

TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

GRAVEDAD ANÁLOGA EN MEDIOS ÓPTICOS DE  
PLEBANSKI-TAMM

**Juan Manuel Paez**  
Maestrando

**Dr. Franco Fiorini**  
Director

**Miembros del Jurado**

Dr. D. Grosz

Dr. F. D. Mazzitelli

Dr. R. Trincherro

20 de Diciembre de 2023

Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov CAB-IB)

Inventario 24886  
23/05/2024  
Biblioteca Leo Falicov

# Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
Introducción	1
<b>1. Relatividad General</b>	<b>5</b>
1.1. El tensor métrico . . . . .	5
1.2. Curvatura y geodésicas . . . . .	6
1.3. Ecuaciones de Einstein . . . . .	8
1.4. Ejemplos de soluciones exactas . . . . .	9
1.4.1. Métrica de Minkowski . . . . .	9
1.4.2. Métrica de Schwarzschild y agujeros negros . . . . .	11
1.4.3. Soluciones cosmológicas . . . . .	13
1.4.4. Otras soluciones . . . . .	15
1.5. Singularidades . . . . .	16
<b>2. Análogo óptico del espacio-tiempo</b>	<b>19</b>
2.1. Deducción de las ecuaciones de Plebanski-Tamm . . . . .	19
2.2. Ondas cuasi-planas . . . . .	23
2.2.1. Análogo óptico para la métrica de Minkowski . . . . .	25
2.3. Óptica geométrica en medios de Plebanski-Tamm . . . . .	26
<b>3. Toy Model</b>	<b>29</b>
3.1. Métrica . . . . .	30
3.2. Geodésicas . . . . .	33
3.2.1. Geodésicas nulas . . . . .	34
3.2.2. Geodésicas tipo tiempo . . . . .	35
3.3. Estructura causal . . . . .	37
3.4. Óptica geométrica en el medio análogo . . . . .	39

<b>4. Toy Model: ecuaciones completas</b>	<b>43</b>
4.1. Electrostática . . . . .	44
4.2. Electrodinámica . . . . .	49
4.2.1. Ondas planas . . . . .	49
4.2.2. Vector de onda en la dirección $\hat{x}$ : campos independientes de $y$ y $z$	50
4.2.3. Vector de onda obtenido en la óptica geométrica . . . . .	53
<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>A. Vector de onda en la dirección <math>\hat{x}</math></b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Resumen

Este trabajo se enfoca en el estudio de un modelo de analogía óptico-gravitatoria para un espacio-tiempo que presenta una singularidad de curvatura fuerte. Para ello, utilizando el formalismo de Plebanski-Tamm, se obtuvieron las relaciones constitutivas para el medio óptico análogo y se resolvieron en forma exacta las ecuaciones para el campo electromagnético en dicho medio, en distintos casos de interés. Se obtuvieron soluciones en las que el campo electromagnético está perfectamente definido en todo el espacio, incluso en la singularidad, donde el espacio-tiempo presenta invariantes de curvatura divergentes.

**Palabras clave:** GRAVEDAD ANÁLOGA, SINGULARIDADES, ELECTROMAGNETISMO, SOLUCIONES EXACTAS



# Abstract

This work focuses on the study of an optical-gravitational analogue model for a space-time possessing a strong curvature singularity. To achieve this, using the Plebanski-Tamm formalism, constitutive relations for the analogous optical medium were derived, and the equations for the electromagnetic field in this medium were exactly solved for various cases of interest. Solutions were obtained in which the electromagnetic field is perfectly defined throughout space, even at the singularity, where the space-time exhibits divergent curvature invariants.

**Keywords:** ANALOGUE GRAVITY, SINGULARITIES, ELECTROMAGNETISM, EXACT SOLUTIONS



# Introducción

Los modelos de gravedad análoga [1][2], se enfocan en relacionar las propiedades asociadas a la estructura del espacio-tiempo, descritas por algún modelo de gravedad, con otros sistemas físicos, principalmente de materia condensada. Estos modelos son de un gran interés experimental debido a las dificultades, o directamente, la imposibilidad, de medir ciertos fenómenos asociados a la Relatividad General (RG). Por ejemplo, la medición de la radiación de Hawking emitida por un agujero negro es prácticamente inconcebible, así como la medición de fenómenos en la vecindad de las singularidades de los agujeros negros es directamente imposible, puesto que esas regiones se encuentran causalmente desconectadas de nosotros. Sin embargo, un análogo óptico de la radiación de Hawking fue reportado no hace mucho dentro del contexto de la óptica no lineal [3].

En este trabajo se abordará el análogo óptico de un modelo de espacio-tiempo utilizando las relaciones constitutivas de Plebanski-Tamm (PT). De acuerdo a este formalismo, la propagación de la luz en un dado espacio-tiempo curvo (no necesariamente solución de las ecuaciones de Einstein), puede ser vista como un problema óptico en un medio material anisótropo e inhomogéneo en el espacio plano. Esto permite pasar de una variedad pseudo-Riemanniana 3+1-dimensional (el espacio-tiempo), al espacio plano 3-dimensional en donde el campo electromagnético se propaga en un medio material anisótropo e inhomogéneo. De esta forma, la analogía nos permite visualizar fenómenos intrínsecamente espacio-temporales en términos de una física más Euclídea, acaso más familiar. Además, al pasar a un medio material en el laboratorio, es posible manipular fácilmente las trayectorias de luz (utilizando espejos o divisores de haz, por ejemplo). Esto hace que el estudio de la luz en un fondo curvo pueda, potencialmente, desarrollarse en un contexto susceptible de ser controlado en el laboratorio. Cabe destacar que en el medio material se puede tener control topológico, ya que es posible concebir distintas topologías asociadas a una misma geometría. Por último, debemos mencionar que la analogía óptico-gravitatoria no se circunscribe al rango de frecuencias ópticas, sino que es válida para un campo electromagnético de frecuencia arbitraria. Esto abre la posibilidad de aplicar el formalismo al estudio de sistemas análogos en frecuencias de interés en las comunicaciones, como lo son las microondas y el infrarrojo lejano.

El interés particular de este trabajo es el estudio de un modelo análogo óptico-

gravitatorio correspondiente a un espacio-tiempo que presenta una singularidad de curvatura fuerte. Este tipo de singularidad es muy común entre las soluciones de distintas teorías de gravedad, en especial en el contexto de la RG. Las singularidades de curvatura fuerte, como las presentes en el interior de los agujeros negros, o la correspondiente al Big Bang en modelos cosmológicos, son “puntos” o “regiones” en donde la descripción métrica del espacio-tiempo carece de validez. En algún sentido, el espacio y el tiempo dejan de existir en una singularidad de estas características. Como cabe imaginarse, la mera existencia de estos “objetos” representa un problema de cierta envergadura, puesto que los campos de materia/energía relevantes en el estudio de la física tampoco pueden concebirse en ausencia de espacio-tiempo. Quizás, la utilización de un modelo óptico que emule una singularidad espacio-temporal, en virtud de su relativa simplicidad, pueda aportar información valiosa sobre el comportamiento del campo electromagnético en las vecindades de la misma. El principal resultado de este trabajo es mostrar que ése es exactamente el caso.

Esta tesis está diagramada de la siguiente manera. En el Capítulo 1, y a modo muy introductorio, se abordan algunos elementos de RG; éstos constituyen el material mínimo necesario para acceder a los siguientes capítulos. En el Capítulo 2 se expone una deducción detallada de las ecuaciones constitutivas de PT, su aplicación para ondas electromagnéticas cuasi-planas, y el caso particular asociado al ámbito de aplicación de la óptica geométrica. Si bien este capítulo no incluye material nuevo, sirve como una introducción rigurosa a la analogía óptico-gravitatoria.

Los siguientes dos capítulos contienen material inédito. En el capítulo 3 se introduce un modelo sencillo de espacio-tiempo (*toy model*), exhibiendo una singularidad desnuda de curvatura fuerte. En él se caracteriza la estructura causal del espacio, y se resuelven en forma exacta las ecuaciones canónicas del Hamiltoniano óptico que describe las trayectorias de los rayos luminosos en la aproximación de la óptica geométrica. Finalmente, en el Capítulo 4 se resuelven –también en forma exacta– las ecuaciones completas para el campo electromagnético en el medio análogo representativo del *toy model*, en un número de situaciones físicas relevantes, tanto estáticas, como dinámicas. El principal aporte de este trabajo es mostrar que existen varias configuraciones del campo electromagnético que sobreviven las consecuencias devastadoras de la singularidad, en el sentido de que existe potencia *finita* en la “posición” correspondiente a la singularidad.

La notación para las componentes de vectores y tensores de segundo rango, será utilizando índices griegos  $v_\mu$  y  $g_{\mu\nu}$ , respectivamente, donde  $\mu, \nu : 0, 1, 2, 3$ , o índices latinos  $v_i$  y  $g_{ij}$  si  $i, j : 1, 2, 3$ . Los vectores de tres dimensiones se denotarán por  $\bar{v}$  y sus productos escalares, vectoriales y tensoriales como  $\bar{v} \cdot \bar{w}$ ,  $\bar{v} \times \bar{w}$  y  $\bar{v} \otimes \bar{w}$ , respectivamente. Sin embargo, el producto escalar entre vectores fila y columna se escribirá omitiendo el punto, como en  $\bar{p}^\top \bar{q}$ , donde  $^\top$  indica trasposición. Por otro lado las matrices de 3

---

dimensiones se notarán por  $\mathbf{M}$ , y el producto con un vector  $\bar{v}$  se escribirá simplemente  $\mathbf{M}\bar{v}$ . Además se utilizará la convención de Einstein toda vez que sea necesario. Todas las componentes en tres dimensiones serán referidas a un sistema de coordenadas cartesianas  $\bar{x} = (x, y, z)$  (a veces, según la conveniencia, también escritas  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ), a menos que se indique lo contrario, como en el caso de las soluciones de las ecuaciones de Einstein presentadas en la Sección 1.4. Por último, se usarán unidades naturales, donde  $G = c = 1$ .



# Capítulo 1

## Relatividad General

Este capítulo constituye una muy breve introducción a la Relatividad General, la teoría clásica del campo gravitatorio. Los pocos temas aquí incluidos podrían considerarse el material mínimo necesario para el estudio de modelos de gravedad análoga, uno de los cuales será expuesto en el próximo capítulo. Para un tratamiento más completo, el lector puede consultar [4] y [5], mientras que un número de temas más avanzados son cubiertos, por ejemplo, en [6], [7] y [8].

### 1.1. El tensor métrico

En una geometría Riemanniana, esto es, en un espacio curvo que luce localmente como  $\mathbb{R}^n$ , se puede tener una noción de distancia al igual que en la geometría Euclídea. Localmente, cada abierto de la variedad puede mapearse a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  por medio de coordenadas locales  $x^\mu$ . En estas coordenadas locales, la “distancia al cuadrado infinitesimal”, que recibe el nombre de *intervalo* o *elemento de línea*, y se denota por  $ds^2$ , viene dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

siendo  $g_{\mu\nu}$  las componentes del tensor métrico en dichas coordenadas. Estrictamente hablando, en RG se hace uso de variedades pseudo-Riemannianas 4-dimensionales, es decir que localmente pueden encontrarse coordenadas  $x^{\mu'}$  de tal forma que el intervalo es simplemente  $ds^2 = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$ , en donde  $\eta_{\mu'\nu'} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  (esta expresión define la signatura utilizada en este trabajo). Esta es una manifestación del requerimiento físico necesario para garantizar que, localmente, la gravedad pueda ser neutralizada y que se pueda restituir el espacio plano (Minkowski) característico de la Relatividad Especial. Por supuesto, esta es una característica local del campo gravitatorio, cuyas propiedades globales son en general radicalmente distintas a las del espacio de Minkowski.

Una propiedad importante que debe cumplir una métrica es que debe ser simétrica,

es decir,  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Por otro lado, el intervalo  $ds^2$  es independiente del sistema de coordenadas, lo que lo convierte en un *invariante*, aún cuando las componentes  $g_{\mu\nu}$  de la métrica dependen del sistema de coordenadas. Esto es así puesto que (1.1) mide la distancia infinitesimal en el espacio-tiempo, y esta distancia no puede depender del sistema de coordenadas locales adoptado. A su vez, a partir de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , el producto interno entre dos vectores  $u^\mu$  y  $v^\mu$  resulta  $u^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$ , el cual también es un invariante.

La Relatividad General postula que el espacio-tiempo está descrito por una geometría pseudo-Riemanniana determinada por la distribución de energía y momento de la materia y radiación del universo. El campo dinámico a determinar en esta teoría es el propio tensor métrico, así que necesitaremos ecuaciones dinámicas que lo gobiernen. Estas serán las Ecuaciones de Einstein, que expondremos en 1.3.

## 1.2. Curvatura y geodésicas

Debido a que la teoría de Einstein interpreta a la gravedad como un efecto asociado a la geometría del espacio-tiempo, es necesario que discutamos el rol que tiene la curvatura en este contexto. Intuitivamente, tendemos a visualizar la curvatura como una propiedad que puede entenderse en términos de una cierta superficie embebida en el espacio euclídeo 3-dimensional, como lo hacemos cuando presenciamos la superficie de la tierra desde el espacio exterior. Sin embargo, para entender la Relatividad General debemos pensar en términos intrínsecos, es decir, refiriéndonos a la geometría desde un punto de vista *interno*, y no pensándola en referencia a un espacio de una dimensión mayor.

El concepto de curvatura puede definirse a partir de la noción de transporte paralelo, el cual se refiere a trasladar un vector a lo largo de una curva. Debido precisamente a la curvatura intrínseca que tiene el espacio, no se verifica en general que, luego de transportar el vector desde un cierto punto a lo largo de dos curvas cerradas que pasen por ese punto, el vector vuelva a su estado original al recorrer las curvas. Una vez que se define cómo transportar vectores a lo largo de una curva en forma paralela, puede definirse la derivada (covariante) de un campo vectorial a lo largo de la curva. O lo que es lo mismo, si se define la derivada covariante de un campo vectorial en una dirección, un vector será transportado paralelamente a lo largo de una curva si su derivada sobre dicha curva es cero.

Dada una métrica, existe una única definición de transporte paralelo que preserva el producto interno de todo par de vectores. Por lo tanto, la existencia de una métrica implica una noción única de transporte paralelo y, consecuentemente, una noción intrínseca de curvatura de la variedad. En definitiva, la derivada covariante  $\nabla_\mu$  a lo largo de una dirección  $x^\mu$  viene dada por la derivada parcial  $\partial_\mu$  más una corrección espe-

cificada por un objeto con componentes en coordenadas locales  $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ , llamado *conexión*. De este modo, la derivada  $\nabla_\mu$  de un vector  $v^\nu$  viene dada por

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda. \quad (1.2)$$

Las componentes  $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$  se conocen como los símbolos de Christoffel y se definen a partir de la métrica  $g_{\mu\nu}$  según

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}). \quad (1.3)$$

A partir de los símbolos de Christoffel se obtiene el tensor de curvatura de Riemann, cuyas componentes  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  dan una descripción local de la curvatura en los abiertos definidos por las coordenadas locales. Dichas componentes son

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.4)$$

Dado que las componentes de este tensor (como las de cualquier otro), dependen de las coordenadas locales que se utilicen, la caracterización local de la curvatura es delicada. Sin embargo, el hecho concreto es que si las componentes del tensor de Riemann fueran nulas en algunas coordenadas, lo serían en cualquier otro sistema de coordenadas, dado su carácter tensorial. En ese caso recuperaríamos la geometría euclídea usual y estaríamos en presencia del espacio plano de Minkowski.

La geometría local puede ser caracterizada a través de invariantes geométricos, cuyo valor no depende de las coordenadas particulares utilizadas, como es el caso de la norma de un vector. Para eso, serán de utilidad contracciones del tensor de Riemann que produzcan invariantes. Por ejemplo, el tensor de *Ricci* se define en coordenadas locales según  $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ , y su traza produce el invariante llamado *escalar de curvatura*, dado entonces por

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

El escalar  $R$  cumple un rol protagónico en RG, ya que con él se construye la acción de Hilbert-Einstein que da lugar a las ecuaciones de la gravedad.

En el contexto de la geometría Riemanniana, se conocen como *geodésicas* a las curvas que extremizan la distancia entre dos puntos en un espacio curvo. Por ejemplo, las geodésicas sobre una esfera son los círculos máximos; aquellos cuyos centros se encuentran en el centro de la esfera. Más formalmente, las geodésicas se definen como aquellas curvas cuyo vector tangente se propaga paralelamente a sí mismas. Por lo tanto, usando la definición de derivada dada por la Ec. (1.2), se obtiene que una curva

geodésica  $x^\mu(\tau)$  satisface la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.6)$$

Cabe destacar que dados los valores iniciales de  $x^\mu$  y  $dx^\mu/d\tau$  siempre existe una única solución de la Ec. (1.6), propiedad que comparten también las soluciones de las ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica. El parámetro *afín*  $\tau$  suele elegirse como el tiempo propio cuando se trata de geodésicas temporales, que son las curvas que siguen las partículas y observadores masivos libremente gravitantes.

En general, las geodésicas pueden clasificarse a partir de la norma de  $x^\mu$ . Debido a que la signatura utilizada es  $- , + , + , +$ , se tiene

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \begin{cases} < 0, & \text{geodésicas tipo tiempo, o temporales (partículas masivas),} \\ = 0, & \text{geodésicas tipo luz, o nulas (partículas no masivas),} \\ > 0, & \text{geodésicas tipo espacio, o espaciales (propagación no causal).} \end{cases}$$

### 1.3. Ecuaciones de Einstein

La teoría de la Relatividad General tiene como principal motivación el principio de equivalencia, según el cual un sistema inmerso en un campo gravitatorio es localmente indistinguible de un sistema de referencia no inercial acelerado. De este modo no es posible, localmente, detectar la presencia de un campo gravitatorio. Consecuentemente, la gravedad no puede ser vista como un campo de fuerzas, sino como una faceta de la estructura del espacio-tiempo. Siguiendo esta idea, las trayectorias de los cuerpos libremente gravitantes son simplemente las geodésicas de la métrica del espacio-tiempo curvo.

Resumidamente, el espacio-tiempo es una variedad definida por una métrica  $g_{\mu\nu}$ , cuya curvatura se relaciona con la distribución de materia y energía en el espacio-tiempo según las *ecuaciones de Einstein*

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el llamado tensor de Einstein,  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento y  $R_{\mu\nu}$  y  $R$  son el tensor y el escalar de Ricci, respectivamente, definidos anteriormente. La presencia (o no) en las ecuaciones del término cosmológico asociado a  $\Lambda$ , es un debate que continúa en la actualidad. En cualquier caso, las ecuaciones de Einstein relacionan la distribución de materia y energía (codificada en  $T_{\mu\nu}$ ), con la geometría del espacio-tiempo (caracterizada por  $g_{\mu\nu}$ ), a través de diez ecuaciones diferenciales no lineales, en derivadas parciales, de segundo orden.

## 1.4. Ejemplos de soluciones exactas

### 1.4.1. Métrica de Minkowski

La solución más sencilla –acaso también la más importante– de las ecuaciones de Einstein en vacío y sin constante cosmológica, es la métrica de Minkowski, correspondiente a un espacio plano (curvatura nula). Esta es la métrica que sirve de arena geométrica para el Modelo Estándar de Partículas, y constituye el ámbito de la Relatividad Especial.

En coordenadas cartesianas usuales  $(t, x, y, z)$ , la métrica resulta

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.8)$$

Dado que los símbolos de Christoffel (Ec. (1.3)) son todos nulos, las geodésicas (1.6) son las rectas  $x^\mu(\tau) = \alpha \tau + \beta$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes. En vistas a caracterizar la estructura global del espacio, podemos enfocarnos en la sub-variedad 2-dimensional  $(t, x)$ , obtenida de (1.8) al tomar constantes las coordenadas  $y, z$ . Consideremos entonces

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \quad (1.9)$$

Las trayectorias nulas, que definen los *conos de luz*, se obtienen a partir de  $ds^2 = 0$ , es decir,  $x = \pm t + cte$ , por lo que están a  $45^\circ$  en el diagrama  $(t, x)$ . Sin embargo estas coordenadas se extienden hasta infinito, puesto que en la métrica (1.8) las coordenadas cartesianas son globales y no están restringidas en absoluto. Para poder representar todo el espacio en un diagrama finito, haremos algunos cambios de coordenadas. Primero pasamos a *coordenadas nulas* (así llamadas puesto que las curvas  $u, v$  constantes corresponden a los conos de luz), definidas según

$$u = x + t, \quad v = x - t, \quad (1.10)$$

de modo que los diferenciales resultan

$$dx = \frac{du + dv}{2}, \quad dt = \frac{du - dv}{2}. \quad (1.11)$$

Por lo tanto, la métrica en estas coordenadas queda

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = du \, dv. \quad (1.12)$$

Con el propósito de visualizar todo el espacio en una región compacta, definimos ahora

$$U = \arctan(u), \quad V = \arctan(v), \quad (1.13)$$

de modo que

$$-\frac{\pi}{2} \leq U \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq V \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1.14)$$

y los diferenciales resultan

$$du = \cos^{-2}(U) dU, \quad dv = \cos^{-2}(V) dV, \quad (1.15)$$

por lo que la métrica toma la forma

$$ds^2 = \cos^{-2}(U) \cos^{-2}(V) dU dV. \quad (1.16)$$

Una vez *compactificado* el espacio, podemos volver a coordenadas que permitan visualizar los conos de luz a  $45^\circ$ , como en el espacio original. Para eso, tomemos nuevas coordenadas  $(T, X)$  de acuerdo a

$$X = U + V, \quad T = U - V, \quad (1.17)$$

con lo cual ahora tenemos

$$-\pi \leq X \leq \pi, \quad -\pi \leq T \leq \pi, \quad (1.18)$$

$$-\pi \leq X + T \leq \pi, \quad -\pi \leq X - T \leq \pi. \quad (1.19)$$

Esto significa que los diferenciales quedan

$$dU = \frac{dX + dT}{2}, \quad dV = \frac{dX - dT}{2}, \quad (1.20)$$

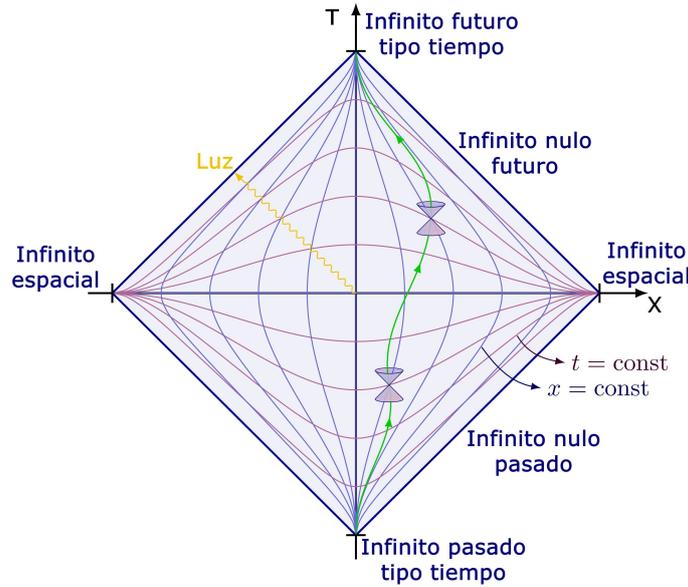
y, usando que

$$\cos^2\left(\frac{X+T}{2}\right) \cos^2\left(\frac{X-T}{2}\right) = \frac{1}{4} (\cos X + \cos T)^2, \quad (1.21)$$

la métrica resulta, finalmente

$$ds^2 = (\cos T + \cos X)^{-2} (-dT^2 + dX^2). \quad (1.22)$$

En la Fig. 1.1 se muestra un diagrama del espacio-tiempo de Minkowski en estas coordenadas, lo que se conoce como diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski. En el interior se muestran distintas trayectorias geodésicas. Notar que todas las geodésicas temporales (espaciales) comienzan en el punto señalado como “infinito pasado tipo tiempo” (“infinito espacial”) en  $(X = 0, T = -\pi)$  (en  $(X = -\pi, T = 0)$ ) y terminan en el “infinito futuro tipo tiempo” (“infinito espacial”) en  $(X = 0, T = \pi)$  (en  $(X = \pi, T = 0)$ ). Mientras que las trayectorias de luz ( $ds^2 = 0$ ) están a  $45^\circ$  y tienen



**Figura 1.1:** Diagrama de Penrose para el espacio tiempo de Minkowski. En el interior se muestran las geodésicas con  $x$  constante y  $t$  constante. Además, en verde se muestra una curva temporal (no geodésica) genérica, y los conos de luz en dos puntos de dicha curva.

extremos en los “infinitos nulos” ( $X + T = \pm\pi$  y  $X - T = \pm\pi$ ). En la Fig. 1.1, se aprecia también una trayectoria no geodésica correspondiente a un observador masivo (curva verde). La curva siempre se encuentra en el interior de los conos de luz locales y, al no corresponder a un observador libremente gravitante, está sujeta a una aceleración local no nula.

### 1.4.2. Métrica de Schwarzschild y agujeros negros

Una solución esféricamente simétrica de vacío y sin constante cosmológica de las ecuaciones de Einstein, es la correspondiente al campo gravitacional exterior de un cuerpo estático y esféricamente simétrico, conocida como solución de Schwarzschild. La solución de Schwarzschild describe correctamente la gravedad en el sistema solar, y predice fenómenos como la precesión de la órbita de Mercurio, el corrimiento al rojo (*redshift*) gravitacional, la deflexión de la trayectoria de la luz y los efectos de “retraso temporal” de la luz.

La métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas usuales  $(t, r, \theta, \phi)$ , toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.23)$$

siendo  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$  el elemento de línea correspondiente a la 2-esfera y  $M$  una constante de integración que se identifica con la masa del cuerpo esféricamente simétrico. Sin embargo, la métrica de Schwarzschild es una solución de vacío de las ecuaciones, así que la identificación de  $M$  con la masa no es inmediata. La forma más

simple de relacionar a  $M$  con la masa es considerar la métrica *interior* compuesta por algún modelo de fluido esféricamente simétrico y empalmar ambas soluciones, de tal forma de conseguir la descripción del campo gravitatorio de una esfera de fluido inmersa en el vacío esféricamente simétrico. Esta solución interior fue considerada también por el propio Schwarzschild en el trabajo original [9], en donde consideró como modelo de estrella a un fluido estático, esféricamente simétrico, con presión nula.

Observemos que la métrica dada por la Ec. (1.23) se vuelve singular para  $r = 0$  y  $r = 2M$ . Se puede demostrar que la geometría del espacio-tiempo no es singular en  $r = 2M$ , sino que las coordenadas esféricas fallan en cubrir esa región, ocasionando la aparente singularidad ahí. Básicamente, es posible elegir un sistema de coordenadas en el cual la expresión para  $ds^2$  deja de ser singular en la región  $r = 2M$ . Esto se logra recurriendo a distintas *extensiones* analíticas de la geometría de Schwarzschild, como las extensiones de Eddington-Finkelstein y de Kruskal, siendo esta última la máxima extensión analítica del espacio-tiempo de Schwarzschild.

En cambio, la singularidad en  $r = 0$  es una singularidad física y no puede ser eliminada mediante una transformación de coordenadas. Esto es así porque, si bien el escalar de curvatura  $R$  es idénticamente nulo (como en cualquier solución de vacío de las ecuaciones sin constante cosmológica), otros invariantes acusan una divergencia en  $r = 0$ . Tal es el caso del invariante de Kretschmann, definido por  $K = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}R_\rho{}^{\sigma\mu\nu}$ , que para la geometría de Schwarzschild toma el valor

$$K = 48 \frac{M^2}{r^6}. \quad (1.24)$$

Entonces  $r = 0$  es una singularidad real e intrínseca de la geometría, excepto en el caso  $M = 0$ , en donde recuperamos la métrica de Minkowski (espacio-tiempo plano) en coordenadas esféricas, esto es,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.25)$$

De hecho, puede demostrarse que cualquier observador o partícula de luz que ingrese en la región  $r < 2M$  inevitablemente terminará en la singularidad en  $r = 0$ . Esta región de la cual no se puede escapar es lo que se conoce como un agujero negro, puesto que no puede ser observada desde afuera. El borde de esta región, esto es, la hipersuperficie definida por  $r = 2M$ , es el *horizonte de eventos*.

Cabe aclarar que para cualquier configuración de equilibrio estático, la región  $r < 2M$  se encuentra en el interior de la región con materia y, por lo tanto, allí ya no es válida la solución de Schwarzschild, correspondiente al espacio vacío que rodea a dicha formación de materia. Sin embargo, los cuerpos suficientemente masivos sufren un colapso gravitacional completo debido al agotamiento de su combustible nuclear y

entonces disminuyen su radio [10]. En cierto momento del colapso de la estrella el radio pasa a ser menor que  $2M$  y toda la materia y energía de la estrella se precipitan a la singularidad, dejando un agujero negro de Schwarzschild como estado final del colapso. Los detalles del colapso no pueden ser descriptos por la métrica de Schwarzschild, puesto que son inherentemente dinámicos, pero se prueba que el estado estacionario final está correctamente descripto por el agujero negro de Schwarzschild, al menos cuando la estrella es no rotante (momento angular nulo).

### 1.4.3. Soluciones cosmológicas

Otro tipo de soluciones de las ecuaciones de Einstein son las soluciones cosmológicas, que modelan la evolución del universo, a gran escala, en el tiempo. Los modelos cosmológicos actuales se basan en que el universo a gran escala debe ser isótropo y homogéneo. La isotropía alrededor de un punto del espacio implica que el espacio se vea igual sin importar en qué dirección se observe. Por otro lado, la homogeneidad refiere a que la métrica sea la misma a lo largo de todo el espacio. Además, de las observaciones astronómicas se ve que las galaxias distantes se alejan de nosotros en todas direcciones, lo que muestra que el universo no es estático y cambia con el tiempo. Por lo tanto, en la construcción de un modelo cosmológico, debe tenerse en cuenta que el universo sea homogéneo e isotrópico en el espacio pero no en el tiempo. Los modelos cosmológicos, entonces, describen la dinámica del universo a través del tiempo, independientemente de la posición en la que se lo observe.

El requisito de homogeneidad e isotropía espacial nos lleva a considerar métricas que contengan espacios de curvatura constante para cada hipersuperficie espacial dada por  $t = \text{constante}$ . Así, se consideran las métricas de tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), dadas por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.26)$$

donde  $t$  es la coordenada temporal y  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas espaciales esféricas. Para el parámetro  $k$  en la Ec. (1.26) hay tres casos de interés:  $k = +1$ , que se corresponde con la métrica espacial de una 3-esfera,  $k = 0$ , correspondiente a un espacio plano, y  $k = -1$ , que se corresponde con un 3-hiperboloide en la variedad espacial. Verdaderamente, estos valores de  $k$  no son relevantes *per se*, sólo lo es su signo, debido a que las tres variedades de curvatura constante mencionadas pueden obtenerse con apropiados cambios de coordenadas en donde sólo el signo (o la anulación) de  $k$  es importante.

Por otro lado, la función  $a(t)$  se conoce como el factor de escala e indica “cuán grande” es el espacio en el momento  $t$ . Su comportamiento está determinado por las

ecuaciones de Einstein. El contenido material/energético del universo a gran escala se modela como un fluido perfecto, isótropo y homogéneo, esto es, mediante un tensor de energía-momento que puede escribirse en un sistema co-móvil (fijo al fluido) de acuerdo a  $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ . Aquí,  $\rho$  es la densidad de energía del fluido y  $p$  la presión; ambas son funciones del tiempo solamente, y normalmente se adopta una ecuación de estado del tipo  $p = \omega\rho$ , en donde  $\omega$  es el índice barotrópico. Por ejemplo, si  $\omega = 1/3$  el contenido material corresponde a un fluido de radiación, que es una buena aproximación en las etapas tempranas del universo. En cambio, si  $\omega = 0$  se tiene un fluido de tipo *polvo*, en donde las partículas no interactúan entre sí; este tipo de comportamiento es consistente con el tipo de materia que observamos en la actualidad, constituida por galaxias distantes en baja o nula interacción mutua.

Como mencionamos, las ecuaciones de Einstein determinan el comportamiento del factor de escala  $a(t)$ . Si consideramos  $\Lambda = 0$ , la componente  $\mu = \nu = 0$  de (1.7) nos dice

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi\rho, \quad (1.27)$$

que se conoce como ecuación de Friedmann. Aquí hemos definido el parámetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$ , que es en definitiva la variable cosmológica relevante. El valor actual del parámetro de Hubble se encuentra en el seno mismo de una controversia debido a las evidencias observacionales provenientes de distintas fuentes experimentales (ver [11]). Notemos que la ecuación de Friedmann es una ecuación en derivadas primeras de la métrica. Si consideramos, en cambio, las ecuaciones espaciales  $r - r$ ,  $\theta - \theta$  y  $\phi - \phi$ , obtenemos una sola ecuación en derivadas segundas debido a la homogeneidad e isotropía de los 3-espacios de curvatura constante, a saber

$$H^2 + \dot{H} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (1.28)$$

Es posible resolver las ecuaciones de Friedmann en varios casos simples, pero también relevantes. De hecho, es probable que la sección espacial del universo visible sea compatible con  $k = 0$ . En este caso, si consideramos un fluido de radiación, obtenemos un factor de escala  $a(t) \propto t^{1/2}$ , mientras que para un fluido en forma de polvo, se tiene  $a(t) \propto t^{2/3}$ . Sin embargo, a menudo es más útil conocer el comportamiento cualitativo correspondiente a cada solución. Si por ejemplo se toma  $\Lambda = 0$  y se considera un universo con energía positiva ( $\rho > 0$ ) y presión no negativa ( $p \geq 0$ ), entonces de la Ec. (1.28) se tiene que  $\dot{H} < 0$ . Como de las observaciones se sabe que el universo se está expandiendo ( $H > 0$ ), esto significa que el universo se está desacelerando. Esto es justamente lo que se esperaría ya que la atracción gravitacional se opone a la expansión. Sin embargo, hoy sabemos que el universo se encuentra en expansión acelerada debido, probablemente, a la existencia de una constante cosmológica  $\Lambda$  positiva y muy

pequeña, generando un factor de escala  $a(t) \propto \text{Exp}(H_0 t)$ , en donde  $H_0 = \sqrt{\Lambda/3}$ .

En cualquier caso, el hecho de que el universo esté en expansión implica que al seguir su evolución hacia atrás en el tiempo, el mismo se habría originado en una singularidad geométrica, en donde  $a(t = 0) = 0$ . Esta singularidad es el *Big Bang*, y no es producto de una incorrecta elección de coordenadas, ya que los invariantes geométricos son divergentes ahí. Por ejemplo, el escalar de curvatura para el caso  $k = \Lambda = 0$  es

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}), \quad (1.29)$$

que es divergente cuando  $t \rightarrow 0$ , pues  $H$  y  $\dot{H}$  lo son para factores de escala representativos del universo temprano.

Por otro lado, la evolución del universo a futuro depende del valor del parámetro  $k$ . Para  $k \leq 0$ , la Ec. (1.28) implica

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{|k|}{a^2} > 0. \quad (1.30)$$

Por lo tanto,  $H$  nunca pasa por 0. Y como se sabe que actualmente  $H > 0$ , entonces  $H > 0$  para todo tiempo y el universo se expande para siempre, aunque cada vez más y más lento (en ausencia de constante cosmológica). En cambio si  $k > 0$ , la Ec. (1.28) queda

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{|k|}{a^2}. \quad (1.31)$$

Debido a que el universo se diluye al expandirse ( $\rho \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow \infty$ ), entonces la Ec. (1.31) implica que, si  $a$  crece indefinidamente,  $H^2$  se volvería negativo, lo cual no es posible. Por lo tanto, debe haber un límite superior para  $a(t)$  a partir del cual decrece. Y como  $\dot{H} < 0$  para todo tiempo (ver Ec. (1.28)), esto lleva a una contracción inevitable hacia una nueva singularidad, el *Big Crunch*.

#### 1.4.4. Otras soluciones

Existe un número adicional de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. Entre ellas, se encuentra el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, que corresponde a un agujero negro estático, esféricamente simétrico, eléctricamente cargado, y sin constante cosmológica. En coordenadas esféricas usuales  $(t, r, \theta, \phi)$ , toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.32)$$

donde  $M$  y  $q$  se identifican con la masa y la carga del agujero negro, respectivamente. Esta geometría posee muchas propiedades interesantes, pero no es físicamente del todo relevante puesto que los agujeros negros son eléctricamente neutros.

En cambio, el agujero negro rotante, o *solución de Kerr*, posee una enorme importancia astrofísica. Este objeto corresponde a la solución de vacío, estacionaria, con momento angular  $J$  y  $\Lambda = 0$  de las ecuaciones de Einstein. En coordenadas esféricas usuales  $(t, r, \theta, \phi)$ , toma la forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2 M r}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4 M r a \sin^2(\theta)}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2(\theta) d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1.33)$$

donde

$$\Delta(r) = r^2 - 2 M r + a^2, \quad (1.34)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad (1.35)$$

$$\Sigma(r, \theta) = (r^2 + a^2)^2 - \Delta(r) a^2 \sin^2(\theta), \quad (1.36)$$

con  $a = J/M$ .

Observaciones directas muestran que en los centros galácticos se encuentran agujeros negros de Kerr supermasivos. Tal es el caso del presente en nuestra propia galaxia [12], [13], [14], así como del que habita la galaxia Messier 87 [15].

Finalmente, no podemos dejar de mencionar la existencia de soluciones que describen *ondas gravitacionales*, que se producen por efecto de masas aceleradas (al igual que las ondas electromagnéticas se producen por la presencia de cargas aceleradas). Estas ondas fueron observadas por primera vez hace 7 años [16] y fueron emitidas por la fusión de dos agujeros negros de 29 y 36 masas solares a una distancia de unos 1300 millones de años luz. En la actualidad, la astronomía de ondas gravitacionales es una disciplina en pleno desarrollo, basada en la detección frecuente de ondas gravitacionales producidas por órbitas o colisión de objetos compactos en las más remotas regiones del universo, como es el caso de las recientemente observadas que fueron producidas por un sistema binario de estrellas de neutrones [17].

## 1.5. Singularidades

Nos remitiremos en esta sección a hacer unas breves observaciones generales sobre la idea de una singularidad espacio-temporal. Esta es un área muy técnica desarrollada en los años sesenta y setenta, principalmente por Penrose y Hawking [18], [19], [20], y también, entre otros, por Geroch [21] y Schmidt [22]. Referencias estándar sobre los fundamentos y primeras etapas en el área son [6] y [7].

Tal como vimos en el caso de la métrica de Schwarzschild y en las soluciones cosmológicas del tipo FRW, en no pocas ocasiones, las soluciones de las ecuaciones de Einstein presentan ciertos problemas asociados con singularidades del espacio-tiempo.

En el caso de la métrica de Schwarzschild, tenemos un “punto” ( $r = 0$ ) en donde la curvatura del espacio-tiempo diverge y en donde convergen en un tiempo finito todas las geodésicas que ingresan en la región  $r < 2M$ . Es importante mencionar que al considerar la máxima extensión analítica de la geometría de Schwarzschild (coordenadas de Kruskal), la singularidad corresponde no a un “punto”, sino a una hipersuperficie espacial que se encuentra en el futuro de *todo* observador que ingrese a la región  $r < 2M$ , ver, por ejemplo, la Sección 6.4 de [6]. Esto muestra que el *carácter* de la singularidad no está en modo alguno especificado a priori, sino que está condicionado por la carta local utilizada en la descripción del espacio. Por otro lado, no todas las geodésicas de la geometría de Schwarzschild terminan en la singularidad; algunas, como las que corresponderían a observadores libremente gravitantes que orbitaran el agujero negro de Schwarzschild, no encontrarán la singularidad en ningún evento futuro. En este sentido, la *singularidad de curvatura fuerte* (recordemos que el invariante de Kretschmann diverge en  $r = 0$ , Ec. (1.24)), característica de la geometría de Schwarzschild, no es universal.

En el caso de las métricas del tipo FRW, vimos que al extender hacia atrás en el tiempo la evolución del factor de escala  $a(t)$ , éste se anula, con lo cual toda la materia del universo se concentra en un único punto de densidad infinita: la singularidad inicial del *Big Bang*. En alusión a lo previamente comentado en el caso del agujero negro, la singularidad de curvatura fuerte correspondiente al Big Bang sí es universal. Todas las geodésicas causales (nulas y temporales) son incompletas hacia el pasado, puesto que todas ellas se interrumpen en la singularidad en un tiempo propio finito aproximadamente igual a unos catorce mil millones de años.

Es difícil dar una definición general sobre qué es una singularidad. De hecho, no existe un criterio final al momento en lo que concierne a este punto. En otras áreas de la física, una singularidad está generalmente asociada a la divergencia de alguna magnitud en algún lugar del espacio-tiempo, como por ejemplo, el campo electrostático y la energía de una carga puntual en el origen. Sin embargo, aquí es el espacio-tiempo mismo el que presenta un comportamiento singular, haya o no campos de materia en él.

Una primera e importante caracterización del concepto de singularidad, corresponde a la *completitud geodésica*. En efecto, se podría definir en primera instancia un espacio regular (opuesto a singular), como aquel cuyas geodésicas causales (temporales y nulas) son todas completas. Esto significaría que se podría extender indefinidamente la línea de mundo de cualquier partícula (masiva o no), tanto al pasado como al futuro. Este criterio es importante, puesto que es operativo. En principio, con la maquinaria suficiente, se podría resolver completamente la ecuación de la geodésica en un cierto espacio, y determinar así si éste es regular o no. Bastaría encontrar una geodésica incompleta para declarar al espacio como singular.

Sin embargo, aún siendo geodésicamente completo, el espacio podría ser singular en el caso en que una curva causal (esto es, no necesariamente una geodésica causal), fuese incompleta. Las curvas causales no geodésicas también revisten mucha importancia física. De hecho, el lector de estas líneas, como aquel que las escribe, se encuentra en este momento en movimiento no geodésico en su escritorio. Un astronauta en su nave espacial, también se encuentra recorriendo una curva temporal no geodésica una vez que enciende los motores de su cohete. En este sentido, sería físicamente cuestionable decidir sobre la regularidad o no del espacio sólo en términos de la completitud geodésica. De hecho, el criterio adoptado en [7], que puede considerarse sin duda la referencia seminal en el área, es la completitud de las curvas causales, y no sólo de las geodésicas. Desafortunadamente, este criterio es poco operativo porque, a diferencia de las curvas geodésicas, la caracterización de todas las posibles curvas causales admitidas por un dado espacio es prácticamente inabordable.

En lo que concierne a este trabajo, alcanzará con tener en cuenta el estudio de la curvatura para decidir sobre la regularidad o no de un cierto espacio. Esto debe analizarse de una manera que sea independiente de la elección de coordenadas, ya que como hemos mencionado, los cambios de coordenadas alteran la forma en que se observa la singularidad. La manera de hacerlo es a través de los invariantes  $R$ ,  $R^{ab}R_{ab}$ ,  $R^{abcd}R_{abcd}$  y otros escalares polinomiales en el tensor de curvatura y sus derivadas. En el Capítulo 3 volveremos sobre esta cuestión luego de introducir el *toy model* que servirá de base para el estudio a realizarse en el Capítulo 4.

# Capítulo 2

## Análogo óptico del espacio-tiempo

En este capítulo se aborda el estudio de la gravedad análoga en los medios ópticos de tipo Plebanski-Tamm, cuya génesis puede rastrearse hasta el primer cuarto del siglo pasado [23]. Sin embargo, no fue sino hasta las contribuciones de Plebanski [24] que el formalismo fue desarrollado en su totalidad, en el contexto del estudio de la electrodinámica en el espacio-tiempo curvo de la Relatividad General. Para una exposición completa, consultar [25].

### 2.1. Deducción de las ecuaciones de Plebanski-Tamm

El punto de partida de la analogía son las ecuaciones de Maxwell, que en el vacío pueden escribirse según

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 4\pi \rho, \quad \bar{\nabla} \times \bar{B} - \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 4\pi \bar{J}, \quad (2.1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

donde  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$  son el campo eléctrico y de inducción magnética respectivamente,  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga y  $\bar{J}$  es la densidad de corriente eléctrica. En formato covariante, válido no sólo para para coordenadas arbitrarias en el espacio plano, sino también para un fondo curvo, las Ecs. (2.1) y (2.2) se escriben

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\nu}, \quad (2.3)$$

$$\partial_{\mu} F_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} F_{\sigma\mu} + \partial_{\sigma} F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.4)$$

donde  $J^{\nu} = (\rho, \bar{J})$  es la cuadri-corriente y  $F_{\mu\nu}$  es el tensor de campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} = -F_{\nu\mu}. \quad (2.5)$$

Aquí,  $A_\mu = (\phi, \bar{A})$  es el cuadri-potencial, siendo  $\phi$  el potencial escalar y  $\bar{A}$  el potencial vector a partir de los cuales los campos resultan

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}. \quad (2.7)$$

En coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  el tensor de campo electromagnético toma la forma

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, en un medio dieléctrico, e incorporando el campo de desplazamiento eléctrico  $\bar{D}$  y el campo magnético  $\bar{H}$ , las ecuaciones de Maxwell en el espacio plano se escriben

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 4\pi\rho, \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} - \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = 4\pi\bar{J}, \quad (2.9)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} + \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.10)$$

La idea es interpretar a las ecuaciones en el vacío curvo (Ecs. (2.3) y (2.4)), como ecuaciones en presencia de un medio material en el espacio plano, escritas en coordenadas cartesianas (Ecs. (2.9) y (2.10)). Para eso, definamos al tensor  $H^{\mu\nu}$  de acuerdo a

$$H^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}F_{\lambda\rho}, \quad (2.11)$$

con lo cual, las componentes covariantes  $F_{\mu\nu}$  se relacionan con  $H^{\mu\nu}$  según

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}H^{\lambda\rho}, \quad (2.12)$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Pediremos ahora que las componentes cartesianas contravariantes  $H^{\mu\nu}$  verifiquen

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, introduciendo una nueva cuadri-corriente  $\tilde{J}^\mu = \sqrt{-g}J^\mu$ , las Ecs. (2.3) y (2.4) se escriben

$$\nabla_\mu H^{\mu\nu} = 4\pi \tilde{J}^\nu, \quad (2.14)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.15)$$

De esta forma, investigaremos si existen relaciones constitutivas consistentes, es decir, relaciones entre las componentes cartesianas  $\bar{E}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{H}$  de tal forma que la identificación que motiva la analogía, se realice. Debido a (2.12), estas relaciones constitutivas involucrarán a las características del espacio-tiempo a través de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . En lo que sigue es importante tener en cuenta que los índices griegos  $\mu, \nu$ , etc, corresponden a coordenadas espacio-temporales, mientras que los latinos  $i, j$ , etc, a coordenadas cartesianas en  $3D$ . Esta distinción es necesaria puesto que la intención es relacionar las ecuaciones de Maxwell en un fondo curvo, con aquellas en el espacio plano 3-dimensional, a expensas de introducir relaciones constitutivas representativas de un cierto medio material.

Por medio de las Ecs. (2.8), (2.12) y (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} E_i &= -F_{0i} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{0\lambda}g_{i\rho}H^{\lambda\rho} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}}(g_{00}g_{ij}D^j - g_{0j}g_{i0}D^j + \epsilon_{jkl}g_{0j}g_{ik}H^l) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(g_{i0}g_{j0} - g_{ij}g_{00})D^j - \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon_{jkl}g_{0j}g_{ik}H^l. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para simplificar este resultado se puede utilizar la identidad  $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ , de donde se deduce

$$g_{0\lambda}g^{\lambda i} = 0 \implies g^{i0} = -\frac{1}{g_{00}}g^{ij}g_{j0}, \quad (2.17)$$

$$g_{j\lambda}g^{\lambda i} = g_{j0}g^{0i} + g_{jk}g^{ki} = \delta_j^i. \quad (2.18)$$

Luego de combinar ambas expresiones, obtenemos

$$g^{ik} \left( g_{kj} - \frac{1}{g_{00}}g_{k0}g_{j0} \right) = \delta_j^i. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, contrayendo con  $g^{mi}$  ambos miembros de la Ec. (2.16) y usando las Ecs. (2.18) y (2.19) se tiene

$$g^{mi}E_i = -\frac{g_{00}}{\sqrt{-g}}g^{mi} \underbrace{\left( g_{ij} - \frac{1}{g_{00}}g_{i0}g_{j0} \right)}_{\delta_j^m} D^j - \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon_{jkl}g_{0j} \underbrace{g_{ik}g^{mi}}_{\delta_k^m - g_{k0}g^{0m}} H^l. \quad (2.20)$$

Observemos que en el miembro derecho de la Ec. (2.20), al reconocer que  $g_{ik} g^{mi} = \delta_k^m - g_{k0} g^{0m}$ , el último término resulta proporcional a  $\epsilon_{jkl} g_{0j} g_{k0}$ . Dado que  $\epsilon_{jkl}$  es antisimétrico y  $g_{0j} g_{k0}$  es simétrico en  $j$  y  $k$ , entonces este término se anula. Por lo tanto, de la Ec. (2.20) se obtiene

$$D_m = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{mi} E_i - \frac{1}{g_{00}} \epsilon_{jml} g_{0j} H^l. \quad (2.21)$$

A continuación, se consideran los tensores duales de Hodge de  $F_{\mu\nu}$  y  $H^{\mu\nu}$  que son, por definición,

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

$$*H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \quad (2.23)$$

En coordenadas cartesianas,  $*F^{\mu\nu}$  y  $*H_{\mu\nu}$  toman la forma

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$*H_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \begin{pmatrix} 0 & -H_1 & -H_2 & -H_3 \\ H_1 & 0 & -D_3 & D_2 \\ H_2 & D_3 & 0 & -D_1 \\ H_3 & -D_2 & D_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Además, las relaciones dadas por la Ec. (2.12) se transforman en

$$\begin{aligned} *H_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} *F^{\lambda\rho}, \\ *F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} *H_{\lambda\rho}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Entonces de las Ecs. (2.24), (2.25) y (2.26) obtenemos

$$H_i = -\frac{1}{\sqrt{-g}} *H_{0i} = -g_{0\lambda} g_{i\rho} *F^{\lambda\rho}, \quad (2.27)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} (g_{00} g_{ij} - g_{0j} g_{i0}) B_j + \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon_{jkl} g_{0j} g_{ik} E_l. \quad (2.28)$$

Finalmente, contrayendo con  $g^{mi}$  y usando las Ecs. (2.18) y (2.19), llegamos a

$$g^{mi} H_i = -\frac{g_{00}}{\sqrt{-g}} g^{mi} \underbrace{\left( g_{ij} - \frac{1}{g_{00}} g_{i0} g_{j0} \right)}_{\delta_j^m} B_j + \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon_{jkl} g_{0j} \underbrace{g_{ik} g^{mi}}_{\delta_k^m - g_{k0} g^{0m}} E_l. \quad (2.29)$$

Nuevamente, al desarrollar el último término,  $g_{ik} g^{mi}$  se anula por ser  $\epsilon_{jkl}$  antisimétrico y  $g_{0j} g_{k0}$  simétrico en  $j$  y  $k$ . Por lo tanto, de la Ec. (2.29) se obtiene

$$B_m = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{mi} H_i + \frac{1}{g_{00}} \epsilon_{jml} g_{0j} E_l. \quad (2.30)$$

Las Ecs. (2.21) y (2.30) son las *ecuaciones constitutivas de Plebanski-Tamm*, y pueden ser expresadas en forma vectorial como

$$\bar{D} = \mathbf{K} \bar{E} + \bar{\Gamma} \times \bar{H}, \quad (2.31)$$

$$\bar{B} = \mathbf{K} \bar{H} - \bar{\Gamma} \times \bar{E}, \quad (2.32)$$

donde las componentes de la matriz  $\mathbf{K}$  y el vector  $\bar{\Gamma}$  son

$$K_{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \quad (2.33)$$

$$\Gamma_m = \frac{g_{0m}}{g_{00}}. \quad (2.34)$$

En resumen, las ecuaciones completas para el electromagnetismo en los medios de Plebanski-Tamm son las ecuaciones de Maxwell (Ecs. (2.9) y (2.10)) junto a las ecuaciones constitutivas (Ecs. (2.31) y (2.32)).

Notemos, una vez más, que las relaciones constitutivas (2.31) y (2.32), debido a las definiciones (2.33) y (2.34), no son covariantes; ellas solo son válidas en coordenadas cartesianas fijas al medio material, y aplican a métricas estacionarias (independientes del tiempo). Esto último es evidente puesto que la matriz  $\mathbf{K}$  oficia tanto de permeabilidad, como de permitividad relativa del medio óptico, y las ecuaciones (2.9) y (2.10) son válidas solo si esas cantidades son independientes del tiempo.

## 2.2. Ondas cuasi-planas

La electrodinámica en los medios ópticos de Plebanski-Tamm está descrita, entonces, por las ecuaciones (2.9) y (2.10) y las relaciones constitutivas (2.31) y (2.32). Consideraremos ahora las ecuaciones sin fuentes, y propondremos soluciones de tipo

onda cuasi-plana de la forma

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \bar{E}_0(\bar{x}) \exp [i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)], \quad (2.35)$$

$$\bar{H}(\bar{x}, t) = \bar{H}_0(\bar{x}) \exp [i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)], \quad (2.36)$$

donde  $\bar{E}_0(\bar{x})$  y  $\bar{H}_0(\bar{x})$  son las amplitudes complejas de los campos y el vector  $\bar{k}(\bar{x})$  es el vector de onda adimensional. En primer lugar examinemos las ecuaciones para los rotadores:

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Introduciendo el ansatz (2.35), la Ec. (2.37) se reduce a

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = \bar{\nabla} \times \bar{E}_0 e^{i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)} + i k_0 (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0) e^{i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (2.39)$$

de donde obtenemos,

$$\bar{B} = \left[ \frac{1}{i k_0} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0 + \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 \right] e^{i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)}. \quad (2.40)$$

Comparando con la Ec. (2.32), se sigue que

$$\left[ \frac{1}{i k_0} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0 + \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 \right] e^{i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)} = [\mathbf{K} \bar{H}_0 - \bar{\Gamma} \times \bar{E}_0] e^{i k_0 (\bar{k}(\bar{x}) \cdot \bar{x} - t)}. \quad (2.41)$$

Finalmente, reordenando llegamos a

$$i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0 = (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) + \bar{\Gamma}) \times \bar{E}_0 - \mathbf{K} \bar{H}_0, \quad (2.42)$$

y con un procedimiento análogo partiendo de la Ec. (2.38) obtenemos

$$i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{H}_0 = (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) + \bar{\Gamma}) \times \bar{H}_0 + \mathbf{K} \bar{E}_0. \quad (2.43)$$

Examinemos ahora la estructura de las ecuaciones de Maxwell para las divergencias en ausencia de fuentes, esto es

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0, \quad (2.44)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0. \quad (2.45)$$

Estudiemos primero la Ec. (2.44). Usando la Ec. (2.31) se tiene

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\Gamma} \times \bar{H}) = \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}) + (\bar{\nabla} \times \bar{\Gamma}) \cdot \bar{H} - \bar{\Gamma} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{H}). \quad (2.46)$$

Imponiendo el ansatz de las Ecs. (2.35) y (2.36), vemos que el término  $\bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E})$  resulta

$$\bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}) = \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0) e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)} + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0) e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)}, \quad (2.47)$$

mientras que el término  $\bar{\nabla} \times \bar{H}$  puede escribirse

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \times \bar{H} &= i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{H}_0, e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)} + (\bar{\nabla} \times \bar{H}_0) e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)}, \\ &= [\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{H}_0 - i k_0^{-1} (\bar{\nabla} \times \bar{H}_0)] i k_0 e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Utilizando la Ec. (2.43) podemos reemplazar el factor entre corchetes en la última ecuación, de modo que

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = -(\bar{\Gamma} \times \bar{H}_0 + \mathbf{K}\bar{E}_0) i k_0 e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)} = -i k_0 (\bar{\Gamma} \times \bar{H} + \mathbf{K}\bar{E}), \quad (2.49)$$

con lo cual obtenemos

$$\bar{\Gamma} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = -i k_0 \bar{\Gamma} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}). \quad (2.50)$$

Finalmente, combinando las Ecs. (2.46), (2.47) y (2.50) se llega a la expresión de la divergencia según

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = [\bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0) + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0) + (\bar{\nabla} \times \bar{\Gamma}) \cdot \bar{H}_0 + i k_0 \bar{\Gamma} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0)] e^{i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)}.$$

Debido a que estamos considerando las ecuaciones sin fuentes, la condición  $\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0$  implica

$$\bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0) + i k_0 [\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) + \bar{\Gamma}] \cdot (\mathbf{K}\bar{E}_0) + (\bar{\nabla} \times \bar{\Gamma}) \cdot \bar{H}_0 = 0. \quad (2.51)$$

El ejercicio recién efectuado puede hacerse partiendo de (2.45). En este caso obtenemos

$$\bar{\nabla} \cdot (\mathbf{K}\bar{H}_0) + i k_0 [\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) + \bar{\Gamma}] \cdot (\mathbf{K}\bar{H}_0) - (\bar{\nabla} \times \bar{\Gamma}) \cdot \bar{E}_0 = 0. \quad (2.52)$$

En resumen, el electromagnetismo en medios de PT caracterizados por la matriz  $\mathbf{K}$  y el vector  $\bar{\Gamma}$ , está descrito por las Ecs. (2.42), (2.43), (2.51) y (2.52), con tal que se consideren ondas cuasi-planas del estilo (2.35) y (2.36).

### 2.2.1. Análogo óptico para la métrica de Minkowski

Este caso es importante por cuanto nos permite reobtener la electrodinámica “usual”. Si consideramos la métrica de Minkowski (Ec. (1.8)), de las definiciones (2.33) y (2.34),

tenemos

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}, \quad \bar{\Gamma} = 0, \quad (2.53)$$

con  $\mathbf{I}$  la matriz identidad de  $3 \times 3$ . Por lo tanto las Ecs. (2.42), (2.43), (2.51) y (2.52) se reducen a

$$i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0 = \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 - \bar{H}_0, \quad (2.54)$$

$$i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{H}_0 = \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{H}_0 + \bar{E}_0, \quad (2.55)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0 + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot \bar{E}_0 = 0, \quad (2.56)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{H}_0 + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot \bar{H}_0 = 0. \quad (2.57)$$

Una pregunta obligada es cómo obtenemos las ondas planas monocromáticas usuales en este formalismo. Esto es respondido al considerar  $\bar{E}_0$ ,  $\bar{H}_0$  y  $\bar{k}$  independientes de  $\bar{x}$ , con lo cual se tiene

$$\bar{H}_0 = \bar{k} \times \bar{E}_0, \quad (2.58)$$

$$\bar{E}_0 = -\bar{k} \times \bar{H}_0, \quad (2.59)$$

$$\bar{k} \cdot \bar{E}_0 = 0, \quad (2.60)$$

$$\bar{k} \cdot \bar{H}_0 = 0. \quad (2.61)$$

Las Ecs. (2.58), (2.60) y (2.61) nos dicen que  $\bar{k} \perp \bar{E}_0$ ,  $\bar{k} \perp \bar{H}_0$  y  $\bar{E}_0 \perp \bar{H}_0$ , mientras que reemplazando (2.58) en (2.59), nos queda

$$\bar{E}_0 = -\bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{E}_0) = k^2 \bar{E}_0, \quad (2.62)$$

donde usamos  $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B})$  y la Ec. (2.60). Entonces, de esto se sigue que  $k^2 = 1$ , que no es otra sino la relación de dispersión usual. Vemos, así, que al considerar el medio análogo correspondiente al espacio de Minkowski, reobtenemos la propagación de ondas electromagnéticas planas usuales. Como veremos en el capítulo 4, estas soluciones sólo existen en este caso particular.

### 2.3. Óptica geométrica en medios de Plebanski-Tamm

En la aproximación de la óptica geométrica se consideran variaciones pequeñas, tanto para los campos como para el vector de onda, sobre escalas de longitud típicas de la longitud de onda  $k_0^{-1}$ . Por lo tanto, se puede despreciar la contribución del término del miembro izquierdo de las Ecs. (2.42) y (2.43) y del primer y último término de las Ecs. (2.51) y (2.52). Adicionalmente, se aproxima también  $\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \approx \bar{k}$ , puesto que

$\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) = \bar{k} + \bar{v}$ , con  $\bar{v}$  dado por

$$\bar{v} = \left( \frac{\partial k_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial k_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial k_3}{\partial x_1} x_3, \frac{\partial k_1}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial k_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial k_3}{\partial x_2} x_3, \frac{\partial k_1}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial k_2}{\partial x_3} x_2 + \frac{\partial k_3}{\partial x_3} x_3 \right).$$

El vector  $\bar{v}$  se aproxima por el vector nulo en óptica geométrica debido a que sólo contiene derivadas del vector  $\bar{k}$ . Llamando  $\bar{p} = \bar{k} + \bar{\Gamma}$ , para la aproximación de óptica geométrica se obtiene entonces

$$\bar{p} \times \bar{E}_0 - \mathbf{K} \bar{H}_0 = 0, \quad (2.63)$$

$$\bar{p} \times \bar{H}_0 + \mathbf{K} \bar{E}_0 = 0, \quad (2.64)$$

$$\bar{p} \cdot \mathbf{K} \bar{E}_0 = 0, \quad (2.65)$$

$$\bar{p} \cdot \mathbf{K} \bar{H}_0 = 0. \quad (2.66)$$

Vemos que usando las Ecs. (2.63) y (2.64), las otras dos se cumplen trivialmente. Además, combinando las Ecs. (2.63) y (2.64) obtenemos

$$\mathbf{K}^{-1} \{ \bar{p} \times [\mathbf{K}^{-1} (\bar{p} \times \bar{E}_0)] \} + \mathbf{I} \bar{E}_0 = \bar{0}, \quad (2.67)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Puede demostrarse (ver Apéndice de [26]) que la Ec. (2.67) adopta la forma

$$\left\{ (\bar{p} \otimes \bar{p}) \mathbf{K} + \left[ \det(\mathbf{K}) - \bar{p}^\top \mathbf{K} \bar{p} \right] \mathbf{I} \right\} \bar{E}_0 = \bar{0}, \quad (2.68)$$

donde  $\otimes$  indica el producto tensorial entre vectores, definido como

$$\bar{c} \otimes \bar{a} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 a_1 & c_1 a_2 & c_1 a_3 \\ c_2 a_1 & c_2 a_2 & c_2 a_3 \\ c_3 a_1 & c_3 a_2 & c_3 a_3 \end{pmatrix},$$

para dos vectores  $\bar{c}$  y  $\bar{a}$ . Además, en orden de obtener soluciones no triviales, se demuestra que necesariamente la cantidad entre corchetes en la Ec. (2.68) debe anularse, es decir,

$$H \doteq \det(\mathbf{K}) - \bar{p}^\top \mathbf{K} \bar{p} = 0. \quad (2.69)$$

Esta ecuación de vínculo constituye la relación de dispersión de la óptica geométrica de Plebanski-Tamm. Además,  $H$  puede verse como el Hamiltoniano que gobierna la propagación de los rayos de luz en el medio óptico, ver, por ejemplo, [27], [28] y [29]. Dado que el Hamiltoniano  $H(\bar{x}(t), \bar{k}(t))$  definido en la Ec. (2.69) no depende explícitamente de  $t$ , se conserva durante la evolución temporal. Es decir, a lo largo de una

curva parametrizada por  $t$ , tenemos

$$\frac{dH}{dt} = 0 = \bar{\nabla}_{\bar{x}} H \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{\nabla}_{\bar{k}} H \cdot \frac{d\bar{k}}{dt}, \quad (2.70)$$

lo que implica las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\bar{\nabla}_{\bar{x}} H = -\frac{d\bar{k}}{dt}, \quad (2.71)$$

$$\bar{\nabla}_{\bar{k}} H = \frac{d\bar{x}}{dt}, \quad (2.72)$$

donde  $\bar{\nabla}_{\bar{v}} \equiv (\partial/\partial v_1, \partial/\partial v_2, \partial/\partial v_3)$  para  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Cabe destacar que, además de las Ecs. (2.71) y (2.72), debe tenerse en cuenta que  $H = 0$ , como lo indica la Ec. (2.69).

En [26] se dedujeron expresiones analíticas explícitas para el sistema (2.71)-(2.72). En efecto, el miembro derecho de (2.71) resulta

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = [\bar{p}^\top (\mathbf{K}_i \bar{p} + 2\mathbf{K} \bar{p}_i) - \det(\mathbf{K}) \operatorname{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_i)] \hat{e}_i. \quad (2.73)$$

Aquí  $\hat{e}_i$  son los versores canónicos en  $R^3$ ,  $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$  se refiere a la traza de la matriz  $\mathbf{A}$ , y  $\mathbf{K}_i = \partial \mathbf{K} / \partial x_i$ . Quizás sea importante remarcar que  $\mathbf{K}_i$  son tres matrices, cuyas componentes se obtienen de derivar a cada una de las componentes de  $\mathbf{K}$  con respecto de la coordenada  $x_i$ . Por otro lado, la Ec. (2.72) puede evaluarse directamente a partir de (2.69), obteniéndose

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -2\mathbf{K} \bar{p}. \quad (2.74)$$

Por último, se debe incorporar la condición  $H = 0$  que, usando la Ec. (2.69), implica  $\det(\mathbf{K}) = \bar{p}^\top \mathbf{K} \bar{p}$ . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz en los medios de PT resultan finalmente

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -2\mathbf{K} \bar{p}, \quad (2.75)$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{p}^\top \left[ [\mathbf{K}_i - \operatorname{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_i) \mathbf{K}] \bar{p} + 2\mathbf{K} \bar{p}_i \right] \hat{e}_i. \quad (2.76)$$

# Capítulo 3

## Toy Model

En este capítulo abordaremos la construcción y caracterización de un modelo de espacio-tiempo presentando una singularidad desnuda de curvatura fuerte, que tiene la virtud de ser lo suficientemente simple como para conducir a resultados exactos y, a la vez, lo suficientemente relevante desde un punto de vista físico. La singularidad es *desnuda* puesto que no está *vestida* por ningún horizonte de eventos. Este tipo de singularidad puede considerarse particularmente nociva, puesto que sus efectos pueden ser vistos al no estar blindados por la presencia de un horizonte.

Es de notar que la obtención de resultados exactos en el contexto del estudio de las singularidades espacio-temporales va más allá de una mera cuestión de elegancia; la propia naturaleza de una singularidad de curvatura fuerte implica la divergencia de algún escalar geométrico y, consiguientemente, de cantidades físicas como la densidad de energía, presión, y fuerzas tidales. Esto implica que un desarrollo “perturbativo” de las cantidades físicas en torno a una singularidad debe ser efectuado con mucho cuidado, puesto que en este caso se estaría indagando sobre el comportamiento de escalares, funciones, tensores, etc., en la vecindad de un “lugar” donde la propia estructura geométrica del espacio-tiempo no está definida. A modo de ejemplo simple y heurístico, el tratar de obtener una solución aproximada en la vecindad de una singularidad, sería como intentar desarrollar en serie de potencias la función  $f(x) = 1/x$  en torno a  $x = 0$ . Simplemente, es una mala idea.

¿Por qué no intentar caracterizar, sin más, el campo electromagnético en el medio análogo descrito por la geometría de Schwarzschild? En primer lugar, deberíamos escribir la métrica de Schwarzschild en coordenadas cartesianas. Hay dos formas de hacer esto, dependiendo del rango de las coordenadas cartesianas locales que se elijan. A continuación, diremos unas palabras sobre estas dos construcciones.

Luego de redefinir la coordenada radial en la métrica de Schwarzschild según

$$r \rightarrow \rho = \frac{1}{2}(\sqrt{r^2 - 2Mr} + r - M), \quad (3.1)$$

el intervalo (1.23) adquiere la forma *isotrópica*

$$ds^2 = -\frac{(1 - M/2\rho)^2}{(1 + M/2\rho)^2} dt^2 + (1 + M/2\rho)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (3.2)$$

De esta manera, si identificamos a  $\rho$  como la nueva coordenada radial, la métrica puede escribirse

$$ds^2 = -\frac{(1 - M/2\rho)^2}{(1 + M/2\rho)^2} dt^2 + (1 + M/2\rho)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.3)$$

entendiendo que  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Sin embargo, el cambio de coordenadas (3.1) es válido sólo si  $r > 2M$  (notar que si  $r = 2M$ , entonces  $\rho = M/2$ , y la parte temporal de la métrica se anula), así que la métrica (3.3) representa a la geometría de Schwarzschild solo en el exterior del agujero negro. Esto la vuelve, entonces, inadecuada para estudiar la singularidad en  $r = 0$ . En la Ref. [30] puede encontrarse un estudio numérico sobre la propagación de la luz en el análogo óptico de la métrica (3.3).

Por otro lado, uno puede escribir el intervalo (1.23) directamente en coordenadas cartesianas, sin la necesidad de redefinir la coordenada radial. En este caso tendríamos

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2M}{r(r - 2M)} (x dx + y dy + z dz)^2, \quad (3.4)$$

en donde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Así escrita, al igual que el intervalo original (1.23), la métrica es válida en  $r > 0 - \{2M\}$ . Sin embargo, ahora sus componentes dependen explícitamente de las tres coordenadas cartesianas, además de tener términos cruzados que no existían en las coordenadas esféricas usuales. Estos dos factores hacen del análisis un proceso mucho más complicado, en especial si el propósito es la obtención de resultados exactos. Al momento, hasta donde sabemos, no existen resultados exactos en medios análogos ópticos de la geometría de Schwarzschild.

En las secciones siguientes introduciremos el *toy model* que servirá de base para el análisis que efectuaremos en el próximo capítulo.

### 3.1. Métrica

Consideremos entonces la métrica

$$ds^2 = -x^{2p} dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.5)$$

con  $p$  un número real. Debido a su simplicidad, la métrica (3.5) da lugar a solo dos componentes no triviales del tensor de Ricci, a saber

$$R_{tt} = (-1 + p) p x^{2(-1+p)}, \quad R_{xx} = (1 - p) p x^{-2}, \quad (3.6)$$

y al escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2(1-p)p x^{-2}. \quad (3.7)$$

Esto implica que el tensor de Einstein  $G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}Rg^\mu{}_\nu$  es

$$G^\mu{}_\nu = \text{diag}\left(0, 0, p(p-1)x^{-2}, p(p-1)x^{-2}\right). \quad (3.8)$$

Además, para tener una idea más acabada de la geometría local, podemos calcular los invariantes de Ricci ( $R^2$ ) y Kretschmann ( $K$ ), dados por

$$R^2 = R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 2(p-1)^2 p^2 x^{-4}, \quad K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 2R^2. \quad (3.9)$$

Debido a las ecuaciones de Einstein en ausencia de constante cosmológica,  $G^\mu{}_\nu = 8\pi T^\mu{}_\nu$ , es claro que la métrica en cuestión da lugar, vía (3.8), a un tensor energía-momento

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi} \text{diag}\left(0, 0, p(p-1)x^{-2}, p(p-1)x^{-2}\right). \quad (3.10)$$

Es evidente que las elecciones  $p = 0$  y  $p = 1$  llevan a un tensor energía-momento nulo, correspondiente al vacío. Asimismo, los invariantes geométricos (3.7) y (3.9) son nulos para estas elecciones de  $p$ , lo cual nos sugiere que estos dos casos dan lugar a una geometría local idéntica a la del espacio de Minkowski. Desde luego, si  $p = 0$ , esto es evidente puesto que la métrica (3.5) es directamente la de Minkowski, no sólo localmente, sino también en términos globales. En cambio, el caso  $p = 1$  es ligeramente más sutil; quizás convenga, entonces, detenerse unos momentos en este caso. Para eso, basta considerar en (3.5) el 2-intervalo  $ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 = x^2(-dt^2 + dx^2/x^2)$ , que invita a considerar el cambio de coordenadas  $x \rightarrow X$  definido por

$$dX^2 = dx^2/x^2, \quad \rightarrow \quad X = \text{Log}(x), \quad (3.11)$$

en donde se omitió una constante de integración irrelevante y se consideró, sin pérdida de generalidad, solo el signo + al tomar raíz cuadrada. La Ec. (3.11) implica entonces que  $x = \text{Exp}(X)$ , o sea que el 2-intervalo puede escribirse de manera conforme como

$$ds^2 = \text{Exp}(2X)(-dt^2 + dX^2). \quad (3.12)$$

Un último cambio de coordenadas  $(t, X) \rightarrow (x^0, x^1)$  lleva la 2-métrica (3.12) a una forma explícitamente Minkowskiana. Definamos las nuevas coordenadas  $(x^0, x^1)$  de acuerdo a

$$x^0 = \text{Exp}(X) \text{Cosh}(t), \quad x^1 = \text{Exp}(X) \text{Sinh}(t). \quad (3.13)$$

Es un ejercicio directo el mostrar que, luego de hacer el cambio en los diferenciales, se obtiene

$$ds^2 = \text{Exp}(2X)(-dt^2 + dX^2) = (dx^0)^2 - (dx^1)^2, \quad (3.14)$$

así que la 4-métrica (3.5) con  $p = 1$  queda

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + (dx^0)^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.15)$$

la cual describe (localmente) al espacio de Minkowski con coordenada temporal  $x^1$ . Sin embargo, de las definiciones (3.13), vemos que se verifica

$$0 < x^0 < \infty, \quad -\infty < x^1 < \infty, \quad x^0 > x^1, \quad (3.16)$$

con lo cual (3.15) describe la porción del espacio de Minkowski en donde se verifica  $x^0 > x^1$ . Esta porción del espacio de Minkowski se conoce como la *cuña de Rindler*. Esto es, la métrica (3.15) describe localmente al espacio de Minkowski, pero difiere en sus propiedades *globales*. Sin embargo, los invariantes (3.7) y (3.9) caracterizan la geometría local, y es por eso que resultan nulos en este caso.

Debido a las consideraciones precedentes, la métrica (3.5) describe un espacio de curvatura no constante toda vez que  $p \neq 0$  y  $p \neq 1$ . Como atestiguan los escalares (3.7) y (3.9), exceptuando los casos triviales  $p = 0$  y  $p = 1$ , el espacio-tiempo posee una singularidad en  $x = 0$ , que no depende del valor de  $p$ , y que no se encuentra oculta por un horizonte de eventos. Esto nos sugiere fijar el parámetro  $p$ , sin pérdida de generalidad; de ahora en adelante tomaremos  $p = -1$ . Entonces, desde ahora consideraremos la métrica

$$ds^2 = -x^{-2}dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.17)$$

Notemos que el tensor energía-momento (3.10) no representa ningún tipo de materia-energía usual. Sin embargo, esto no constituye un impedimento en absoluto, puesto que la analogía gravitatorio-óptica descrita con detalle en el capítulo anterior, no reposa en el hecho de que la métrica tenga que ser solución de las ecuaciones de Einstein, en el sentido de que tenga que representar la geometría asociada a una cierta distribución de materia-energía correspondiente a fuentes necesariamente *físicas*. Dicho de otro modo, para el estudio de la analogía gravitatorio-óptica, no es necesario que las fuentes se correspondan a un tensor energía-momento necesariamente conservado en forma *automática*, esto es, que la derivada covariante de  $T^\mu_\nu$  sea nula.

Como motivación adicional para el estudio de la métrica (3.17), más allá de la simpleza y las propiedades mencionadas, podemos destacar una de carácter más pragmático. En efecto, a nivel computacional, el intervalo (3.17) se asemeja al espacio de Kasner

[31], descrito por

$$ds^2 = x^{2p_1} dx^2 + x^{2p_2} dy^2 + x^{2p_3} dz^2 - x^{2p_4} dt^2. \quad (3.18)$$

Esta métrica es solución de vacío de las ecuaciones de Einstein si los parámetros verifican las ecuaciones

$$p_2 + p_3 + p_4 = p_1 + 1, \quad p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = (1 + p_1)^2. \quad (3.19)$$

Notemos, sin embargo, que la métrica (3.17) no pertenece a la familia paramétrica definida por (3.19), aunque computacionalmente hablando presenta varias similitudes. En este sentido, el estudio y caracterización de la electrodinámica en medios ópticos descritos por la métrica (3.17), constituye un primer paso significativo hacia el análisis de modelos basados en métricas más realistas y con mayor significancia física.

## 3.2. Geodésicas

Como primer paso hacia la caracterización del *toy model*, necesitamos estudiar las geodésicas causales (nulas y temporales). Para eso, es necesario calcular los símbolos de Christoffel (1.3) que, para la métrica (3.17), resultan inmediatos. Los únicos símbolos no triviales son

$$\Gamma^t_{tx} = -x^{-1}, \quad \Gamma^x_{tt} = -x^{-3}, \quad (3.20)$$

con lo cual las ecuaciones de las curvas geodésicas (1.6) adquieren la forma

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{2}{x} \frac{dx}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \frac{1}{x^3} \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad (3.24)$$

en donde  $\tau$  es el parámetro afín de las curvas. De estas ecuaciones obtenemos directamente las coordenadas  $y$  y  $z$

$$y(\tau) = y_0 + \alpha\tau, \quad (3.25)$$

$$z(\tau) = z_0 + \beta\tau, \quad (3.26)$$

en donde  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , son constantes de integración. Es claro que en la subvariedad  $t = \text{cte}$ ,  $x = \text{cte}$ , las geodésicas son líneas rectas, puesto que esta subvariedad se corres-

ponde al 2-plano euclídeo. Para proseguir, es necesario discriminar entre geodésicas *nulas* ( $ds^2 = 0$ ), y geodésicas *temporales*, o *tipo tiempo* ( $ds^2 < 0$ ). Es de notar que las líneas rectas (3.25) y (3.26) son tales, independientemente del tipo de geodésica que se considere.

### 3.2.1. Geodésicas nulas

En este caso, la condición  $ds^2 = 0$  se traduce en

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.27)$$

lo cual implica

$$\frac{1}{x^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2. \quad (3.28)$$

Combinando las Ecs. (3.22) y (3.28) obtenemos una ecuación diferencial no lineal de segundo orden para la coordenada  $x$  como función del parámetro afín, esto es

$$x(\tau) \frac{d^2x}{d\tau^2} - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (3.29)$$

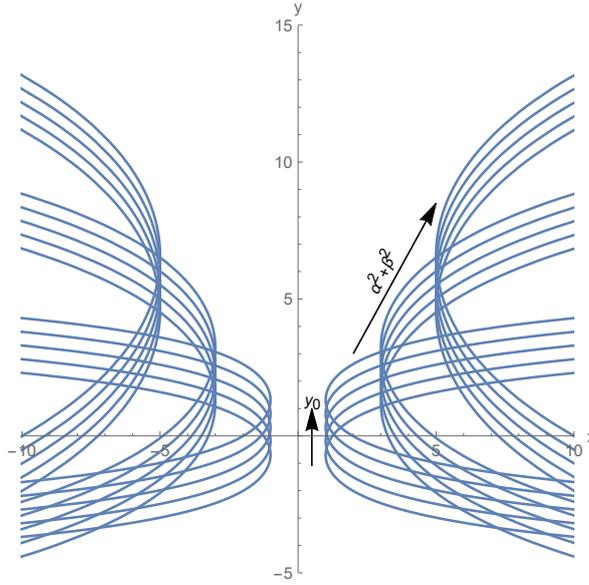
cuya solución resulta

$$x(\tau) = \pm \left( e^{c_1(\tau+c_2)} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4c_1^2} e^{-c_1(\tau+c_2)} \right), \quad (3.30)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes. Si  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , esta expresión tiene un valor mínimo dado por  $|x|_{min} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/c_1$ , que se alcanza en un valor finito del parámetro afín  $\tau$ . En cambio, si  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , la expresión (3.30) deviene en una exponencial pura, lo cual implica que  $x = 0$  sólo se alcanza asintóticamente. Esto nos indica que el espacio tiempo es geodésicamente completo en el sentido nulo: las geodésicas nulas nunca alcanzan la singularidad en valores finitos del parámetro afín. Como veremos en un momento, la constante de integración  $c_1$  tiene que ver con la energía del fotón, por lo tanto la singularidad sólo se alcanzaría en la situación no física en la cual  $c_1$  fuera a infinito. Por otro lado, la constante  $c_2$  es un *offset* del parámetro afín que, debido a que puede tomar cualquier valor en la recta real, resulta irrelevante. Tomaremos, entonces,  $c_2 = 0$  de ahora en más.

Más adelante necesitaremos también la relación entre el tiempo coordenado  $t$  y el parámetro afín  $\tau$ , sobre las geodésicas nulas. Usando la Ecs. (3.28) y (3.30), la solución para  $t(\tau)$  es

$$t(\tau) = \pm \frac{e^{-2c_1\tau}}{32c_1^4} \left[ -(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 16c_1^4 e^{4c_1\tau} + 16c_1^3(\alpha^2 + \beta^2) e^{2c_1\tau} \tau \right] + c_3, \quad (3.31)$$



**Figura 3.1:** Geodésicas nulas en el plano  $(x, y)$  considerando  $c_1 = 1$  y tomando distintos valores para las constantes  $y_0$  y  $\alpha^2 + \beta^2$  en las Ecs. (3.25) y (3.30).

con  $c_3$  constante.

En la Fig. 3.1 se muestran varias geodésicas nulas en el plano  $(x, y)$  considerando  $c_1 = 1$  y tomando distintos valores para las constantes  $y_0$  y  $\alpha^2 + \beta^2$ .

### 3.2.2. Geodésicas tipo tiempo

La caracterización de las geodésicas tipo tiempo no es necesaria en el contexto de la analogía óptico-gravitatoria, puesto que ésta alude a la propagación del campo clásico de Maxwell (esto es, un campo no masivo), en un fondo curvo; por esta razón, sólo las geodésicas nulas entrarán en juego, y lo harán en el contexto de la óptica geométrica, como veremos en la Sección (3.4). Sin embargo, desde “el lado de la gravedad”, el estudio de las geodésicas (nulas y temporales) es crucial para entender la estructura geométrica del espacio, en particular, el tipo de singularidad presente.

El carácter temporal de las geodésicas implica

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} < 0, \quad (3.32)$$

que se traduce en

$$-\frac{1}{x^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 < -(\alpha^2 + \beta^2). \quad (3.33)$$

Por lo tanto la ecuación para  $x(\tau)$  queda

$$x \frac{d^2x}{d\tau^2} - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \gamma^2 \quad (3.34)$$

en donde  $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ . La solución a esta ecuación es formalmente idéntica a la del caso nulo, esto es,

$$x(\tau) = \pm \left( e^{c_1 \tau} + \frac{\gamma^2}{4 c_1^2} e^{-c_1 \tau} \right). \quad (3.35)$$

Nuevamente verificamos que el espacio-tiempo es geodésicamente completo, ahora en el sentido *temporal*. Las geodésicas temporales no alcanzan la singularidad en  $x = 0$  en ningún valor finito del parámetro afín  $\tau$ , que en este caso puede ser interpretado como el tiempo propio del observador masivo libremente gravitante.

Análogamente, la solución para  $t(\tau)$  es la misma que la indicada en la Ec. (3.31), pero reemplazando  $\alpha^2 + \beta^2$  por  $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ .

Las curvas geodésicas podrían haber sido obtenidas también, aprovechando la simplicidad de la métrica, a través de la conservación de la norma de la cuadrivelocidad y utilizando las cantidades conservadas asociadas a las coordenadas *cíclicas*  $y$ ,  $z$ . Este procedimiento, por supuesto, es equivalente a resolver las ecuaciones de las geodésicas, pero es quizás un poco más cristalino desde un punto de vista físico. En efecto, sobre geodésicas temporales, tenemos

$$p^\nu p_\nu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2, \quad (3.36)$$

en donde  $m$  es la masa de la partícula, y  $p^\mu = m dx^\mu/d\tau$  es el cuadrimomento. Debido a que la métrica no depende de  $y$ ,  $z$ , las componentes covariantes del cuadrimomento  $p_y$  y  $p_z$  son constantes de movimiento, esto es

$$p_y = g_{yy} p^y = g_{yy} m dy/d\tau = m dy/d\tau \quad (3.37)$$

$$p_z = g_{zz} p^z = g_{zz} m dz/d\tau = m dz/d\tau. \quad (3.38)$$

Integrando se obtiene (comparemos con las Ecs. (3.25) y (3.26)),

$$y(\tau) = y_0 + \frac{p_y}{m} \tau, \quad (3.39)$$

$$z(\tau) = z_0 + \frac{p_z}{m} \tau, \quad (3.40)$$

lo cual nos permite identificar a las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , en el caso de las geodésicas temporales, según  $\alpha = p_y/m$  y  $\beta = p_z/m$ . En el caso de las geodésicas nulas de la sección anterior,  $\alpha$  y  $\beta$  son simplemente las constantes de movimiento asociadas a las componentes  $y$ ,  $z$ , respectivamente, del cuadrimomento del fotón.

Además, la componente temporal covariante del cuadrimomento es la energía  $E$  de la partícula, esto es

$$E = p_t = g_{tt} p^t = g_{tt} m \frac{dt}{d\tau} = -\frac{m}{x^2} \frac{dt}{d\tau}. \quad (3.41)$$

La expresión (3.36), desarrollada en componentes, se escribe

$$-x^2 E^2 + m^2 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 = -m^2, \quad (3.42)$$

la cual nos permite obtener

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = -1 - (p_y/m)^2 - (p_z/m)^2 + e^2 x^2, \quad (3.43)$$

en donde  $e = E/m$ . Derivando (3.43) respecto a  $\tau$  tenemos

$$2 \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2x}{d\tau^2} = 2 e^2 x \frac{dx}{d\tau}, \quad (3.44)$$

es decir

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = x e^2, \quad (3.45)$$

cuya solución es

$$x(\tau) = d_1 e^{e\tau} + d_2 e^{-e\tau}, \quad (3.46)$$

con  $d_1$  y  $d_2$  constantes. Además reemplazando (3.46) en la Ec. (3.43) obtenemos

$$d_2 = \frac{1 + (p_y/m)^2 + (p_z/m)^2}{4 e^2 d_1}. \quad (3.47)$$

Finalmente, tomando  $d_1 = \pm e^d$  vemos que esta constante juega el papel de  $e^{c_2}$  en (3.30), por lo que la eliminaremos de la expresión, que resulta entonces

$$x(\tau) = \pm \left( e^{e\tau} + \frac{1 + (p_y/m)^2 + (p_z/m)^2}{4 e^2} e^{-e\tau} \right), \quad (3.48)$$

que se condice con la expresión (3.35) al identificar

$$c_1 = e, \quad (3.49)$$

$$\gamma^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2 = 1 + (p_y/m)^2 + (p_z/m)^2. \quad (3.50)$$

Algo análogo ocurre en el caso nulo de la sección anterior, sólo que  $e$  es simplemente la energía del fotón.

### 3.3. Estructura causal

Una vez obtenidas las geodésicas causales, podemos proseguir con la caracterización global del espacio. Para obtener el diagrama de Penrose asociado a esta métrica, debemos realizar los consabidos cambios de coordenadas, tal como vimos para el caso

del espacio de Minkowski (Sección 1.4.1). En primer lugar, nos restringimos al plano  $(t, x)$  y consideramos el cambio de coordenadas  $\chi = \pm x^2/2$ , de modo que  $d\chi^2 = x^2 dx^2$  y la métrica queda

$$ds^2 = \frac{1}{2\chi} (-dt^2 + d\chi^2) . \quad (3.51)$$

Luego, pasamos a coordenadas nulas  $u, v$  dadas por

$$u = \chi + t, \quad v = \chi - t, \quad (3.52)$$

con lo cual la métrica resulta ahora

$$ds^2 = \frac{du dv}{u + v} . \quad (3.53)$$

La estructura global del espacio se aprecia mejor al compactificar, pasando a nuevas coordenadas  $U$  y  $V$ , de acuerdo a

$$U = \arctan(u), \quad V = \arctan(v), \quad (3.54)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq U \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq V \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.55)$$

de modo que la métrica toma la forma

$$ds^2 = \cos^{-2}(U) \cos^{-2}(V) (\tan U + \tan V)^{-1} dU dV . \quad (3.56)$$

Por ultimo, efectuamos un cambio de coordenadas final con el objeto de “deshacer” el carácter nulo de las coordenadas  $U$  y  $V$  y restituir la carta Minkowskiana usual  $X, T$ , esto es

$$X = U + V, \quad T = U - V, \quad (3.57)$$

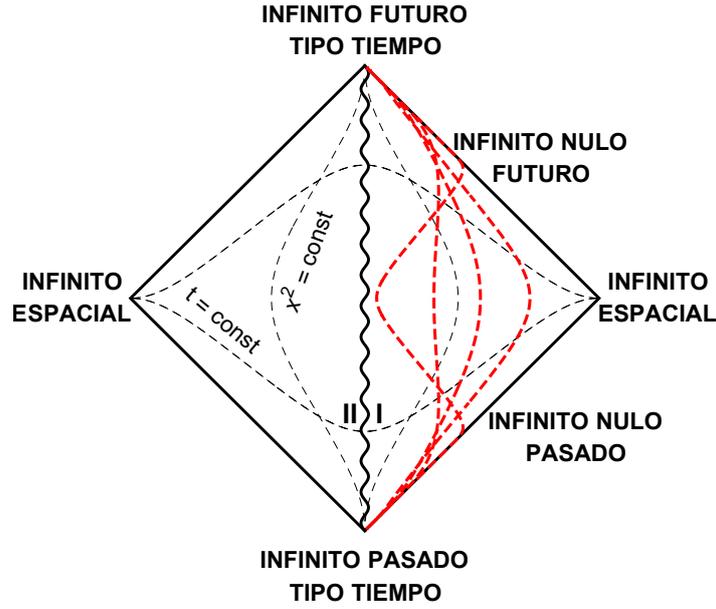
$$-\pi \leq X + T \leq \pi, \quad -\pi \leq X - T \leq \pi . \quad (3.58)$$

con lo cual la métrica queda

$$ds^2 = \frac{1}{\omega^2} (-dT^2 + dX^2) , \quad (3.59)$$

con  $\omega^2 = (\cos T + \cos X)^2 \left( \tan\left(\frac{X+T}{2}\right) + \tan\left(\frac{X-T}{2}\right) \right)$ , que se anula en  $X = 0$ .

En la Fig. 3.2 se muestra el diagrama de Penrose obtenido con estas coordenadas, en las que el espacio queda dividido en dos regiones desconectadas: la región I, con  $x^2 = 2\chi$ , y la región II, con  $x^2 = -2\chi$ .



**Figura 3.2:** Diagrama de Penrose para la métrica *toy model*. La curva vertical central señala la posición de la singularidad. La líneas punteadas rojas representan curvas geodésicas temporales con distintos valores de  $\gamma$  en la expresión de la Ec. (3.35) (simultáneamente se tomaron distintos *offset* en el parámetro  $\tau$  para mantener la simetría ante el cambio  $\tau \leftrightarrow -\tau$  en cada curva).

### 3.4. Óptica geométrica en el medio análogo

Es nuestra intención en lo que queda de este capítulo, discutir la óptica geométrica en el espacio-tiempo recién presentado. Esto nos permitirá visualizar la analogía gravitatorio-óptica en funcionamiento, puesto que las geodésicas nulas descritas en detalle en la Sección (3.2.1), adquirirán la forma de rayos de luz en el medio análogo.

La matriz  $\mathbf{K}$  y los vectores  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{p} = \bar{k} + \bar{\Gamma}$  (ver Ecs. (2.33) y (2.34)), asociados a la métrica (3.17), toman la forma

$$\mathbf{K} = |x| \mathbf{I}, \quad (3.60)$$

$$\bar{\Gamma} = \bar{0}, \quad (3.61)$$

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

en donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ . Notemos, entonces, que el *toy model* nos conduce a un medio material isótropo pero inhomogéneo. El Hamiltoniano de la óptica geométrica, Ec. (2.69), queda entonces

$$H = |x|(x^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2). \quad (3.63)$$

Por lo tanto, la condición  $H = 0$  implica

$$x^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \quad (3.64)$$

y las ecuaciones de Hamilton (2.71) y (2.72) se escriben explícitamente como

$$\dot{k}_1 = -\operatorname{sgn}(x)(3x^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2), \quad (3.65)$$

$$\dot{x} = -2|x|k_1, \quad (3.66)$$

$$\dot{k}_2 = 0, \quad (3.67)$$

$$\dot{y} = -2|x|k_2, \quad (3.68)$$

$$\dot{k}_3 = 0, \quad (3.69)$$

$$\dot{z} = -2|x|k_3, \quad (3.70)$$

donde  $\operatorname{sgn}(x)$  es la función signo de  $x$ . De las Ecs. (3.67) y (3.69) tenemos que  $k_2$  y  $k_3$  son constantes de movimiento (momentos canónicos conjugados), asociadas a las coordenadas cíclicas  $x_1$  y  $x_2$ , mientras que las Ecs. (3.68) y (3.70) pueden resolverse una vez obtenido el  $x(t)$ . Por lo tanto nos centramos en las Ecs. (3.65) y (3.66).

Reemplazando la Ec. (3.64) en la Ec. (3.65), obtenemos

$$\dot{k}_1 = -2 \operatorname{sgn}(x) x^2. \quad (3.71)$$

Por otro lado, podemos también obtener  $\dot{k}_1$  derivando la Ec. (3.66), esto es

$$\dot{k}_1 = \frac{1}{2|x|} \left( \frac{\dot{x}^2}{x} - \ddot{x} \right). \quad (3.72)$$

Combinándolas, se tiene

$$\ddot{x}x - \dot{x}^2 - 4x^4 = 0. \quad (3.73)$$

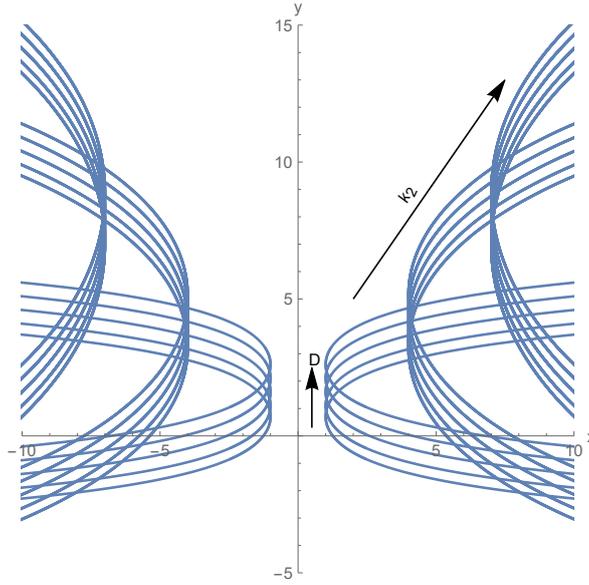
Sin embargo, la condición  $H = 0$  implica también, al combinar las Ecs. (3.64) y (3.66), que debe verificarse

$$\dot{x}^2 = 4x^2(x^2 - k_2^2 - k_3^2). \quad (3.74)$$

La solución de las Ecs. (3.73) y (3.74) para  $k_2^2 + k_3^2 \neq 0$  es

$$x(t) = \pm \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{\sin\left(\sqrt{k_2^2 + k_3^2}(2t + C)\right)}, \quad (3.75)$$

con  $C$  una constante de integración. Notemos que en estas expresiones,  $t$  es un parámetro asociado al tiempo; esto no es contradictorio, puesto que (3.75) describe un rayo de luz en el *espacio* (de hecho, en el medio material), no se trata de una geodésica nula en



**Figura 3.3:** Trayectorias de luz en el medio análogo en el plano  $(x, y)$  considerando  $k_3 = 0$ ,  $C = 1$  y tomando distintos valores para las constantes  $k_2$  y  $D$  en las Ecs. (3.75) y (3.77).

el espacio-tiempo. Vemos que el valor mínimo de  $|x|$  es  $\sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ , por lo que  $x = 0$  no es alcanzado por rayos de luz, al igual que lo sucedido en el caso de las geodésicas nulas en el espacio-tiempo. La solución (3.75) representa la curva análoga a la geodésica nula (3.30) y, claramente, los momentos canónicos constantes  $k_2$  y  $k_3$  representan el análogo de las componentes conservadas del momento del fotón  $p_y$  y  $p_z$ .

Para el caso  $k_2 = k_3 = 0$ , la solución de las Ecs. (3.73) y (3.74) toma la forma

$$x(t) = \frac{-1}{2t + C}. \quad (3.76)$$

Nuevamente,  $x = 0$  tampoco se alcanza para un  $t$  finito. Esta solución es la análoga a la “exponencial pura” obtenida de (3.30) al tomar  $\alpha = \beta = 0$ .

Por otro lado, usando la Ec. (3.68) obtenemos  $y(\tau)$  (análogamente para  $z(\tau)$ ) usando la Ec. (3.70)) para el caso en el que  $k_2^2 + k_3^2 \neq 0$ :

$$y(t) = D \pm 2k_2 \operatorname{arctanh} \left( \cos(C) - \tan \left( \sqrt{k_2^2 + k_3^2} t \right) \sin(C) \right), \quad (3.77)$$

siendo  $D$  otra constante de integración. En la Fig. 3.3 se muestran posibles trayectorias de luz en el plano  $(x, y)$  considerando  $k_3 = 0$ ,  $C = 1$  y tomando distintos valores para las constantes  $k_2$  y  $D$ . Vemos que las trayectorias son similares a las geodésicas nulas exhibidas en la Fig. 3.1. De hecho, un mapeo exacto entre los rayos de luz y las geodésicas nulas puede ser obtenido al elegir convenientemente las constantes de integración involucradas.



# Capítulo 4

## Toy Model: ecuaciones completas

En esta sección consideraremos las ecuaciones completas para el campo electromagnético en el medio análogo correspondiente a la métrica (3.17). Recordemos que, en ausencia de fuentes, estas ecuaciones son

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0, \quad (4.1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

con las relaciones constitutivas de Plebanski-Tamm

$$\bar{D} = \mathbf{K}\bar{E} + \bar{\Gamma} \times \bar{H}, \quad (4.3)$$

$$\bar{B} = \mathbf{K}\bar{H} - \bar{\Gamma} \times \bar{E}, \quad (4.4)$$

en donde las componentes de la matriz  $\mathbf{K}$  y del vector  $\bar{\Gamma}$  se obtienen a partir de la métrica espacio-temporal según

$$K_{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}}g^{ij}, \quad \Gamma_m = \frac{g_{0m}}{g_{00}}. \quad (4.5)$$

Como vimos en la Sección 3.4, la métrica (3.17) da lugar a los siguientes objetos

$$\mathbf{K} = |x| \mathbf{I}, \quad \bar{\Gamma} = \bar{0}, \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Empezaremos el análisis, a modo introductorio, caracterizando la electrostática en el medio análogo.

## 4.1. Electrostática

Consideramos un campo electrostático en el medio material. Para esto, volvemos sobre las ecuaciones constitutivas (4.3) y (4.4). Utilizando las Ecs. (4.6) y proponiendo  $\bar{E} \equiv \bar{E}(\bar{x})$  y  $\bar{H} = 0$  obtenemos

$$\bar{D} = |x|\bar{E}, \quad \bar{B} = 0. \quad (4.7)$$

Reemplazando en las Ecs. (4.1) y (4.2), quedan sólo dos ecuaciones no triviales

$$\bar{\nabla} \cdot (|x|\bar{E}) = 0, \quad (4.8)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0. \quad (4.9)$$

De la Ec. (4.9) tenemos  $\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi$ , que puede ser combinada con (4.8) para obtener

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.10)$$

Esta ecuación para el potencial electrostático es separable luego de proponer  $\phi = \chi(x)Y(y)Z(z)$ . Llamaremos  $\kappa^2$  y  $\alpha^2$  a las dos constantes de separación (la tercera constante de separación se escribe en término de estas dos). Entonces tenemos

$$x^2 \chi''(x) + x \chi'(x) + \kappa^2 \chi(x) = 0, \quad (4.11)$$

$$Y''(y) + \alpha^2 Y(y) = 0, \quad (4.12)$$

$$Z''(z) - (\alpha^2 + \kappa^2)Z(z) = 0, \quad (4.13)$$

cuyas soluciones son

$$\chi_\kappa(x) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln(x) & \text{si } \kappa = 0, \\ A_\kappa J_0(\kappa x) + B_\kappa N_0(\kappa x) & \text{si } \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$Y_\alpha(y) = \begin{cases} C_0 + D_0 y & \text{si } \alpha = 0, \\ C_\alpha e^{i\alpha y} + D_\alpha e^{-i\alpha y} & \text{si } \alpha \neq 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$Z_{\kappa^2+\alpha^2}(z) = \begin{cases} F_0 + G_0 z & \text{si } \kappa^2 + \alpha^2 = 0, \\ F_{\kappa^2+\alpha^2} e^{-\sqrt{\kappa^2+\alpha^2}z} + G_{\kappa^2+\alpha^2} e^{\sqrt{\kappa^2+\alpha^2}z} & \text{si } \kappa^2 + \alpha^2 \neq 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

donde  $J_0$  y  $N_0$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente, y  $A_\kappa$ ,  $B_\kappa$ ,  $C_\alpha$ ,  $D_\alpha$ ,  $F_{\kappa^2+\alpha^2}$  y  $G_{\kappa^2+\alpha^2}$  son constantes.

La solución general de la Ec. (4.10) es una combinación lineal de las soluciones elementales

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\kappa} \sum_{\alpha} \chi_\kappa(x) Y_\alpha(y) Z_{\kappa^2+\alpha^2}(z). \quad (4.17)$$

Luego, se presenta una situación interesante: la posible regularidad del potencial electrostático en  $x = 0$ . Notemos que el efecto de la geometría no trivial provista por el *toy model*, se traduce en el término con derivada primera en (4.10). Este término es el responsable de la aparición de funciones cilíndricas, aún en presencia de una geometría aparentemente “cartesiana”, en donde el potencial quedaría caracterizado por funciones trigonométricas. Esto invita a pensar que quizás podríamos obtener soluciones regulares en  $x = 0$  al imponer las condiciones apropiadas, al igual que sucede en el electromagnetismo “habitual” en presencia de simetría cilíndrica. Es eso lo que efectivamente sucede, como veremos enseguida. Sin embargo, es importante tener en cuenta que, en el caso habitual con simetría cilíndrica, la regularidad es impuesta por razones netamente físicas, esto es, puesto que no medimos cantidades divergentes en el laboratorio. En la situación presente, en cambio, la regularidad no puede darse por sentada, puesto que  $x = 0$  representa una singularidad de curvatura fuerte en donde ni siquiera puede asegurarse que las cantidades físicas estén definidas.

La fuente de la posible divergencia del potencial se encuentra sólo en el término logarítmico y en la función  $N_0(\kappa x)$  de la Ec. (4.14), con lo cual la regularidad quedará asegurada si, tanto  $B_0$  como todos los  $B_\kappa$ , son nulos. Adicionalmente, podemos considerar la identificación  $x = L$  con  $x = -L$ , que se corresponde a “plegar” el material en la dirección  $x$ . Esto implica entonces que  $\chi_\kappa(L) = \chi_\kappa(-L)$ , y que  $\chi'_\kappa(L) = \chi'_\kappa(-L)$ , con  $L > 0$ . La primera condición se cumple para todo  $L$  ya que  $J_0(x)$  es una función par. Debido a esto su derivada es impar y, por lo tanto, la condición de borde sobre la derivada implica

$$\chi'_\kappa(L) = \chi'_\kappa(-L) = 0. \quad (4.18)$$

De esta manera tenemos que necesariamente  $\kappa^2 \geq 0$ . En particular, puesto que  $J'_0(x) = -J_1(x)$ , para el caso  $\kappa^2 > 0$ , se tiene  $\kappa \equiv \kappa_n = x_{1n}/L$ , con  $x_{1n}$  el  $n$ -ésimo cero de  $J_1(x)$ . Como  $J_0(x)$  es una función par, basta con considerar  $n > 0$ .

Para visualizar mejor las características del potencial, podríamos considerar un medio análogo bidimensional tomando  $z$  constante. Este medio provendría de un espacio-tiempo 2+1 dimensional. En este caso tendremos sólo una constante de separación, puesto que  $\alpha^2 = -\kappa^2 \leq 0$ . Así, al haber identificado  $x = L$  con  $x = -L$ , el plano  $(x, y)$  se pliega para dar lugar a una superficie cilíndrica donde el potencial queda

$$\phi(x, y) = C_0 + D_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{x_{1n} x}{L}\right) \left( e^{-\frac{x_{1n}}{L} y} + D_n e^{\frac{x_{1n}}{L} y} \right). \quad (4.19)$$

La determinación completa del potencial (esto es, de las constantes  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $C_n$  y  $D_n$ ), como siempre, requiere de la especificación de condiciones de borde sobre una curva cerrada que delimite la superficie bidimensional (en el caso 2D en consideración). Debido a que ya establecimos la identificación de  $x = L$  con  $x = -L$ , podríamos

especificar el potencial  $\phi(x, y)$ , por ejemplo, sobre dos rectas de  $y$  constante, pidiendo  $\phi(x, y_1) = \phi_1(x)$  y  $\phi(x, y_2) = \phi_2(x)$ . Entonces, usando que

$$\int_0^L x J_0\left(\frac{x_{1n}x}{L}\right) J_0\left(\frac{x_{1m}x}{L}\right) dx = \delta_{nm} \frac{L^2}{2} (J_0(x_{1n}))^2, \quad (4.20)$$

$$\int_0^L x J_0\left(\frac{x_{1n}x}{L}\right) dx = 0, \quad (4.21)$$

tenemos

$$\int_0^L x J_0\left(\frac{x_{1n}x}{L}\right) \phi_1(x) dx = C_n \frac{L^2}{2} (J_0(x_{1n}))^2 \left( e^{-\frac{x_{1n}}{L} y_1} + D_n e^{\frac{x_{1n}}{L} y_1} \right), \quad (4.22)$$

$$\int_0^L x \phi_1(x) dx = (C_0 + D_0 y_1) \frac{L^2}{2}, \quad (4.23)$$

$$\int_0^L x J_0\left(\frac{x_{1n}x}{L}\right) \phi_2(x) dx = C_n \frac{L^2}{2} (J_0(x_{1n}))^2 \left( e^{-\frac{x_{1n}}{L} y_2} + D_n e^{\frac{x_{1n}}{L} y_2} \right), \quad (4.24)$$

$$\int_0^L x \phi_2(x) dx = (C_0 + D_0 y_2) \frac{L^2}{2}. \quad (4.25)$$

De estas relaciones podemos despejar todas las constantes con sólo saber  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$ . Observemos que, en caso de considerar  $\phi_1$  y  $\phi_2$  constantes, utilizando la relación (4.21), se anulan todas las  $C_n$  con  $n \geq 1$ , y queda  $\phi = C_0$ , por lo que el campo electrostático es nulo en todo el medio material.

En la Fig. 4.1a se muestra un gráfico de vectores para el campo electrostático que resulta del caso en que  $L = 3$ ,  $y_1 = -1$ ,  $y_2 = 1$ , con las funciones  $\phi_1(x) = \phi_2(x) = |x|$ . Además, en la Fig. 4.1b se muestra explícitamente la simetría cilíndrica debida a la identificación de  $x = L$  con  $x = -L$ . Para este caso, las constantes  $C_n$  y  $D_n$  que provienen de las relaciones (4.22)-(4.25) quedan

$$C_0 = 2, \quad C_n = \frac{2 {}_1F_2\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}, \left\{1, \frac{5}{2}\right\}, -\frac{x_{1n}^2}{4}\right)}{\left(e^{\frac{1}{3}x_{1n}} + e^{-\frac{1}{3}x_{1n}}\right) (J_0(x_{1n}))^2} \quad (n \geq 1), \quad (4.26)$$

$$D_0 = 0, \quad D_n = 1 \quad (n \geq 1), \quad (4.27)$$

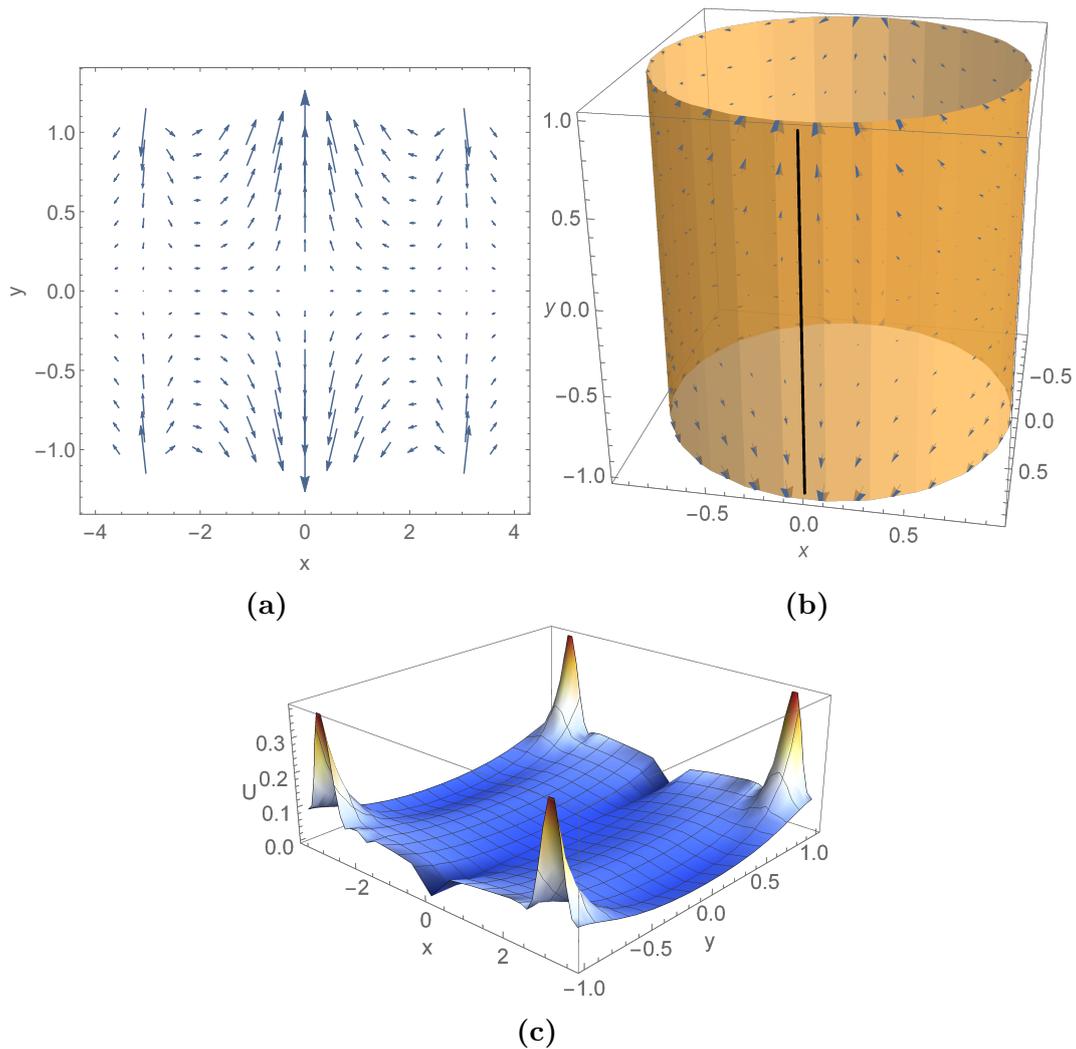
siendo  $F$  la función hipergeométrica generalizada, dada por

$${}_pF_q(\{a_1, \dots, a_p\}, \{b_1, \dots, b_q\}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!}, \quad (4.28)$$

donde usamos el factorial ascendente o símbolo de Pochhammer:

$$(a)_0 = 1, \quad (4.29)$$

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) \quad (n \geq 1). \quad (4.30)$$



**Figura 4.1:** (a) Gráfico de vectores para el campo electrostático correspondiente al potencial eléctrico dado por la Ec. (4.19), para el caso en que  $L = 3$ ,  $y_1 = -1$ ,  $y_2 = 1$ , y se eligieron las funciones  $\phi_1(x) = \phi_2(x) = |x|$  en las Ecs. (4.22), (4.23), (4.24) y (4.25). (b) Mismo gráfico pero plegado sobre una superficie cilíndrica, dada la simetría para  $x$  entre  $-L$  y  $L$ . La línea vertical remarca la singularidad en  $x = 0$ . (c) Densidad de energía electrostática  $U(x, y)$  en el medio material para el mismo caso.

Adicionalmente, podemos calcular la densidad de energía  $U(x, y) = \bar{D} \cdot \bar{E}/(8\pi)$  en el material. En la Fig. 4.1c se muestra la densidad de energía para el mismo caso que el de las Figs. 4.1a y 4.1b. Notemos que la densidad de energía está perfectamente definida en toda la recta  $x = 0$ ; de hecho, es nula allí. En este sentido, la energía electrostática es inmune a la presencia de la singularidad de curvatura en  $x = 0$ .

Cabe aclarar que, para la confección de los gráficos de la Fig. 4.1, el cálculo del potencial electrostático se realizó truncando en  $n = 10$  la serie que se explicita en (4.19). Este procedimiento es perfectamente válido ya que la serie  $\sum a_n$ , con  $a_n = C_n J_0\left(\frac{x_{1n} x}{L}\right) e^{\frac{x_{1n}}{L} |y|}$  es convergente. Para ver esto, observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{1/n^{\frac{6}{5}}} = 0, \quad (4.31)$$

y dado que  $\sum 1/n^{\frac{6}{5}}$  converge, por ser  $\frac{6}{5} > 1$ , entonces por el criterio de comparación por paso al límite, la serie  $\sum |a_n|$  es también convergente. Es decir, la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente.

Luego de la digresión 2-dimensional, consideremos nuevamente el potencial en tres dimensiones. En concordancia con lo anterior, podemos pedir también una periodicidad en  $y$ , por ejemplo identificando  $y = M$  con  $y = -M$ . Para esto, debemos pedir  $\alpha^2 \geq 0$ . Además, en la expresión de la Ec. (4.15) nos queda  $D_0 = 0$  y  $C_\alpha = D_\alpha$  para  $\alpha^2 > 0$ , en particular,  $\alpha = m\pi/M$  con  $m$  entero. De esta forma  $Y(y) \propto \cos\left(\frac{m\pi y}{M}\right)$ , y como es una función par, basta con tomar  $m \geq 0$ . Por lo tanto el potencial queda

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = A_{00} + B_{00} z + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_0\left(\frac{x_{1n} x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \\ \times \left( e^{-\sqrt{\left(\frac{x_{1n}}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2} z} + B_{nm} e^{\sqrt{\left(\frac{x_{1n}}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2} z} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para determinar las constantes  $A_{nm}$  y  $B_{nm}$  podemos especificar el potencial sobre dos secciones de  $z$  constante:  $\phi(x, y, z_1) = \phi_1(x, y)$  y  $\phi(x, y, z_2) = \phi_2(x, y)$ . Entonces, usando las Ecs. (4.20), (4.21) y

$$\int_0^M \cos\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \cos\left(\frac{m'\pi y}{M}\right) dy = \delta_{mm'} \frac{M}{2}, \quad (4.33)$$

$$\int_0^M \cos\left(\frac{m\pi y}{M}\right) dy = 0, \quad (4.34)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \int_0^M dy x J_0\left(\frac{x_{1n} x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \phi_1(x, y) = A_{nm} \frac{M}{2} \frac{L^2}{2} (J_0(x_{1n}))^2 \\ \times \left( e^{-\sqrt{\left(\frac{x_{1n}}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2} z_1} + B_{nm} e^{\sqrt{\left(\frac{x_{1n}}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2} z_1} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\int_0^L dx \int_0^M dy x \phi_1(x, y) = (A_{00} + B_{00} z_1) \frac{L^2}{2} M, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \int_0^M dy x J_0\left(\frac{x_{1n} x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \phi_2(x, y) = A_{nm} \frac{M}{2} \frac{L^2}{2} (J_0(x_{1n}))^2 \\ \times \left( e^{-\sqrt{\left(\frac{x_{1n}}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2} z_2} + B_{nm} e^{\sqrt{\left(\frac{x_{1n}}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2} z_2} \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\int_0^L dx \int_0^M dy x \phi_2(x, y) = (A_{00} + B_{00} z_2) \frac{L^2}{2} M, \quad (4.38)$$

de donde podemos despejar las constantes.

## 4.2. Electrodinámica

Estudiaremos ahora las ecuaciones completas para los campos en el caso de ondas cuasi-planas (Ecs. (2.42), (2.43), (2.51) y (2.52)) para la métrica dada por (3.17). Usando las Ecs. (4.6), tenemos

$$i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0 = \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 - |x| \bar{H}_0, \quad (4.39)$$

$$i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{H}_0 = \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{H}_0 + |x| \bar{E}_0, \quad (4.40)$$

$$\bar{\nabla} \cdot (|x| \bar{E}_0) + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (|x| \bar{E}_0) = 0, \quad (4.41)$$

$$\bar{\nabla} \cdot (|x| \bar{H}_0) + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (|x| \bar{H}_0) = 0. \quad (4.42)$$

De la Ec. (4.39) es inmediato despejar  $\bar{H}_0$ , esto es

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{|x|} (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 - i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0). \quad (4.43)$$

Reemplazando la Ec. (4.43) en la Ec. (4.42) obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (|x| \bar{H}_0) + i k_0 \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (|x| \bar{H}_0) &= \bar{\nabla}(|x|) \cdot \bar{H}_0 + |x| \bar{\nabla} \cdot \bar{H}_0 + \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{E}_0) \\ &= \frac{1}{x} (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 - i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0)_x + |x| \bar{\nabla} \cdot \bar{H}_0 + \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{E}_0), \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde usamos que  $\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0) = 0$ . Para la divergencia de  $\bar{H}_0$  tenemos

$$|x| \bar{\nabla} \cdot \bar{H}_0 = -\frac{1}{x} (\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0 - i k_0^{-1} \bar{\nabla} \times \bar{E}_0)_x + \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{E}_0), \quad (4.45)$$

cuyo primer término cancela exactamente, entonces, el primer término de la Ec. (4.44). En cambio, para el último término de la Ec. (4.45) nos queda

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}(\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \times \bar{E}_0) &= \underbrace{(\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x})) \cdot \bar{E}_0}_{=0} - \bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{E}_0) \\ &= -\bar{\nabla}(\bar{k} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{E}_0), \end{aligned} \quad (4.46)$$

que anula el último término de la Ec. (4.44). Por lo tanto la Ec. (4.42) se cumple trivialmente. De este modo, las ecuaciones que quedan para los campos son (4.40) y (4.41) con  $H_0$  dado por (4.43).

### 4.2.1. Ondas planas

Al igual que como lo hicimos en la Sección 2.2.1 al tratar el medio material análogo isotrópico y homogéneo correspondiente al espacio de Minkowski, es relevante saber si existen soluciones de tipo onda plana en el fondo curvo descrito por la métrica (3.17),

esto es, si el ansatz

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \bar{E}_0 \exp [i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)], \quad (4.47)$$

$$\bar{H}(\bar{x}, t) = \bar{H}_0 \exp [i k_0 (\bar{k} \cdot \bar{x} - t)], \quad (4.48)$$

es compatible con las ecuaciones cuando  $\bar{E}_0$ ,  $\bar{H}_0$  y  $\bar{k}$  son vectores complejos constantes. Si consideramos  $\bar{E}_0$ ,  $\bar{H}_0$  y  $\bar{k}$  independientes de  $\bar{x}$  en las Ecs. (4.40), (4.41) y (4.43), obtenemos

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{|x|} \bar{k} \times \bar{E}_0, \quad (4.49)$$

$$\bar{E}_0 = -\frac{1}{|x|} \bar{k} \times \bar{H}_0, \quad (4.50)$$

$$\text{sgn}(x) E_0^x + i k_0 |x| \bar{k} \cdot \bar{E}_0 = 0. \quad (4.51)$$

Combinando las dos primeras ecuaciones nos queda

$$|x| \bar{E}_0 = -\frac{1}{|x|} \bar{k} \times \bar{k} \times \bar{E}_0 = \frac{k^2}{|x|} \bar{E}_0, \quad (4.52)$$

es decir,  $k^2 = x^2$ . Sin embargo, habíamos pedido que  $\bar{k}$  fuera independiente de  $\bar{x}$ . Por lo tanto, las ecuaciones no son consistentes cuando se impone el ansatz (4.47)-(4.48), con lo cual no existen ondas planas en este medio material.

## 4.2.2. Vector de onda en la dirección $\hat{x}$ : campos independientes de $y$ y $z$

Consideramos ahora una onda con vector  $\bar{k} = k_1(\bar{x}) \hat{x}$ . En el Apéndice A se muestra la forma que toman las Ecs. (4.40) y (4.41) para este caso, sin restringir la dependencia de las amplitudes y del vector de onda en lo que respecta a las coordenadas.

Para el caso en el que las amplitudes y el vector de onda no dependen de las coordenadas  $y$ ,  $z$ , las ecuaciones se reducen a dimensiones tratables: definiendo  $F(x) = \frac{\partial k_1}{\partial x} x + k_1$ , éstas terminan siendo

$$E_0^x = 0, \quad (4.53)$$

$$\left( \frac{i}{k_0 x} + F \right) \left[ F E_0^y - \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_0^y}{\partial x} \right] = x^2 E_0^y + \frac{i}{k_0} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} E_0^y + F \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{i}{k_0} \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial x^2} \right], \quad (4.54)$$

$$\left( \frac{i}{k_0 x} + F \right) \left[ F E_0^z - \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_0^z}{\partial x} \right] = x^2 E_0^z + \frac{i}{k_0} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} E_0^z + F \frac{\partial E_0^z}{\partial x} - \frac{i}{k_0} \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial x^2} \right]. \quad (4.55)$$

Por otro lado, la Ec. (A.4) se cumple trivialmente, y de la Ec. (4.43), las componentes

de  $H$  quedan

$$H_0^x = 0, \quad (4.56)$$

$$H_0^y = \frac{1}{|x|} \left[ -F E_0^z + \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_0^z}{\partial x} \right], \quad (4.57)$$

$$H_0^z = \frac{1}{|x|} \left[ F E_0^y - \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_0^y}{\partial x} \right]. \quad (4.58)$$

Lo interesante de este caso es que las ecuaciones para las componentes eléctricas del campo se desacoplan. Vemos que además  $E_0^x$  ya queda definida (como nula) y que  $E_0^y$  y  $E_0^z$  cumplen la misma ecuación, cuya solución es

$$E_0^{y,z} = \frac{e^{-\frac{1}{2} i k_0 x(x+2k_1(x))} \left( 2 k_0 c_1^{y,z} - i e^{i k_0 x^2} c_2^{y,z} \right)}{2 k_0}, \quad (4.59)$$

con  $c_1^{y,z}$  y  $c_2^{y,z}$  constantes. Por lo tanto, las componentes de  $H_0$  quedan

$$H_0^{y,z} = \pm \frac{e^{-\frac{1}{2} i k_0 x(x+2k_1(x))} \operatorname{sgn}(x) \left( 2 k_0 c_1^{z,y} + i e^{i k_0 x^2} c_2^{z,y} \right)}{2 k_0}, \quad (4.60)$$

donde el signo  $+$  corresponde a la componente  $y$  y el  $-$  a la componente  $z$ . O bien, en forma equivalente, podemos escribir las componentes de  $H_0$  en función de las de  $E_0$  según

$$H_0^{y,z} = \pm \operatorname{sgn}(x) \left( \frac{1 + \frac{i c_2}{2 c_1 k_0} e^{i k_0 x^2}}{1 - \frac{i c_2}{2 c_1 k_0} e^{i k_0 x^2}} \right) E_0^{z,y}, \quad (4.61)$$

donde el signo  $+$  corresponde a la componente  $y$  y el  $-$  a la componente  $z$ .

Por otro lado, podemos expresar  $k_1(x)$  en función de una de las componentes del campo eléctrico invirtiendo (4.59), esto es

$$k_1(x) = -\frac{x}{2} - \frac{2 n \pi}{k_0 x} + \frac{i}{k_0 x} \ln \left( \frac{2 k_0 E_0^{y,z}}{2 k_0 c_1^{y,z} - i c_2^{y,z} e^{i k_0 x^2}} \right), \quad (4.62)$$

con  $n$  entero. O bien, reordenando

$$k_1(x) = -\frac{x}{2} - \frac{2 n \pi + i \ln \left( \frac{c_1^{y,z}}{E_0^{y,z}} \right)}{k_0 x} - \frac{i}{k_0 x} \ln \left( 1 - \frac{i c_2^{y,z}}{2 k_0 c_1^{y,z}} e^{i k_0 x^2} \right). \quad (4.63)$$

Dado que el  $k_1$  debe ser el mismo tanto si lo calculamos a partir del  $E_0^y$  como del  $E_0^z$ , de la Ec. (4.63) vemos que

$$\frac{c_1^y}{c_2^y} = \frac{c_1^z}{c_2^z}, \quad \frac{c_1^y}{E_0^y} = \frac{c_1^z}{E_0^z}. \quad (4.64)$$

Como ejemplo concreto de aplicación de los resultados recién obtenidos, podríamos

pedir la constancia de  $E_0$ . En este caso, de la Ec. (4.63) tenemos

$$k_1(x) = -\frac{x}{2} - \frac{c}{k_0 x} - \frac{i}{k_0 x} \ln \left( 1 + e^{i k_0 x^2 - c_3} \right), \quad (4.65)$$

con

$$c = 2 n \pi + i \ln \left( \frac{c_1^{y,z}}{E_0^{y,z}} \right), \quad \frac{c_2^{y,z}}{c_1^{y,z}} = 2 i k_0 e^{-c_3}. \quad (4.66)$$

Por lo tanto

$$E_0^{y,z} = c_1^{y,z} e^{i c}, \quad (4.67)$$

y las componentes de los campos quedan

$$E^y = E_0^y e^{i k_0 k_1(x) x} e^{-i k_0 t} = c_1^y e^{\frac{-i k_0 x^2}{2}} \left( 1 + e^{i k_0 x^2 - c_3} \right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.68)$$

$$E^z = E_0^z e^{i k_0 k_1(x) x} e^{-i k_0 t} = c_1^z e^{\frac{-i k_0 x^2}{2}} \left( 1 + e^{i k_0 x^2 - c_3} \right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.69)$$

$$H^y = H_0^y e^{i k_0 k_1(x) x} e^{-i k_0 t} = c_1^z \operatorname{sgn}(x) e^{\frac{-i k_0 x^2}{2}} \left( 1 - e^{i k_0 x^2 - c_3} \right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.70)$$

$$H^z = H_0^z e^{i k_0 k_1(x) x} e^{-i k_0 t} = c_1^y \operatorname{sgn}(x) e^{\frac{-i k_0 x^2}{2}} \left( -1 + e^{i k_0 x^2 - c_3} \right) e^{-i k_0 t}. \quad (4.71)$$

Para tener una comprensión más acabada de la estructura del campo electromagnético, calculemos el vector de Poynting. Entendiendo que los campos electromagnéticos físicos son la parte real de las expresiones dadas en las Ecs. (2.35) y (2.36), el vector de Poynting instantáneo viene dado por

$$\bar{S} = \operatorname{Re} [\bar{E}] \times \operatorname{Re} [\bar{H}] = (\operatorname{Re} [E^y] \operatorname{Re} [H^z] - \operatorname{Re} [E^z] \operatorname{Re} [H^y]) \hat{x}. \quad (4.72)$$

Sin embargo, lo físicamente relevante es el promedio temporal, que resulta

$$\begin{aligned} \langle \bar{S} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{S}(t) dt, \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \left( \bar{E}_0 e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right) \times \left( \bar{H}_0 e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right)^* \right], \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ E_0^y e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \left( H_0^z e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right)^* - E_0^z e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \left( H_0^y e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right)^* \right] \hat{x}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

De aquí se obtiene

$$\langle \bar{S} \rangle = -e^{\operatorname{Re}[c_3]} (|c_1^y|^2 + |c_1^z|^2) \operatorname{sgn}[x] \sinh(\operatorname{Re}[c_3]) \hat{x}, \quad (4.74)$$

lo que constituye un flujo de potencia constante en todo el espacio, aún en un entorno de  $x = 0$ . Por lo tanto, vemos que la constante  $c_3$  determina las propiedades del flujo de potencia. En el caso en que  $c_3$  tenga parte real positiva habrá un flujo de potencia constante hacia la singularidad, mientras que si tiene parte real negativa habrá un flujo

constante saliendo de la singularidad hacia esas regiones. En particular, si  $c_3 = 0$ , no hay flujo de potencia y los campos quedan

$$E^y = 2 c_1^y \cos\left(\frac{k_0 x^2}{2}\right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.75)$$

$$E^z = 2 c_1^z \cos\left(\frac{k_0 x^2}{2}\right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.76)$$

$$H^y = -2 i c_1^z \operatorname{sgn}(x) \sin\left(\frac{k_0 x^2}{2}\right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.77)$$

$$H^z = 2 i c_1^y \operatorname{sgn}(x) \sin\left(\frac{k_0 x^2}{2}\right) e^{-i k_0 t}, \quad (4.78)$$

es decir, tenemos una onda estacionaria. Es remarcable que, en cualquiera de los tres casos, la potencia es finita en  $x = 0$ . Este constituye nuestro primer ejemplo dinámico de la existencia de potencia finita en la “posición” de la singularidad de curvatura, que es una extensión del resultado previamente obtenido en el contexto de la electrostática.

### 4.2.3. Vector de onda obtenido en la óptica geométrica

Si revisamos los resultados tratados en el contexto de la óptica geométrica (Ecs. (3.64), (3.67) y (3.69)), vemos que el vector de onda obtenido oportunamente tiene la estructura

$$k_1(x) = \sqrt{x^2 - k_2^2}, \quad (4.79)$$

$$k_2 = \text{cte}, \quad (4.80)$$

$$k_3 = 0. \quad (4.81)$$

Si  $k_2 \neq 0$  y real, entonces el carácter real de  $k_1(x)$  está asegurado si  $x \geq k_2$ . En la óptica geométrica, como así también al nivel de las geodésicas nulas en el espacio-tiempo, los rayos de luz no alcanzan la singularidad en  $x = 0$  (ver Fig. 3.3). Es por eso que cabe preguntarse cuál sería el comportamiento de una onda electromagnética, más allá de la aproximación de la óptica geométrica, cuyo vector de onda estuviese dado por (4.79)-(4.81). Notemos que de (4.79) se desprende

$$\frac{\partial k_1}{\partial x} = \frac{x}{k_1(x)}, \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial^2 k_1}{\partial x^2} = \frac{1}{k_1(x)} - \frac{x^2}{k_1^3(x)}. \quad (4.83)$$

De este modo, recordando que  $F(x) = \frac{\partial k_1}{\partial x} x + k_1$ , la primera componente de la Ec. (4.40) queda

$$\begin{aligned} & \frac{i}{k_0|x|} \left[ F \frac{\partial E_0^y}{\partial y} - k_2 \frac{\partial E_0^x}{\partial y} - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial y^2} \right) + F \frac{\partial E_0^z}{\partial z} - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial z^2} \right) \right] \\ &= |x| E_0^x + \frac{k_2}{|x|} \left[ F E_0^y - k_2 E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.84)$$

la segunda componente,

$$\begin{aligned} & \frac{i \operatorname{sgn}(x)}{k_0 x^2} \left[ F E_0^y - k_2 E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} \right) \right] + \frac{i}{k_0|x|} \left[ -\frac{\partial F}{\partial x} E_0^y - F \frac{\partial E_0^y}{\partial x} \right. \\ & \left. + k_2 \frac{\partial E_0^x}{\partial x} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial y \partial x} \right) + k_2 \frac{\partial E_0^z}{\partial z} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial y \partial z} \right) \right] \\ &= |x| E_0^y - \frac{F}{|x|} \left[ F E_0^y - k_2 E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.85)$$

y la tercera componente

$$\begin{aligned} & \frac{i \operatorname{sgn}(x)}{k_0 x^2} \left[ F E_0^z - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial z} \right) \right] + \frac{i}{k_0|x|} \left[ -\frac{\partial F}{\partial x} E_0^z - F \frac{\partial E_0^z}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial z \partial x} \right) - k_2 \frac{\partial E_0^z}{\partial y} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial y \partial z} \right) \right] \\ &= -\frac{k_2}{|x|} \left[ k_2 E_0^z - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial y} - \frac{\partial E_0^y}{\partial z} \right) \right] - \frac{F}{|x|} \left[ F E_0^z - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial z} \right) \right] + |x| E_0^z. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Asimismo, la Ec. (4.41) resulta

$$\operatorname{sgn}(x) E_0^x + |x| \left( \frac{\partial E_0^x}{\partial x} + \frac{\partial E_0^y}{\partial y} + \frac{\partial E_0^z}{\partial z} \right) + i k_0 |x| (F E_0^x + k_2 E_0^y) = 0. \quad (4.87)$$

Si consideramos  $\bar{E}_0(\bar{x}) = E_0^z(\bar{x}) \hat{z}$ , la Ec. (4.87) implica  $E_0^z \equiv E_0^z(x, y)$  y las Ecs. (4.84) y (4.85) se cumplen trivialmente. Entonces, sólo resta estudiar la Ec. (4.86), que se reduce a

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{i}{k_0} \left( \frac{k_1}{x} - \frac{2x}{k_1} + \frac{x^3}{k_1^3} \right) + 2x^2 + \frac{x^4}{k_1^2} \right] E_0^z - \frac{i}{k_0} \left( \frac{i}{k_0 x} + \frac{2x^2}{k_1} + 2k_1 \right) \frac{\partial E_0^z}{\partial x} \\ & - \frac{2i k_2}{k_0} \frac{\partial E_0^z}{\partial y} - \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Proponemos resolver esta ecuación por separación de variables, escribiendo la factorización  $E_0^z(x, y) = \chi(x)Y(y)$ . Dividiendo la ecuación por  $E_0^z$  y reordenando, obtenemos

$$\left[ \frac{i}{k_0} \left( \frac{k_1}{x} - \frac{2x}{k_1} + \frac{x^3}{k_1^3} \right) + 2x^2 + \frac{x^4}{k_1^2} \right] - \frac{i}{k_0} \left( \frac{i}{k_0 x} + \frac{2x^2}{k_1} + 2k_1 \right) \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} - \frac{1}{k_0^2} \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{2ik_2}{k_0} \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \frac{1}{k_0^2} \frac{Y''(y)}{Y(y)} = c, \quad (4.89)$$

donde  $c$  es la constante de separación. De esta manera tenemos las dos ecuaciones diferenciales no lineales

$$Y''(y) = k_0^2 c Y(y) - 2ik_0 k_2 Y'(y), \quad (4.90)$$

$$\left[ \frac{i}{k_0} \left( \frac{k_1}{x} - \frac{2x}{k_1} + \frac{x^3}{k_1^3} \right) + 2x^2 + \frac{x^4}{k_1^2} - c \right] \chi(x) - \frac{i}{k_0} \left( \frac{i}{k_0 x} + \frac{2x^2}{k_1} + 2k_1 \right) \chi'(x) - \frac{1}{k_0^2} \chi''(x) = 0, \quad (4.91)$$

cuya solución será dada en términos de funciones especiales, con lo cual se requiere cierta paciencia en los pasos siguientes. En lo que sigue dividiremos el análisis en dos casos, de acuerdo a los posibles valores de la constante de separación.

1. Caso  $c^2 + k_2^2 \neq 0$ . Las soluciones son

$$Y(y) = c_1 e^{-ik_0(k_2 + \sqrt{k_2^2 - c})y} + c_2 e^{-ik_0(k_2 - \sqrt{k_2^2 - c})y}, \quad (4.92)$$

y

$$\chi(x) = e^{-\frac{1}{2}ik_0 x(-x + 2\sqrt{x^2 - k_2^2})} \left( c_3 U(-A, 0, -ik_0 x^2) + c_4 L_A^{(-1)}(-ik_0 x^2) \right), \quad (4.93)$$

en donde  $A = ik_0(c - k_2^2)/4$ , y  $c_i$   $i = 1, 2, 3, 4$ , son constantes de integración. En (4.93) hacen su aparición la función hipergeométrica de Tricomi  $U(a, b, z)$  y el polinomio generalizado de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , definidos según:

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} M(a, b, z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a+1-b, 2-b, z), \quad (4.94)$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1} t^{n+1}} dt, \quad (4.95)$$

dadas, a su vez, en términos de la función  $\Gamma(z)$  y de la función hipergeométrica

de Kummer  $M(a, b, z)$ , cuyas expresiones son

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (4.96)$$

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{b^n n!}. \quad (4.97)$$

Debe mencionarse que la integral en la Ec. (4.95) se realiza por una curva en sentido antihorario que rodea al origen y que no encierra al 1. Además, la función Gamma puede extenderse para cualquier número complejo, excepto para los enteros menores o iguales a cero, mediante la identidad

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (4.98)$$

Para un compendio detallado de las propiedades de estas funciones especiales, el lector puede consultar [32]. Por el momento, sólo interesa comprender el comportamiento de la solución en (o cerca de)  $x = 0$ . Para esto, debemos ver los desarrollos de las funciones especiales alrededor del origen:

$$U(-A, 0, -ik_0 x^2) = -\frac{1}{A\Gamma(-A)} + \mathcal{O}(x^2), \quad (4.99)$$

$$L_A^{(-1)}(-ik_0 x^2) = ik_0 x^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (4.100)$$

Notar que la función hipergeométrica  $U$  toma un valor no nulo en  $x = 0$ , mientras que el polinomio generalizado de Laguerre  $L_A^{(-1)}$  se anula allí. Por lo tanto, la función  $\chi(x)$  dada por (4.93) es regular en  $x = 0$ . Más aún,

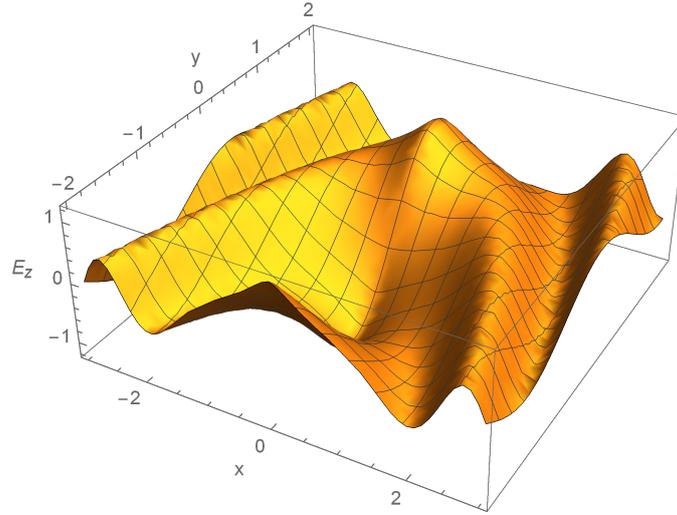
$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) = -\frac{c_3}{A\Gamma(-A)}. \quad (4.101)$$

De este modo, el campo eléctrico es también regular en  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} E^z &= \lim_{x \rightarrow 0} \text{Re} [\chi(x) Y(y) e^{ik_0(k_1(x)x + k_2 y - t)}] \\ &= \text{Re} \left[ -\frac{c_3 e^{-ik_0 t - k_0 \sqrt{c - k_2^2} y}}{A\Gamma(-A)} \left( c_1 + c_2 e^{2k_0 \sqrt{c - k_2^2} y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

En la Fig. 4.2 se muestra un gráfico 3D de la componente  $z$  del campo eléctrico,  $E^z = \text{Re} (\chi(x) Y(y) e^{ik_0(k_1(x)x + k_2 y - t)})$ , para  $t = 0$ , y considerando  $c_1 = c_3 = c_4 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ,  $k_0 = 10$  y  $k_2 = 1$  en las Ecs. (4.92) y (4.93). Se puede apreciar la regularidad de la solución en  $x = 0$ , y la simetría del campo ante el cambio  $x \leftrightarrow -x$ .

Una vez obtenido el campo eléctrico, podemos caracterizar el campo  $\vec{H}$  usando



**Figura 4.2:** Gráfico 3D de la parte real de la componente  $z$  del campo eléctrico, para  $t = 0$ , y considerando  $c_2 = c_3 = 1$ ,  $c = c_1 = c_4 = 0$ ,  $k_0 = 2$  y  $k_2 = 1$  en las Ecs. (4.92) y (4.93).

la Ec. (4.43):

$$H_0^x = \frac{1}{|x|} \left( k_2 E_0^z - \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_0^z}{\partial y} \right), \quad (4.103)$$

$$H_0^y = \frac{1}{|x|} \left( - \left( \frac{\partial k_1}{\partial x} x + k_1 \right) E_0^z + \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_0^z}{\partial x} \right), \quad (4.104)$$

$$H_0^z = 0. \quad (4.105)$$

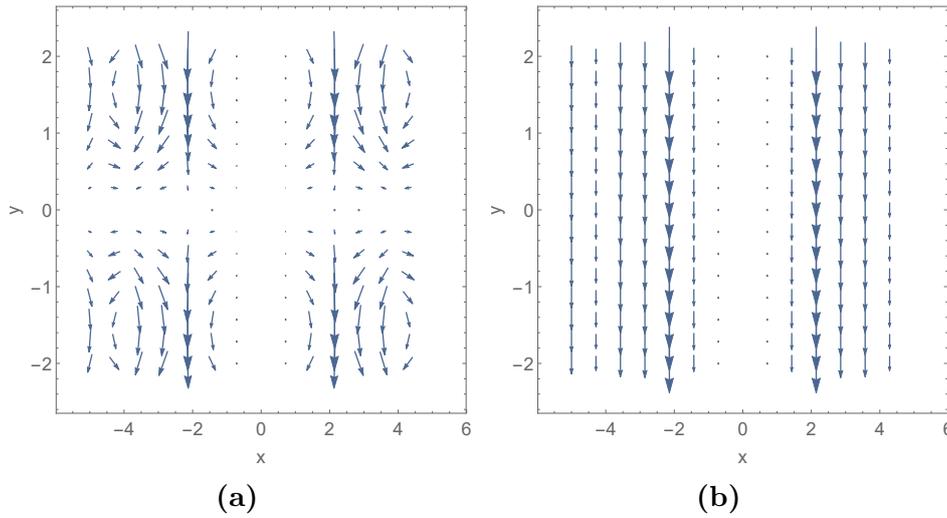
Se sigue, entonces, que

$$\begin{aligned} H_0^x(x, y) = & \frac{1}{k_0 |x|} i e^{-\sqrt{k_0^2(c-k_2^2)}y - \frac{1}{2} i k_0 (-x^2 + 2x\sqrt{-k_2^2+x^2} + 2k_2 y)} \\ & \times \left( c_1 - c_2 e^{2\sqrt{k_0^2(c-k_2^2)}y} \right) \sqrt{k_0^2(c-k_2^2)} \left[ c_3 U(-A, 0, -ik_0 x^2) \right. \\ & \left. + c_4 L_A^{(-1)}(-ik_0 x^2) \right], \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} H_0^y(x, y) = & - \frac{\text{sgn}(x)}{2} e^{-\sqrt{k_0^2(c-k_2^2)}y - \frac{1}{2} i k_0 (-x^2 + 2x\sqrt{-k_2^2+x^2} + 2k_2 y)} \\ & \times \left( c_1 + c_2 e^{2\sqrt{k_0^2(c-k_2^2)}y} \right) \left[ 2c_3 U(-A, 0, -ik_0 x^2) \right. \\ & - ic_3 k_0 (c - k_2^2) U(1 - A, 1, -ik_0 x^2) \\ & \left. + 2c_4 \left( 2L_{-1+A}^{(0)}(-ik_0 x^2) + L_A^{(-1)}(-ik_0 x^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Observemos que debido al factor  $1/|x|$ , si  $c_3 \neq 0$ , la componente  $x$  del campo  $\vec{H}$  diverge. Sin embargo, para  $c_3 = 0$ , y debido al comportamiento de  $L_A^{(-1)}$  cerca de 0 (Ec. (4.100)),  $H_0^x$  se anula en  $x = 0$ . Entonces, para  $c_3 = 0$  ambos campos son regulares en  $x = 0$ .

Una vez obtenido el campo electromagnético, calculemos el vector de Poynting.



**Figura 4.3:** (a) Gráfico de vectores para el vector de Poynting instantáneo considerando  $c = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_0 = 10$  y  $t = 0$  en las Ecs. (4.92) y (4.93). (b) Gráfico de vectores para el vector de Poynting promediado en el tiempo, para el mismo caso.

Como en este caso  $\bar{E}$  solo tiene componente  $z$  y  $\bar{H}$  tiene componentes  $x$  e  $y$ , nos queda

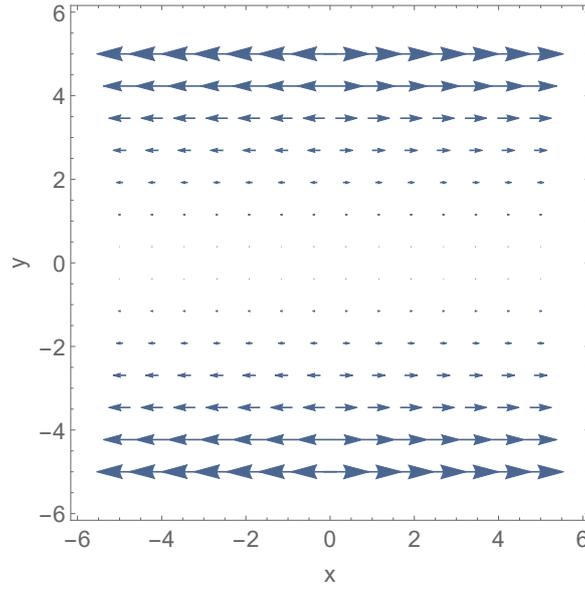
$$\bar{S} = -\text{Re}[E^z] \text{Re}[H^y] \hat{x} + \text{Re}[E^z] \text{Re}[H^x] \hat{y}. \quad (4.108)$$

Por otro lado, el promedio temporal del vector de Poynting resulta

$$\begin{aligned} \langle \bar{S} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{S}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \left( \bar{E}_0 e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right) \times \left( \bar{H}_0 e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right)^* \right] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ E_0^z e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \left( H_0^y e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right)^* \right] \hat{x} + \frac{1}{2} \text{Re} \left[ E_0^z e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \left( H_0^x e^{i k_0 \bar{k} \cdot \bar{x}} \right)^* \right] \hat{y}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Para el caso  $c_3 \neq 0$ , la componente  $y$  del vector de Poynting  $S_y$  diverge en  $x = 0$  ya que, como vimos,  $H_0^x$  diverge. Sin embargo para  $c_3 = 0$  ambas componentes del vector de Poynting se anulan en  $x = 0$ .

En la Fig. 4.3 se exhibe un gráfico de vectores para el vector de Poynting instantáneo en el caso  $c = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_0 = 10$  y  $t = 0$ , como así también su promedio temporal. Vemos que el flujo neto de potencia es en la dirección  $y$ , lo cual se condice con el caso de óptica geométrica en el que un rayo se acerca en forma oblicua a la singularidad y luego se aleja al ser “repelido” por ésta (ver Fig. 3.3 de las trayectorias de luz en la óptica geométrica).



**Figura 4.4:** Gráfico de vectores para el promedio temporal del vector de Poynting para el caso  $c_1 = c_4 = k_0 = 1$ ,  $c_2 = c_3 = k_2 = c = 0$  en las Ecs. (4.112) y (4.113).

2. Caso  $c = k_2 = 0$ . Las Ecs. (4.90) y (4.91) quedan

$$Y''(y) = 0, \quad (4.110)$$

$$3x^2 \chi(x) - \frac{i}{k_0} \left( \frac{i}{k_0 x} + 4 \operatorname{sgn}(x)x \right) \chi'(x) - \frac{1}{k_0} \chi''(x) = 0, \quad (4.111)$$

cuya solución es

$$Y(y) = c_1 y + c_2, \quad (4.112)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{2k_0} e^{-\frac{1}{2} i k_0 x(x+2|x|)} \left( 2k_0 c_3 - i e^{i k_0 x^2} c_4 \right), \quad (4.113)$$

con  $c_i$ ,  $i : 1, 2, 3, 4$ , constantes. Nuevamente, el campo eléctrico resulta regular en  $x = 0$ . En este caso, las componentes de  $H_0$  (Ec. (4.43)), quedan

$$H_0^x(x, y) = -\frac{c_1 e^{-\frac{1}{2} i k_0 x(x+2|x|)} (c_4 e^{i k_0 x^2} + 2i c_3 k_0)}{2k_0^2 |x|}, \quad (4.114)$$

$$H_0^y(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2k_0} e^{-\frac{1}{2} i k_0 x(x+2|x|)} (i c_4 e^{i k_0 x^2} + 2c_3 k_0) (c_2 + c_1 y), \quad (4.115)$$

por lo que  $H_0^x$  siempre diverge en  $x = 0$ .

Una vez más, el vector de Poynting instantáneo viene dado por la Ec. (4.108), y su promedio temporal por (4.109). Por lo tanto, la componente  $y$  del vector de Poynting instantáneo diverge en  $x = 0$ . Sin embargo, al promediar en el tiempo, la divergencia desaparece. En la Fig. 4.4 se muestra un gráfico de vectores para el promedio temporal del vector de Poynting, considerando  $c_1 = c_4 = k_0 = 1$ ,

$c_2 = c_3 = 0$ . En forma similar a lo que sucedía en el caso analizado en la Sección [4.2.2](#), no hay flujo de potencia a través de la singularidad, sino que el flujo de potencia entra, o bien sale de ésta. Lo novedoso de este caso es que la magnitud del flujo entrante o saliente depende de  $y$ .

# Conclusiones

A partir de las relaciones constitutivas que describen la gravedad análoga en medios ópticos del tipo Plebanski-Tamm, se estudió el comportamiento del campo electromagnético en el medio análogo de un modelo sencillo de espacio-tiempo (*toy model*), el cual exhibe una singularidad de curvatura fuerte. Las ecuaciones completas que gobiernan el electromagnetismo fueron resueltas de manera exacta en distintos escenarios, tanto estáticos como dinámicos, revelando soluciones perfectamente definidas en la singularidad. En este tipo de soluciones, la luz parece no percibir la curvatura infinita del espacio-tiempo.

Quisiéramos terminar comentando algunas potenciales líneas de investigación que surgen naturalmente de este trabajo. En primer lugar, como queda claro del análisis efectuado en la Sección 4.2, no se encontraron soluciones presentando intercambio de energía electromagnética entre las regiones  $x < 0$  y  $x > 0$  del espacio, esto es, que representen ondas propagantes cuyo vector de Poynting atraviese la singularidad en  $x = 0$ . La ausencia de este tipo de solución, creemos, se debe a la simetría ante el cambio  $x \leftrightarrow -x$  que posee la métrica (3.17). Esto implica que la componente  $\langle \bar{S} \rangle_x$  del valor medio temporal del vector de Poynting, si no es nula en  $x = 0$ , necesariamente cambiará de signo ahí, con lo cual no habrá transferencia de potencia entre una región y la otra. Por otro lado, nuestras soluciones fueron obtenidas por medio de ciertas restricciones impuestas de antemano en las Ecs. (A.1)-(A.3), a saber, la independencia de las componentes de los campos y del vector de onda con las coordenadas  $y, z$ , por un lado, y la imposición de una cierta estructura para el vector de onda, como fue el caso en la Sección 4.2.3, por el otro. La obtención de soluciones exactas más generales es parte de una investigación en curso.

Por supuesto, el objetivo en un futuro inmediato es utilizar la experiencia adquirida en el desarrollo de este trabajo para caracterizar ciertas singularidades presentes en soluciones de las ecuaciones de Einstein. Tal es el caso, como mencionamos en el Capítulo 3, de la singularidad de curvatura fuerte presente en la métrica de Kasner (Ec. 3.18), que constituye una solución exacta de las ecuaciones de la gravedad en vacío. Desde luego, hay muchos más ejemplos, aunque no es claro si serán abordables desde el punto de vista de la obtención de soluciones exactas.

Finalmente, podemos mencionar que los modelos de gravedad análoga como el aquí

estudiado podrían ser útiles más allá de su relación con el estudio de las singularidades espacio-temporales. Por ejemplo, con este formalismo se podría indagar sobre la estabilidad de fondos curvos presentando anomalías causales, como es el caso del espacio-tiempo de Gödel [33]. En efecto, la óptica geométrica es incapaz de brindar información respecto de la estabilidad del horizonte de Gödel ante la presencia de un campo electromagnético, ver [26]. Esto es claro en el presente formalismo, puesto que la óptica geométrica se corresponde con el estudio de las geodésicas nulas del espacio-tiempo, y el universo de Gödel no presenta geodésicas nulas cerradas, sino sólo curvas nulas cerradas. Sin embargo, a través de las ecuaciones completas se podría intentar caracterizar el campo electromagnético en la vecindad del horizonte de Gödel, e investigar así la estabilidad en el proceso de formación de curvas nulas cerradas.

# Apéndice A

## Vector de onda en la dirección $\hat{x}$

En este breve apéndice consideraremos ondas cuasi-planas de la forma (2.35) y (2.36) con  $\bar{k} = k_1(\bar{x}) \hat{x}$  para el análogo de la métrica *toy model*, Ec. (3.17). Como se mencionó en la Sección 4.2 las ecuaciones resultantes para los campos son las Ecs. (4.40) y (4.41) con  $H_0$  dado por (4.43). Reemplazando (4.43) en (4.40), la primera componente de la Ec. (4.40) queda

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{k_0|x|} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} E_0^y + F \frac{\partial E_0^y}{\partial y} - \frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2} x E_0^x - \frac{\partial k_1}{\partial y} x \frac{\partial E_0^x}{\partial y} - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial y^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 k_1}{\partial z^2} x E_0^x - \frac{\partial k_1}{\partial z} x \frac{\partial E_0^x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} E_0^z + F \frac{\partial E_0^z}{\partial z} - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial z^2} \right) \right] \\
& = \frac{\partial k_1}{\partial y} \operatorname{sgn}(x) \left[ F E_0^y - \frac{\partial k_1}{\partial y} x E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{\partial k_1}{\partial z} \operatorname{sgn}(x) \left[ F E_0^z - \frac{\partial k_1}{\partial z} x E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial z} \right) \right] + |x| E_0^x, \tag{A.1}
\end{aligned}$$

con  $F(x, y, z) = \frac{\partial k_1}{\partial x} x + k_1$ . La segunda componente es

$$\begin{aligned}
& \frac{i \operatorname{sgn}(x)}{k_0 x^2} \left[ F E_0^y - \frac{\partial k_1}{\partial y} x E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} \right) \right] + \frac{i}{k_0|x|} \left[ -\frac{\partial F}{\partial x} E_0^y - F \frac{\partial E_0^y}{\partial x} \right. \\
& + \frac{\partial F}{\partial y} E_0^x + \frac{\partial k_1}{\partial y} x \frac{\partial E_0^x}{\partial x} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial^2 k_1}{\partial y \partial z} x E_0^z + \frac{\partial k_1}{\partial y} x \frac{\partial E_0^z}{\partial z} - \frac{\partial^2 k_1}{\partial z^2} x E_0^y \\
& \left. - \frac{\partial k_1}{\partial z} x \frac{\partial E_0^y}{\partial z} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial y \partial z} \right) \right] = |x| E_0^y + \frac{\partial k_1}{\partial z} \operatorname{sgn}(x) \left[ \frac{\partial k_1}{\partial y} x E_0^z - \frac{\partial k_1}{\partial z} x E_0^y \right. \\
& \left. - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial y} - \frac{\partial E_0^y}{\partial z} \right) \right] - \frac{F}{|x|} \left[ F E_0^y - \frac{\partial k_1}{\partial y} x E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^y}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} \right) \right], \tag{A.2}
\end{aligned}$$

y la tercera componente

$$\begin{aligned}
& \frac{i \operatorname{sgn}(x)}{k_0 x^2} \left[ F E_0^z - \frac{\partial k_1}{\partial z} x E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial z} \right) \right] + \frac{i}{k_0 |x|} \left[ -\frac{\partial F}{\partial x} E_0^z - F \frac{\partial E_0^z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} E_0^x \right. \\
& + \frac{\partial k_1}{\partial z} x \frac{\partial E_0^x}{\partial x} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_0^x}{\partial z \partial x} \right) + \frac{\partial^2 k_1}{\partial y \partial z} x E_0^y + \frac{\partial k_1}{\partial z} x \frac{\partial E_0^y}{\partial y} - \frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2} x E_0^z \\
& \left. - \frac{\partial k_1}{\partial y} x \frac{\partial E_0^z}{\partial y} + \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2 E_0^z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_0^y}{\partial y \partial z} \right) \right] = |x| E_0^z - \frac{\partial k_1}{\partial y} \operatorname{sgn}(x) \left[ \frac{\partial k_1}{\partial y} x E_0^z - \frac{\partial k_1}{\partial z} x E_0^y \right. \\
& \left. - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial y} - \frac{\partial E_0^y}{\partial z} \right) \right] - \frac{F}{|x|} \left[ F E_0^z - \frac{\partial k_1}{\partial z} x E_0^x - \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_0^z}{\partial x} - \frac{\partial E_0^x}{\partial z} \right) \right]. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Además la Ec. (4.41) queda

$$\operatorname{sgn}(x) E_0^x + |x| \left( \frac{\partial E_0^x}{\partial x} + \frac{\partial E_0^y}{\partial y} + \frac{\partial E_0^z}{\partial z} \right) + i k_0 |x| \left( F E_0^x + \frac{\partial k_1}{\partial y} x E_0^y + \frac{\partial k_1}{\partial z} x E_0^z \right) = 0. \quad (\text{A.4})$$

# Bibliografía

- [1] Faccio, D., Belgiorno, F., Cacciatori, S., Gorini, V., Liberati, S., Moschella, U. *Analogue gravity phenomenology*. Springer, (2013). [1](#)
- [2] Barcelo, C., Liberati, S., Visser, M. Analogue gravity. *Living Rev. Rel.*, **8(1)**, 12, (2005). [1](#)
- [3] Drori, J., Rosenberg, Y., Bermudez, D., Silberberg, Y., Leonhardt, U. Observation of stimulated hawking radiation in an optical analogue. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 010404, (2019). [1](#)
- [4] Carroll, S. M. *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, (2019). [5](#)
- [5] Hartle, J. B. *Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity*. Addison Wesley, (2003). [5](#)
- [6] Wald, R. M. *General Relativity*. The University of Chicago Press, (1984). [5](#), [16](#), [17](#)
- [7] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Spacetime*. Cambridge University Press, (1973). [5](#), [16](#), [18](#)
- [8] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, (1972). [5](#)
- [9] Schwarzschild, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.)*, págs. 189–196, (1916). [12](#)
- [10] Oppenheimer, J. R., Snyder, H. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, **56**, 455–459, (1939). [13](#)
- [11] Valentino, E. D., *et al.* In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. *Class. Quantum Grav.*, **38**, 153001, (2021). [14](#)

- [12] Ghez, A. M., *et al.* The accelerations of stars orbiting the milky way's central black hole. *Nature*, **402**, 349, (2000). [16](#)
- [13] Ghez, A. M., *et al.* Measuring distance and properties of the milky way's central supermassive black hole with stellar orbits. *ApJ.*, **689**, 1044, (2008). [16](#)
- [14] The Event Horizon Telescope Collaboration, *et al.* First Sagittarius A\* event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole in the center of the Milky Way. *ApJ. Lett.*, **930**, L12, (2022). [16](#)
- [15] The Event Horizon Telescope Collaboration, *et al.* First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. *ApJ. Lett.*, **875**, L1, (2019). [16](#)
- [16] Abbott, B. P., *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 061102, (2016). [16](#)
- [17] Abbott, R., *et al.* Observation of gravitational waves from two neutron star–black hole coalescences. *ApJ. Lett.*, **915**, L5, (2021). [16](#)
- [18] Penrose, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 57, (1965). [16](#)
- [19] Hawking, S. W. Singularities in the universe. *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 444, (1966). [16](#)
- [20] Hawking, S. W., Penrose, R. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. A*, **314**, 529–548, (1970). [16](#)
- [21] Geroch, R. What is a singularity in general relativity? *Ann. Phys.*, **48**, 526, (1968). [16](#)
- [22] Schmidt, B. A new definition of singular points in general relativity. *Gen. Relat. Grav.*, **1**, 269, (1971). [16](#)
- [23] Tamm, I. E. *J. Russ. Phys.-Chem. Soc., Phys. Section.*, **56**, 248, (1924). [19](#)
- [24] Plebanski, J. Electromagnetic waves in gravitational fields. *Phys. Rev.*, **118**, 1396–1408, (1960). [19](#)
- [25] Leonhardt, U., Philbin, T. G. *Geometry and Light: The science of invisibility.* Dover Publications Inc, (2010). [19](#)
- [26] Fiorini, F., Hernández, S., Losada, E. Exact results on analog gravity in optical Plebanski-Tamm media. *Phys. Rev. D*, **104**, 124009, (2021). [27](#), [28](#), [62](#)

- 
- [27] Sluijter, M., Boer, D. K. G., Braat, J. J. M. General polarized ray-tracing method for inhomogeneous uniaxially anisotropic media. *J. Opt. Soc. Am. A*, **25** 6, 1260–73, (2008). [27](#)
- [28] Mackay, T. G., Lakhtakia, A. Towards a metamaterial simulation of a spinning cosmic string. *Phys. Lett. A*, **374**, 2305–2308, (2009). [27](#)
- [29] Anderson, T., Mackay, T. G., Lakhtakia, A. Ray trajectories for a spinning cosmic string and a manifestation of self-cloaking. *Phys. Lett. A*, **374**, 4637–4641, (2010). [27](#)
- [30] Tinguely, R. A., Turner, A. P. Optical analogues to the equatorial Kerr–Newman black hole. *Comm. Phys.*, **3**, 120, (2020). [30](#)
- [31] Kasner, E. Geometrical theorems on Einstein’s cosmological equations. *Am. J. of Math.*, **43**, 217–221, (1921). [33](#)
- [32] G. E. Andrews, R. A., Roy, R. *Special functions*. En: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, tomo 71. Cambridge University Press, (1999). [56](#)
- [33] Gödel, K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 447–450, (1949). [62](#)

