

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICA

**TWIST ESTÁNDAR DE TRASLACIÓN Y COTA
INFERIOR OPERATORIAL A LA ENERGÍA LOCAL**

Lic. Leandro Martinek
Maestrando

Dr. Horacio Casini
Director

Miembros del Jurado

Dr. Gonzalo Torroba (Instituto Balseiro)
Dr. César Fosco (Instituto Balseiro)
Dr. Guillem Perez-Nadal (Universidad de Buenos Aires)

20 de Diciembre de 2023

Grupo Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov CAB-IB)

Inventario 24911

11/06/2024

Biblioteca Leo Falicov

A mi familia

A mis amigos

A mis profesores

Y a RK5

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	vii
1. Introducción	1
1.1. ¿Que es un Twist?	1
1.2. Fermiones de Majorana no masivos en 1+1 dimensiones	4
1.3. Álgebra	6
1.4. Álgebras Locales	7
1.5. Estados cíclicos y separadores: Teorema de Reeh-Schlieder	9
1.6. Purificación y teoría de Tomita-Takesaki	10
2. Un Twist simple	13
2.1. Twist de evolución	14
2.2. Análisis cualitativo del comportamiento de $\tilde{\psi}(x, t)$	15
2.3. Solución exacta para $\tilde{\psi}(x, t)$	16
3. Twist de Buchholz-Doplicher-Longo	21
3.1. Definición	21
4. Descifrando el operador J	25
4.1. ¿Cómo actúa el operador J ?	25

4.2. Propiedades de las soluciones $G(x, y) = 0$	30
4.3. Distribución de los $\psi(x)$	31
4.4. Solución para un intervalo	32
4.5. Solución para dos intervalos	34
5. La simpleza del plano complejo	37
5.1. Expresión general para las posiciones en la circunferencia unidad	37
5.2. Transformación de los campos	38
6. Twist para un intervalo y cota inferior operatorial a la energía local	43
6.1. Twist en un intervalo	43
6.2. Generador del twist	47
6.3. Cota a la energía local y comparación con la cota de Fewster-Hollands	55
7. Twist en dos intervalos y como se “teletransporta” un fermión	59
8. Conclusiones	65
A. Hamiltoniano y función de dos puntos	67
B. Función de prueba $\alpha(x)$	69
C. Cálculo de $: J_{AB} J_{\mathcal{A}} T(x) J_{\mathcal{A}} J_{AB} :$	71
D. Propiedades $q_{\pm}(x)$ y $c_{\pm}(x)$	73
E. Límites $\lim_{h \rightarrow 0} f_{\pm}^n h^{n+1} = 0$	75
Bibliografía	77
Agradecimientos	81

Resumen

Se obtuvo la acción explícita de dos tipos twists sobre el álgebra local de operadores fermiónicos no masivos en 1+1 dimensiones. El primero de estos twists fue construido a partir de la integración de la densidad de energía pesada por una función $\alpha(x)$ de soporte compacto en la región A . El segundo es un twist construido en [1] utilizando herramientas de la teoría algebraica. En el estudio de este último twist se obtuvo como actúa el operador reflexión modular J de la teoría de Tomita-Takesaki sobre las álgebras locales mencionadas y se encontró que su acción se simplifica enormemente llevando la teoría de la recta real al círculo unidad complejo. Este twist fue estudiado para el caso de que la región A , donde queremos que el twist aplique la transformación, esté compuesta por 1 y 2 intervalos. Para el caso de un intervalo se estudió la evolución del campo fermiónico dada por el twist, se obtuvo el generador de este y se derivó una cota a la energía local en esa región. Para el caso de dos intervalos se observó y estudio como el twist puede tomar un operador fermiónico localizado en un intervalo y llevarlo a otro intervalo, totalmente desconectado del anterior, sin nunca haber pasado por el espacio intermedio a estos.

Este trabajo se encuentra sintetizado en la publicación arXiv:2310.06961.

Palabras clave: TWIST, ÁLGEBRAS LOCALES, ENERGÍA LOCAL, CONJUGACIÓN MODULAR, TEORÍA MODULAR, SIMETRÍAS LOCALES.

Capítulo 1

Introducción

“Estos bichos son demasiado extraños como para no investigarlos.”

— Horacio Casini

1.1. ¿Que es un Twist?

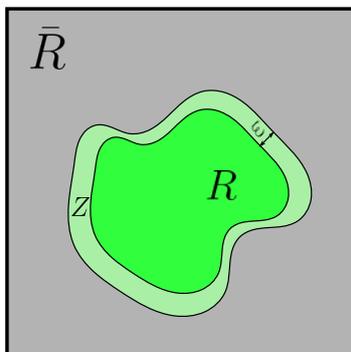


Figura 1.1: Esquema de ejemplo de las regiones R , \bar{R} y Z .

Supongamos que tenemos una región R del espacio a tiempo constante, como la mostrada en la figura 1.1. En el contexto de la Teoría Algebraica de Campos tenemos regiones del espacio como lo es la región R , tenemos álgebras asociadas a estas regiones y tenemos operadores localizados $\phi(x)$ los cuales podemos decir que pertenecen al álgebra de la región R si $x \in R$. En estas teorías también tenemos operadores que aplican transformaciones de simetría sobre los operadores de las álgebras. Por ejemplo, algunos campos pueden transformar ante la simetría interna $U(1)$ o también tenemos transformaciones como la traslación espacial, la evolución temporal, los “boost” y las rotaciones, las cuales se las agrupa en lo que se conoce como grupo de Poincare. Estas

transformaciones son globales en el sentido de que transforman por igual a todos los puntos del espacio, es decir si aplicamos la traslación $T(a)$, entonces $T(a) \phi(x) T^\dagger(a) = \phi(x + a)$ para cualquier x que tomemos.

Un twist, en cambio, es un operador unitario que aplica una transformación de simetría, ya sea interna o no, sobre una región del espacio acotada, por ejemplo solo en R . Por ejemplo, sea $\tau^R(a)$ el twist que aplica la traslación $T(a)$ solo a los operadores que pertenezcan a la región R , entonces tenemos que

$$\tau^R(a)^\dagger \phi(x) \tau^R(a) = \begin{cases} \phi(x + a) & \text{si } x \in R \\ \phi(x) & \text{si } x \notin R \end{cases} . \quad (1.1)$$

En realidad, uno no puede pedir que un twist actué idénticamente como la transformación en la región R y fuera de esta no realice ninguna acción, ya que cerca de los bordes tendría un comportamiento muy singular y no sería un operador. Por esta razón se introduce la zona de “esmero” Z , una zona intermedia donde el twist sigue transformando a los operadores, pero de tal manera que nos suaviza la transición entre las regiones R y la región $\bar{R} = (R \cup Z)^C$ donde el twist no realiza ninguna transformación. Esta región Z puede ser tan pequeña como se requiera, pero al hacer tender $\epsilon \rightarrow 0$ (ϵ es el espesor de Z) el twist se vuelve muy singular como para ser un operador. En los ejemplos dados se habló siempre de simetrías continuas pero también se pueden construir twist para simetrías discretas.

El interés de estos operadores viene de estudiar el teorema de Noether en teoría cuántica de campos. Se sabe que si se tiene una corriente local conservada $J^\mu(x)$ entonces se puede construir una carga conservada que es la generadora de la simetría. La pregunta inversa es un poco más complicada, dada una carga conservada ¿Siempre podemos conseguir una corriente conservada?. En el desarrollo de herramientas para atacar esta pregunta fueron introducidos los twists que son una prueba a lo que se nombró como del Teorema “débil” de Noether [1–4]. Este teorema asegura que dada una carga conservada global Q y una región R acotada del espacio, entonces existe una carga local Q_R la cual aplica la transformación de simetría solo en la región R . Este teorema es evidente si es que se tiene una corriente conservada, integrándola solo sobre la región de interés R se consigue Q_R . Los twists aparecen como una solución a este teorema para cuando no se tiene una corriente para una dada carga global, por ejemplo en una simetría discreta. En [5, 6] se muestra que no siempre que se tenga una carga global conservada se puede conseguir una corriente local conservada que la genere.

El twist descrito por Buchholz-Doplicher-Longo en [1] es una construcción estándar de uno de estos operadores donde se usan herramientas de la teoría algebraica. Hasta el día de hoy no se ha construido ningún ejemplo de cómo actúan estos twists de forma

explícita sobre una teoría, por lo que el objetivo principal de este trabajo será entender mejor este punto. Una de las propiedades de este twist es que conserva el espectro de la transformación original. Esto lo aplicaremos para el caso del operador evolución temporal, ya que nos permitirá obtener un Hamiltoniano de la evolución temporal local con el mismo espectro que el Hamiltoniano original y podremos calcular una cota inferior operatorial a la energía local. Otra aplicación de este twist es para estudiar la traslación de operadores de una región a otra sin atravesar el espacio intermedio entre estas, algo así como una “teleportación”.

En este trabajo estudiaremos como actúan los twists sobre los operadores fermiónicos no masivos de Majorana $\psi(x)$ en 1+1 dimensiones. Se estudiaron dos twists construidos de forma distinta, uno más simple construido a partir de la corriente de Noether en el capítulo 2 y otro con una construcción más abstracta hecha por D. Buchholz, S. Doplicher y R. Longo en [1] en los restantes capítulos. En el camino del estudio del twist de Buchholz-Doplicher-Longo, definido en el capítulo 3, es central el entendimiento del operador conjugación modular J de la teoría de Tomita-Takesaki, por lo que se dedica el capítulo 4 a descifrar como este actúa sobre los operadores fermiónicos en regiones multi-componentes. Luego en el capítulo 5 se mostrará como la acción de este operador se simplifica enormemente cuando se lo mira en una teoría en el círculo unidad complejo para una distribución simétrica de intervalos, lo cual nos ayudará para realizar cálculos en ciertos ejemplos. En el capítulo 6 veremos la acción explícita del twist de Buchholz-Doplicher-Longo al aplicar la evolución temporal sobre un intervalo centrado en el origen. Analizaremos como transforma al campo fermiónico y como este twist lo hace evolucionar. Luego mostraremos que forma tiene el generador del twist en este caso particular y de ella deduciremos una cota inferior operatorial a la energía local, la cual compararemos con la obtenida por Fewster y Hollands en [7]. En el capítulo 7 estudiaremos el mismo twist pero aplicado a dos intervalos y observaremos detalladamente como se da el proceso de que un fermión pase de un intervalo a otro sin que nunca pase por el espacio intermedio.

1.2. Fermiones de Majorana no masivos en 1+1 dimensiones

Todo el trabajo se ha realizado en la teoría de campos de un fermión de Majorana sin masa en 1+1 dimensiones. Por esta razón, en esta sección haremos un repaso de esta teoría. Partimos de la ecuación de Dirac en 1+1 no masiva

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x, t) = i(\gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x) \psi(x, t) = 0 . \quad (1.2)$$

Podemos obtener la densidad Hamiltoniana para esta teoría. Definiendo el operador quiralidad $\gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1$ llegamos a que

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi(x, t) &= -i\gamma^3 \partial_x \psi(x, t) = \mathcal{H} \psi(x, t) \\ \Rightarrow \mathcal{H} &= -i\gamma^3 \partial_x . \end{aligned} \quad (1.3)$$

De aquí podemos ver explícitamente que la quiralidad es una cantidad conservada, ya que $[\mathcal{H}, \gamma^3] = 0$. Utilizaremos la representación quiral

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (1.4)$$

Definimos el operador proyector de quiralidad $P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^3}{2}$, a partir de este podemos ver que las soluciones con quiralidad positiva y negativas son

$$\begin{aligned} P_+ \psi(x, t) &= \psi_+(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} , \\ P_- \psi(x, t) &= \psi_-(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(x, t) \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora, volviendo a la ecuación de Dirac y reemplazando por la representación quiral, nos quedan las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\partial_t \psi_1(x, t) + \partial_x \psi_1(x, t) = 0 , \quad \partial_t \psi_2(x, t) - \partial_x \psi_2(x, t) = 0 , \quad (1.6)$$

las cuales tienen como soluciones a

$$\psi_1(x, t) = f(x - t) , \quad \psi_2(x, t) = g(x + t) , \quad (1.7)$$

con f y g operadores arbitrarios. Entonces, definiendo las coordenadas nulas $u_\pm = x \mp t$, podemos decir que toda solución de la ecuación de Dirac se puede escribir como la suma

de una solución de quiralidad positiva que solo depende de la coordenada nula u_+ y otra de quiralidad negativa que solo depende de la coordenada nula u_- y estas dos soluciones evolucionan independientemente una de la otra.

$$\psi(x, t) = \psi_+(u_+) + \psi_-(u_-) . \quad (1.8)$$

Para estas soluciones se cumple que

$$\{\psi_{\pm}(u_{\pm}^1), \psi_{\pm}^{\dagger}(u_{\pm}^2)\} = \delta(u_{\pm}^1 - u_{\pm}^2) , \quad \{\psi_{\pm}(u_{\pm}^1), \psi_{\mp}^{\dagger}(u_{\mp}^2)\} = 0 . \quad (1.9)$$

Debido a la forma de $\psi_{\pm}(u_{\pm})$ y a que cada quiralidad evoluciona independientemente de la otra podemos elegir una solución de quiralidad definida y olvidarnos de la estructura espinorial para trabajar pensando que tenemos un campo $\psi(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ que cumple relaciones de anticonmutación dadas. La representación elegida también cumple la propiedad de que las matrices gamma son imaginarias

$$(\gamma^{\mu})^* = -\gamma^{\mu} , \quad (1.10)$$

por lo tanto esta representación también es la de Majorana. En esta representación en particular, el fermión $\psi(x, t)^*$ cumple la misma ecuación de movimiento que el fermión $\psi(x, t)$, por lo tanto sumando ambas soluciones nos podemos construir una solución real a la ecuación de Dirac (para un desarrollo más profundo consultar [8]).

En resumen, vamos a estar trabajando con un campo fermiónico $\psi(x)$ que cumple las siguientes propiedades ¹

$$\psi^{\dagger}(x) = \psi(x), \quad \{\psi(x), \psi(y)\} = \delta(x - y) \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R} , \quad (1.11)$$

su Hamiltoniano es ²

$$H = \frac{i}{2} \int dx : \psi(x) \partial \psi(x) : , \quad (1.12)$$

y la función de dos puntos con respecto al vacío es

$$\langle \Omega | \psi(x) \psi(y) | \Omega \rangle = \frac{1}{2\pi i(x - y - i\epsilon)} . \quad (1.13)$$

En el apéndice A se muestra que el Hamiltoniano es hermítico y definido positivo y luego se deduce la forma de la función de dos puntos.

¹Como estamos trabajando con un campo fermiónico sin índices espinoriales $\psi(x)^* = \psi(x)^{\dagger}$.

²En la expresión del Hamiltoniano aparece un factor $\frac{1}{2}$ debido al Jacobiano del cambio de variables a las coordenadas nuladas.

1.3. Álgebra

Vamos a llamar álgebra de operadores a un conjunto \mathcal{A} de operadores (transformaciones lineales sobre un espacio de Hilbert) en el cual se cumplen las siguientes propiedades:

- $1 \in \mathcal{A}$
- Si $a, b \in \mathcal{A} \Rightarrow \alpha a + \beta b \in \mathcal{A}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- Si $a, b \in \mathcal{A} \Rightarrow ab \in \mathcal{A}$
- Si $a \in \mathcal{A} \Rightarrow a^\dagger \in \mathcal{A}$

Donde a^\dagger es el adjunto de a . En este trabajo nos encontraremos utilizando un espacio de Hilbert \mathcal{H} y en este espacio nos podemos formar $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el álgebra de todos los operadores acotados que van de \mathcal{H} en sí mismo. Las álgebras definidas con operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, que cumplen las condiciones mencionadas anteriormente y considerando que son cerradas bajo la topología débil, son conocidas como álgebras de Von Neumann.

En general si nos formamos una sub-álgebra \mathcal{A} de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, los operadores de esta no conmutaran entre sí, es decir $[a, b] = ab - ba \neq 0$ con $a, b \in \mathcal{A}$. El *conmutante* del álgebra \mathcal{A} se define cómo el conjunto de los operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que conmutan con todos los operadores de \mathcal{A} y se denota \mathcal{A}'

$$\mathcal{A}' = \{a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) / [a, b] = 0, \forall b \in \mathcal{A}\} . \quad (1.14)$$

Existe un teorema demostrado por Von Neumann que nos dice que, si \mathcal{A} es un conjunto de operadores (no necesariamente un álgebra), entonces \mathcal{A}' es un álgebra. También enuncia que \mathcal{A} es un álgebra de Von Neumann si y solo si

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'' . \quad (1.15)$$

Por lo tanto, el álgebra generada por los operadores $\{a_1, a_2, \dots\}$ es $\{a_1, a_2, \dots\}''$, y esta es el álgebra de Von Neumann más chica que contiene a $\{a_1, a_2, \dots\}$. A partir de esto, podemos deducir que $\mathcal{B}(\mathcal{H})' = \{1\}$.

1.4. Álgebras Locales

Sea W una región del espacio-tiempo de Minkowski. Si nos encontramos en una teoría de campos uno estaría tentado a formarse el álgebra $\mathcal{A}(W)$ asociada a la región W sumando y multiplicando los operadores $\phi(x)$ que cumplen $x \in W$. El problema es que estos $\phi(x)$ son demasiado singulares para poder ser llamados operadores, por lo que se definen los operadores

$$\phi_\alpha = \int dx \alpha(x)\phi(x) , \quad (1.16)$$

donde $\alpha(x)$ pertenece a la clase de funciones que son infinitamente diferenciables y de soporte compacto en W . El conjunto de todos estos operadores, dado por todas las posibles funciones $\alpha(x)$, es el conjunto que generará nuestra álgebra. Para el caso de fermiones con esta definición es suficiente, en otros casos esta definición contiene un problema técnico y es que los operadores ϕ_α en general pueden no ser acotados, aunque sean operadores. Esto significa que contienen un espectro no acotado y, por lo tanto, hay algunos vectores del espacio de Hilbert que no pertenecen a su dominio. Esto lleva a que, en la multiplicación de operadores, haya problemas con el dominio de estos y no permitan formar un álgebra. Este problema se logra sortear tomando, por ejemplo, la exponencial de estos operadores $e^{i\phi_\alpha}$ para ϕ_α Hermíticos, lo que permite tener operadores unitarios y acotados. Otra opción es tomar los proyectores de estos en la descomposición espectral.

La descripción Haag-Kastler de la QFT [9] toma como objeto principal las álgebras $\mathcal{A}(W)$ en vez de los campos. Estas álgebras cumplen dos propiedades básicas para el desarrollo de la teoría, que en el trabajo de Haag y Kastler son dadas como axiomas. Una de estas propiedades es la *Isotonía*

$$\text{Si } V \subseteq W \Rightarrow \mathcal{A}(V) \subseteq \mathcal{A}(W). \quad (1.17)$$

La segunda propiedad pide que dos operadores que estén espacialmente separados conmuten entre sí. Si esto no ocurriera, entonces podríamos enviar información a velocidades superlumínicas. Para definir esta propiedad definimos la región *complemento causal de V* como

$$V' = \{x \mid x \text{ espacialmente separado de } y, \forall y \in V\} . \quad (1.18)$$

Por lo tanto podemos escribir esta propiedad como

$$W \subseteq V' \Rightarrow \mathcal{A}(W) \subseteq (\mathcal{A}(V))' . \quad (1.19)$$

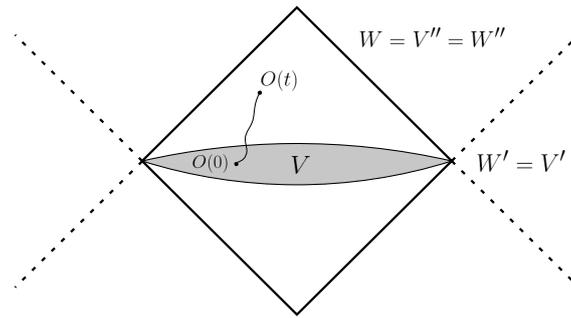


Figura 1.2: Esquema de la región V , su región complementaria V' y su región causal V''

Para que estos argumentos sean válidos para un campo fermiónico tenemos que reemplazar los conmutadores por anti-conmutadores para operadores compuestos con un número impar de operadores fermiónicos. Profundizaremos en este punto en la sección 4.1.

Puede suceder que, si tenemos una región V del espacio y miramos el álgebra generada $\mathcal{A}(V)$, en esta álgebra haya operadores que no están generados localmente en V . Un ejemplo intuitivo se muestra en la figura 1.2, supongamos que tenemos un operador O que se encuentra en la región V , si nuestra teoría posee el operador evolución temporal $U(t)$ entonces podremos hacer evolucionar el operador O a través del tiempo, por lo que podríamos sacarlo de la región V . Se puede notar que el operador evolucionado $O(t)$ también pertenecerá al álgebra siempre y cuando se mantenga en la región causalmente conectada de V , $W = V''$, ya que su evolución solo pudo haber sido afectada por operadores que están dentro de V . Por esta razón, solo nos interesarán las regiones causalmente conectadas a la hora de hablar del álgebra de una región. Estas regiones poseen forma de diamante, como se esquematiza en la figura 1.2 y se definen por ser las regiones que cumplen que $W = W''$. Por lo tanto, por la Eq. 1.19, tenemos que $\mathcal{A}(V) \subseteq \mathcal{A}(W)$, pero también podemos obtener cualquier operador de $\mathcal{A}(W)$ evolucionando los de $\mathcal{A}(V)$, por lo que concluimos que $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(W)$. Esta idea de que el álgebra de V puede ser generada por el álgebra de su región causal V'' recuerda a que el álgebra generada por un conjunto de operadores \mathcal{A} es \mathcal{A}'' . Es preciso notar también que las regiones causales cumplen $W = W''$ como las álgebras cumplen $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

1.5. Estados cíclicos y separadores: Teorema de Reeh-Schlieder

Consideremos que tenemos una teoría cuántica de campos en un espacio de Minkowski d dimensional, un estado de vacío $|\Omega\rangle$ y el álgebra de todos los operadores hermíticos localizados ϕ_α en el espacio-tiempo, donde $\phi_\alpha = \int dx \alpha(x) \phi(x)$ con $\alpha(x)$ una función suave. Llamaremos el sector del vacío \mathcal{H}_0 al sub-espacio de \mathcal{H} generado por aplicar todos los operadores localizados al vacío, es decir, todos los vectores de la forma

$$|\Phi\rangle = \phi_{\alpha_1} \cdots \phi_{\alpha_N} |\Omega\rangle . \quad (1.20)$$

Cabe aclarar que el sector del vacío \mathcal{H}_0 esta siempre en el dominio de un operador ϕ_α . Sea un volumen del espacio-tiempo W , definimos entonces que un estado $|\eta\rangle \in \mathcal{H}_0$ es *cíclico* en el álgebra $\mathcal{A}(W)$ si a partir de actuar con los operadores de esta álgebra sobre el estado generamos todo \mathcal{H}_0 . Definimos también que $|\eta\rangle \in \mathcal{H}_0$ es un estado *separador* en $\mathcal{A}(W)$ si no existe $a \in \mathcal{A}(W)$ tal que $a \neq 0$ y $a|\eta\rangle = 0$.

El teorema de Reeh-Schlieder [10] nos dice que, dado un volumen acotado W del espacio-tiempo, el álgebra local $\mathcal{A}(W)$ es suficiente para poder generar \mathcal{H}_0 a partir del estado de vacío $|\Omega\rangle$. Una demostración amigable de este resultado se da en [11]. Esto nos dice entonces que, para cualquier álgebra local generada por un volumen W del espacio-tiempo, el estado de vacío es cíclico para esta álgebra.

Un corolario interesante que se desprende es que si tenemos una región V espacialmente separada de W entonces sabemos que las álgebras $\mathcal{A}(W)$ y $\mathcal{A}(V)$ conmutan entre sí, entonces si $|\eta\rangle$ es cíclico para $\mathcal{A}(W)$ entonces es separador para $\mathcal{A}(V)$. Esto nos lleva a concluir que, como el estado de vacío es cíclico en ambas álgebras, entonces es cíclico y separador en ambas álgebras.

1.6. Purificación y teoría de Tomita-Takesaki

Supongamos el caso de una álgebra de matrices \mathcal{A} , que es el álgebra de operadores de un espacio de Hilbert \mathcal{H}_1 . La forma más general de la matriz densidad en este espacio es

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| , \quad (1.21)$$

donde los p_i son los autovalores de ρ y $|i\rangle$ los correspondientes autovectores. Para purificar este estado duplicamos nuestro espacio de Hilbert para generar el nuevo espacio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ donde \mathcal{H}_2 es una copia de \mathcal{H}_1 . En este nuevo espacio definimos el estado

$$|\Omega\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i \tilde{i}\rangle . \quad (1.22)$$

Este estado define una matriz densidad pura $\rho_{\mathcal{H}} = |\Omega\rangle \langle \Omega|$. Reduciendo esta matriz densidad al espacio \mathcal{H}_1 obtenemos el estado impuro desde el cual se partió $\rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_2}(\rho_{\mathcal{H}})$. La purificación no es única, la base ortonormal $\{|i \tilde{i}\rangle\}$ es una base arbitraria y diferentes elecciones de esta base dan distintas purificaciones. Un vector $|\Omega\rangle$ en un espacio dado por un producto tensorial de espacios $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ siempre puede ser escrito en la forma (1.22), esta propiedad se llama descomposición de Schmidt.

Si todos los p_i son distintos de 0, entonces podemos definir los siguientes operadores modulares Δ y J

$$\Delta = \sum_{i,j} \frac{p_i}{p_j} |i \tilde{j}\rangle \langle i \tilde{j}| , \quad (1.23)$$

$$J = \sum_{i,j} |i \tilde{j}\rangle \langle j \tilde{i}| * . \quad (1.24)$$

La reflexión modular J es un operador antiunitario que realiza una transposición de las bases junto con el operador $*$ que realiza la conjugación compleja en la base $|i \tilde{j}\rangle$. Notar que es independiente de los autovalores p_i . El operador modular Δ es positivo y puede ser escrito como $\Delta = \rho \otimes \rho^{-1}$. Se tiene que estos operadores cumplen las siguientes identidades

$$\Delta |\Omega\rangle = J |\Omega\rangle = |\Omega\rangle , \quad J \Delta = \Delta^{-1} J , \quad J^\dagger = J^{-1} = J . \quad (1.25)$$

Definimos el operador $S = J \Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}} J$ y este cumple que

$$S a |\Omega\rangle = a^\dagger |\Omega\rangle , \quad a \in \mathcal{A} \quad (1.26)$$

También podemos observar que el operador J nos envía un operador actuando en el

primer factor a otro actuando en el segundo

$$J(O \otimes 1)J = (1 \otimes \tilde{O}) . \quad (1.27)$$

Estos operadores y relaciones son lo que se conoce como teoría de Tomita-Takesaki. El interés de esta teoría está en que puede ser extendida a álgebras de dimensión infinita, como las asociadas a regiones en QFT. Para esto, partimos de un álgebra \mathcal{A} con un estado $|\Omega\rangle$ cíclico y separador y definimos el operador S como aquel que cumple la Eq. (1.26). Por la descomposición polar tenemos que $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$, por lo que de aquí quedan definidos los operadores J y Δ . Se puede demostrar que el operador J nos mapea el álgebra \mathcal{A} en su conmutante

$$J\mathcal{A}J = \mathcal{A}' , \quad (1.28)$$

y también se comprueba que

$$\Delta^{it}\mathcal{A}\Delta^{-it} = \mathcal{A} . \quad (1.29)$$

Una demostración de estas identidades se ofrece en [12].

Capítulo 2

Un Twist simple

“Tengo una cabeza, un sombrero basta y sobra.”

— Facundo Cabral

Sabemos que las transformaciones de simetría de un grupo continuo se pueden escribir como la exponencial de su generador, donde el generador viene dado por $G = \int dx^{d-1} J_0(x)$ con J_0 la componente temporal de la corriente de Noether generada por dicha simetría y d la dimensión del espacio-tiempo. Una de las maneras más simples con las que se puede generar un twist es modificando el generador de la simetría. La forma más intuitiva de lograrlo es la de multiplicar la corriente de Noether por una función $\alpha(x)$ tal que dentro de la región donde se quiere que actúe el twist valga 1 y fuera de esta valga 0.

Sea A la región de interés y $\alpha(x)$ una función suave y de soporte compacto en A , entonces el generador viene dado por

$$G^A = \int dx^{d-1} \alpha(x) J_0(x) . \quad (2.1)$$

Luego, exponenciando este generador, obtendremos el operador que aplica la simetría deseada en la región de interés

$$\tau_A(s) = e^{-isG^A} . \quad (2.2)$$

En este capítulo mostraremos como actúa un twist construido a partir del esmerero del Hamiltoniano de la Eq. (1.12) con una función $\alpha(x)$ con soporte acotado sobre una región A .

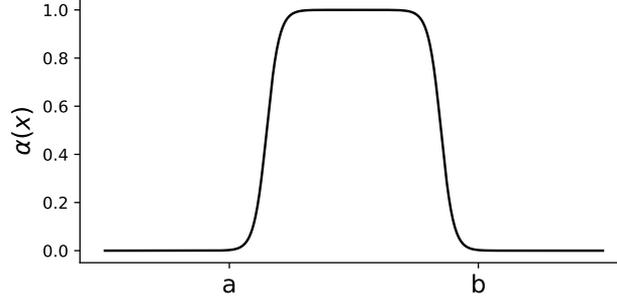


Figura 2.1: Gráfico cualitativo de la función $\alpha(x)$ con $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$

2.1. Twist de evolución

Vamos a calcular la forma explícita de un twist para el caso de una traslación temporal del campo fermiónico no masivo. Sabemos que el Hamiltoniano es el generador de la evolución temporal, este viene dado por

$$H = \frac{i}{2} \int dx : \psi(x) \partial \psi(x) : . \quad (2.3)$$

Por lo tanto, multiplicando por una función $\alpha(x)$ suave y de soporte compacto en la región de interés $A = (a, b)$ (Ver ejemplo en la Fig. 2.1), nos queda el generador del twist

$$H^A = \frac{i}{2} \int dx \alpha(x) : \psi(x) \partial \psi(x) : . \quad (2.4)$$

Entonces, nuestro operador de twist viene dado por

$$\tau_A(t) = e^{-iH^A t} . \quad (2.5)$$

Sea el operador de campo $\psi(x)$, este transforma ante el twist como

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tau_A^\dagger(t) \psi(x) \tau_A(t) . \quad (2.6)$$

Derivando $\tilde{\psi}(x, t)$ con respecto al parámetro t obtenemos una ecuación diferencial que nos ayudara a encontrar una forma explícita de $\tilde{\psi}(x, t)$ en función de los operadores de campo.

$$\frac{d\tilde{\psi}(x, t)}{dt} = e^{iH^A t} [iH^A \psi(x) - i\psi(x)H^A] e^{-iH^A t} = i e^{iH^A t} [H^A, \psi(x)] e^{-iH^A t} , \quad (2.7)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el conmutador convencional para operadores. Conocemos la forma explícita de H^A en función de $\psi(x)$, por lo que podemos calcular explícitamente $[H^A, \psi(x)]$.

$$[H^A, \psi(x)] = \frac{i}{2} \int dy \alpha(y) [\psi(y)\partial\psi(y), \psi(x)] , \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} [\psi(y)\partial\psi(y), \psi(x)] &= \psi(y) \{ \partial\psi(y), \psi(x) \} - \{ \psi(y), \psi(x) \} \partial\psi(y) \\ &= \delta'(y-x)\psi(y) - \delta(y-x)\partial\psi(y) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Recordando que $\int dx \delta'(x)f(x) = -\int dx \delta(x)f'(x)$ nos queda la siguiente expresión para el conmutador

$$\begin{aligned} [H^A, \psi(x)] &= \frac{i}{2} \int dy \alpha(y) (\delta'(y-x)\psi(y) - \delta(y-x)\partial\psi(y)) \\ &= \frac{i}{2} \int dy (\delta'(y-x)\alpha(y)\psi(y) - \delta(y-x)\alpha(y)\partial\psi(y)) \\ &= -\frac{i}{2} \int dy \delta(x-y) (\alpha'(y)\psi(y) + 2\alpha(y)\partial\psi(y)) \\ &= -i \left(\alpha(x)\partial\psi(x) + \frac{1}{2}\alpha'(x)\psi(x) \right) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reemplazando el conmutador en la Eq. (2.7) obtenemos

$$\frac{d\tilde{\psi}(x, t)}{dt} = e^{iH^A t} \left(\alpha(x)\partial\psi(x) + \frac{1}{2}\alpha'(x)\psi(x) \right) e^{-iH^A t} , \quad (2.11)$$

y finalmente

$$\frac{d\tilde{\psi}(x, t)}{dt} = \alpha(x)\partial_x\tilde{\psi}(x, t) + \frac{1}{2}\alpha'(x)\tilde{\psi}(x, t) . \quad (2.12)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial con el dato inicial $\tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x)$ podremos obtener una expresión explícita de este operador en función de $\psi(x)$.

2.2. Análisis cualitativo del comportamiento de $\tilde{\psi}(x, t)$

A partir de la ecuación diferencial (2.12) ya podemos observar el tipo de comportamiento que tendrá la solución, sin obtener una forma explícita de ella. Supongamos primero que nos encontramos fuera de la región de interés, es decir $x \notin A$. Esto implica que $\alpha(x) = 0$, debido a esto, la ecuación diferencial se reduce a $\frac{d\tilde{\psi}(x, t)}{dt} = 0$, lo que nos da como solución $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x)$. Por lo tanto, el twist actúa como es de esperar fuera de la región A .

Ahora supongamos que nos encontramos dentro de A , pero lejos de los bordes, de tal manera que $\alpha(x) = 1$. Entonces, como $\alpha'(x) = 0$, nos queda que

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial x} . \quad (2.13)$$

La solución a esta ecuación es $\tilde{\psi}(x, t) = f(x + t)$, y por la condición inicial obtenemos $\tilde{\psi}(x, t) = \psi(x + t)$. Por lo tanto, dentro de la región A , el operador $\psi(x)$ evoluciona normalmente, como si el operador evolución no hubiese sido modificado.

Cerca de los bordes este operador evolucionará de una manera que dependerá de la función $\alpha(x)$ escogida. Lo que si podemos dilucidar es que el término $\alpha(x)\partial_x \tilde{\psi}(x, t)$ nos indica que, como $\alpha(x) > 0$, entonces al aumentar t el operador $\psi(x)$ se trasladará hacia valores de x más grandes. El término $\frac{1}{2}\alpha'(x)\tilde{\psi}(x, t)$ no es tan fácil de vislumbrar, pero igualando este a $\frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial t}$ vemos que afecta en la amplitud de del operador $\psi(x)$.

En consecuencia, observamos que definir un operador como el de la Eq. (2.2) a partir de una función $\alpha(x)$ suave y de soporte compacto en A nos genera un operador que aplica la transformación de simetría deseada (en este caso la evolución temporal) en la región de interés y fuera de ella no realiza ninguna acción. De manera que hemos definido un twist, uno de los más simples posibles.

2.3. Solución exacta para $\tilde{\psi}(x, t)$

Sea $x \in A$ tal que $\alpha(x) \neq 0$, entonces podemos definir el campo auxiliar $\phi(x, t)$ de tal manera que $\tilde{\psi}(x, t) = \frac{\phi(x, t)}{\sqrt{\alpha(x)}}$. Notamos que

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} - \frac{1}{2} \frac{\phi(x, t)}{(\alpha(x))^{\frac{3}{2}}} \alpha'(x) . \quad (2.14)$$

Multiplicando por $\alpha(x)$ en ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha(x) \frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \frac{\alpha(x)}{\sqrt{\alpha(x)}} - \frac{1}{2} \frac{\phi(x, t)}{\sqrt{\alpha(x)}} \alpha'(x) \\ &= \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \frac{\alpha(x)}{\sqrt{\alpha(x)}} - \frac{1}{2} \alpha'(x) \tilde{\psi}(x, t) . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos reconocer el término $\frac{1}{2}\alpha'(x)\tilde{\psi}(x, t)$ que también aparece en (2.12), por lo tanto reemplazando (2.15) en (2.12) y también tomando la derivada con respecto a t

de $\tilde{\psi}(x, t) = \frac{\phi(x, t)}{\sqrt{\alpha(x)}}$ nos queda que

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \alpha(x) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} . \quad (2.16)$$

La solución a esta ecuación viene dada por $\phi(x, t) = f(t + \int_{x_0}^x \frac{1}{\alpha(s)} ds)$, donde $f(x)$ es un operador arbitrario y x_0 es un punto arbitrario dentro de A . Llamando

$$g(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\alpha(s)} ds , \quad (2.17)$$

la solución general es

$$\tilde{\psi}(x, t) = \frac{f(t + g(x))}{\sqrt{\alpha(x)}} . \quad (2.18)$$

Imponiendo la condición inicial $\tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x)$ nos queda que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x) &= \frac{f(g(x))}{\sqrt{\alpha(x)}} \\ \Rightarrow f(g(x)) &= \psi(x) \sqrt{\alpha(x)} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Llamando $u = g(x)$ y usando el hecho de que $g(x)$ es una función invertible obtenemos que ¹

$$f(u) = \psi(g^{-1}(u)) \sqrt{\alpha(g^{-1}(u))} . \quad (2.20)$$

Reemplazando esto en (2.18) nos queda que la solución general que cumple la condición inicial dada es

$$\tilde{\psi}(x, t) = \psi(g^{-1}(t + g(x))) \sqrt{\frac{\alpha(g^{-1}(t + g(x)))}{\alpha(x)}} . \quad (2.21)$$

Esta solución solo tiene sentido dentro de A donde $\alpha(x) \neq 0$.

Ya sabemos que la solución para $x \notin A$ es $\tilde{\psi}(x, t) = \psi(x)$, por lo que queremos observar si esta solución empalma bien en los bordes de A con (2.21). Sea $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$, si definimos $g(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^x \frac{1}{\alpha(s)} ds$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$. También tenemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g^{-1}(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g^{-1}(x) = b$, y esto nos lleva a que

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} \tilde{\psi}(x, t) = \psi(a) , \quad \lim_{x \rightarrow b, x \in A} \tilde{\psi}(x, t) = \psi(b) . \quad (2.22)$$

Por lo tanto tenemos que las soluciones dentro y fuera de A empalman bien en la frontera de este.

De la ecuación Eq. (2.21) podemos ver que la nueva posición del $\psi(x)$ después de

¹Por el teorema de la función inversa, sabemos que $g(x)$ es invertible dentro de A ya que $g'(x) = \frac{1}{\alpha(x)} > 0$

aplicar el twist es

$$x(x_0, t) = g^{-1}(t + g(x_0)) , \quad (2.23)$$

donde x_0 es la posición inicial del operador y t el tiempo transcurrido. Podemos comprobar que la velocidad del movimiento viene dada

$$\dot{x}(x_0, t) = \alpha(x(x_0, t)) . \quad (2.24)$$

Esto nos da una mejor intuición de cómo se comporta la evolución del operador cerca de los bordes. Si nuestro x_0 está cerca del borde izquierdo, entonces se verá acelerado y se moverá hacia la derecha, mientras que los que estén acercándose al borde derecho se verán frenados hasta que lleguen al borde. De la Eq. (2.23) se puede deducir que el tiempo t que transcurre al moverse desde la posición x_0 hasta una x viene dado por

$$t = \int_{x_0}^x \frac{1}{\alpha(s)} ds . \quad (2.25)$$

Es interesante notar que, dependiendo de cómo sea la divergencia de $\frac{1}{\alpha(x)}$ en $x \rightarrow b$, el tiempo que necesita un operador en la posición x_0 para alcanzar el borde b puede ser finito o infinito. Se puede comprobar que, si el tiempo que toma es finito, entonces la función $\alpha(x)$ no es lo suficientemente buena como para que (2.5) defina un operador. A partir de un $\alpha(x)$ de prueba dado (ver apéndice B), similar al mostrado en la figura 2.1 especializando para el intervalo $(-1, 1)$, se graficó la evolución de $x(x_0, t)$.

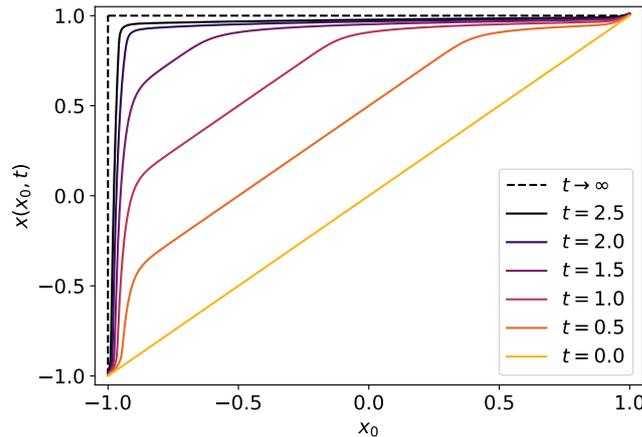


Figura 2.2: Gráfico de las posiciones $x(x_0, t)$ en función de su posición inicial x_0 y para distintos tiempos t . La línea punteada representa el límite en el que $t \rightarrow \infty$.

Se puede observar en la figura 2.2 cómo todos los operadores se van acumulando en el borde derecho del intervalo y que también su evolución se ve desacelerada a medida que se encuentra más cerca del borde derecho, según como es de esperar por la Eq. (2.24).

También se puede calcular el conmutador para t iguales y se verifica que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\psi}(x_0, t), \tilde{\psi}^\dagger(y_0, t)\} &= \sqrt{\frac{\alpha(x(x_0, t))\alpha(x(y_0, t))}{\alpha(x(x_0))\alpha(x(y_0))}} \delta(x(x_0, t) - x(y_0, t)) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha(x(x_0, t))\alpha(x(y_0, t))}{\alpha(x(x_0))\alpha(x(y_0))}} \frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x(x_0, t))} \delta(x_0 - y_0) \\ &= \delta(x_0 - y_0), \quad x_0, y_0 \in A. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Capítulo 3

Twist de Buchholz-Doplicher-Longo

En este capítulo nos enfocaremos en estudiar un twist construido por Detlev Buchholz, Sergio Doplicher y Roberto Longo en su trabajo [1], el cual presenta ciertas propiedades de interés.

3.1. Definición

Sean A y B dos regiones diamantes del espacio-tiempo a las cuales les corresponden las álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente. Supongamos que estas dos regiones están *estrictamente* espacialmente separadas, esto quiere decir que entre cualquier punto de A y cualquier punto de B siempre existe una distancia positiva, y que existe un estado cíclico y separador para $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Con estos ingredientes, la propiedad de *split* nos dice que existen factores \mathcal{N} y \mathcal{N}' de tipo I tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}'$. Un factor tipo I es el álgebra de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert. Sea ha demostrado que la propiedad de split es válida en teorías cuánticas de campos bajo condiciones muy generales [13, 14]. Una descripción equivalente de la propiedad de split es que los factores \mathcal{N} y \mathcal{N}' son el álgebra de operadores actuando en dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{N}'}$ tales que el espacio de Hilbert completo se puede descomponer en

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{N}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{N}'}, \quad (3.1)$$

por lo tanto, el álgebra \mathcal{A} actúa en el factor $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ y el álgebra \mathcal{B} sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{N}'}$.

El factor \mathcal{N} en la propiedad de split no es único. Existe una construcción general dada por Doplicher y Longo [4] en la que se parte de que se tiene un estado $|\Omega\rangle$ (en QFT es natural utilizar el estado de vacío) que es cíclico con respecto a $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ e induce la conjugación modular $J_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ con respecto a estas álgebras. Los factores de split se

construyen como

$$\mathcal{N} = \mathcal{A} \vee (J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \mathcal{A} J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}) , \quad \mathcal{N}' = \mathcal{B} \vee (J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \mathcal{B} J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}) . \quad (3.2)$$

Estos factores de split cumplen que $J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \mathcal{N} J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} = \mathcal{N}$, $J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \mathcal{N}' J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} = \mathcal{N}'$ y quedan totalmente definidos por esta propiedad.

Sea el vector $|\eta\rangle = |\Omega\rangle_{\mathcal{N}} \otimes |\Omega\rangle_{\mathcal{N}'}$ donde los estados $|\Omega\rangle_{\mathcal{N}}$ y $|\Omega\rangle_{\mathcal{N}'}$ son los estados de vacío de cada factor tales que si calculamos la matriz densidad reducida sobre las álgebras \mathcal{A} o \mathcal{B} , según corresponda, nos induce la misma matriz densidad que $|\Omega\rangle$ restringida a estas álgebras. Otra manera de decirlo es que $|\eta\rangle$ es una purificación del estado de vacío de cada factor. Se puede demostrar que $|\Omega\rangle_{\mathcal{N}}$ y $|\Omega\rangle_{\mathcal{N}'}$ son cíclicos para las álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} , respectivamente, y esto lleva a concluir que $|\eta\rangle$ es cíclico también. Se define $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tal que si $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$ entonces

$$Wab|\eta\rangle = a|\Omega\rangle \otimes b|\Omega\rangle . \quad (3.3)$$

Es posible demostrar que W es un isomorfismo, ya que $|\eta\rangle$ es cíclico en $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ y $|\Omega\rangle_{\mathcal{N}}$ y $|\Omega\rangle_{\mathcal{N}'}$ lo son para \mathcal{A} y \mathcal{B} . De esta definición se puede obtener que

$$\begin{aligned} WaW^\dagger &= a \otimes 1, & WbW^\dagger &= 1 \otimes b, & a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} \\ WJ_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}W^\dagger &= J_{\mathcal{A}} \otimes J_{\mathcal{B}} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Será útil también ver las propiedades inversas. Partiendo de (3.4) tenemos que se cumple

$$\begin{aligned} W^\dagger(a \otimes 1)W &= a, & W^\dagger(1 \otimes b)W &= b, & a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} \\ W^\dagger(J_{\mathcal{A}} \otimes J_{\mathcal{B}})W &= J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

También se puede deducir una propiedad adicional que será de gran utilidad. Sea un operador $O \in \mathcal{A}'$, notando que $J_{\mathcal{A}}OJ_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ y teniendo en cuenta que $J_{\mathcal{A}}^2 = 1$, $J_{\mathcal{B}}^2 = 1$, se llega a

$$\begin{aligned} W^\dagger(O \otimes 1)W &= W^\dagger(J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}} O J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}} \otimes J_{\mathcal{B}} J_{\mathcal{B}})W \\ &= W^\dagger(J_{\mathcal{A}} \otimes J_{\mathcal{B}})W W^\dagger(J_{\mathcal{A}} O J_{\mathcal{A}} \otimes 1)WW^\dagger(J_{\mathcal{A}} \otimes J_{\mathcal{B}})W \\ &= J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} J_{\mathcal{A}} O J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con estos ingredientes ya podemos construir nuestro twist. Dado un operador unitario $U(g)$ que aplica la transformación g definimos el twist que aplica la transformación solo sobre la región A como

$$\tau_A(g) = W^\dagger(U(g) \otimes 1)W . \quad (3.7)$$

Veamos que este twist cumple con lo buscado. Sea $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ y supongamos que $U(g) a U^\dagger(g) \in \mathcal{A}$, usando las propiedades (3.4) y (3.5) se muestra que

$$\begin{aligned}
\tau_A(g) a \tau_A(g)^\dagger &= W^\dagger (U(g) \otimes 1) W a W^\dagger (U^\dagger(g) \otimes 1) W \\
&= W^\dagger (U(g) \otimes 1) (a \otimes 1) (U^\dagger(g) \otimes 1) W \\
&= W^\dagger (U(g) a U^\dagger(g) \otimes 1) W \\
&= U(g) a U^\dagger(g),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\tau_A(g) b \tau_A(g)^\dagger &= W^\dagger (U(g) \otimes 1) W b W^\dagger (U^\dagger(g) \otimes 1) W \\
&= W^\dagger (U(g) \otimes 1) (1 \otimes b) (U^\dagger(g) \otimes 1) W \\
&= W^\dagger (1 \otimes b) W \\
&= b.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Por lo que se comprueba que el twist solo actúa sobre operadores en la región A y deja invariantes a los de la región B . La definición del twist que actúa sobre B es análoga, solo hace falta cambiar el factor en donde actúa $U(g)$. La primera pregunta que surge de esta definición es que sucede si la transformación nos saca afuera del álgebra a nuestro operador. Trataremos esta pregunta para el caso particular en el que la transformación me lleva el operador al álgebra conmutante $U(g) a U^\dagger(g) \in \mathcal{A}'$. Este es el caso de interés en este trabajo, por ejemplo, si aplicamos un twist de traslación espacial que nos saca al operador fuera del álgebra significa que este se encuentra separado espacialmente del álgebra y por lo tanto se encuentra en su conmutante. Como actúa el twist en este caso se resuelve fácilmente utilizando la Eq. (3.6)

$$\begin{aligned}
\tau_A(g) a \tau_A(g)^\dagger &= W^\dagger (U(g) a U^\dagger(g) \otimes 1) W \\
&= J_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} J_{\mathcal{A}} U(g) a U^\dagger(g) J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Lo que nos indica que si la transformación g nos lleva el operador al álgebra conmutante entonces el twist nos lo lleva a $J_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \mathcal{A} J_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \subset (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})'$, por lo tanto permanece dentro del factor \mathcal{N} .

Capítulo 4

Descifrando el operador J

El entendimiento del operador conjugación modular J y cómo este actúa sobre el álgebra de operadores fermiónicos es fundamental para poder avanzar en nuestro estudio de los twists. La acción explícita de este operador sobre el álgebra de fermiones no masivos en 1+1 ya fue calculada y estudiada en [15, 16]. En este capítulo mostraremos una nueva forma de deducir la acción de este operador sobre el álgebra mencionada y daremos ejemplos concretos de uso para regiones multi-componentes de 1 y 2 intervalos.

4.1. ¿Cómo actúa el operador J ?

Supongamos que tenemos un espacio de Hilbert \mathcal{H} , la región $A = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ formada por intervalos disjuntos de la recta real y que esta región nos genera el álgebra local \mathcal{A} con un estado de vacío $|\Omega\rangle$ cíclico y separador. De estos ingredientes emerge el operador reflexión modular J , como se vio en la sección 1.6.

Sea $\psi(x)$ el operador de campo fermiónico real (Majorana), en [17] se define el operador signo fermiónico Γ que cumple las siguientes propiedades

$$\Gamma^2 = 1, \quad \Gamma^\dagger = \Gamma, \quad \Gamma\psi(x)\Gamma = -\psi(x), \quad (4.1)$$

y a partir de este se define el operador Z como

$$Z = \frac{1 - i\Gamma}{1 - i}, \quad (4.2)$$

el cual cumple que

$$ZZ^\dagger = 1, \quad Z\psi(x)Z^\dagger = -i\Gamma\psi(x), \quad Z\psi(x)\psi(y)Z^\dagger = \psi(x)\psi(y). \quad (4.3)$$

También se verifica que

$$\Gamma |\Omega\rangle = Z |\Omega\rangle = |\Omega\rangle, \quad \Gamma J \Gamma = J, \quad J Z = Z^\dagger J. \quad (4.4)$$

El objetivo de definir estos operadores radica en que el álgebra $J\mathcal{A}J$ es un álgebra que conmuta con \mathcal{A} , pero como estamos en el caso de operadores fermiónicos, nosotros necesitamos un álgebra que anticonmute para operadores impares y que conmute para operadores pares en el número fermiónico, a esto se lo suele llamar *graded commutativity*. Por lo tanto, se define el operador

$$\tilde{J} = Z J, \quad (4.5)$$

el cual es antiunitario y $\tilde{J}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$. Este operador es el equivalente al J de la teoría de Tomita-Takesaki para álgebras fermiónicas. Queremos notar que, en la construcción del twist de Buchholz-Doplicher-Longo en el capítulo 3 esta modificación puede ser ignorada, ya que como vemos en la Eq. (3.6) se aplica el operador conjugación modular dos veces, lo que elimina la necesidad de utilizar el operador Z en su definición. Sin embargo, por la claridad de la exposición en este capítulo encontramos útil mantener esta modificación.

Utilizando este operador definimos

$$\tilde{\psi}(y) = \tilde{J}\psi(y)\tilde{J}^\dagger. \quad (4.6)$$

De esta definición se deduce que el álgebra formada por los operadores $\psi(y)$ y $\tilde{\psi}(y)$ con $y \in A$ es un álgebra anti-conmutativa completa en el espacio \mathcal{H} . Queremos investigar la expresión de $\tilde{\psi}(y)$ en función de los $\psi(y)$ del espacio completo. Por ser una teoría gaussiana el operador \tilde{J} transforma linealmente los $\psi(y)$ (como el flujo modular), por lo tanto $\tilde{\psi}(y)$ se puede escribir como

$$\tilde{\psi}(y) = \int ds K(s, y)\psi(s), \quad (4.7)$$

donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Calculando el anticonmutador $\{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\}$ nos queda que

$$\{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} = K(x, y). \quad (4.8)$$

Teniendo en cuenta que $\{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} = \langle \Omega | \{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} | \Omega \rangle$, tenemos que

$$\langle \Omega | \{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} | \Omega \rangle = (\langle \Omega | \psi(x) \tilde{J} \psi(y) \tilde{J}^\dagger | \Omega \rangle + \langle \Omega | \tilde{J} \psi(y) \tilde{J}^\dagger \psi(x) | \Omega \rangle). \quad (4.9)$$

Utilizando que para los operadores antiunitarios se cumple $(v, Jw) = (J^\dagger v, w)^*$ donde (\cdot, \cdot) refiere al producto vectorial en el espacio de Hilbert, que “*” refiere a la conjugación compleja y que $\tilde{J}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$, nos queda

$$\{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} = \langle \Omega | \psi(x) \tilde{J} \psi(y) | \Omega \rangle + \langle \Omega | \psi(y) \tilde{J}^\dagger \psi(x) | \Omega \rangle^* . \quad (4.10)$$

Manipulando estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \psi(x) \tilde{J} \psi(y) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \psi(x) Z J \psi(y) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \psi(x) J Z^\dagger \psi(y) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | \psi(x) J Z^\dagger \psi(y) Z Z^\dagger | \Omega \rangle = \langle \Omega | \psi(x) J i \Gamma \psi(y) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | \psi(x) J i \Gamma \psi(y) \Gamma \Gamma | \Omega \rangle = \langle \Omega | \psi(x) J (-i) \psi(y) | \Omega \rangle \\ &= i \langle \Omega | \psi(x) J \psi(y) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \psi(y) \tilde{J}^\dagger \psi(x) | \Omega \rangle^* &= \langle \Omega | \psi(y) J Z^\dagger \psi(x) | \Omega \rangle^* = \langle \Omega | \psi(y) Z J \psi(x) | \Omega \rangle^* \\ &= \langle \Omega | Z Z^\dagger \psi(y) Z J \psi(x) | \Omega \rangle^* = \langle \Omega | i \Gamma \psi(y) J \psi(x) | \Omega \rangle^* \\ &= (-i) \langle \Omega | \psi(y) J \psi(x) | \Omega \rangle^* = (-i) \langle \Omega | \psi(x) J \psi(y) | \Omega \rangle^* . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por lo que nos queda que

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} &= i [\langle \Omega | \psi(x) J \psi(y) | \Omega \rangle - \langle \Omega | \psi(x) J \psi(y) | \Omega \rangle^*] \\ &= -2 \operatorname{Im}(\langle \Omega | \psi(x) J \psi(y) | \Omega \rangle) = -2 \operatorname{Im}(\langle \Omega | \psi(x) \Delta^{\frac{1}{2}} \psi(y) | \Omega \rangle) , \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde en la última igualdad se usó que $J = \Delta^{\frac{1}{2}} S$ y la definición de S . Es útil la siguiente fórmula calculada en [18]

$$\langle \Omega | \psi(x) \Delta^{it} \psi(y) | \Omega \rangle = \frac{1}{2\pi i(x-y)} \frac{\Pi_b(x)\Pi_a(y) - \Pi_b(y)\Pi_a(x)}{e^{\pi t}\Pi_b(x)\Pi_a(y) - e^{-\pi t}\Pi_b(y)\Pi_a(x)} , \quad (4.14)$$

donde

$$\Pi_a(x) = \prod_{i=1}^N (x - a_i) , \quad \Pi_b(x) = \prod_{i=1}^N (x - b_i) , \quad (4.15)$$

con (a_i, b_i) los extremos de los intervalos que componen la región A . Si $x \in A$ y $y \notin A$ entonces se puede extender la analiticidad de la función en la región $-\frac{1}{2} < \operatorname{Im}(t) < \frac{1}{2}$. Si evaluamos $t = -\frac{i}{2}$ encontramos que esta función tiene divergencias en los valores de x e y tales que $\Pi_b(x)\Pi_a(y) + \Pi_b(y)\Pi_a(x) = 0$. Como $t = -\frac{i}{2}$ es el borde del dominio de analiticidad, para ver la naturaleza de la divergencia vamos a tomar $t = -i\frac{s}{2}$ con $s \rightarrow 1$ y acercarnos a esta desde dentro del dominio de analiticidad. Teniendo esto en cuenta nos queda que

$$e^{i\frac{\pi}{2}s} \approx i - \frac{\pi}{2}(s-1), \quad e^{-i\frac{\pi}{2}s} \approx -i - \frac{\pi}{2}(s-1) \quad (\text{si } s \rightarrow 1) . \quad (4.16)$$

Reemplazando nos queda

$$\frac{1}{e^{\pi t} \Pi_b(x) \Pi_a(y) - e^{-\pi t} \Pi_b(y) \Pi_a(x)} = \frac{1}{i (\Pi_b(x) \Pi_a(y) + \Pi_b(y) \Pi_a(x)) - \frac{\pi}{2} (\Pi_b(x) \Pi_a(y) - \Pi_b(y) \Pi_a(x)) (s-1)} \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{i (\Pi_b(x) \Pi_a(y) - \Pi_b(y) \Pi_a(x))} \frac{1}{\frac{(\Pi_b(x) \Pi_a(y) + \Pi_b(y) \Pi_a(x))}{(\Pi_b(x) \Pi_a(y) - \Pi_b(y) \Pi_a(x))} - i \frac{\pi}{2} (1-s)} .$$

Usando el límite

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - iy} = \frac{1}{x} + i\pi\delta(x) , \quad (4.18)$$

llegamos a que

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{i}{2}} \langle \Omega | \psi(x) \Delta^{it} \psi(y) | \Omega \rangle = \frac{-1}{2\pi(x-y)} \left[\frac{1}{G(x,y)} + i\pi\delta(G(x,y)) \right] , \quad (4.19)$$

con

$$G(x,y) = \frac{\Pi_b(x) \Pi_a(y) + \Pi_b(y) \Pi_a(x)}{\Pi_b(x) \Pi_a(y) - \Pi_b(y) \Pi_a(x)} . \quad (4.20)$$

Vemos que posee una divergencia tipo delta de Dirac en el caso de que $G(x,y) = 0$ que se puede demostrar que son los mismos casos que $\Pi_b(x) \Pi_a(y) + \Pi_b(y) \Pi_a(x) = 0$. Luego analizaremos cómo son las soluciones a esta ecuación.

Por lo tanto, podemos obtener una expresión explícita para el anticonmutador

$$\{\psi(x), \tilde{\psi}(y)\} = \frac{1}{(x-y)} \delta(G(x,y)) \quad (4.21)$$

Lo que nos revela que $\tilde{\psi}(x)$ no posee una distribución continua sobre la recta, sino que es una combinación lineal de una cierta cantidad finita de operadores ubicados en los puntos donde, dado un $y \in A$, x cumple que $G(x,y) = 0$. Analizando las soluciones de esta igualdad, se puede encontrar que solo existen N soluciones $s_j(y)$ tales que

$$G(s_j(y), y) = 0 , \quad (4.22)$$

con $j = 1, \dots, N$, donde N es el número de intervalos de la región multi-componente A y que $s_j(y) \notin A \forall j = 1, \dots, N$.

Entonces, usando que $\delta(f(x)) = \sum_{\{x_j/f(x_j)=0\}} \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j)$, se llega a la siguiente expresión

$$\tilde{\psi}(y) = \sum_{j=1}^N C_j(y) \psi(s_j(y)) , \quad (4.23)$$

donde

$$C_j(y) = \frac{1}{(s_j(y) - y) |\partial_x G(x, y)|_{x=s_j(y)}} . \quad (4.24)$$

Para profundizar más en esta expresión, primero vamos a facilitar la escritura de $G(x, y)$.

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\Pi_b(x)\Pi_a(y) + \Pi_b(y)\Pi_a(x)}{\Pi_b(x)\Pi_a(y) - \Pi_b(y)\Pi_a(x)} = \frac{\frac{\Pi_b(x)}{\Pi_a(x)} \frac{\Pi_a(y)}{\Pi_b(y)} + 1}{\frac{\Pi_b(x)}{\Pi_a(x)} \frac{\Pi_a(y)}{\Pi_b(y)} - 1} \\ &= \frac{\frac{f(y)}{f(x)} + 1}{\frac{f(y)}{f(x)} - 1} = \frac{f(y) + f(x)}{f(y) - f(x)} , \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde se definió

$$f(x) = \frac{\Pi_a(x)}{\Pi_b(x)} . \quad (4.26)$$

Ahora derivamos la expresión

$$\partial_x G(x, y) = \left[\frac{f'(x)}{f(y) - f(x)} + \frac{f(y) + f(x)}{(f(y) - f(x))^2} f'(x) \right] , \quad (4.27)$$

evaluamos en $x = s_j(y)$ y recordamos que $G(s_j(y), y) = 0$ implica la siguiente igualdad $f(s_j(y)) + f(y) = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_x G(s_j(y), y) &= -\frac{1}{2} \frac{f'(s_j(y))}{f(s_j(y))} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_x (\ln(-f(x))) |_{s_j(y)} \\ &= -\frac{1}{2} \omega'(s_j(y)) . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Donde $\omega(x) = \ln(-f(x)) = \ln\left(-\frac{\Pi_a(x)}{\Pi_b(x)}\right)$ es una función que aparece repetidamente en el contexto de la teoría modular. Nótese que el signo menos dentro del logaritmo en la definición viene de que si se evalúa $f(x)$ en un x que este dentro de los intervalos de la región A , entonces $f(x) < 0$ y por lo tanto $\omega(x)$ es real. En nuestra deducción terminamos evaluando $\omega'(x)$ en el punto $s_j(x)$, que está fuera de la región A y por lo tanto $f(x) > 0$. Por lo que para definir bien $\omega(x)$ tenemos que tomar una rama del logaritmo que contenga a los reales negativos. Se puede demostrar que $\omega'(s_j(x)) < 0$ si $x \in A$, por lo tanto $|\partial_x G(s_j(y), y)| = \partial_x G(s_j(y), y)$. Reemplazando en Eq. (4.24)

$$C_j(y) = \frac{2}{\omega'(s_j(y))(y - s_j(y))} = \frac{2}{(y - s_j(y))} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_j(y) - a_i} - \frac{1}{s_j(y) - b_i} \right)^{-1} , \quad (4.29)$$

y por lo tanto la fórmula para $\tilde{\psi}(x)$ nos queda como

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{2}{\omega'(s_j(x))(x - s_j(x))} \psi(s_j(x)) . \quad (4.30)$$

Si comparamos con la expresión obtenida en [15], vemos que obtenemos el mismo resultado (para comparar con este trabajo hay que tener en cuenta que allí se define Z como si fuera el Z^\dagger de este trabajo y también que allí se utiliza un fermión complejo y en este trabajo un fermión real).

Es interesante notar que si nos planteamos el problema de conseguir la conjugación modular para A' entonces terminamos obteniendo las mismas expresiones para $s_j(x)$ y $C_j(x)$, ya que el cambiar de $A \rightarrow A'$ implica cambiar $f(x) \rightarrow -\frac{1}{f(x)}$ y este cambio deja invariante las expresiones mencionadas.

4.2. Propiedades de las soluciones $G(x, y) = 0$

De la ecuación $G(x, y) = 0$ sabemos, por el teorema de la función implícita, que existe una función $s_j(x)$ tal que $G(x, s_j(x)) = 0$ para todo x perteneciente a un dominio donde $\partial_x G(x, y) \neq 0$. La Eq. (4.25) nos da una condición más simple para encontrar la función $s_j(x)$, esta es

$$f(x) + f(s_j(x)) = 0 . \quad (4.31)$$

Esta condición es la central para el cálculo de las funciones $s_j(x)$ y será utilizada extensamente en todo el trabajo. De esta igualdad podemos deducir varias propiedades que poseen las soluciones $s_j(x)$. Estudiemos más en detalle la función $f(x) = \frac{\Pi_a(x)}{\Pi_b(x)}$, sea $A = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$ la región multicomponente. Se puede observar que

$$\begin{aligned} \text{si } x \in A &\Rightarrow f(x) < 0 , \\ \text{si } x \notin A &\Rightarrow f(x) > 0 . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Entonces dado $x \in A \Rightarrow s_j(x) \notin A$ ya que $f(s_j(x)) = -f(x)$. Estos nos indica que los $\tilde{\psi}(x)$ son una combinación lineal de $\psi(x)$ que no pertenecen a la región A . Esto era de esperarse, ya que $\tilde{\psi}(x) \in \mathcal{A}(A)'$.

También es posible probar que solo existen N soluciones $s_j(x) \in \mathbb{R}$, donde N es el número de intervalos que conforman la región A y que esas son todas las posibles soluciones. Que existen N soluciones viene de analizar cómo se comporta la función $f(x)$ en los intervalos (a_i, b_i) . Sea $x \in (a_i, b_i)$, como $f(x) < 0$, $f(a_i) = 0$, $f(b_i) = -\infty$ y $f(x)$ continua, entonces $f((a_i, b_i)) = \mathbb{R}^-$ para $i = 1, \dots, N$, es decir, la imagen de

cada intervalo cubre toda la recta real negativa. Ahora sea $x \notin A$, supongamos el caso en el que $x \in (b_j, a_{j+1})$ como $f(x) > 0$, $f(b_j) = \infty$, $f(a_{j+1}) = 0$ y $f(x)$ continua, entonces $f((b_j, a_{j+1})) = \mathbb{R}^+$. En el caso de que $x \in (-\infty, a_1)$ ó $x \in (b_N, \infty)$ tenemos que $f((-\infty, a_1) \cup (b_N, \infty)) = \mathbb{R}^+$. De aquí podemos deducir que dado un $x \in A$, por cada uno de los $N - 1$ intervalos (b_j, a_{j+1}) existe un s_j tal que $f(s_j(x)) + f(x) = 0$, más otra solución del intervalo $(-\infty, a_1) \cup (b_N, \infty)$. Por lo tanto, demostramos que existen N soluciones $s_j(x)$. Es fácil demostrar que son todas, ya que para un dado x la expresión $\Pi_b(x)\Pi_a(y) + \Pi_b(y)\Pi_a(x)$ es un polinomio de grado N en y , entonces solo existen N posibles soluciones, que son las comentadas anteriormente.

4.3. Distribución de los $\psi(x)$

En las secciones 4.1 y 4.2 vimos que el operador \tilde{J} nos transforma al operador $\psi(x)$ en una suma discreta de operadores localizados, uno por cada región que compone a A^C , la región complementaria a A . Ahora es natural preguntarse ¿Cómo están distribuidos estos operadores? ¿Cuál es más “relevante” en la descomposición? Para esto vamos a realizar el siguiente análisis.

Calculemos el anticonmutador $\{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)\}$, recordando que \tilde{J} es un operador antiunitario

$$\begin{aligned} \{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)\} &= \tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}(y) + \tilde{\psi}(y)\tilde{\psi}(x) \\ &= \tilde{J}\psi(x)\psi(y)\tilde{J} + \tilde{J}\psi(y)\psi(x)\tilde{J} \\ &= \tilde{J}\{\psi(x), \psi(y)\}\tilde{J} \\ &= \delta(x - y) . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pero también sabemos que $\tilde{\psi}(x) = \sum_{i=1}^N C_i(x) \psi(s_i(x))$, por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)\} &= \sum_{j,i=1}^N C_i(x)C_j(y) \delta(s_i(x) - s_j(y)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{C_i(x)^2}{|s'_i(x)|} \right) \delta(x - y) + \sum_{j,i=1, i \neq j}^N C_i(x)C_j(y) \delta(s_i(x) - s_j(y)) , \end{aligned} \tag{4.34}$$

donde $s'_i(x)$ es la derivada de la función $s_i(x)$. Comparando las ecuaciones (4.33) y (4.34) llegamos a la conclusión de que

$$\sum_{i=1}^N \frac{C_i(x)^2}{|s'_i(x)|} = 1 , \tag{4.35}$$

$$\sum_{j,i=1, i \neq j}^N C_i(x)C_j(y) \delta(s_i(x) - s_j(y)) = 0 . \quad (4.36)$$

De la Eq. (4.35) podemos interpretar a los coeficientes

$$P_i(x) = \frac{|C_i(x)|^2}{|s'_i(x)|} , \quad (4.37)$$

como la proporción en la que aporta el $\psi(s_i(x))$ al campo $\tilde{\psi}(x)$.

Las igualdades (4.35) y (4.36) son de mucha utilidad, ya que nos ayuda a entender cómo se relacionan los coeficientes $C_i(x)$ entre sí y también las soluciones $s_i(x)$.

4.4. Solución para un intervalo

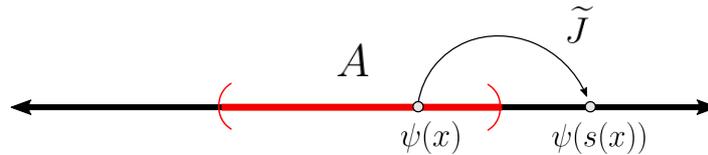


Figura 4.1: Esquema de un intervalo y cómo actúa el operador \tilde{J} sobre el campo $\psi(x)$.

Para el caso de un intervalo $A = (a, b)$ tenemos

$$f(x) = \frac{(x - a)}{(x - b)} , \quad (4.38)$$

imponiendo la condición $f(x) + f(y) = 0$ obtenemos la solución $s(x)$

$$s(x) = \frac{\frac{(a+b)}{2}x - ab}{x - \frac{(a+b)}{2}} . \quad (4.39)$$

Para ganar una mejor intuición de cómo se comporta esta solución podemos ir al caso simétrico $(-a, a)$ sin pérdida de generalidad y obtenemos que $s(x) = \frac{a^2}{x}$. De esta forma se puede observar que $s(x) \notin (-a, a)$ ya que $|x| < a$, por lo tanto, $|s(x)| > a$. Se puede ver que a medida que x se acerca a los bordes, $s(x)$ también lo hace y que si nos vamos al centro del intervalo entonces $s(x) \rightarrow \infty$.

Ahora que obtuvimos $s(x)$ podemos calcular una expresión explícita para la Eq. (4.30).

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{J}\psi(x)\tilde{J} = \frac{b - a}{2x - (a + b)}\psi(s(x)) . \quad (4.40)$$

Podemos ver cómo explícitamente el operador \tilde{J} nos envía un operador $\psi(x) \in \mathcal{A}(A)$ a uno en $\psi(s(x)) \in \mathcal{A}(A)'$ y cómo este se comporta en función de x . Notemos también que se cumple la relación (4.35).

En [19] se obtuvieron los autovectores $u_s^k(x)$ del correlador para una región multi-componente A los cuales forman una base ortonormal completa en esta región. Para el caso de un intervalo los autovectores correspondientes a la región $A = (a, b)$ son

$$u_s(x) = \sqrt{\frac{\omega'(x)}{2\pi}} e^{is\omega(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{b-a}{(x-a)(b-x)}} e^{is\omega(x)}, \quad x \in (a, b), \quad (4.41)$$

donde $\omega(x) = \log(-f(x))$, s es el autovalor correspondiente y se cumple que

$$\int_A u_s(x) u_{s'}^*(x) dx = \delta(s - s'). \quad (4.42)$$

Para la región complementaria $A^C = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ tenemos que los autovectores son

$$v_s(x) = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}'(x)}{2\pi}} e^{is\tilde{\omega}(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{b-a}{(a-x)(b-x)}} e^{is\tilde{\omega}(x)}, \quad x \in A'. \quad (4.43)$$

Donde (4.43) se puede obtener pensando que la región complementaria son dos intervalos $A' = (-m, a) \cup (b, m)$ y se hace tender $m \rightarrow \infty$. De esta manera tenemos que $\tilde{f}(x) = \frac{-1}{f(x)}$ y por lo tanto $\tilde{\omega}(x) = \log(-\tilde{f}(x)) = -\log(f(x))$. Podemos expandir los $\psi(y)$ con $y \in A$ y los $\psi(x)$ con $x \in A'$ como

$$\psi(y) = \int ds \hat{a}_s u_s(y), \quad \psi(x) = \int ds \hat{b}_s v_s(x). \quad (4.44)$$

Por la ecuación (4.40) entonces tenemos cómo transforman los \hat{a}_s con respecto a \tilde{J} y cómo están relacionados los autovectores

$$\begin{aligned} \tilde{J} \hat{a}_s \tilde{J}^\dagger &= \tilde{J} \int_A dy u_s^*(y) \psi(y) \tilde{J}^\dagger \\ &= \int_A dy u_s(y) \tilde{J} \psi(y) \tilde{J}^\dagger \\ &= \int_A dy u_s(y) C(y) \psi(s(y)) \\ &= \int_A dy \int ds' C(y) \hat{b}_{s'} u_s(y) v_{s'}(s(y)). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Notemos que $\tilde{\omega}(s(y)) = -\log(f(s(y))) = -\log(-f(y)) = -\omega(y)$. Por lo que nos queda

que $v_s(s(y))$ toma la forma

$$\begin{aligned}
 v_s(s(y)) &= \sqrt{\frac{\tilde{\omega}'(s(y))}{2\pi}} e^{i s \tilde{\omega}(s(y))} \\
 &= \sqrt{-\frac{\omega'(y)}{2\pi s'(y)}} e^{-i s \omega(y)} \\
 &= \sqrt{-\frac{1}{s'(y)}} u_s^*(y) ,
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

donde es importante notar que $s'(y) < 0$ si $y \in A$, por lo que la raíz es real. Esto nos conduce a que

$$\begin{aligned}
 \tilde{J} a_s \tilde{J}^\dagger &= \int_A dy \int ds' C(y) \hat{b}_{s'} u_s(y) v_{s'}(s(y)) \\
 &= \int_A dy \int ds' \frac{C(y)}{\sqrt{-s'(y)}} \hat{b}_{s'} u_s(y) u_{s'}^*(y) \\
 &= \int_A dy \int ds' \hat{b}_{s'} u_s(y) u_{s'}^*(y) \\
 &= b_s ,
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde se utilizó Eq. (4.37) para reconocer el factor $\frac{C(y)}{\sqrt{-s'(y)}} = \sqrt{P(y)} = 1$. Lo que nos indica que el operador \tilde{J} nos convierte un modo de autovalor s a otro del mismo autovalor en la región complementaria en el caso de un intervalo.

4.5. Solución para dos intervalos

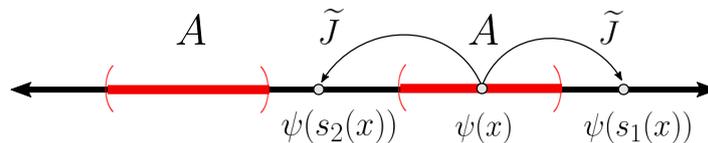


Figura 4.2: Esquema de dos intervalos y cómo actúa el operador \tilde{J} sobre un $\psi(x)$.

Para el caso de dos intervalos $A = (-b, -a) \cup (a, b)$, tomados de manera simétrica para simplificar las expresiones, tenemos que

$$\tilde{\psi}(x) = C_1(x) \psi(s_1(x)) + C_2(x) \psi(s_2(x)) , \tag{4.48}$$

donde tenemos las soluciones

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \frac{(b-a)^2x + \sqrt{(b-a)^4x^2 + 4ab(x^2-ab)^2}}{2(x^2-ab)}, \\ s_2(x) &= \frac{(b-a)^2x - \sqrt{(b-a)^4x^2 + 4ab(x^2-ab)^2}}{2(x^2-ab)}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$C_i(x) = \frac{2}{(s_i(x) - x)} \left(\frac{b}{s_i(x)^2 - b^2} - \frac{a}{s_i(x)^2 - a^2} \right)^{-1}. \quad (4.50)$$

Si $x \in A$ entonces $s_1(x), s_2(x) \in Z$ y ambas pertenecen a intervalos distintos de los que componen a Z , cómo se mostró en la sección 4.2.

Capítulo 5

La simpleza del plano complejo

En este capítulo estudiaremos la aplicación del operador conjugación modular J para una teoría de operadores fermiónicos en el círculo unidad complejo, algo que es usualmente usado en la literatura para estudiar el flujo modular [18, 20, 21].

5.1. Expresión general para las posiciones en la circunferencia unidad

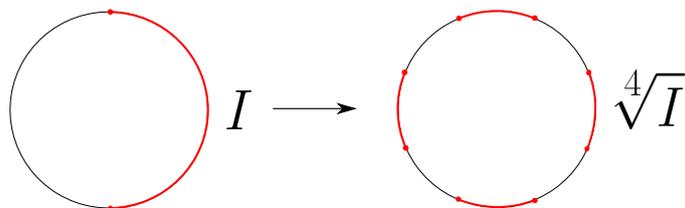


Figura 5.1: Ejemplo de como un intervalo I de S^1 se mapea a $E = \sqrt[4]{I}$

Sea I un intervalo de la circunferencia unidad S^1 del plano complejo. Llamamos $E = \sqrt[n]{I}$ al conjunto que surge de aplicar la raíz n -ésima a los puntos de I . El conjunto E consta de n intervalos simétricos distribuidos sobre la circunferencia unidad. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 5.1. La transformada de Cayley es una función que nos mapea la recta real a S^1 en el plano complejo.

$$z = \text{Ca}(x) = \frac{1 + ix}{1 - ix} . \quad (5.1)$$

Estos son los ingredientes que se utilizan en la Proposición 5 de [20] en donde se demuestra que si tenemos un conjunto de intervalos $\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}$ lo cuales si le aplicamos la transformada de Cayley nos da un conjunto de la forma $\sqrt[n]{I}$ entonces las

funciones $f(x) = \prod_{j=1}^n \frac{x-a_j}{x-b_j}$ se pueden escribir como

$$f(x) = \prod_{j=1}^n \frac{x-a_j}{x-b_j} = \prod_{j=1}^n \frac{1+v_j}{1+u_j} \frac{z-u_j}{z-v_j} = \frac{V-1}{U-1} \frac{z^n-U}{z^n-V} = \check{f}(z), \quad (5.2)$$

donde $z = \frac{1+ix}{1-ix}$, $u_j = \frac{1+ia_j}{1-ia_j}$, $v_j = \frac{1+ib_j}{1-ib_j}$, $U = u_j^n$, $V = v_j^n$ los cuales cumplen $(U, V) = I \subset S^1$. Ahora plantear la condición $f(x) + f(y) = 0$ es equivalente a plantear la condición $\check{f}(z) + \check{f}(w) = 0$ con $z, w \in S^1$. Gracias a la Eq. (5.2) vemos que nuestro problema de n intervalos se redujo al problema de un solo intervalo I donde queremos resolver para los puntos z^n y w^n de S^1 . El problema de la conjugación modular para un solo intervalo ya fue estudiado en la sección 4.4, las posiciones vienen dadas por

$$z^n = \frac{\frac{U+V}{2}w^n - UV}{w^n - \frac{U+V}{2}}. \quad (5.3)$$

Tomando la raíz n -ésima de z^n obtenemos las n soluciones esperadas y utilizando la transformada de Cayley inversa obtenemos las soluciones para la recta real.

5.2. Transformación de los campos

Ahora nos preguntamos como se vería la acción de la conjugación modular para el álgebra de fermiones en el círculo unidad complejo. Para esto transformamos la recta real \mathbb{R} al círculo unidad S^1 en el plano complejo vía la transformación de Cayley $\text{Ca} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. En [?] se trabaja extensamente la expresión de los campos en S^1 .

Tenemos que $\psi(x)$ es un campo fermiónico real primario, este transforma como

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{-i\text{Ca}'(x)}} \psi(x), \quad (5.4)$$

con $z = \text{Ca}(x)$. Para aclarar la notación, cuando estemos trabajando con campos en el círculo unidad complejo, estos estarán evaluados en argumentos como z ó w . En el caso de que sea un campo sobre la recta real este será evaluado con argumentos x ó y . Cualquier diferencia con esta regla será aclarada. Entonces, el campo conjugado viene dado por

$$\psi^\dagger(z) = \frac{1}{\sqrt{i\text{Ca}'(x)^*}} \psi(x) = z\psi(z), \quad (5.5)$$

donde $\text{Ca}'(x)^*$ es la derivada de la función de Cayley conjugada compleja. Estos campos

cumplen la regla de conmutación

$$\begin{aligned} \{\psi(z), \psi^\dagger(w)\} &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ca}'(x)\text{Ca}'(y)^*}} \{\psi(x), \psi(y)\} \\ &= \frac{1}{|\text{Ca}'(x)|} \delta(x - y) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vemos que la expresión final de este anti-conmutador nos tienta a usar propiedades de la delta de Dirac para escribir la expresión $\delta(\text{Ca}(x) - \text{Ca}(y))$, pero la delta de Dirac no está bien definida al ser evaluada en valores complejos. Por esta razón en la última igualdad definimos para abreviar notación

$$\check{\delta}(z - w) = \check{\delta}(\text{Ca}(x) - \text{Ca}(y)) := \frac{1}{|\text{Ca}'(x)|} \delta(x - y) . \quad (5.7)$$

Por lo tanto nos queda que

$$\{\psi(z), \psi^\dagger(w)\} = \check{\delta}(z - w) . \quad (5.8)$$

Supongamos ahora que tenemos una región A conformada por n intervalos disjuntos sobre la recta real que se mapean a intervalos en el círculo mediante la transformación de Cayley y el operador conjugación modular \tilde{J} que actúa sobre el álgebra generada por esta región. Se puede demostrar que los campos $\tilde{\psi}(x) = \tilde{J}\psi(x)\tilde{J}^\dagger$ también transforman como campos primarios

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z) &= \tilde{J}\psi^\dagger(z)\tilde{J}^\dagger \\ &= \tilde{J} \left(\frac{1}{\sqrt{i\text{Ca}'(x)^*}} \right) \psi(x)\tilde{J}^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{-i\text{Ca}'(x)}} \tilde{J}\psi(x)\tilde{J}^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{-i\text{Ca}'(x)}} \tilde{\psi}(x) . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Utilizando la expresión obtenida en Eq.(4.30) para $\tilde{\psi}(x)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(x) &= \sum_{j=1}^N C_j(x) \psi(s_j(x)) \\
\sqrt{-i\text{Ca}'(x)} \tilde{\psi}(z) &= \sum_{j=1}^N C_j(x) \sqrt{-i\text{Ca}'(s_j(x))} \psi(\check{s}_j(z)) \\
\tilde{\psi}(z) &= \sum_{j=1}^N C_j(x) \sqrt{\frac{\text{Ca}'(s_j(x))}{\text{Ca}'(x)}} \psi(\check{s}_j(z)) \\
\Rightarrow \tilde{\psi}(z) &= \sum_{j=1}^N d_j(z) \psi(\check{s}_j(z)) ,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

donde se reemplazó por $z = \text{Ca}(x)$ y se renombraron las siguientes expresiones

$$\check{s}_j(z) = (\text{Ca} \circ s_j \circ \text{Ca}^{-1})(z) \text{ y } d_j(z) = C_j(\text{Ca}^{-1}(z)) \sqrt{\frac{\text{Ca}'(\text{Ca}^{-1}(\check{s}_j(z)))}{\text{Ca}'(\text{Ca}^{-1}(z))}} . \tag{5.11}$$

Si nos encontramos en el caso tratado en la sección 5.1 entonces las posiciones $\check{s}_j(z)$ toman la forma general dada en Eq. (5.3)

$$\check{s}_j(z)^n = s_0(z^n) = \frac{\frac{U+V}{2} z^n - UV}{z^n - \frac{U+V}{2}} , \tag{5.12}$$

donde

$$s_0(z) = \frac{\frac{U+V}{2} z - UV}{z - \frac{U+V}{2}} , \tag{5.13}$$

es la solución para un solo intervalo dada en Eq. (4.39). Otra cosa interesante para calcular son los pesos $P_j(x)$ definidos en la sección 4.3. Para ello, seguimos el mismo procedimiento aplicado antes, primero calculamos el conmutador de $\tilde{\psi}(z)$

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\psi}(z), \tilde{\psi}(w)\} &= \tilde{J} \{\psi(z), \psi(w)\} \tilde{J}^\dagger \\
&= \tilde{J} \frac{1}{|\text{Ca}'(x)|} \delta(x-y) \tilde{J}^\dagger \\
&= \frac{1}{|\text{Ca}'(x)|} \delta(x-y) \\
&= \check{\delta}(z-w) .
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Por otro lado tenemos que

$$\{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}^\dagger(y)\} = \sum_{j,i=1}^N d_i(z) (d_j(w))^* \{\psi(\check{s}_i(z)), \psi^\dagger(\check{s}_j(w))\} . \tag{5.15}$$

Analicemos que forma tienen los conmutadores $\{\psi(\check{s}_i(z)), \psi^\dagger(\check{s}_j(w))\}$

$$\begin{aligned} \{\psi(\check{s}_i(z)), \psi^\dagger(\check{s}_j(w))\} &= \check{\delta}(\check{s}_i(z) - \check{s}_j(w)) \\ &= \check{\delta}(\text{Ca}(s_i(x)) - \text{Ca}(s_j(y))) \\ &= \frac{1}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) , \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde se utilizaron las Eqs. (5.7) (5.8). Aplicando esto en Eq.(5.15) nos queda

$$\begin{aligned} \{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}^\dagger(y)\} &= \sum_{j,i=1}^N d_i(z) (d_j(w))^* \frac{1}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{|d_i(z)|^2}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_i(y)) + \sum_{j,i=1, i \neq j}^N \frac{d_i(z) (d_j(w))^*}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{|d_i(z)|^2}{|\text{Ca}'(s_i(x))s'_i(x)|} \delta(x - y) + \sum_{j,i=1, i \neq j}^N \frac{d_i(z) (d_j(w))^*}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) \quad (5.17) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{|d_i(z)|^2}{|\check{s}'_i(\text{Ca}(x))\text{Ca}'(x)|} \delta(x - y) + \sum_{j,i=1, i \neq j}^N \frac{d_i(z) (d_j(w))^*}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{|d_i(z)|^2}{|\check{s}'_i(z)|} \delta(z - w) + \sum_{j,i=1, i \neq j}^N \frac{d_i(z) (d_j(w))^*}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) , \end{aligned}$$

donde en la tercera línea se utilizó que $\text{Ca}(s_i(x)) = \check{s}_i(\text{Ca}(x))$. Comparando con Eq. (5.14) nos quedan las condiciones

$$\sum_{i=1}^N \frac{|d_i(z)|^2}{|\check{s}'_i(z)|} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j,i=1, i \neq j}^N \frac{d_i(z) (d_j(w))^*}{|\text{Ca}'(s_i(x))|} \delta(s_i(x) - s_j(y)) = 0 . \quad (5.18)$$

Es fácil demostrar que son las mismas condiciones que se encontraron en 4.3, tan solo con utilizar que $d_j(z) = \sqrt{\frac{\text{Ca}'(s_j(x))}{\text{Ca}'(x)}} C_j(x)$ y $\check{s}'_j(z) = \frac{\text{Ca}'(s_j(x))}{\text{Ca}'(x)} s'_j(x)$ se logra llegar al resultado. Es interesante notar que

$$\check{P}_j(z) = \frac{|d_j(z)|^2}{|\check{s}'_j(z)|} = \frac{C_j(x)^2}{|s'_j(x)|} = P_j(x), \quad (5.19)$$

lo que nos muestra que los pesos transforman como escalares ante transformaciones conformes, lo cual parece natural según la interpretación dada a estos.

Resulta que si expresamos las funciones $d_j(z)$ y $\check{P}_j(z)$ utilizando los parámetros U y V y las funciones (5.13) y (5.12) se encuentran expresiones bastante sencillas que pueden ser útiles para hacer cálculos. Para mostrar esto, recordamos la función

$\check{f}(z) = f(\text{Ca}^{-1}(z))$ descrita en Eq. (5.2). Se puede ver que

$$\begin{aligned}\check{f}'(z) &= f'(\text{Ca}^{-1}(z)) (\text{Ca}^{-1}(z))' \\ \Rightarrow f'(\text{Ca}^{-1}(z)) &= \check{f}'(z) \text{Ca}'(\text{Ca}^{-1}(z)).\end{aligned}\quad (5.20)$$

Utilizando que $C_j(x) = \frac{2}{(x-s_j(x))} \frac{f(s_j(x))}{f'(s_j(x))}$, la identidad

$$\text{Ca}^{-1}(z) - \text{Ca}^{-1}(w) = \frac{z - w}{\sqrt{\text{Ca}'(\text{Ca}^{-1}(z)) \text{Ca}'(\text{Ca}^{-1}(w))}}$$

y la definición de $d_j(z)$ dada en Eq.(5.11) se llega a que

$$d_j(z) = \frac{2}{z - \check{s}_j(z)} \frac{\check{f}(\check{s}_j(z))}{\check{f}'(\check{s}_j(z))}. \quad (5.21)$$

Podemos ver que $d_j(z)$ conserva la misma forma que $C_j(x)$. Si estamos en el caso simétrico comentado en la sección 5.1 entonces podemos avanzar más sobre estas expresiones. Supongamos que tenemos un intervalo generador $I = (U, V)$ a través del cual generamos la región $A = \sqrt[n]{I}$ de n intervalos. Entonces tenemos las siguientes expresiones

$$d_j(z) = \frac{2}{n(U - V)} \frac{(s_0(z^n) - U)(s_0(z^n) - V)}{s_0(z^n)} \frac{\check{s}_j(z)}{z - \check{s}_j(z)}. \quad (5.22)$$

De esta expresión y utilizando que

$$\check{s}_j(z)^n = s_0(z^n) \Rightarrow \check{s}_j'(z) = \frac{s_0'(z^n)}{\check{s}_j(z)^{n-1}} z^{n-1}, \quad (5.23)$$

podemos calcular los pesos $\check{P}_j(z)$ como

$$\check{P}_j(z) = \frac{|d_j(z)|^2}{|\check{s}_j'(z)|} = \frac{4}{n^2} \left| \frac{(s_0(z^n) - U)^2 (s_0(z^n) - V)^2}{s_0'(z^n) (U - V)^2} \frac{1}{(z - \check{s}_j(z))^2} \right|. \quad (5.24)$$

Podemos ver que tanto en $d_j(z)$ y $\check{P}_j(z)$ poseen un factor que no depende de la solución $\check{s}_j(z)$ y por lo tanto se puede sacar como factor común de $\tilde{\psi}(z)$. Este factor es el d_0 que aparecería al calcular la acción del \tilde{J} para un solo intervalo, por lo tanto podemos deducir que la estructura de intervalos solo se ve reflejada en el factor dependiente de la solución $\check{s}_j(z)$.

Capítulo 6

Twist para un intervalo y cota inferior operatorial a la energía local

En este capítulo estudiaremos explícitamente el twist de Buchholz-Doplicher-Longo el cual se quiere que aplique la evolución temporal sobre la región A compuesta por un solo intervalo y como se comporta el campo $\psi(x)$ al hacerlo evolucionar con este operador. Luego veremos como obtener el generador del twist y como este nos proporcionara una cota a la densidad de energía local, la cual puede ser comparada en cierta medida con la encontrada a través de técnicas de teoría de campos conformes en [7].

6.1. Twist en un intervalo

Sea $A = (-a, a)$ la región donde queremos que el twist aplique la evolución temporal, $B = (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ la región invariante ante el twist y $Z = (-b, -a) \cup (a, b) = Z_- \cup Z_+$ es la región de esmereo. Entonces tenemos las álgebras generadas por estas regiones $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}(B)$ y $\mathcal{AB} = \mathcal{A}(A \cup B) = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ y sus correspondientes conjugaciones modulares $J_{\mathcal{A}}$, $J_{\mathcal{B}}$ y $J_{\mathcal{AB}}$. El operador evolución temporal viene dado por

$$U(t) = e^{-iHt} \quad \text{con} \quad H = \frac{i}{2} \int dx : \psi(x) \partial \psi(x) : . \quad (6.1)$$

Entonces definimos el twist como se hizo en la sección 3.1 suponiendo que \mathcal{A} actúa en el primer factor

$$\tau_A(t) = W^\dagger (U(t) \otimes 1) W . \quad (6.2)$$

El twist transforma al campo $\psi(x)$ como

$$\tau_A(t)^\dagger \psi(x) \tau_A(t) = \begin{cases} \psi(x+t) & x+t \in A \\ J_{AB} J_A \psi(x+t) J_A J_{AB} & x+t \notin A \end{cases}. \quad (6.3)$$

Entonces para calcular la acción explícita del twist tenemos que aplicar la conjugación modular J_A y J_{AB} . La conjugación aplicada por J_A es la de un solo intervalo y ya ha sido estudiada en la sección 4.4. La conjugación aplicada por J_{AB} es en realidad la misma que la de dos intervalos porque $B = (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ es un solo intervalo unido en el infinito. Por lo tanto para esta conjugación se pueden utilizar los resultados de 4.5 ya que las soluciones para una región dada son igual que para su complemento. Entonces aplicando las conjugaciones obtenemos que

$$\tau(t)^\dagger \psi(x) \tau(t) = c_+(x+t) \psi(q_+(x+t)) + c_-(x+t) \psi(q_-(x+t)) \quad \text{con } x+t \in A', \quad (6.4)$$

donde tenemos que las posiciones $q_\pm(x)$ vienen de la composición de las funciones (4.39) y (4.49), especificadas en las regiones A y $A \cup B$ respectivamente, y los coeficientes $c_\pm(x)$ de la multiplicación de los dados en (4.40) y (4.50). Más explícitamente

$$q_\pm(x) = \frac{x \left(-a^2(b-a)^2 \pm x \sqrt{4ab(ab - \frac{a^4}{x^2})^2 + (b-a)^4 \frac{a^4}{x^2}} \right)}{2(abx^2 - a^4)}, \quad (6.5)$$

$$c_\pm(x) = \frac{a}{x} \frac{1}{q_\pm(x) - \frac{a^2}{x}} \left(\frac{b}{b^2 - q_\pm(x)^2} + \frac{a}{q_\pm(x)^2 - a^2} \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

donde se cumple que $q_\pm(x) \in Z_\pm$. A partir de estas expresiones podemos analizar que sucede con las posiciones y con los pesos

$$p_i(x) = \frac{c_\pm(x)^2}{|s'_\pm(x)|}, \quad p_+(x+t) + p_-(x+t) = 1. \quad (6.7)$$

En la figura 6.1 se pueden observar como evoluciona la posición del fermión cuando $x+t \in A$ y luego como se descompone y evolucionan las partes cuando $x+t \notin A$. En la figura 6.2 se puede observar como evolucionan los pesos de la descomposición del fermión cuando $x+t \notin A$.

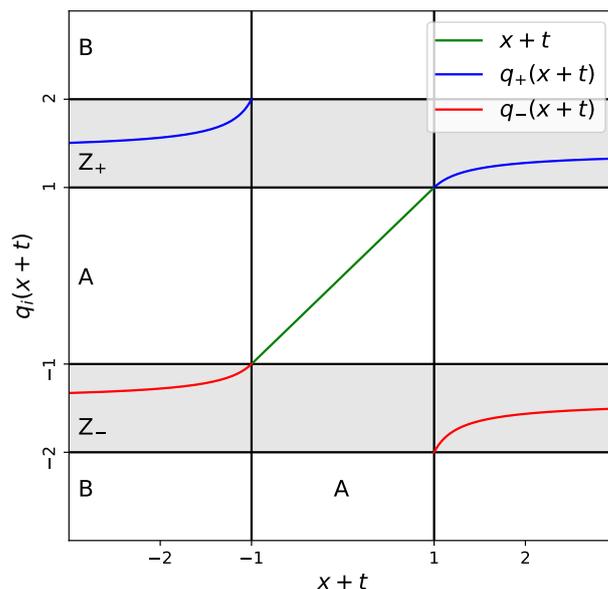


Figura 6.1: Gráfico de las soluciones $q_{\pm}(x+t)$ en función de $x+t$ para el caso $A = (-1, 1)$ y $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Se observa que el twist traslada al fermión normalmente cuando $x+t \in A$ (curva sólida verde). Cuando $x+t \notin A$ vemos que el campo se divide en dos componentes con posiciones $q_+(x+t)$ (curva sólida azul) y $q_-(x+t)$ (curva sólida roja).

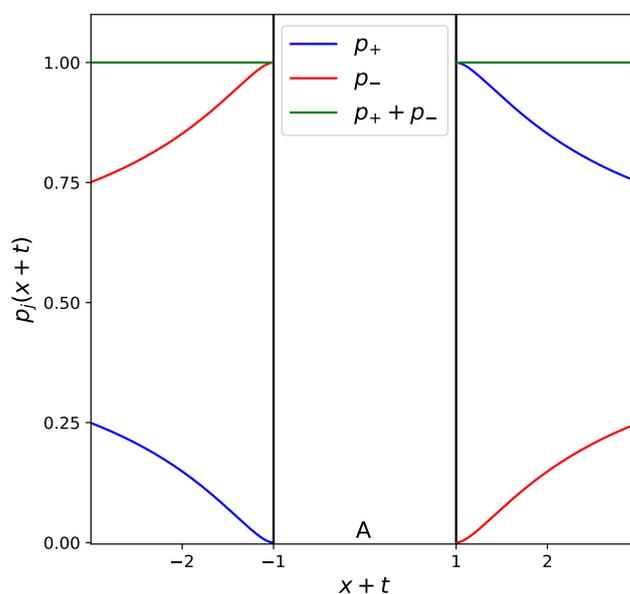


Figura 6.2: Gráfico de las probabilidades $p_{\pm}(x+t)$ en función de $x+t$ para el caso $A = (-1, 1)$ y $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. $p_+(x+t)$ se corresponde con el fermión ubicado en $q_+(x+t)$ (curva sólida azul) y $p_-(x+t)$ con el fermión ubicado en $q_-(x+t)$ (curva sólida roja).

Analicemos estos resultados. Podemos ver que se cumple que si $x+t \rightarrow \pm a$ entonces $q_{\pm}(\pm a) = \pm a$, $q'_{\pm}(\pm a) = 1$ y $p_{\pm}(\pm a) = 1$. Esto nos está diciendo por ejemplo que cuando el operador está recién saliendo del intervalo A por la derecha, o sea $x+t \approx a$ y $x+t \in Z_+$, tenemos que el operador ubicado en $q_+(x+t)$ en la descomposición se “pega” bien con este, ya que $q_{\pm}(x+t) \approx x+t$, y también que los pesos cumplen $p_+(x+t) \approx 1$ y $p_-(x+t) \approx 0$ lo que nos indica que el $q_+(x+t)$ es el más relevante en la suma. Por lo tanto podemos ver que existe una especie de identificación entre el fermión que “sale” de A y un fermión de la descomposición cuando el fermión transformado todavía no está muy “alejado” del álgebra. Esto nos da la idea de una especie de transición suave entre tener un único fermión a tener una mezcla de ellos. Luego vemos que esta identificación se va perdiendo a medida que avanza la evolución ya que cuando $x+t \rightarrow \infty$ tenemos que $q_{\pm}(x+t) = \pm\sqrt{ab}$ y $p_{\pm}(x+t) = \frac{1}{2}$, por lo cual podemos decir que el operador se mezcló totalmente.

Es interesante analizar la función de dos puntos cuando uno de los campos es transformado por el twist

$$\langle \Omega | \tau_A^\dagger(t) \psi(x) \tau_A(t) \psi(y) | \Omega \rangle = \frac{1}{2\pi i(x+t-y-i\epsilon)} \quad \text{si } x+t \in A, \quad (6.8)$$

$$\langle \Omega | \tau_A^\dagger(t) \psi(x) \tau_A(t) \psi(y) | \Omega \rangle = \sum_{i \in \{+, -\}} \frac{c_i(x+t)}{2\pi i(q_i(x+t) - y - i\epsilon)} \quad \text{si } x+t \notin A. \quad (6.9)$$

En la figura 6.3 se puede observar un gráfico de $2\pi i \langle \Omega | \tau_A^\dagger(t) \psi(x) \tau_A(t) \psi(y) | \Omega \rangle$ con $x=0$ e $y=3$. A simple vista se nota que esta función es continua pero no posee primera derivada continua en los bordes de la región A . Esto es semejante a lo observado en [17] donde se demuestra una discontinuidad en la segunda derivada de la densidad del factor \mathcal{N} tipo I.

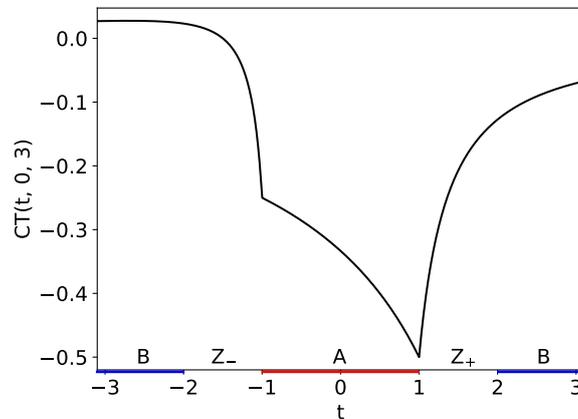


Figura 6.3: Gráfico de $2\pi i \langle \Omega | \tau_A^\dagger(t) \psi(x) \tau_A(t) \psi(y) | \Omega \rangle = \text{CT}(t, x, y)$ en función de t para $x=0$ e $y=3$ para el caso de regiones $A = (-1, 1)$ y $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Se puede observar como esta función es continua pero no diferenciable en los puntos $t = \pm 1$.

Vamos a analizar ahora que sucede cuando se modifican los espesores de las zonas de esmereo y nuestra transformación nos saca al operador fuera de la región A , por lo que el campo se ve descompuesto según Eq. (6.4). Supongamos que $A = (-1, 1)$ y $B = (-\infty, -1 - \epsilon) \cup (2, \infty)$, vamos a ver que ocurre con los pesos a medida que hagamos tender $\epsilon \rightarrow 0$, osea cuando la zona de esmereo $Z_- = (-1 - \epsilon, -1)$ colapsa a -1 . Tenemos que $p_-^\epsilon(x)$ el peso del fermión ubicado en Z_- y $p_+^\epsilon(x)$ el fermión ubicado en $Z_+ = (1, 2)$. Se verifica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_-^\epsilon(x) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_+^\epsilon(x) = 1. \quad (6.10)$$

Lo que nos dice que toda la relevancia en la suma la pasa a tener el fermión en Z_+ . Las posiciones terminan siendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_-^\epsilon(x) = -1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_+^\epsilon(x) = \frac{4x - 3}{3x - 2}. \quad (6.11)$$

De esto podemos concluir que si hacemos colapsar una de las zonas de esmereo, el twist actúa solo trasladándose el campo hacia Z_+ a medida que aumentamos el t y haciéndolos colapsar al punto $\frac{4}{3}$, que es un comportamiento similar al que se observó para el twist simple en el capítulo 2.

6.2. Generador del twist

Se sabe que los twist asociados a un grupo de simetría forman una representación de este grupo [1]. Como esta representación esta conectada con la identidad, podemos obtener el generador de la transformación simplemente tomando la derivada con respecto al parámetro continuo y evaluando en la identidad. Sea A una región del espacio-tiempo que nos genera el álgebra $\mathcal{A}(A)$ donde queremos que el twist actúe y sea $U(s) = e^{Gs}$ una representación de un elemento del grupo de simetrías con G el generador perteneciente al álgebra de Lie del grupo, entonces el twist correspondiente a esta transformación es

$$\tau^A(s) = W^\dagger (U(s) \otimes 1) W. \quad (6.12)$$

Diferenciando con respecto al parámetro s y evaluando en $s = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \frac{\partial}{\partial s} \tau^A(s)|_{s=0} \\ &= W^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial s} U(s)|_{s=0} \otimes 1 \right) W \\ &= W^\dagger (G \otimes 1) W, \end{aligned} \quad (6.13)$$

lo que nos da la expresión del generador \tilde{G} del twist.

En esta sección obtendremos el generador del twist $\tau_A(t)$ definido en Eq. (6.2). Recordamos que

$$H = \int_{\mathbb{R}} dx : T(x) := \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} dx : \psi(x) \partial \psi(x) : . \quad (6.14)$$

El orden normal de un operador define un operador con valor de expectación 0 ante el estado de vacío. Para operadores singulares como lo son los operadores $\psi(x) \partial \psi(x)$ se lo define de la siguiente manera

$$: \psi(x) \partial \psi(x) := \lim_{y \rightarrow x} (\psi(x) \partial \psi(y) - \langle \Omega | \psi(x) \partial \psi(y) | \Omega \rangle) . \quad (6.15)$$

Para ahorrar notación y ser mas claros en la exposición definimos

$$\tilde{T}(x, y) = \frac{i}{2} \psi(x) \partial \psi(y) , \quad (6.16)$$

con la propiedad de que $\tilde{T}(x, x) = T(x)$. Por lo tanto el orden normal de la densidad de energía $T(x)$ viene dado por

$$: T(x) := \lim_{y \rightarrow x} \tilde{T}(x, y) - \langle \Omega | \tilde{T}(x, y) | \Omega \rangle , \quad (6.17)$$

y con valor de expectación

$$\langle \Omega | \tilde{T}(x, y) | \Omega \rangle = \frac{1}{4\pi(x-y)^2} . \quad (6.18)$$

El generador del twist se escribe según (6.13) como

$$\tilde{H} = \int_{\mathbb{R}} dx W^\dagger (: T(x) : \otimes 1) W . \quad (6.19)$$

Recordando la definición (6.17) nos queda que

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \int_{\mathbb{R}} dx \lim_{y \rightarrow x} W^\dagger \left(\left(\tilde{T}(x, y) - \langle \Omega | \tilde{T}(x, y) | \Omega \rangle \right) \otimes 1 \right) W \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \lim_{y \rightarrow x} W^\dagger \left(\tilde{T}(x, y) \otimes 1 \right) W - \langle \Omega | \tilde{T}(x, y) | \Omega \rangle , \end{aligned} \quad (6.20)$$

de esta expresión podemos ver que tenemos varios casos posibles. El primer caso es cuando $x, y \in A$, en este caso el operador $\tilde{T}(x, y)$ pertenece al álgebra $\mathcal{A}(A)$, por lo tanto el operador W lo transforma trivialmente según las propiedades (3.5) y obtenemos

$$W^\dagger \left(\tilde{T}(x, y) \otimes 1 \right) W = \tilde{T}(x, y) \quad \text{si } x, y \in A . \quad (6.21)$$

Cuando $x, y \notin A$ usamos la propiedad (3.6)

$$W^\dagger \left(\tilde{T}(x, y) \otimes 1 \right) W = J_{AB} J_A \tilde{T}(x, y) J_A J_{AB} \text{ Si } x, y \notin A . \quad (6.22)$$

Un ultimo caso es cuando $x \in A$ pero $y \notin A$ o viceversa, en este caso tenemos que expresar el operador $\tilde{T}(x, y)$ en su expresión según operadores fermiónicos. Para simplificar solo miremos el término $\psi(x)\partial\psi(y)$ y supongamos que $x \in A$ pero $y \notin A$.

$$\begin{aligned} W^\dagger (\psi(x)\partial\psi(y) \otimes 1) W &= W^\dagger (\psi(x) \otimes 1) W W^\dagger (\partial\psi(y) \otimes 1) W \\ &= \psi(x) J_{AB} J_A \partial\psi(y) J_A J_{AB} . \end{aligned} \quad (6.23)$$

En caso de que $x \notin A$ pero $y \in A$ la solución es similar, solo que los operadores $J_{AB} J_A$ actúan sobre $\psi(x)$. Entonces vamos a notar esto como

$$W^\dagger \left(\tilde{T}(x, y) \otimes 1 \right) W = \tilde{T}_{1,J}(x, y) \quad \text{si } x \in A \text{ y } y \notin A , \quad (6.24)$$

$$W^\dagger \left(\tilde{T}(x, y) \otimes 1 \right) W = \tilde{T}_{J,1}(x, y) \quad \text{si } x \notin A \text{ y } y \in A , \quad (6.25)$$

donde $(1, J)$ refiere a solo transformar el fermión evaluado en la segunda variable y $(J, 1)$ el de la primera. Entonces para realizar la integral tenemos que tener en cuenta estos tres casos. Para esto primero expresamos los puntos x e y de una manera mas convencional para tomar el limite. Tomamos $x \rightarrow x - h/2$ y $y \rightarrow x + h/2$ y el límite pasa a ser $h \rightarrow 0$. Entonces tenemos que separar la integral en las distintas regiones donde se cumplen estas condiciones.

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a+\frac{h}{2}}^{a-\frac{h}{2}} \left(\tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) - \langle \Omega | \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx \\ &+ \int_{a+\frac{h}{2}}^{\infty} \left(J_{AB} J_A \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) J_A J_{AB} - \langle \Omega | \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx \\ &+ \int_{-\infty}^{-a-\frac{h}{2}} \left(J_{AB} J_A \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) J_A J_{AB} - \langle \Omega | \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx \\ &+ \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \left(\tilde{T}_{1,J}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) - \langle \Omega | \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx \\ &+ \int_{-a-\frac{h}{2}}^{-a+\frac{h}{2}} \left(\tilde{T}_{J,1}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) - \langle \Omega | \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx . \end{aligned} \quad (6.26)$$

El limite del primer término es fácil de hacer ya que no hay ninguna transformación

de por medio, entonces nos queda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a+\frac{h}{2}}^{a-\frac{h}{2}} \left(\tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) - \langle \Omega | \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx = \int_A : T(x) : dx . \quad (6.27)$$

En el segundo y tercer término encontramos la transformación del operador completo, pero ya que los operadores J_{AB} y J_A dejan invariante el vacío $|\Omega\rangle$ tenemos que

$$\langle \Omega | \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) | \Omega \rangle = \langle \Omega | J_{AB} J_A \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) J_A J_{AB} | \Omega \rangle , \quad (6.28)$$

por lo tanto el segundo término nos queda

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{a+\frac{h}{2}}^{\infty} \left(J_{AB} J_A \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) J_A J_{AB} - \langle \Omega | \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{-a-\frac{h}{2}} \left(J_{AB} J_A \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) J_A J_{AB} - \langle \Omega | \tilde{T}(x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx \right] \quad (6.29) \\ & = \int_{A'} : J_{AB} J_A T(x) J_A J_{AB} : dx , \end{aligned}$$

por lo tanto podremos trabajar con la expresión de $T(x)$ y luego tomar el ordenamiento normal. Recordando que

$$J_{AB} J_A \psi(x) J_A J_{AB} = c_+(x) \psi(q_+(x)) + c_-(x) \psi(q_-(x)) , \quad (6.30)$$

donde $q_{\pm}(x)$ viene dado por Eq. (6.5) y $c_{\pm}(x)$ dado por Eq. (6.6). Con esto y recordando la (6.16) se llega a que

$$\begin{aligned} : \tilde{J}_{AB} \tilde{J}_A T(x) \tilde{J}_A \tilde{J}_{AB} : & := \sum_{i=\{+,-\}} c_i(x)^2 q'_i(x) : T(q_i(x)) : \\ & + \frac{i}{2} \sum_{i,j \in \{+,-\}, i \neq j} : c_i(x) \psi(q_i(x)) (c_j(x) \psi(q_j(x)))' : . \end{aligned} \quad (6.31)$$

El desarrollo completo de esta igualdad se puede encontrar en el apéndice C. Recordando que si $x \notin A$ entonces $q_{\pm}(x) \in Z_{\pm}$, por lo tanto podemos extender la integral sobre el $: T(x) :$ de la Eq. (6.27) hasta la zona de esmerio con el primero término de (6.31). Mostramos esto mas explícitamente haciendo el cambio de variables $q = q_i(x)$, lo que nos deja que

$$\sum_{i \in \{+,-\}} \int_{A'} dx c_i^2(x) q'_i(x) : T(q_i(x)) : = \sum_{i \in \{+,-\}} \int_{Z_i} dq c_i^2(q_i^{-1}(q)) : T(q) : . \quad (6.32)$$

Esto lo podemos sumar con (6.27) para obtener

$$\int_A : T(x) : dx + \sum_{i \in \{+, -\}} \int_{Z_i} dq c_i^2(q_i^{-1}(q)) : T(q) := \int_{A \cup Z} \alpha(x) : T(x) : dx, \quad (6.33)$$

donde

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ g_{\pm}(x)^2 & x \in Z_{\pm} \end{cases}, \quad (6.34)$$

$$g_{\pm}(x) = c_{\pm}(q_{\pm}^{-1}(x)) = \frac{2a^2b^2 - (a^2 + b^2)x^2 \pm x\sqrt{(b-a)^4x^2 + 4ab(x^2 - ab)^2}}{2a(b-a)(ab + x^2)}. \quad (6.35)$$

En la figura 6.4 se puede ver un ejemplo de la función $\alpha(x)$ para una distribución de intervalos dada. Es de esperarse que esta función sea de soporte acotado en $A \cup Z$ ya que el generador debería tener una forma similar al generador del twist simple que estudiamos en el capítulo 2.

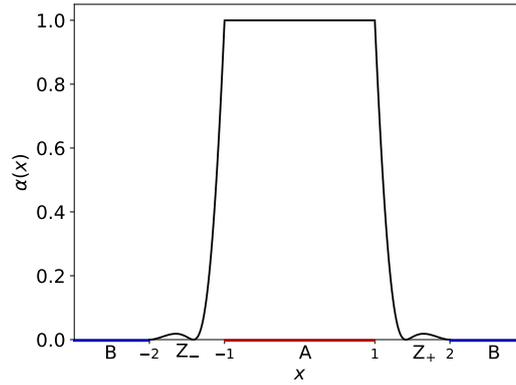


Figura 6.4: Gráfico de la función $\alpha(x)$ descrita en (6.34) para una distribución de intervalos dada por $A = (-1, 1)$, $Z_- = (-2, -1)$, $Z_+ = (1, 2)$ y $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Para simplificar el término no local (segundo término de Eq. (6.31)) podemos integrar por partes uno de los sumandos, utilizar la anticonmutación de los fermiones para obtener un único término y luego realizar un cambio de variables

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \sum_{i,j \in \{+,-\}, i \neq j} \int_{A'} dx : c_i(x) \psi(q_i(x)) (c_j(x) \psi(q_j(x)))' : \\ &= \frac{i}{2} \int_{A'} dx : c_-(x) \psi(q_-(x)) (c_+(x) \psi(q_+(x)))' + c_+(x) \psi(q_+(x)) (c_-(x) \psi(q_-(x)))' : \\ &= i \int_{A'} dx : c_-(x) \psi(q_-(x)) (c_+(x) \psi(q_+(x)))' : \\ &= i \int_{Z_+} dx : c_-(q_+^{-1}(x)) \psi(q_-(q_+^{-1}(x))) (c_+(q_+^{-1}(x)) \psi(x))' : \\ &= i \int_{Z_+} dx : g_-(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}) (g_+(x) \psi(x))' := -i \int_{Z_-} dx : (g_-(x) \psi(x))' g_+(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}) : . \end{aligned} \quad (6.36)$$

En la última ecuación se definió

$$\tilde{x} = q_-(q_+^{-1}(x)) = -ab/x = q_+(q_-^{-1}(x)), \quad \tilde{\tilde{x}} = x. \quad (6.37)$$

La función \tilde{x} mapea $Z_+ \leftrightarrow Z_-$. Entonces se aprecia que el término no local es un bi-lineal con un fermión en Z_+ y otro en Z_- .

Solo nos quedan por ver los términos en los bordes de los intervalos, veamos como transforma el $\tilde{T}(x, y)$ en este caso. Primero miremos el caso en el que nos encontramos en el borde $-a$, se puede obtener que

$$\tilde{T}_{J,1}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) = \sum_{i \in \{+, -\}} c_i(x - \frac{h}{2}) \tilde{T}(q_i(x - \frac{h}{2}), x + \frac{h}{2}). \quad (6.38)$$

Por lo que la integral nos queda

$$\int_{-a-\frac{h}{2}}^{-a+\frac{h}{2}} \left(\sum_{i \in \{+, -\}} c_i(x - \frac{h}{2}) \tilde{T}(q_i(x - \frac{h}{2}), x + \frac{h}{2}) - \langle \Omega | \tilde{T}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle \right) dx. \quad (6.39)$$

Este termino hay que analizarlo con cuidado ya que, aunque el intervalo de la integral se haga nulo, podría haber una contribución divergente dentro del operador tal que en el limite de $h \rightarrow 0$ de una contribución distinta de 0. Para ordenar normalmente este operador necesitamos extraer su valor de expectación, este viene dado por

$$\langle \Omega | \tilde{T}_{J,1}(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle = \sum_{i \in \{+, -\}} \frac{c_i(x - \frac{h}{2})}{4\pi(q_i(x - \frac{h}{2}) - (x + \frac{h}{2}))^2}. \quad (6.40)$$

Restando y sumando este término en (6.39) y tomando el limite nos deja el operador normalmente ordenado y una constante. Tomando el límite $h \rightarrow 0$ la parte operatorial se anula y solo nos queda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a-\frac{h}{2}}^{-a+\frac{h}{2}} \left(-\frac{1}{4\pi h^2} + \sum_{i \in \{+, -\}} \frac{c_i(x - \frac{h}{2})}{4\pi(q_i(x - \frac{h}{2}) - (x + \frac{h}{2}))^2} \right) dx, \quad (6.41)$$

donde se utilizó que $\langle \Omega | T(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}) | \Omega \rangle = \frac{1}{4\pi h^2}$. Para que este término nos de una contribución a la integral deberá poseer una divergencia en el limite $h \rightarrow 0$, que vemos que en principio la posee por el término $\frac{1}{h^2}$. Para lo que sigue, es importante reconocer las siguientes propiedades que serán de mucha utilidad, estas se encuentran demostradas

en el apéndice D.

$$\begin{aligned} q_{\pm}(\pm a) &= \pm a, & q'_{\pm}(\pm a) &= 1, \\ c_{\pm}(\pm a) &= 1, & c_{\mp}(\pm a) &= 0, & c'_{\pm}(\pm a) &= \frac{q''_{\pm}(\pm a)}{2}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Para reconocer cuales términos son divergentes podemos realizar el siguiente análisis. La integral es sobre un entorno de $-a$, por lo tanto podemos tomar $x = -a + \epsilon$ con $|\epsilon| \leq \frac{h}{2}$. Entonces, como $h \rightarrow 0$ podemos aproximar como $q_-(x - \frac{h}{2}) = q_-(-a + \epsilon - \frac{h}{2}) \approx -a + (\epsilon - \frac{h}{2}) + O((\epsilon - \frac{h}{2})^2)$ por lo que $\frac{1}{(x + \frac{h}{2} - q_-(x - \frac{h}{2}))^2} \approx \frac{1}{h^2}$. El término con $q_+(x)$ no posee divergencia ya que su imagen pertenece a Z_+ , por lo tanto el denominador no se anula, entonces este se anula en el límite $h \rightarrow 0$. En consecuencia nos queda que el término divergente es

$$f_-(x, h) = \frac{-1}{4\pi h^2} + \frac{c_-(x - \frac{h}{2})}{4\pi((q_-(x - \frac{h}{2}) - (x + \frac{h}{2})))^2}, \quad (6.43)$$

Entonces tenemos que el término constante viene dado por

$$\int_{-a - \frac{h}{2}}^{-a + \frac{h}{2}} f_-(x, h) dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_-(-a + u, h) du. \quad (6.44)$$

Como $|u| \leq \frac{h}{2}$ y $h \rightarrow 0$ entonces podemos realizar una expansión en u por lo que nos queda

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_-(-a + u, h) du &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[f_-(-a, h) + f'_-(-a, h)u + f''_-(-a, h)\frac{u^2}{2!} + O(u^3) \right] du \\ &= f_-(-a, h)h + f''_-(-a, h)\frac{h^3}{24} + O(h^5). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Sabemos que cuando $h \rightarrow 0$ la función $f_-(-a, h)$ tiene singularidades, por lo que debemos calcular el límite para esta función. Teniendo en cuenta las propiedades mencionadas en (6.42) calculamos los límites de cada término. Solo hace falta calcular los primeros dos términos, se puede demostrar que los términos de mayor orden se anulan en el límite (Ver apéndice E).

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f_-(-a, h)h &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} f''_-(-a, h)\frac{h^3}{24} &= \frac{q''_-(-a)}{48\pi} = \frac{b}{6\pi(b^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Por lo tanto nos queda que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a-\frac{h}{2}}^{-a+\frac{h}{2}} f_-(x, h) dx = \frac{b}{6\pi(b^2 - a^2)}. \quad (6.47)$$

Ahora tenemos que realizar un procedimiento similar pero en el borde a , en este caso el término que queda fuera de la región A es el de la derivada y teniendo en cuenta que el único termino divergente es el que posee en el denominador a $q_+(x)$ nos queda que

$$f_+(x, h) = -\frac{1}{4\pi h^2} + \frac{c'_+(x + \frac{h}{2})}{4\pi(x - \frac{h}{2} - q_+(x + \frac{h}{2}))} + \frac{c_+(x + \frac{h}{2})q'_+(x + \frac{h}{2})}{4\pi(x - \frac{h}{2} - q_+(x + \frac{h}{2}))^2}. \quad (6.48)$$

Entonces, siguiendo el mismo procedimiento que en (6.45) obtenemos que

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_+(a + u, h) du = f_+(a, h)h + f''_+(a, h)\frac{h^3}{24} + O(h^5). \quad (6.49)$$

y en el límite

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f_+(a, h)h &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} f''_+(a, h)\frac{h^3}{24} &= -\frac{q''_+(a)}{48\pi} = \frac{b}{6\pi(b^2 - a^2)}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

lo que nos da que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} f_+(x, h) dx = \frac{b}{6\pi(b^2 - a^2)}. \quad (6.51)$$

Por lo tanto la contribución de los bordes es

$$\int_{-a-\frac{h}{2}}^{-a+\frac{h}{2}} f_-(x, h) dx + \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} f_+(x, h) dx = \frac{1}{3\pi} \frac{b}{b^2 - a^2}. \quad (6.52)$$

En conclusión, el generador queda como

$$\tilde{H} = \frac{1}{3\pi} \frac{b}{b^2 - a^2} + \int_{AUZ} dx \alpha(x) : T(x) : + i \int_{Z_+} dx : g_-(\tilde{x})\psi(\tilde{x}) (g_+(x)\psi(x))' :, \quad (6.53)$$

Por el ordenamiento normal de los otros operadores podemos deducir que el término constante que queda es el valor de expectación del generador.

$$\langle \Omega | \tilde{H} | \Omega \rangle = \frac{1}{3\pi} \frac{b}{b^2 - a^2}. \quad (6.54)$$

Es interesante notar que usando Eq. (6.34), (6.42), (6.46) y (6.50) se llega a una expresión del valor de expectación del generador en el vacío relacionada con la función

de soporte acotado $\alpha(x)$

$$\langle \Omega | \tilde{H} | \Omega \rangle = \frac{\alpha'_-(-a) - \alpha'_+(a)}{48\pi}, \quad (6.55)$$

donde $\alpha'_+(a)$ significa el límite hacia a yendo por Z_+ y $\alpha'_-(-a)$ el límite hacia $-a$ yendo por Z_- .

6.3. Cota a la energía local y comparación con la cota de Fewster-Hollands

Se sabe que para cualquier teoría de campos cuántica el esmero de la densidad de energía con una función positivo de soporte compacto sobre una región acotada como

$$T_\alpha = \int dx \alpha(x) : T_{00}(x) : , \quad (6.56)$$

produce un operador que no es positivo, por lo tanto podemos deducir que existen estados para los cuales su energía sobre esa región acotada del espacio es negativa. La deducción de este resultado es sencilla, ya que el valor de expectación con respecto al vacío de la densidad de energía tiene que ser $\langle \Omega | : T_{00}(x) : | \Omega \rangle = 0$, entonces $\langle \Omega | T_\alpha | \Omega \rangle = 0$. Si T_α fuera definido positivo, entonces si o si $T_\alpha | \Omega \rangle = 0$, pero por el Teorema de Reeh-Schlieder el vacío es un estado separador para cualquier álgebra de una región acotada y por lo tanto no puede ser aniquilado por un operador dentro de ella. Entonces se deduce que T_α es no definido positivo [22].

De este hecho se desprende una pregunta ¿cuanta energía localizada negativa puede tener un estado? Esto dio lugar a lo que se conoce como las *quantum energy inequalities* que consiste en una cota inferior a la energía local en términos de la función de esmero $\alpha(x)$ (Para más información ver [23]). La mas general de estas cotas para una teoría CFT en 2 dimensiones fue obtenida por Fewster y Hollands en [7]. Esta es

$$\int dx \alpha(x) \langle \Phi | T(x) | \Phi \rangle \geq -\frac{c}{12\pi} \int dx \left(\frac{d\sqrt{\alpha(x)}}{dx} \right)^2, \quad (6.57)$$

para cualquier estado $|\Phi\rangle$, donde c es la carga central. Para el caso de este trabajo, un fermión de Majorana libre no masivo en 1+1, $c = \frac{1}{2}$. Esta cota es producida utilizando transformaciones conformes, el término constante a la derecha de la desigualdad es producido por la anomalía y la desigualdad viene de la positividad del Hamiltoniano ante transformaciones unitarias. Esta cota decimos que es *sharp* en el sentido de que

satura para algún estado, en este caso satura para el estado de vacío transformado ante la transformación conforme usada.

Diferentes tipos de cotas para la densidad de energía, incluyendo cantidades entrópicas, han sido exploradas en la literatura. Para estados globales impuros, cotas *sharp* que involucran cantidades entrópicas han sido derivadas [24]. Otro tipo de cota es la *quantum null energy condition*, que da una cota a la densidad de energía en un punto en términos de la segunda derivada de la entropía de entrelazamiento [25].

Del twist de Buchholz-Doplicher-Longo estudiado en este capítulo se puede obtener un tipo diferente de cota para la energía local, un tipo de cota operatorial. Esta cota se deriva utilizando que el generador del twist preserva el espectro del Hamiltoniano ya que los relaciona una transformación unitaria. De esto podemos deducir que el generador del twist es definido positivo y que su valor de expectación ante cualquier estado tiene que ser positivo. En particular en (6.54) se comprobó que el vacío cumple esta propiedad. Entonces, usando la Eq. (6.53) y la positividad nos queda que

$$\int_{AUZ} dx \alpha(x) \langle \Phi | : T(x) : | \Phi \rangle \geq -\frac{1}{3\pi} \frac{b}{b^2 - a^2} - i \int_{Z_+} dx \langle \Phi | : g_-(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}) (g_+(x) \psi(x))' : | \Phi \rangle , \quad (6.58)$$

donde $\alpha(x)$ viene dada en Eq. (6.34) y $g_{\pm}(x)$ en Eq. (6.35). Por lo tanto se obtiene una cota inferior para la energía local en la región $A \cup Z$. Una propiedad de esta cota es que es *sharp* ya que los estados de la forma (6.59), donde $|\Omega\rangle$ es el vacío y $|\Psi\rangle$ es cualquier otro estado, saturan la desigualdad

$$W^\dagger (|\Omega\rangle \otimes |\Psi\rangle) = |\Omega\rangle_{\mathcal{N}} \otimes |\Psi\rangle_{\mathcal{N}'} . \quad (6.59)$$

Estos tipos de estados tienen la propiedad de que no poseen entrelazamiento entre las álgebras $\mathcal{A}(A) \subset \mathcal{N}$ y $\mathcal{A}(B) \subset \mathcal{N}'$. Dicho de otra manera, no hay correlaciones entre las regiones A y B . En este sentido, la cota de Fewster-Hollands no es comparable con la nuestra cuando es aplicada a la misma función $\alpha(x)$ ya que para un estado sin entrelazamiento, como es el nuestro, la cota de Fewster-Hollands no satura mientras que la cota encontrada en este trabajo sí.

Para la función $\alpha(x)$ encontrada en Eq. (6.34) se puede calcular cual es el valor de la cota de Fewster-Hollands utilizando la Eq. (6.57). Es importante remarcar que un requisito para esta cota es que la función $\alpha(x)$ sea suave, lo cual no lo cumple nuestra función, pero de igual manera procederemos ya que la integral si converge y da un numero. Podemos comparar el valor dado por esta cota con el término constante obtenido en el generador del twist $\langle \Omega | \tilde{H} | \Omega \rangle$. Para esto, vamos a adimensionalizar las

cotas. Sea $a = k b$ con $0 < k < 1$, entonces podemos expresar

$$f_{FH}(k) = \frac{b}{24\pi} \int dx \left(\frac{d\sqrt{\alpha(x)}}{dx} \right)^2. \quad (6.60)$$

Para la cota de este trabajo tenemos que

$$f_{CM}(k) = b \langle \Omega | \tilde{H} | \Omega \rangle = \frac{1}{3\pi} \frac{1}{1-k^2}. \quad (6.61)$$

En la figura 6.5 podemos ver estas dos funciones. En el límite en el que $k \rightarrow 1$ ambas funciones divergen de la misma manera, mientras que la diferencia entre ellas converge a una constante

$$f_{FH}(k) \sim \frac{1}{6\pi(1-k)} + \frac{1}{8\pi} - \frac{1}{48}, \quad f_{CM}(k) \sim \frac{1}{6\pi(1-k)} + \frac{1}{12\pi}. \quad (6.62)$$

Cuando $k \rightarrow 0$ tenemos que

$$f_{FH}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{24k}}, \quad f_{CM}(k) \sim \frac{1}{3\pi}. \quad (6.63)$$

Notamos que aunque en el límite $k \rightarrow 0$ la constante $\langle \Omega | \tilde{H} | \Omega \rangle = \frac{1}{3\pi b}$ no diverge el término bi-lineal si podría aportar una divergencia ya que las regiones Z_- y Z_+ entran en contacto en $x = 0$, por lo que la cota puede divergir en este límite.

Sería interesante ver que cotas se pueden llegar a obtener combinando las técnicas de transformaciones conformes utilizadas por Fewster y Hollands y las herramientas de teoría modular utilizadas en este trabajo para encontrar nuevos tipos de cotas. No se profundizó por este lado en este trabajo.

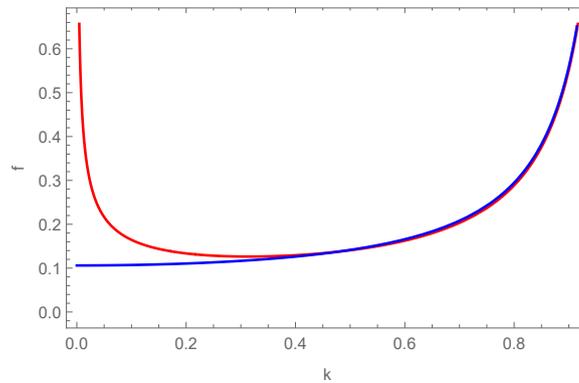


Figura 6.5: Gráfico de las funciones $f_{FH}(k)$ (rojo) y $f_{CM}(k)$ (azul). La diferencia de las funciones cambia de signo alrededor de $k \approx 0,47$. En el límite $k \rightarrow 1$ ambas cotas divergen con el mismo polo, pero con diferente término constante.

Capítulo 7

Twist en dos intervalos y como se “teletransporta” un fermión

En este capítulo vamos a estudiar el twist aplicado a una región $A = A_1 \cup A_2 = (-c, -b) \cup (b, c)$ compuesta por dos intervalos y una región $B = (-\infty, -d) \cup (-a, a) \cup (d, \infty)$ la cual el twist deja invariante. En esta distribución de intervalos se cumple que $0 < a < b < c < d$. Observaremos que este twist tiene un efecto interesante sobre los operadores fermiónicos. Si tomamos un operador fermiónico $\psi(x)$ con $x \in A_1$ y aplicamos el twist $\tau_A(t)$ definido en 3 con un parámetro t tal que $x + t \in A_2$, entonces veremos que el operador fermiónico pasa de estar ubicado en x a estar ubicado en $x + t$ sin nunca haber pasado por la región B . En particular este nunca habrá pasado por el intervalo intermedio $(-a, a)$ que está entre A_1 y A_2 . Esto es lo que llamamos una especie de “teletransportación” o que el fermión salta de un intervalo a otro. Este efecto no puede ser logrado con un twist como el construido en el capítulo 2.

El interés de este capítulo va a ser entender bien como ocurre este fenómeno a medida que hacemos un cambio continuo del parámetro t desde 0 hasta el valor necesario para que se produzca el salto. Observaremos que, como el twist deja el álgebra de la región B invariante, entonces el operador $\psi(x)$ será repartido en la zona de esmerero $Z = (A \cup B)'$ cuando lo saquemos de la región A_1 al aumentar el parámetro t . Veremos como los pesos definidos en Eq. (4.37) van mezclándose, pero al acercarnos a A_2 estos se vuelven a desenredar para dar un operador único localizado en A_2 .

Realizar este problema sobre la recta real posee una complejidad extra debido a que para obtener las posiciones al aplicar la conjugación modular J_{AB} necesitamos resolver la condición (4.31), la cual al contener $A \cup B$ 4 intervalos se convierte en resolver un polinomio de grado 4. Para simplificar este problema decidió trasladarlo al círculo unidad complejo de tal manera que se puedan utilizar las herramientas desarrolladas

en el capítulo 5.

Sea $I_{AB} = (-\pi, \pi)$ un intervalo sobre el círculo unidad complejo, por claridad solo indicaremos el argumento del número complejo en cuestión, ya que $|z| = 1$. Entonces $\sqrt[4]{I_{AB}} = A \cup B$ donde tomamos $A = A_1 \cup A_2 = (\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}) \cup (\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8})$ y $B = B_2 \cup B_1 = (\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8})$. Con el intervalo generador I_{AB} ya tenemos resuelto el como aplicar el operador J_{AB} . Para aplicar el operador J_A notamos que $I_A = (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ genera A ya que $\sqrt{I_A} = A$. Para finalizar, tenemos la zona de esmerero $Z = (A \cup B)'$ compuesta por 4 intervalos. Estas regiones se esquematizan en la figura 7.1.

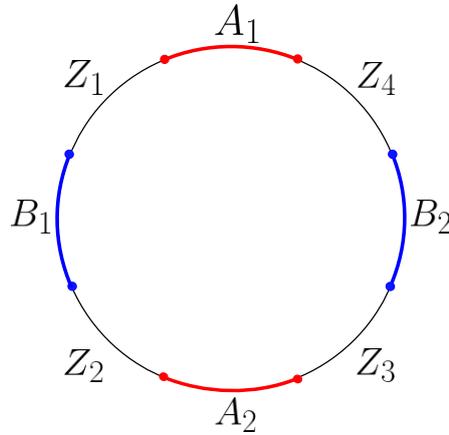


Figura 7.1: Esquema de la distribución de las regiones A , B y Z sobre el círculo unidad complejo.

La transformación que aplicaremos en este problema será

$$U(\theta)^\dagger \psi(z) U(\theta) = \psi(z e^{i\theta}) . \quad (7.1)$$

Entonces definiendo el twist como

$$\tau_A(\theta) = W^\dagger (U(\theta) \otimes 1) W , \quad (7.2)$$

nos queda que el twist transforma al fermión $\psi(e^{i\phi})$ como

$$\tau^A(\theta)^\dagger \psi(e^{i\phi}) (\tau^A(\theta)) = \begin{cases} \psi(e^{i(\phi+\theta)}) & \text{si } \phi + \theta \in A \\ J_{A \vee B} J_A \psi(e^{i(\phi+\theta)}) J_A J_{A \vee B} & \text{si } \phi + \theta \notin A \end{cases} . \quad (7.3)$$

Vamos a profundizar más en la expresión para cuando $\phi + \theta \notin A$. Al aplicar J_A utilizamos la Eq. 5.3 para encontrar las soluciones a las posiciones y estas son

$$g_j^A(z) = (-1)^{j-1} i \sqrt{\frac{z^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z^2 + 1}} , \quad (7.4)$$

Para aplicar \tilde{J}_A sobre $\psi(z)$ hay que tener en cuenta que es el conjugado del fermión transformado en Eq. (5.9) y luego utilizar Eq. (5.10). Entonces se obtiene

$$\tilde{J}_A \psi(z) \tilde{J}_A^\dagger = \sum_{j=1}^2 c_j^A(z)^* \psi^\dagger(g_j(z)) , \quad (7.5)$$

donde los coeficientes $c_j^A(z)$ son los dados por la Eq. (5.22) según la distribución de intervalos A . Ahora tenemos que aplicar \tilde{J}_{AB} , este nos dará fermiones ubicados en las posiciones $s_k^{AB}(g_j^A(z))$ pero por la Eq. (5.3) la dependencia en j dada por $g_j^A(z)$ es borrada debido a que tenemos que elevar a una potencia cuarta y luego tomar la raíz cuarta para encontrar las soluciones. Entonces las posiciones solo dependen del índice k . Por lo tanto

$$\tau_A(\theta)^\dagger \psi(e^{i\phi}) \tau_A(\theta) = \sum_{k=1}^4 c_k(e^{i(\phi+\theta)}) \psi(\tilde{s}_k(e^{i(\phi+\theta)})) \quad \text{si } \phi + \theta \notin A , \quad (7.6)$$

donde

$$\tilde{s}_k(z) = s_k^{AB}(g_j^A(z)) = e^{i(2k-1)\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}z^2 + 1}{z^2 + \sqrt{2}}} , \quad (7.7)$$

$$c_k(z) = d_k^{AB}(g_1^A(z))c_1^A(z)^* + d_k^{AB}(g_2^A(z))c_2^A(z)^* , \quad (7.8)$$

con $k = 1, 2, 3, 4$ y los coeficientes $d_k^{AB}(z)$ son los dados según Eq. (5.22) para la distribución de intervalos $A \cup B$. Todas las raíces son tomadas sobre la rama principal, osea con argumento en el intervalo $[0, 2\pi)$. También tenemos los pesos

$$P_k(z) = \frac{|d_k^{AB}(g_1^A(z))c_1^A(z)^* + d_k^{AB}(g_2^A(z))c_2^A(z)^*|^2}{|\tilde{s}'_k(z)|} . \quad (7.9)$$

Es interesante notar que los pesos no son la multiplicación de los pesos que tendríamos de calcular el J_A y el J_{AB} por separado, lo que si sucedía en el caso para 1 intervalo. Esto es debido a que se borra la degeneración de las posiciones $g_j(z)$.

En la figura 7.2 se puede observar la trayectoria del fermion en el caso en que $\phi + \theta \in A$ y la de los fermiones de la descomposición cuando $\phi + \theta \notin A$. En la figura 7.3 se puede ver el gráfico de los pesos correspondiente a cada fermión de la descomposición.

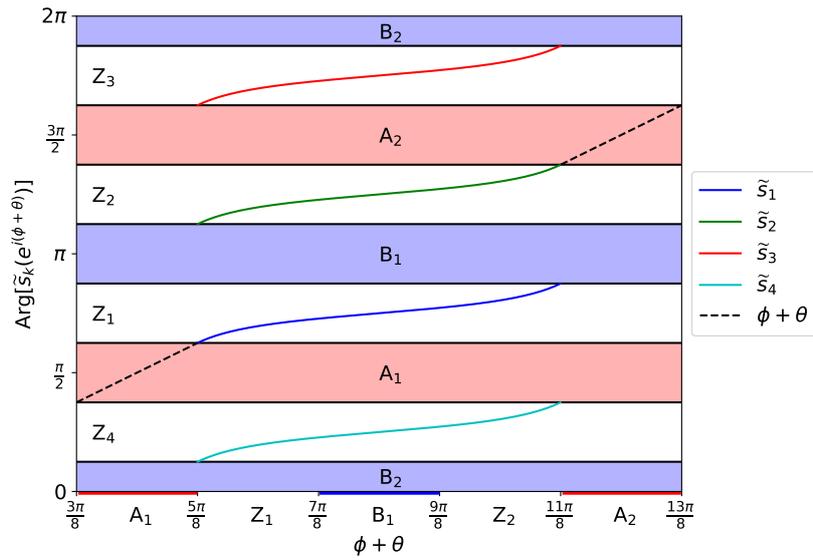


Figura 7.2: Gráfico del argumento de las funciones $\tilde{s}_k(e^{i(\phi+\theta)})$ en función de $\phi+\theta$ en el intervalo $(\frac{3\pi}{8}, \frac{13\pi}{8})$ variando el parámetro θ de la transformación. Sobre el eje horizontal se marcaron en color los valores en donde se encuentran los intervalos de A (rojo), B (azul) y Z (transparente). Las franjas horizontales de colores marcan las ubicaciones de los intervalos sobre el eje vertical con el mismo código de colores. La línea punteada corresponde al caso $\phi+\theta \in A$, por lo tanto tenemos un único fermión ubicado en $\phi+\theta$.

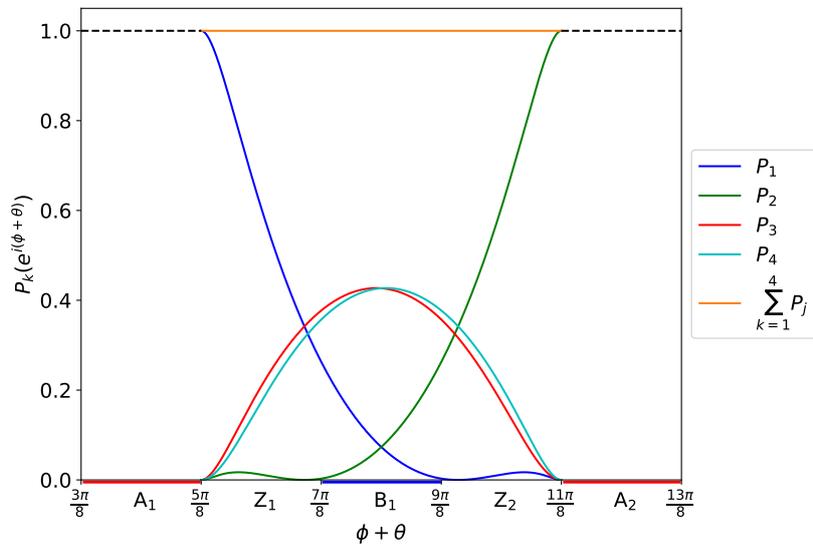


Figura 7.3: Gráfico de las probabilidades $P_k(e^{i(\phi+\theta)})$ en función de $\phi+\theta$ en el intervalo $(\frac{3\pi}{8}, \frac{13\pi}{8})$ variando el parámetro θ de la transformación. Sobre el eje horizontal se marcaron en color los valores en donde se encuentran los intervalos de A (rojo), B (azul) y Z (transparente). Las franjas horizontales de colores marcan las ubicaciones de los intervalos sobre el eje vertical con el mismo código de colores. La probabilidad $P_k(z)$ es la correspondiente a la del fermión ubicado en $\tilde{s}_k(z)$. La línea punteada negra representa el caso donde $\phi+\theta \in A$, para el cual tenemos un único fermión y por lo tanto el peso es trivialmente 1.

De estos gráficos podemos observar el siguiente comportamiento. Supongamos que inicialmente nuestro fermión está ubicado en $A_1 = (\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8})$. Si le aplicamos el twist $\tau_A(\theta)$ y el parámetro θ es lo suficientemente chico para no sacarlo de A_1 , entonces su movimiento corresponderá a la línea punteada negra marcada en el gráfico 7.2. Aumentando el parámetro θ el twist nos sacará al fermión de la región A_1 , entonces el twist nos lo transformará en 4 fermiones ubicados en las posiciones $\tilde{s}_k(e^{i(\phi+\theta)})$. Se puede notar que la transición de ser un fermión único a ser una combinación lineal de estos se da “suavemente”, ya que la posición $s_1(e^{i(\phi+\theta)}) \in Z_1$ se pega bien con el fermión saliente de A_1 y la probabilidad $P_1(e^{i(\phi+\theta)})$ tiende a 1 en el borde del intervalo. A medida que se aumenta el parámetro θ las posiciones de los fermiones y sus pesos van variando, lo que nos dice que se produce una “mezcla”. Cuando el parámetro θ es lo suficientemente grande como para que $\phi + \theta \in A_2 = (\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8})$ volvemos a tener la solución como línea punteada negra que se muestra en el gráfico. También en este caso vemos que la transición de ser una combinación lineal a ser un fermión único se da “suavemente”, ya que la posición $s_2(e^{i(\phi+\theta)}) \in Z_2$ se pega bien con la posición del fermión dentro de A_2 y el peso $P_2(e^{i(\phi+\theta)})$ tiende a 1 en el borde de A_2 .

Todo este análisis nos lleva a interpretar que cuando el twist nos saca el fermión de la región A , nos da una mezcla de operadores, cada uno con su peso correspondiente P_k . Pero, a medida que nos volvemos a acercarnos a otro intervalo de la región A , la mezcla se empieza a deshacer y volvemos a recuperar un operador único ubicado en A . Por lo tanto el operador de twist logró transportar un operador fermiónico de un intervalo de A a otro sin que nunca esté dentro de la región B que separa los intervalos de A . En pocas palabras, se logró hacer que el fermión se “teletransportará” o que saltara de un intervalo a otro sin que nunca pase por el espacio intermedio.

Capítulo 8

Conclusiones

“De tanto vagar por ahí, no sé por dónde empecé. Pero, de cualquier manera vengo de donde viene usted.”

— Facundo Cabral

En este trabajo se logró calcular la acción explícita de dos tipos de twist sobre el álgebra local de operadores fermiónicos de Majorana libres y no masivos en 1+1 dimensiones. Para el primer twist estudiado, construido a partir de la integración de la densidad de energía sobre una región acotada A (Eq. (2.3)), se obtuvo una expresión general que nos permite calcular como este transforma a todo operador $\psi(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Esto nos permitió estudiar la dinámica de los operadores bajo esta evolución, el cómo cambia la distribución de operadores en el intervalo y cómo estos se acumulan en el borde.

Luego se estudió el twist construido por D. Buchholz, S. Doplicher y R. Longo en [1] el cual fue especificado para aplicar la evolución temporal sobre una región multi-componente A . Para lograr obtener una expresión explícita de esto, se tuvo que estudiar cómo actúa el operador reflexión modular J de la teoría de Tomita-Takesaki sobre un álgebra local de operadores fermiónicos. De este estudio se derivó, de una forma alternativa a la realizada en [15], como el operador $J\psi(x)J$ consiste de una combinación lineal finita de operadores fermiónicos ubicados en A' . Se estudió como varían las posiciones de los operadores fermiónicos que aparecen en la combinación lineal y se obtuvo una función escalar $P_k(x)$ que representa el “peso” o “importancia” que lleva cada fermión de la suma. Luego se estudió este operador sobre una teoría de campos fermiónicos sobre el círculo unidad complejo y se encontró que las expresiones para las funciones de las posiciones y los pesos se ven simplificadas enormemente. Esto es de gran utilidad para poder realizar cálculos en regiones multi-componentes, ya que

realizarlos en la recta real implica resolver polinomios de grado n donde n es la cantidad de intervalos que posea la región.

Utilizando estos resultados, se calculó la acción del twist en el caso que se tiene una región $A = (-a, a)$, donde se quiere que el twist aplique la evolución temporal, la región $B = (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$, donde queremos que no realice ninguna acción, y la región $Z = (A \cup B)'$, la región de esmereo. Para este caso se obtuvo que si la transformación aplicada por el twist nos lleva el operador a la región Z , este resulta en una combinación lineal entre un operador ubicado en la región $Z_- = (-b, a)$ y otro ubicado en $Z_+ = (a, b)$. Se calculó la forma explícita de esta combinación lineal y cómo cambia a medida que se varía el parámetro continuo de la transformación aplicada. De este twist también se dedujo su generador, para el cual se obtuvo que consiste en una parte local dada por una integral de la densidad de energía sobre $A \cup Z$ y una parte no local dada por la integral de la multiplicación de dos campos fermiónicos, uno ubicado en Z_- y otro ubicado en Z_+ . A partir de la positividad del Hamiltoniano y de la expresión del generador del twist se dedujo una cota inferior operatorial a la energía local en la región $A \cup Z$. Esta fue comparada con la cota encontrada por Fewster y Hollands en [7].

También para este twist se calculó el caso donde cada región A y B está compuesta por dos intervalos disjuntos. Este caso se realizó en la teoría del fermión sobre el círculo unidad complejo para simplificar los cálculos. En el estudio de este ejemplo se observó como el twist nos transportó un fermión de un intervalo $A_1 \subset A$ a otro $A_2 \subset A$ sin nunca haber pasado por el intervalo intermedio B_1 . En otras palabras, el fermión fue transportado de una región del espacio a otra sin nunca haber pasado por el espacio intermedio entre ellas. Esto es lo que nombramos como una especie de “teletransportación” o salto que realiza el twist al fermión.

Apéndice A

Hamiltoniano y función de dos puntos

En este apéndice mostraremos que el Hamiltoniano descrito en Eq. (1.12) es hermítico y definido positivo. Luego demostraremos la forma de la función de dos puntos Eq. (1.13).

Por la ecuación (1.8) sabemos que podemos escribir al campo fermiónico como un campo de una sola variable real $\psi(x)$ y también mostramos que se puede conseguir una solución real a la ecuación de Dirac, es decir $\psi(x)^\dagger = \psi(x)$. Entonces su serie de Fourier es

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dp (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}) , \quad (\text{A.1})$$

donde a_p son operadores y la integral empieza desde $p = 0$ ya que podemos identificar $a_p^\dagger = a_{-p}$. Esto se debe a que si integráramos sobre p negativos entonces podríamos definir $c_p = a_p + a_{-p}^\dagger$ y $c_p^\dagger = a_p^\dagger + a_{-p} = c_{-p}$ y por lo tanto empezar la integral desde 0.

Ahora calculamos que relaciones de anti-conmutación que se derivan para los a_p según las dadas para $\psi(x)$ en Eq. (1.9). Primero, para $p > 0$, tenemos que

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{ipx} \psi(x), \quad a_p^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ipx} \psi(x) . \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \{a_p, a_{p'}^\dagger\} &= \frac{1}{2\pi} \int dx dy e^{ipx} e^{-ip'y} \{\psi(x), \psi(y)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(p-p')x} = \delta(p - p'). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Utilizando las relaciones de anti-conmutación de los operadores a_p podemos escribir el

Hamiltoniano (1.12) en función de estos operadores de una manera más sencilla

$$\begin{aligned}
H &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx : \psi(x) \partial \psi(x) : \\
&= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx dp dp' ip' : (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx})(-a_{p'} e^{-ip'x} + a_{p'}^\dagger e^{ip'x}) : \quad (\text{A.4}) \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dp p : (a_p a_p^\dagger - a_p^\dagger a_p) : = \int_0^{\infty} dp p a_p^\dagger a_p .
\end{aligned}$$

De esta expresión podemos deducir que el Hamiltoniano es hermítico y definido positivo, ya que para cualquier estado $v \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\langle v | H | v \rangle = \int_0^{\infty} dp p \langle v | a_p^\dagger a_p | v \rangle = \int_0^{\infty} dp p \| a_p | v \rangle \|^2 \geq 0 . \quad (\text{A.5})$$

Utilizando esta desigualdad se desprende que el estado de vacío $|\Omega\rangle$, es decir el estado tal que $H |\Omega\rangle = 0$, es aniquilado por el operador a_p

$$\langle \Omega | H | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} dp p \| a_p | \Omega \rangle \|^2 = 0 \Rightarrow \| a_p | \Omega \rangle \|^2 = 0 \Rightarrow a_p | \Omega \rangle = 0 . \quad (\text{A.6})$$

Ahora podemos calcular la función de dos puntos $\langle \Omega | \psi(x) \psi(y) | \Omega \rangle$. Como $a_p | \Omega \rangle = 0$ y $\langle \Omega | a_p^\dagger = 0$ tenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | a_p a_{p'} | \Omega \rangle &= 0, \quad \langle \Omega | a_p^\dagger a_{p'}^\dagger | \Omega \rangle = 0, \quad \langle \Omega | a_p^\dagger a_{p'} | \Omega \rangle = 0, \\
\langle \Omega | a_p a_{p'}^\dagger | \Omega \rangle &= \langle \Omega | -a_{p'}^\dagger a_p + \delta(p - p') | \Omega \rangle = \delta(p - p') .
\end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Utilizando estas identidades al expandir los campos en Fourier en la función de dos puntos se nos eliminan todos los términos que no tengan un buen orden en los operadores a_p . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \psi(x) \psi(y) | \Omega \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dp dp' \langle \Omega | a_p a_{p'}^\dagger | \Omega \rangle e^{-ipx} e^{ip'y} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dp e^{-ip(x-y)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} dp e^{-ip(x-y-i\epsilon)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-i(x-y-i\epsilon)} e^{-ip(x-y-i\epsilon)} \Big|_0^\infty \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i(x-y-i\epsilon)} ,
\end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde 0^+ indica el límite yendo por los reales positivos.

Apéndice B

Función de prueba $\alpha(x)$

Para realizar los gráficos de las figuras 2.1 y 2.2 se utilizó la función

$$\alpha(x) = \frac{\tanh(r(x+l)) - \tanh(r(x-l))}{2}, \quad (\text{B.1})$$

donde r es un parámetro que regula qué tan abrupto es la pendiente en los bordes y l el parámetro que nos da el ancho del escalón. Si tenemos un intervalo $(-a, a)$ donde queremos que nuestra función sea distinta de 0 y 0 fuera de este, entonces $l = a - \frac{2.5}{r}$ es un parámetro óptimo para que $\alpha(a) \approx 0$. Notemos que $\alpha(x) \neq 0$ siempre, por lo que por más que estemos fuera del intervalo, el twist nos sigue haciendo evolucionar a nuestro operador, pero con una velocidad despreciable. En la figura B.1 se observa en particular el $\alpha(x)$ usado para realizar los cálculos de la figura 2.2.

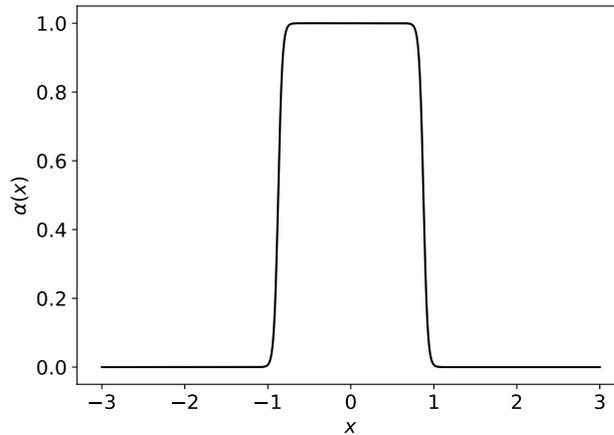


Figura B.1: Gráfico de $\alpha(x)$ dado por la Eq. (B.1) con $r = 20$ y $l = 0,875$.

Apéndice C

Cálculo de $J_{AB} J_{\mathcal{A}} T(x) J_{\mathcal{A}} J_{AB}$:

En este apéndice calcularemos la forma explícita de $J_{AB} J_{\mathcal{A}} T(x) J_{\mathcal{A}} J_{AB}$: para el caso estudiado en el capítulo 6. Es conveniente para esta derivación utilizar una forma simétrica del $T(x)$ la cual no cambia el resultado final. Esta es

$$T(x) = \frac{i}{4} [\psi(x) \partial_x \psi(x) - \partial_x \psi(x) \psi(x)] . \quad (\text{C.1})$$

Recordamos como transforma un fermión bajo la acción de $J_{\mathcal{A}} J_{AB}$

$$J_{AB} J_{\mathcal{A}} \psi(x) J_{\mathcal{A}} J_{AB} = \sum_{j=\{+,-\}} c_j(x) \psi(q_j(x)) . \quad (\text{C.2})$$

La acción de $J = J_{AB} J_{\mathcal{A}}$ sobre $\psi(x) \partial_x \psi(x)$ es

$$J \psi(x) \partial_x \psi(x) J^\dagger = J \psi(x) J^\dagger \partial_x (J \psi(x) J^\dagger) = \sum_{j,i \in \{+,-\}} c_j(x) \psi(q_j(x)) (c_i(x) \psi(q_i(x)))' . \quad (\text{C.3})$$

Entonces

$$\begin{aligned} JT(x)J^\dagger &= \frac{i}{4} \sum_{j,i \in \{+,-\}} [c_j(x) \psi(q_j(x)) (c_i(x) \psi(q_i(x)))' - (c_i(x) \psi(q_i(x)))' c_j(x) \psi(q_j(x))] \\ &= \sum_{i \in \{+,-\}} c_i(x)^2 q_i'(x) \frac{i}{4} [\psi(q_i(x)) \partial \psi(q_i(x)) - \partial \psi(q_i(x)) \psi(q_i(x))] \\ &\quad + \frac{i}{4} \sum_{j,i \in \{+,-\}, j \neq i} [c_j(x) \psi(q_j(x)) (c_i(x) \psi(q_i(x)))' - (c_i(x) \psi(q_i(x)))' c_j(x) \psi(q_j(x))] \\ &= \sum_{i \in \{+,-\}} c_i(x)^2 q_i'(x) T(q_i(x)) + \frac{i}{2} \sum_{j,i \in \{+,-\}, j \neq i} c_j(x) \psi(q_j(x)) (c_i(x) \psi(q_i(x)))' . \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

En la última ecuación se usó que $q_{\pm}(x) \in Z_{\pm}$, y $q_+(x) \neq q_-(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Luego se utilizó $\psi(q_+(x))\psi(q_-(x)) = -\psi(q_-(x))\psi(q_+(x))$. En resumen, tenemos que

$$\begin{aligned}
 : J_{AB} J_A T(x) J_A J_{AB} := & \sum_{i \in \{+, -\}} c_i(x)^2 q'_i(x) : T(q_i(x)) : \\
 & + \frac{i}{2} \sum_{i, j \in \{+, -\}, i \neq j} : c_i(x) \psi(q_i(x)) (c_j(x) \psi(q_j(x)))' : .
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Apéndice D

Propiedades $q_{\pm}(x)$ y $c_{\pm}(x)$

Tenemos $A = (-a, a)$, $B = (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ y $Z_- = (-b, -a)$ y $Z_+ = (a, b)$. Para este caso se puede calcular explícitamente las funciones $q_{\pm}(x)$ y estas son

$$q_{\pm}(x) = \frac{x \left(-a^2(a-b)^2 \pm x \sqrt{4ab(ab - \frac{a^4}{x^2})^2 + (a-b)^4 \frac{a^4}{x^2}} \right)}{2(abx^2 - a^4)}. \quad (\text{D.1})$$

De esta expresión se pueden comprobar las propiedades

$$q_{\pm}(\pm a) = \pm a, \quad q_{\pm}(\mp a) = \pm b, \quad q'_{\pm}(\pm a) = 1. \quad (\text{D.2})$$

La expresión de los $c_{\pm}(x)$ es

$$c_{\pm}(x) = \frac{a}{x} \frac{1}{\frac{a^2}{x} - q_{\pm}(x)} \left(\frac{b}{q_{\pm}(x)^2 - b^2} - \frac{a}{q_{\pm}(x)^2 - a^2} \right)^{-1}. \quad (\text{D.3})$$

Se puede comprobar que

$$c_{\pm}(\pm a) = 1, \quad c_{\pm}(\mp a) = 0. \quad (\text{D.4})$$

De estos resultados se desprende que los pesos $P_{\pm}(x) = \frac{c_{\pm}^2(x)}{q'_{\pm}(x)}$ cumplen

$$P_{\pm}(\pm a) = 1, \quad P_{\pm}(\mp a) = 0. \quad (\text{D.5})$$

Dadas las funciones $f(x)$ definidas en (4.26), podemos deducir que $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Recordamos las funciones $s_i(x)$ que vienen de resolver $f(x) + f(y) = 0$, sobre estas se puede deducir que

$$f(x) + f(s_i(x)) = 0 \Rightarrow s'_i(x) = -\frac{f'(x)}{f'(s_i(x))} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.6})$$

Y como los $q_{\pm}(x) = s_i(s(x))$ por ser el resultado de la composición $J_{AB}J_A$ entonces

$$q'_{\pm}(x) = s'_i(s_0(x))s'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (\text{D.7})$$

Por lo tanto tenemos que los pesos

$$P_{\pm}(x) = \frac{c_{\pm}^2(x)}{q'_{\pm}(x)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (\text{D.8})$$

Por ejemplo sabemos que $P_+(-a) = 0$ por lo tanto si o si $P'_+(-a) = 0$, sino moviéndonos en algún entorno de ese punto obtendríamos $P_+(x) < 0$ que no es posible. También sabemos que $P_+(x) + P_-(x) = 1$, por lo tanto $P'_-(-a) = 0$. Expandiendo esta igualdad con la definición de $P_-(x)$ llegamos a que

$$P'_-(x) = \frac{2c_-(x)c'_-(x)}{q'_-(x)} - \frac{c_-^2(x)q''_-(x)}{q'_-(x)^2} . \quad (\text{D.9})$$

Lo mismo se puede realizar para $P_+(x)$. Entonces se comprueba que

$$P'_{\pm}(\pm a) = 2c'_{\pm}(\pm a) - q''_{\pm}(\pm a) = 0 \Rightarrow c'_{\pm}(\pm a) = \frac{q''_{\pm}(\pm a)}{2} , \quad (\text{D.10})$$

donde se usó que $c_{\pm}(\pm a) = 1$ y $q'_{\pm}(\pm a) = 1$. Por lo tanto hemos deducido todas las propiedades mencionadas en [6.42](#).

Apéndice E

Límites $\lim_{h \rightarrow 0} f_{\pm}^n h^{n+1} = 0$

En la Eq. (6.46) dijimos que los términos derivadas mayores que la tercera se anulan en el límite, en este apartado vamos a dar un argumento de esto. Tanto f_+ como f_- tienen la misma estructura en cuanto a la divergencia. En este caso nos enfocaremos en $f_+(x, h)$ que diverge cuando $x = a$ y $h \rightarrow 0$

$$f_+(x, h) = \frac{1}{g(x, h)^2}, \quad g(a, h) \propto h, \quad g'(a, h) \propto h, \quad g^n(a, 0) \neq 0 \text{ si } n \geq 2, \quad (\text{E.1})$$

donde las derivadas son con respecto al primer parámetro. Por lo tanto, si realizamos derivadas con respecto al primer parámetro, en todos los términos de $f_+^{(n)}(a, h)$ nos queda un factor que posee la forma

$$\frac{g'(a, h)^{k-m}}{g(a, h)^{2+k}} \propto \frac{1}{h^{2+m}} \quad \text{con } 0 \leq k, \quad 0 \leq m \leq k, \quad k + m \leq n, \quad (\text{E.2})$$

donde k y m son números naturales que dan cuenta de cuanto se derivó el denominador y el numerador respectivamente. Se puede encontrar un factor por cada combinación posible de k y m que respete las restricciones. Supongamos que n es par, que en realidad son los únicos términos que aparecen en Eq. (??), entonces se puede mostrar que $m_{max} = \frac{n}{2}$ es el mayor valor que puede tomar m para alguno de estos factores. Para comprobar esto tomemos un par arbitrario (k, m) donde se cumple la condición $k + m = n$ y necesariamente $m \leq k$. Entonces, si $m \neq k$ podemos obtener un nuevo par con un m mayor aumentando el valor de m a expensas de reducir el de k la misma cantidad para mantener $k + m = n$. Este proceso lo podemos realizar $\frac{k-m}{2}$ veces, hasta alcanzar un par que cumple que $m = k$ y esto implica que $m_{max} = \frac{n}{2}$. Por lo tanto

$$f_{\pm}^n(a, h)h^{n+1} \propto h^{n-1-m_{max}} = h^{\frac{n-2}{2}}. \quad (\text{E.3})$$

Por lo que si $n > 2$, entonces todos los límites van a ser 0. Se obtiene el mismo resultado para $f_{-}(x, h)$.

Bibliografía

- [1] Buchholz, D., Doplicher, S., Longo, R. On noether's theorem in quantum field theory. *Annals of Physics*, **170** (1), 1–17, 1986. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491686900862>. [vii](#), [2](#), [3](#), [21](#), [47](#), [65](#)
- [2] Doplicher, S. Local aspects of superselection rules. *Communications in Mathematical Physics*, **85**, 73–86, 1982.
- [3] Doplicher, S., Longo, R. Local aspects of superselection rules. ii. *Communications in Mathematical Physics*, **88** (3), 399–409, 1983.
- [4] Doplicher, S., Longo, R. Standard and split inclusions of von neumann algebras. *Inventiones mathematicae*, **75** (3), 493–536, 1984. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01388641>. [2](#), [21](#)
- [5] Benedetti, V., Casini, H., Magan, J. M. Generalized symmetries and Noether's theorem in QFT. *JHEP*, **08**, 304, 2022. [2](#)
- [6] Benedetti, V., Casini, H., Magan, J. M. ABJ anomaly as a U(1) symmetry and Noether's theorem, 9 2023. [2](#)
- [7] Fewster, C. J., Hollands, S. Quantum energy inequalities in two-dimensional conformal field theory. *Rev. Math. Phys.*, **17**, 577, 2005. [3](#), [43](#), [55](#), [66](#)
- [8] Pal, P. B. Dirac, Majorana and Weyl fermions. *Am. J. Phys.*, **79**, 485–498, 2011. [5](#)
- [9] Haag, R., Kastler, D. An algebraic approach to quantum field theory. *Journal of Mathematical Physics*, **5** (7), 848–861, 1964. URL <https://doi.org/10.1063/1.1704187>. [7](#)
- [10] Reeh, H., Schlieder, S. Bemerkungen zur unitäräquivalenz von lorentzinvarianten feldern. *Nuovo Cim.*, **22** (5), 1051–1068, 1961. [9](#)

- [11] Witten, E. Aps medal for exceptional achievement in research: Invited article on entanglement properties of quantum field theory. *Rev. Mod. Phys.*, **90**, 045003, Oct 2018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.045003>. 9
- [12] Bratteli, O., Robinson, D. W. Operator algebras and quantum statistical mechanics: Volume 1: C*-and W*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States. Springer Science & Business Media, 2012. 11
- [13] Buchholz, D., Wichmann, E. H. Causal Independence and the Energy Level Density of States in Local Quantum Field Theory. *Commun. Math. Phys.*, **106**, 321, 1986. 21
- [14] Buchholz, D., Fredenhagen, K., D'Antoni, C. The Universal Structure of Local Algebras. *Commun. Math. Phys.*, **111**, 123, 1987. 21
- [15] Abate, N., Blanco, D., Koifman, M., Pérez-Nadal, G. Modular conjugation for multicomponent regions. *Phys. Rev. D*, **107** (4), 045015, 2023. 25, 30, 65
- [16] Mintchev, M., Tonni, E. Modular conjugations in 2D conformal field theory and holographic bit threads. *JHEP*, **12**, 149, 2022. 25
- [17] Bueno, P., Casini, H. Reflected entropy, symmetries and free fermions. *Journal of High Energy Physics*, **2020** (5), may 2020. URL [https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2020\)103](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2020)103). 25, 46
- [18] Hollands, S. On the modular operator of mutli-component regions in chiral cft, 2019. URL <https://arxiv.org/abs/1904.08201>. 27, 37
- [19] Arias, R. E., Casini, H., Huerta, M., Pontello, D. Entropy and modular hamiltonian for a free chiral scalar in two intervals. *Phys. Rev. D*, **98**, 125008, Dec 2018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.125008>. 33
- [20] Longo, R., Martinetti, P., Rehren, K.-H. Geometric modular action for disjoint intervals and boundary conformal field theory. *Rev. Math. Phys.*, **22**, 331–354, 2010. 37
- [21] Rehren, K.-H., Tedesco, G. Multilocal fermionization. *Lett. Math. Phys.*, **103**, 19–36, 2013. 37
- [22] Epstein, H., Glaser, V., Jaffe, A. Nonpositivity of energy density in Quantized field theories. *Nuovo Cim.*, **36**, 1016, 1965. 55
- [23] Fewster, C. J. Lectures on quantum energy inequalities, 8 2012. 55

-
- [24] Blanco, D., Casini, H., Leston, M., Rosso, F. Modular energy inequalities from relative entropy. *JHEP*, **01**, 154, 2018. [56](#)
- [25] Bousso, R., Fisher, Z., Leichenauer, S., Wall, A. C. Quantum focusing conjecture. *Phys. Rev. D*, **93** (6), 064044, 2016. [56](#)

Agradecimientos

Primero que nada, agradecer a mi familia, por preocuparse por darme la mejor educación posible, aunque eso implique no llegar a fin de mes.

Quiero agradecer a los profesores de mi secundario, que me dieron un gran empujón y motivación para estudiar esta carrera.

Agradecer a mis amigos, que con su infinita confianza en mí hicieron que yo también confíe y que cuando vuelvo en vacaciones me vuelven a llenar de alegría.

A mis compañeros de carrera y amigos, por siempre saber lo que yo no sé.

A los ingenieros IB20 y físicos IB19, por estar siempre para reírnos un rato, compartir momentos y tener cualquier tipo de charlas, hacen más ameno el tiempo en el instituto.

Agradecer a mis profesores, porque todo lo que me enseñaron se ve plasmado en este trabajo.

Finalmente agradecer a mi director Horacio, porque este trabajo no hubiera sido posible sin su guía y sin su gran motivación.

