \pmod{2}. \quad (3.16)$$

Según se muestra en 3.3, un momento $P \in I$ se puede escribir como

$$P = \left(a\alpha_1 + b\alpha_2, \frac{c}{2R} + dR; \frac{c}{2R} - dR \right) \equiv (a, b, c, d), \quad (3.17)$$

con $\alpha_{1,2} = (1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}/2)$ las raíces simples de $SU(3)$. Entonces, la condición 3.14 se puede satisfacer escribiendo

$$V = \frac{1}{3}(j, k, m, n). \quad (3.18)$$

En función de estos índices, el level matching es

$$\frac{2}{3}(j^2 - jk + k^2 + mn - 1) = 0 \pmod{2}, \quad (3.19)$$

o, equivalentemente,

$$j^2 - jk + k^2 + mn - 1 = 0 \pmod{3}. \quad (3.20)$$

Cabe notar que $j = k = m = n = 0$ no cumple lo anterior, de modo que el shift nulo $V = 0$ no está permitido.

Entre los vectores de la forma 3.18 que satisfacen 3.20 existen equivalencias, esto es, hay conjuntos de vectores V que dan el mismo espectro. En primer lugar, se ve que la dualidad T en el círculo, dada por el intercambio $m \leftrightarrow n$ acompañado de $R \rightarrow 1/(2R)$ deja el espectro invariante. Por otra parte, se muestra que la función de partición es invariante ante $V \rightarrow V + W$, con $W \in I^*$. En el subsector $(1, g^l)$ intervienen momentos $P \in I$, de modo que $P \cdot W \in \mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned} Z_{0,l}^{(\Gamma)}(\tau) &= \sum_{P \in I} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} e^{2\pi i P \cdot [l(V+W)]} \\ &= \sum_{P \in I} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} e^{2\pi i P \cdot (lV)} e^{2\pi i l(P \cdot W)} \\ &= \sum_{P \in I} \bar{q}^{P_L^2/2} q^{P_R^2/2} e^{2\pi i P \cdot (lV)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Además, en el resto de los subsectores, donde $P \in I^*$, la invariancia se obtiene gracias a la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \sum_{P \in I^*} f[P + l(V + W)] &= \sum_{P \in I^*} f[(P + lW) + lV], \quad P' = P + lW \\ &= \sum_{P' - lW \in I^*} f[P' + lV] \\ &= \sum_{P' \in I^*} f[P' + lV], \end{aligned} \quad (3.22)$$

con $f(P)$ una función. Como la función de partición es la misma para V y para $V+W$, el espectro también será el mismo para ambos shifts. Entonces, se obtiene la equivalencia

$$V \sim V' = V \pmod{I^*}. \quad (3.23)$$

Dado que $I \subset I^*$, es también $V \sim V + W$ para $W \in I$ y, por ejemplo

$$V = \frac{1}{3}(j, k + 3l, m, n) = \frac{1}{3}(j, k, m, n) + (0, l, 0, 0) \sim \frac{1}{3}(j, k, m, n). \quad (3.24)$$

Gracias a esto, se pueden tomar todos los índices de 3.18 como 0, 1 o 2.

3.3.2. Sector untwisted

Los estados no masivos con $N_L = 1$ y $P_L^2 = 0$ se analizaron en la sección 3.1 y no dependen de la elección de V . Entre estos estados se encuentran el multiplete del gravitón, el tensor antisimétrico y el dilatón, bosones de gauge que dan lugar a un grupo $U(1)^3 \times U(1)_R$ y escalares. Esta sección se centra en los casos con $N_L = 0$ y $P_L^2 = 2$, esto es, estados del tipo $|P\rangle \otimes |p\rangle$. Dados momentos $P = (P_I, P_N)$, se analizan por separado los casos con $P_N = 0$, $P_L = 0$ y $P_L, P_N \neq 0$.

Momentos en la red invariante

Para $P = P_I$, la acción de \mathbb{Z}_3 es

$$g|P_I\rangle = e^{2\pi i P_I \cdot V} |P_I\rangle = e^{2\pi i P_I \cdot (3V)/3} |P_I\rangle, \quad (3.25)$$

de modo que el exponente en 3.2 está dado por un $\alpha = P \cdot (3V)$.

Se vio que para R general, los estados no masivos tienen $P_I = (a, b, 0, 0)$, esto es, los momentos son raíces de $SU(3)$. Se calcula α para las distintas raíces considerando un shift $V = \frac{1}{3}(j, k, m, n)$

$$\begin{aligned} P = \pm(1, 0, 0, 0) = \pm\alpha_1 &\longrightarrow \alpha = \mp(2j - k), \\ P = \pm(0, 1, 0, 0) = \pm\alpha_2 &\longrightarrow \alpha = \mp(2k - j), \\ P = \pm(1, 1, 0, 0) = \pm\alpha_3 &\longrightarrow \alpha = \mp(j + k). \end{aligned}$$

Para el radio autodual $R = 1/\sqrt{2}$ aparecen los estados no masivos con $P = \pm(0, 0, 1, 1)$. Para estos momentos

$$P = \pm(0, 0, 1, 1) = \pm u \longrightarrow \alpha = \mp(m + n).$$

Con estos resultados y el criterio mostrado en la sección 3.1.2, es posible obtener los estados invariantes ante la acción del orbifold para distintos vectores de shift. En la tabla 3.1 se muestran los estados invariantes para los distintos $V = (j, k, m, n)$ permitidos por 3.20.

En cuanto al grupo de gauge, se ve que para los valores $(j, k) = (0, 0), (1, 2)$ los estados $|\pm\alpha_{1,2,3}\rangle \otimes |p_v\rangle$ están permitidos. Estos agrandarán el grupo de gauge a $U(1) \times SU(3) \times U(1)_R$. En el radio autodual, para $(m, n) = (0, 0)$ aparecen los estados $|\pm u\rangle \otimes |p_v\rangle$, que llevan el grupo de gauge a $SU(2) \times U(1)^2 \times U(1)_R$. Como combinar los valores $(j, k) = (0, 0), (1, 2)$ con $(m, n) = (0, 0)$ no está permitido por el level matching, no es posible llegar a un grupo $SU(2) \times SU(3) \times U(1)_R$.

Como se señaló en la sección 3.1.2, los estados mencionados en el párrafo anterior incluyen escalares que transforman en la representación adjunta del grupo de gauge

$3V$	$ P\rangle \otimes p_v\rangle$	$ P\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$	$ P\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$
(0, 0, 1, 1) (1, 2, 1, 1)	$ \pm \alpha_{1,2,3}\rangle \otimes p_v\rangle$	$ \pm u\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$	$ \pm u\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$
(0, 0, 2, 2) (1, 2, 2, 2)	$ \pm \alpha_{1,2,3}\rangle \otimes p_v\rangle$	$ \pm u\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$	$ \pm u\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$
(1, 0, 0, 0) (2, 2, 0, 0)	$ \pm u\rangle \otimes p_v\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$
(1, 0, 1, 0) (2, 2, 1, 0)	–	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$
(1, 0, 2, 0) (2, 2, 2, 0)	–	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$
(2, 0, 0, 0) (1, 1, 0, 0)	$ \pm u\rangle \otimes p_v\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$
(2, 0, 1, 0) (1, 1, 1, 0)	–	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$
(2, 0, 2, 0) (1, 1, 2, 0)	–	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_0^\mp\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_0^\pm\rangle$	$ \pm \alpha_{1,2}\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$ $ \pm \alpha_3\rangle \otimes p_s^\pm\rangle$ $ \pm u\rangle \otimes p_s^\mp\rangle$

Tabla 3.1: Estados invariantes con momentos $P \in I$ para distintos vectores de shift. Los estados de la forma $|\pm u\rangle \otimes |p\rangle$ sólo aparecen en el radio autodual $R = 1/\sqrt{2}$.

correspondiente. Por otro lado, se ve que los escalares de tipo $|P\rangle \otimes |p_0\rangle$ o $|P\rangle \otimes |p_s\rangle$ son invariantes para vectores de shift que no admiten incrementos en el grupo de gauge, por lo cual siempre estarán cargados respecto a grupos $U(1)$.

Momentos en la red normal

Para $P = P_N \in N$ la acción del grupo es

$$g|P\rangle = |\theta P\rangle, \quad (3.26)$$

por lo que es necesario tomar combinaciones lineales de $|P\rangle$, $|\theta P\rangle$ y $|\theta^2 P\rangle$ para tener estados invariantes. Se definen los estados

$$|[P]^{(\delta)}\rangle = e^{-2\pi i \delta/3}|P\rangle + e^{2\pi i \delta/3}|\theta P\rangle + |\theta^2 P\rangle, \quad (3.27)$$

donde $[P]$ denota la clase de P por órbitas de θ y $\delta = -1, 0, 1$. Estos estados satisfacen

$$g|[P]^{(\delta)}\rangle = e^{2\pi i \delta/3}|[P]^{(\delta)}\rangle, \quad (3.28)$$

de modo que en 3.2 $\alpha = \delta$. Así, los estados invariantes serán los siguientes

$$\begin{aligned} & |[P]^{(0)}\rangle \otimes |p_v\rangle, \\ & |[P]^{(\pm 1)}\rangle \otimes |p_0^\mp\rangle, \\ & |[P]^{(\pm 1)}\rangle \otimes |p_s^\pm\rangle. \end{aligned}$$

En este ejemplo, la red normal es $N = U \oplus E_6 \oplus E_8$. Como los estados no masivos tienen $P^2 = 2$, se puede elegir P como las raíces de E_6 o de E_8 . El grupo E_6 tiene 72 raíces, de modo que habrán $72/3=24$ órbitas por θ y por lo tanto 24 estados de la forma $|[P]^{(0)}\rangle \otimes |p_v\rangle$. Estos estados aportarán bosones de gauge que pueden incluir tanto cargados como cartanes, por lo que pueden generar un grupo de gauge adicional. Es necesario analizar los OPE entre estos estados para identificar tal grupo. Dado que este grupo tendrá dimensión 24, dos posibilidades son $SU(5)$ y $SU(3)^{31}$. De la misma forma, las 240 raíces de E_8 darán lugar a $240/3=80$ que, en base a su dimensión, podrían formar un grupo $SU(9)$.

Momentos en la red completa

Se consideran ahora los estados con momentos $P = (P_N, P_I)$ donde $P_N \neq 0$ y $P_I \neq 0$ están en N^* y I^* respectivamente. Se toman entonces los P_I como pesos de $SU(3)$ y los P_N como pesos de E_6 y E_8 . Los estados no masivos tienen

$$P^2 = P_N^2 + P_I^2 = 2. \quad (3.29)$$

Como E_8 es autodual, el conjunto de sus pesos es igual al de sus raíces, las cuales tienen al menos módulo cuadrado igual a 2. Entonces, si P_N es un peso de E_8 , para que se cumpla 3.29 debe ser $P_I = 0$, lo cual ya se cubrió en el apartado anterior. Así, se toman P_I como pesos de $SU(3)$ y P_N como pesos de E_6 . Como estos últimos están en la red normal, y por el análisis de la sección anterior, los estados invariantes tendrán la forma

$$|[w_{E_6}]^{(\delta)}, w_{A_2}\rangle, \quad w_{E_6} \in E_6^*, w_{A_2} \in A_2^*. \quad (3.30)$$

La red de pesos A_2^* tiene 3 clases de conjugación, llamadas (0), (1) y (2), con módulos $(0)^2 = 0 \bmod 2$ y $(1)^2 = (2)^2 = 2/3 \bmod 2$. Por otra parte, la red de pesos de E_8 tiene también 3 clases de conjugación, llamadas (0), (1) y ($\bar{1}$), con módulos $(0)^2 = 0 \bmod 2$ y $(1)^2 = (\bar{1})^2 = 4/3 \bmod 2$. Por lo tanto, si se eligen los w_{E_6} como los pesos de módulo $4/3$ en las clases de conjugación (1) y ($\bar{1}$) de E_6 y los w_{A_2} como los pesos de módulo $2/3$ en las clases de conjugación (1) y (2) de A_2 , se cumple la condición 3.29.

Los pesos de A_2 de módulo $2/3$ son $\pm\mu_1, \pm\mu_2$ y $\pm\mu_3 = \pm(\mu_1 + \mu_2)$, donde $\mu_{1,2}$ son

¹El grupo $SU(N)$ tiene dimensión $N^2 - 1$.

los pesos fundamentales de $SU(3)$ y satisfacen $\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2$. Así, hay 6 valores posibles para w_{A_2} . Las clases de conjugación (1) y ($\bar{1}$) de E_6 corresponden a las representaciones **27** y $\bar{\mathbf{27}}$, de modo que habrán $(27+27)/3=18$ estados de la forma $[w_{E_6}]^{(\delta)}$ para cada $\delta = -1, 0, 1$. En conclusión, hay un total de $6 \times 18 \times 3 = 324$ estados de la forma 3.30. En particular, los estados $[[w_{E_6}]^{(\delta)}, w_{A_2}] \otimes |p_v\rangle$ que sobrevivan la proyección se combinarán con los bosones de gauge que surgen tanto de la red invariante como de la red normal, aumentando el grupo de gauge.

3.3.3. Sector twisted g

En este sector se centrará la atención en la presencia de taquiones y cómo el radio de compactificación en el círculo U puede impedir su aparición. Las fórmulas de masa en este sector son

$$m_L^2 = \frac{1}{2}(P + V)_L^2 + N_L - \frac{1}{9}, \quad (3.31a)$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}(p - v_f)^2 + \frac{1}{2}(P + V)_R^2 + N_R - \frac{1}{2} + \frac{1}{9}, \quad (3.31b)$$

con $P \in I^*$.

Dado que N_L toma valores múltiplos de $1/3$, sólo puede ser $m_L^2 = 0$ con $N_L = 0$. El mínimo valor que puede tomar $(p - v_f)^2/2$, correspondiente a la elección $p = p_0^+$, es $1/18$, que combinado con las energías de vacío da un aporte de $-1/3$. Por lo tanto, también es necesario pedir $N_R = 0$ para encontrar taquiones en el espectro. Con el análisis anterior, las fórmulas de masa se transforman en

$$m_L^2 = \frac{1}{2}(P + V)_L^2 - \frac{1}{9}, \quad (3.32a)$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}(P + V)_R^2 - \frac{1}{3}. \quad (3.32b)$$

La condición de level matching para las masas es entonces

$$(P + V)^2 = \frac{4}{9}. \quad (3.33)$$

Además, se vió que todos los estados que satisfagan esta condición serán invariantes ante la acción del orbifoldo.

Se elige por simplicidad un shift de la forma $V = \frac{1}{3}(0, 0, m, n)$. Por 3.20, este vector debe satisfacer $mn - 1 = 0 \pmod{3}$. Resulta suficiente entonces analizar los casos con $(m, n) = (1, 1), (-1, -1), (2, -1)$. Se elije $P = (0, 0, a, b)$, el cual pertenece a I^* ya que

la red U es autodual. Se evalúa 3.33

$$\begin{aligned}
 (P + V)^2 &= \left(0, 0, \frac{a + m/3}{2R} + (b + n/3)R; \frac{a + m/3}{2R} - (b + n/3)R\right)^2 \\
 &= -2(a + m/3)(b + n/3) \\
 &= -2 \left(ab + \frac{an + bm}{3} + \frac{mn}{3}\right) \\
 &= \frac{4}{9}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

lo que lleva a la condición

$$mn + 3(an + bm) + 9ab + 2 = 0. \tag{3.35}$$

Para $(m, n) = (1, 1), (-1, -1)$ la condición anterior no tiene soluciones enteras para a y b . Es decir, para esos vectores de shift no hay estados sin osciladores y con momentos en el círculo que satisfagan la condición de igualdad entre las masas derecha e izquierda. Por otra parte, para $(m, n) = (2, -1)$ la condición 3.35 da lugar a

$$a = \frac{2b}{1 - 3b}, \tag{3.36}$$

lo cual se cumple para $(a, b) = (0, 0), (-1, 1)$. Así, los estados con momentos $P = (0, 0, 0, 0)$ o $P = (0, 0, -1, 1)$ estarán permitidos y podrían dar lugar a taquiones. La masa derecha con momento $P = (0, 0, 0, 0)$ es

$$m_R^2 = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{R} + R\right)^2 - \frac{1}{3}. \tag{3.37}$$

Para radios $\sqrt{4 - \sqrt{15}} < R < \sqrt{4 + \sqrt{15}}$ la masa será negativa. Por otra parte, con $P = (0, 0, -1, 1)$ se obtiene

$$m_R^2 = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{2R} + 2R\right)^2 - \frac{1}{3}, \tag{3.38}$$

de modo que $m_R^2 < 0$ si $\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sqrt{15}} < R < \frac{1}{2}\sqrt{4 + \sqrt{15}}$. En conclusión, sólo habrán taquiones en el espectro si el radio de compactificación en el círculo es $\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sqrt{15}} < R < \sqrt{4 + \sqrt{15}}$.

Capítulo 4

Conclusión

Teniendo la dualidad entre la cuerda heterótica en \mathbb{T}^3 y la teoría M en $K3$ como motivación, se construyeron modelos de cuerdas heteróticas compactificadas en orbifolios asimétricos $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3$. La acción del orbifolio consistió en rotar dos direcciones derechas y s direcciones izquierdas y hacer una traslación por un vector V . Las rotaciones sobre la red $\Gamma_{(19,3)}$ dejan una red invariante I que, en el contexto de la dualidad, se obtienen también de aplicar a $K3$ automorfismos no simplécticos de orden 3 y se clasifican a partir de dos parámetros (r, a) . Las redes invariantes dadas por esta clasificación fueron utilizadas para construir los orbifolios en la cuerda heterótica.

Se calculó la función de partición para s arbitrario a partir de los grados de libertad del sector untwisted y realizando transformaciones modulares para obtener los términos restantes. Se impuso la invariancia modular, dando lugar a la condición de level matching sobre el shift V . Esta condición requiere que $3V^2 + 2s/3$ sea par.

Se estudió el espectro de las teorías resultantes, enfocándose en los estados no masivos y la presencia de taquiones. En el sector untwisted se encuentra el multiplete del gravitón, el tensor antisimétrico y el dilatón, y estos estados son invariantes independientemente del shift V elegido. Se vió que el grupo de gauge más pequeño que se puede obtener es $U(1)^{19-s} \times U(1)_R$, sin importar el shift. Estados con $P \neq 0$ pueden aumentar este grupo, con contribuciones tanto de la red invariante, de la red normal y de la red $\Gamma_{(19,3)}$ completa. Se encontró que siempre acompaña a los bosones de gauge un escalar bosónico que transforma en la representación adjunta. Otros escalares, tanto bosónicos como fermiónicos, aparecen en el espectro untwisted, pero no es posible hallar taquiones en dicho sector. Se mostró que en el sector twisted no aparecerán bosones vectoriales no masivos. Además, todos los estados twisted que respeten el level matching de masas y no contengan osciladores son automáticamente invariantes ante la proyección del orbifolio.

Se dió un ejemplo particular para $s = 16$, eligiendo la red representada por el punto $(r, a) = (4, 1)$. Se resolvió la condición de level matching para este s , permitiendo cono-

cer los vectores de shift permitidos. Se analizó el espectro untwisted concentrándose en la contribuciones de los distintos sectores de la red $\Gamma_{(19,3)}$. Se contabilizaron los estados bosónicos vectoriales que pueden dar lugar a un aumento del grupo de gauge. Sin embargo, es necesario un mayor análisis para determinar exactamente a qué grupo llevan estos bosones de gauge. Aunque no es posible encontrar taquiones en el sector untwisted, estos pueden aparecer en los sectores twisted. Sin embargo, se vió en este ejemplo que es posible eliminar los taquiones del espectro llevando el radio de compactificación en el círculo a valores particulares.

Apéndice A

Funciones modulares

Una condición de consistencia que afecta a todas las teorías de cuerdas cerradas es la invariancia modular. Esta consiste en la invariancia de la función de partición $Z(\tau)$ ante transformaciones del grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1. \quad (\text{A.1})$$

Estas transformaciones se pueden generar a partir de las dos siguientes, llamadas transformaciones S y T

$$T : \quad \tau \rightarrow \tau + 1, \quad (\text{A.2})$$

$$S : \quad \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}. \quad (\text{A.3})$$

Es conveniente expresar $Z(\tau)$ a partir de funciones que transformen de manera conocida ante la acción del grupo modular. Una de ellas es la función eta de Dedekind, definida como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad (\text{A.4})$$

donde se usa la variable

$$q = e^{2\pi i \tau}. \quad (\text{A.5})$$

Las propiedades de transformación de la función η son las siguientes

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12} \eta(\tau), \quad (\text{A.6})$$

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau). \quad (\text{A.7})$$

Otra función de la que se hará amplio uso es la función theta con características

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\tau) = \eta e^{2\pi i \alpha \beta} q^{\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n+\alpha-1/2} e^{2\pi i \beta}) (1 + q^{n-\alpha-1/2} e^{-2\pi i \beta}), \quad (\text{A.8})$$

que tiene también una definición como suma infinita

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n+\alpha)^2} e^{2\pi i (n+\alpha)\beta}, \quad (\text{A.9})$$

y ante transformaciones modulares se comporta de la siguiente manera

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\tau + 1) = e^{-\pi i (\alpha^2 - \alpha)} \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta + (\alpha - 1/2) \end{bmatrix} (\tau), \quad (\text{A.10})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \vartheta \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} (\tau). \quad (\text{A.11})$$

También se tiene la siguiente propiedad de las funciones ϑ ante traslaciones de los argumentos

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha + m \\ \beta + n \end{bmatrix} (\tau) = e^{2\pi i \alpha n} \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\tau). \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, y dado que en las funciones de partición aparecerán sumas sobre redes de momentos, se presenta la fórmula de suma de Poisson

$$\sum_{\mathbf{v} \in \Lambda} e^{-\pi(\mathbf{v}+\mathbf{x})^T \mathbf{A}(\mathbf{v}+\mathbf{x}) + 2\pi i(\mathbf{v}+\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}} = \frac{1}{|\Lambda^*/\Lambda| \sqrt{\det \mathbf{A}}} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda^*} e^{-\pi(\mathbf{k}+\mathbf{y})^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{k}+\mathbf{y}) - 2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.13})$$

con Λ una red n -dimensional, Λ^* su red dual y \mathbf{A} una matriz de $n \times n$.

Apéndice B

Automorfismos

Se dan ejemplos de automorfismos de orden 3 para las redes U^2 , $U \oplus U(3)$, A_2 , E_6 y E_8 . Sus autovalores tendrán la forma $e^{2\pi iv}$. Se muestran los posibles valores de v con sus multiplicidades entre paréntesis.

$$Aut(A_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}; \quad v = 1/3 (1), v = 2/3 (1) \quad (\text{B.1})$$

$$Aut(U^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad v = 1/3 (2), v = 2/3 (2) \quad (\text{B.2})$$

$$Aut(U \oplus U(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad v = 1/3 (2), v = 2/3 (2) \quad (\text{B.3})$$

$$Aut(E_6) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad v = 1/3 (3), v = 2/3 (3) \quad (\text{B.4})$$

$$Aut(E_8) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & -3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad v = 1/3(4), v = 2/3(4) \quad (\text{B.5})$$

Bibliografía

- [1] Narain, K. S., Sarmadi, M. H., Vafa, C. Asymmetric orbifolds. En: Current Physics–Sources and Comments, tomo 4, págs. 219–245. Elsevier, 1989. [6](#)
- [2] Artebani, M., Sarti, A. Non-symplectic automorphisms of order 3 on K3 surfaces. *Mathematische Annalen*, **342**, 903–921, 2008. [6](#)
- [3] Taki, S. Classification of non-symplectic automorphisms of order 3 on K3 surfaces. *Mathematische Nachrichten*, **284** (1), 124–135, 2011.
- [4] Artebani, M., Sarti, A., Taki, S. K 3 surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order. *Mathematische Zeitschrift*, **268**, 507–533, 2011. [6](#)
- [5] Hull, C. M., Townsend, P. K. Unity of superstring dualities. *Nuclear Physics B*, **438** (1-2), 109–137, 1995. [6](#)
- [6] Witten, E. String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B*, **443** (1-2), 85–126, 1995. [6](#)
- [7] Acharya, B. S., Aldazabal, G., Font, A., Narain, K., Zadeh, I. G. Heterotic strings on $\mathbb{T}_3/\mathbb{Z}_2$, Nikulin involutions and M-theory. *Journal of High Energy Physics*, **2022** (9), 1–70, 2022. [6](#), [23](#)
- [8] Nikulin, V. V. Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **14** (1), 103, 1980. [6](#)
- [9] Nikulin, V. V. Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections. algebrogeometric applications. *Journal of Soviet Mathematics*, **22** (4), 1401–1475, 1983.
- [10] Nikulin, V. V. Discrete reflection groups in lobachevsky spaces and algebraic surfaces. En: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, tomo 1, págs. 654–671. Citeseer, 1986. [6](#)
- [11] Blumenhagen, R., Lüüst, D., Theisen, S. Basic concepts of string theory, tomo 16. Springer, 2013. [24](#)

Agradecimientos

A Gerardo Aldazabal por su guía constante. A Eduardo Andrés por su ayuda en lo que respecta a automorfismos de redes. A Anamaría Font por compartir con nosotros sus opiniones.

