

TESIS DE LA CARRERA DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**Efectos cuánticos en teorías no conmutativas
renormalizables**

Lic. Pablo Martín Scuracchio

Autor

Dr. César Daniel Fosco
Director

Diciembre de 2010

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica

San Carlos de Bariloche
Argentina

*A todos aquellos ávidos de conocer cuánto más
retorcidas pueden volverse las QFTs.*

Contenidos

Contenidos	1
Resumen	3
Abstract	5
1. Introducción	7
1.1. No conmutatividad desde el principio	7
1.2. Campos magnéticos intensos	9
1.3. Descripción de álgebras no conmutativas	10
1.4. Operadores de Weyl	10
1.5. Producto estrella	12
1.6. Teoría de perturbaciones no conmutativa	13
1.7. Modelos matriciales	14
1.8. Confinando nuestro sistema	16
2. Borde recto en 2+1 dimensiones	21
2.1. Descripción general del modelo	21
2.2. Scattering de ondas planas	23
2.3. Propagador	27
3. Borde circular en dos dimensiones	31
3.1. Descripción general del modelo	31
3.2. Propagador	33
3.2.1. Análisis del propagador con $\lambda \rightarrow \infty$	35
3.3. Términos de interacción	35
3.3.1. Interacción cíclica	35
3.3.2. Intereacción no cíclica	36
3.3.3. Corrección a primer orden del propagador	36
3.4. Reglas de Feynman	37
4. Borde circular en 2+1 dimensiones	41
4.1. Borde circular	41
4.2. Propagador	42
4.3. Términos de interacción	42
4.4. Corrección a primer orden del propagador	43
4.5. Reglas de Feynman	43

5. Modelo autodual	45
5.1. Descripción general	45
6. Conclusiones	49
Bibliografía	51

Resumen

En este pequeño aporte al conocimiento teórico estudiaremos el problema de tratar de confinar un sistema descrito por una teoría de campos no conmutativa en dos dimensiones espaciales. Si bien una curva en coordenadas conmutativas puede definirse sin inconvenientes, el principio de incertidumbre que introduce la no conmutatividad $\delta\hat{x}^1\delta\hat{x}^2 \geq \theta$ hace que a pequeñas escalas ($\sim \theta$) la curva se vea *difusa*. Esto se produce claramente porque, de manera análoga a lo que sucede en mecánica cuántica, ya no podemos definir con total resolución un punto en el plano. Abordaremos este problema introduciendo un Hamiltoniano cuyos autoestados, en un límite semiclásico, representen la curva que dará forma al confinamiento. En particular nos concentraremos en imponer condiciones de borde tipo Dirichlet para un campo escalar complejo en dos coordenadas espaciales que satisfacen: $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ (más eventualmente el tiempo que consideraremos conmuta con el resto) y analizaremos concretamente dos tipos de curvas, una recta y una circunferencia. Bajo ciertas aproximaciones, calcularemos los propagadores, energías de Casimir y derivaremos las reglas para los diagramas de Feynman no conmutativos.

Palabras clave: No conmutatividad, Confinamiento, Dirichlet, Casimir, Diagramas de Feynman.

Abstract

In this small contribution to theoretical knowledge we will study the problem of trying to confine a system described by a bidimensional non-commutative field theory. While a curve in commutative coordinates can be defined without difficulty, the uncertainty principle that introduces non-commutativity $\delta\hat{x}^1\delta\hat{x}^2 \geq \theta$ means that at small scales ($\sim \theta$) the curve becomes *fuzzy*. This clearly occurs because, similarly to what happens in quantum mechanics, we can't define a point with total resolution on the plane. We address this problem by introducing a Hamiltonian whose eigenstates, in a semiclassical limit, represent the curve we are looking for. In particular, we will focus on imposing Dirichlet boundary conditions for a complex scalar field in two spatial coordinates that satisfy $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ (plus eventually the time) and discuss specifically two types of curves, a straight one and a circle. Under certain approximations, we will calculate the propagators, Casimir energies and derive the rules for noncommutative Feynman diagrams.

Keywords: Noncommutativity, Confinement, Dirichlet, Casimir, Feynman diagrams.

Introducción

“La mayor parte de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general, pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.”

Albert Einstein

1.1. No conmutatividad desde el principio

Las primeras ideas de introducir coordenadas espacio-temporales no conmutativas, tuvieron su motivación en la búsqueda de un *cutoff* ultravioleta efectivo que controlara las divergencias que habían plagado una gran variedad de teorías cuánticas en la época. Fue Snyder quien primero formalizó estas ideas en un artículo totalmente dedicado a este tema [1]. En su momento, el estudio de espacios no conmutativos competía con las ideas de *lattice regularization* y fue opacado no solo por los importantes avances en el programa de renormalización de QFTs que había finalmente probado ser satisfactorio en la predicción numérica de la electrodinámica cuántica, sino también por la introducción de algunas características físicas no deseadas como la pérdida de localidad e invarianza de Lorentz.

La idea detrás de la no conmutatividad del espacio-tiempo se encuentra fuertemente inspirada por conceptos de mecánica cuántica. Un espacio de fases cuántico se define reemplazando de las variables canónicas por operadores hermíticos que obedecen las relaciones de conmutación de Heisenberg $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Este espacio cuántico se encuentra difuminado y la noción de un punto es desplazada por el una *celda de Planck*. Claramente, en el límite en el que $\hbar \rightarrow 0$ la incertidumbre en las variables desaparece y recuperamos el espacio-tiempo ordinario. Von Neumann fue uno de los pioneros en encaminarse a describir de forma rigurosa tales espacios cuánticos y el nacimiento de la geometría no conmutativa tuvo gran influencia en las álgebras que llevan su nombre. En este contexto [2] [3] [4], el estudio

de las propiedades de los espacios no conmutativos se realizó puramente en términos algebraicos (dejando de lado la idea de un *punto*) y permitió importantes generalizaciones.

Las ideas de geometría no conmutativa fueron revividas en los 80s por los matemáticos Connes, Woronowicz y Drinfel'd quienes generalizaron la noción de una estructura diferencial a espacios no conmutativos más generales como álgebras arbitrarias y grupos cuánticos [5] [6]. Junto con la definición de una integración generalizada [7], esto llevó a una descripción, a partir operadores algebraicos, de teorías de gauge del estilo Yang-Mills en una larga clase de espacios no conmutativos. Un ejemplo concreto fue precisamente una teoría de Yang-Mills en un toro no conmutativo [7]. Por bastante tiempo, las aplicaciones físicas estuvieron basadas en interpretaciones geométricas del modelo estándar y sus diversos campos y constantes de acoplamiento. La gravedad fue eventualmente introducida en una especie de unificación [8] cuya idea central detrás de era usar una forma modificada del mecanismo de Kaluza-Klein en el cual las dimensiones ocultas son reemplazadas por estructuras no conmutativas. Este modelo, aunque con ciertos problemas, llevó a pensar que la relatividad general podría quebrarse a la escala de Planck dado que el espacio-tiempo ya no podría ser descrito por una variedad diferenciable. En estas escalas, las fluctuaciones cuánticas-gravitacionales se vuelven importantes y no pueden ser ignoradas [9].

Evidencias más concretas de la no conmutatividad del espacio-tiempo vinieron posteriormente de la mano de Connes, Douglas y Schwartz, quienes observaron que la geometría no conmutativa surge como un posible escenario para ciertos límites de bajas energías en teorías de cuerdas. Seiberg y Witten identificaron límites en los cuales toda la dinámica de cuerdas puede ser descrita en términos de teorías de Yang-Mills no conmutativas [10]. Desde entonces han aparecido más de 1500 artículos introduciendo nuevas aplicaciones a distintas situaciones físicas. Muchos de los recientes desarrollos han motivados en parte por la construcción de instantones y solitones no conmutativos, soluciones de las ecuaciones de movimiento clásicas y del tipo BPS de teorías no conmutativas.

1.2. Campos magnéticos intensos

A modo de cuantificar las ideas de espacios de fases no conmutativos, ilustramos ahora cómo la no conmutatividad emerge de un simple ejemplo de mecánica cuántica: el problema de Landau [11]. Consideremos una partícula cargada de masa m moviéndose en el plano $x = (x_1, x_2)$ y bajo un campo magnético constante B perpendicular al plano de movimiento. El lagrangiano de este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}, \quad (1.1)$$

donde $A_i = \frac{-B}{2} \epsilon_{ij} x^j$ es el vector potencial asociado al campo magnético. El Hamiltoniano del sistema es $\mathcal{H} = \vec{\pi}^2/2m$ siendo $\vec{\pi} = m \dot{\vec{x}} = \vec{p} + \vec{A}$ el momento invariante de gauge (que resulta ser un observable). De las relaciones de conmutación canónicas obtenemos

$$[\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^j] = iB \epsilon^{ij} \quad (1.2)$$

por lo que el espacio de momentos en presencia de un campo magnético resulta ser no conmutativo. Los puntos en el espacio de momentos son reemplazados por celdas de Landau de área B , las cuales actúan como un *cutoff* infrarrojo, es decir, $\vec{\pi}^2 \geq B$. La no conmutatividad espacial aparece en el límite $m \rightarrow 0$ [12] donde el lagrangiano toma la forma:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{B}{2} \dot{x}^i \epsilon_{ij} x^j. \quad (1.3)$$

Este es un lagrangiano de primer orden que ya está expresado en el espacio de fases, donde las coordenadas espaciales x^1 y x^2 son precisamente las variables canónicamente conjugadas. Tenemos entonces que:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = \frac{i}{B} \epsilon^{ij} \quad (1.4)$$

La no conmutatividad de las coordenadas en 1.4 puede derivarse alternativamente de la no conmutatividad en los momentos 1.2 imponiendo los vínculos de primera clase $\vec{\pi} \approx 0$. El límite $m \rightarrow 0$ con B o lo que es equivalente, el límite $B \rightarrow \infty$ de grandes campos magnéticos para una masa m fija, es actualmente la proyección del sistema cuántico al primer nivel de Landau. Este es uno de los ejemplos clásicos de materia condensada en donde la no conmutatividad de las coordenadas aparece en un límite en particular.

1.3. Descripción de álgebras no conmutativas

Al igual que con la cuantización de un espacio de fases clásico, definimos un espacio-tiempo no conmutativo reemplazando las coordenadas espacio-temporales x^i por operadores hermíticos \hat{x}^i , generadores de un álgebra no conmutativa que satisface la siguiente relación:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{x}_i \hat{x}_j - \hat{x}_j \hat{x}_i = i\theta_{ij} \quad (1.5)$$

El caso más simple sucede cuando θ^{ij} es una matriz constante, real y antisimétrica. Dado que las coordenadas ya no conmutan, no pueden ser simultáneamente diagonalizadas y todo el espacio-tiempo es reemplazado por un espacio de estados de Hilbert en donde

$$\delta\hat{x}_i \delta\hat{x}_j \geq \frac{1}{2} |\theta_{ij}| \quad (1.6)$$

En el análisis de teorías no conmutativas supondremos que las coordenadas han sido linealmente combinadas para llevar a θ_{ij} a una forma de bloques antisimétricos de 2x2 (cuando el número de coordenadas es impar, una combinación adecuada permite que una de las variables conmute con el resto):

$$\theta^{ij} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_{\frac{D}{2}} \end{pmatrix} \quad \theta_i = \begin{pmatrix} 0 & \theta_i \\ -\theta_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

1.4. Operadores de Weyl

Consideremos el álgebra conmutativa de funciones sobre un espacio euclídeo D dimensional con el producto definido por la multiplicación ordinaria. Asumiremos que estas funciones viven dentro de un espacio de Schwartz y decrecen rápidamente a cero en infinito [13], es decir, poseen derivadas de orden arbitrario que se anulan en el infinito tanto en el espacio de coordenadas como en el de momentos. La condición de Schwartz también implica que cualquier función $f(x)$ puede ser descrita por su transformada de Fourier:

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} f(x) \quad (1.8)$$

con $f(-k) = f^*(k)$ siempre que $f(x)$ sea real. La cuantización de Weyl nos provee de una correspondencia uno a uno entre el álgebra de funciones o campos en el espacio euclídeo \mathbb{R}^D y el conjunto de operadores \hat{x}^i definidos en la sección 1.3. Dada una función $f(x)$ y su correspondiente coeficiente de Fourier 1.8 introducimos el operador de Weyl:

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \quad (1.9)$$

Notemos que la función exponencial $e^{ik_i \hat{x}^i}$ lleva implícita un orden simétrico para los operadores \hat{x}^i . Escribimos ahora la expresión 1.9 en términos de un mapeo $\hat{\Delta}(x)$ entre operadores y funciones:

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x), \quad (1.10)$$

donde

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_i \hat{x}^i} e^{-ik_i x^i} \quad (1.11)$$

El operador $\hat{\Delta}(x)$ así definido resulta hermítico y describe una base mixta para operadores y campos en el espacio-tiempo. De esta forma podemos interpretar al campo $f(x)$ como la representación en el espacio de coordenadas del operador de Weyl $\hat{\mathcal{W}}[f]$. Notemos que en el caso conmutativo $\theta_{ij} = 0$ el mapeo 1.10 se reduce trivialmente a una función delta $\delta^D(\hat{x} - x)$ y $\hat{\mathcal{W}}[f]|_{\theta=0} = f(\hat{x})$, pero en general para $\theta_{ij} \neq 0$, la relación de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) hace que sea un operador altamente no trivial. Siguiendo los pasos de Szabo [14] podemos ver que la traza (definida en el álgebra de los operadores de Weyl) del mapeo 1.11, $\text{Tr} \hat{\Delta}(x)$, es independiente de x y que a partir de 1.9 $\text{Tr} \hat{\mathcal{W}}[f]$ queda determinada en forma única por una integración en las variables del espacio-tiempo

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x), \quad (1.12)$$

donde hemos escogido la normalización $\text{Tr} \hat{\Delta}(x) = 1$. Los productos de operadores $\hat{\Delta}(x)$ en distintos puntos pueden ser computados usando la relación BCH:

$$e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ik'_i \hat{x}^i} = e^{-\frac{i}{2} \theta_{ij} k_i k'_j} e^{i(k+k')_i \hat{x}^i} \quad (1.13)$$

y junto con 1.10 podemos escribir el producto $\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)$ como

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} e^{i(k+k'')_i \hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij} k_i k''_j} e^{-ik_i x^i - ik''_i y^i} \\ &= \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} d^D z e^{i(k+k'')_i \hat{z}^i} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij} k_i k''_j} e^{-ik_i x^i - ik''_i y^i}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Asumiendo que θ_{ij} es una matriz invertible, la integración gaussiana en los momentos k y k' resulta

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i\theta_{ij}^{-1} (x-z)^i (y-z)^j}.\quad (1.15)$$

En particular, usando la normalización en la traza de $\hat{\Delta}(x)$ y la antisimetría de θ^{-1} puede verse que los operadores $\hat{\Delta}(x)$ forman un conjunto ortonormal,

$$\text{Tr}[(\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y))] = \delta^D(x-y).\quad (1.16)$$

Esta última ecuación, junto con 1.10, implica que la transformación $f(x) \xrightarrow{\hat{\Delta}(x)} \hat{\mathcal{W}}[f]$ es invertible con la inversa dada por

$$f(x) = \text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)).\quad (1.17)$$

La función $f(x)$ obtenida a partir de un operador cuántico es usualmente denominada distribución de Wigner [15]. Por lo tanto el mapeo $\hat{\Delta}(x)$ nos provee de una correspondencia uno a uno entre campos de Wigner y operadores de Weyl.

1.5. Producto estrella

Consideremos el producto de dos operadores de Weyl $\hat{\mathcal{W}}[f]$ y $\hat{\mathcal{W}}[g]$, correspondientes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$. A partir de las ecuaciones 1.10, 1.14 y 1.18 vemos que la representación del producto $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]$ en el espacio de coordenadas puede ser escrita como

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]\hat{\Delta}(x)) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D y d^D z f(y)g(z) e^{-2i\theta_{ij}^{-1} (x-y)^i (x-z)^j}.\quad (1.18)$$

Usando las ecuaciones 1.8, 1.10 y 1.13 deducimos que

$$\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g],\quad (1.19)$$

donde hemos introducido el producto estrella de Groenewold-Moyal [16] [17]:

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k') \tilde{g}(k'' - k') e^{-\frac{i}{2} \theta_{ij} k'^i k''^j} e^{i k'_i x^i} \\ &= f(x) \exp \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j \right) g(x). \end{aligned} \quad (1.20)$$

El producto 1.20 es asociativo, no conmutativo y está definido para θ constante y posiblemente degenerado (para $\theta = 0$ se reduce al producto ordinario de funciones). En general, el conmutador estrella definido por $[f(x), g(x)]_\star \equiv f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x)$ puede representarse en una forma compacta usando el operador bi-diferencial de 1.20:

$$[f(x), g(x)]_\star = 2i f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j \right) g(x). \quad (1.21)$$

La noconmutatividad del espacio tiempo puede entonces estudiarse a través del producto ordinario de operadores de Weyl en el álgebra no conmutativa o de forma equivalente, a través del producto estrella de funciones en el álgebra conmutativa. Debido a la ciclicidad de la traza, la integral

$$\operatorname{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}[f_1] \dots \hat{\mathcal{W}}[f_n] \right) = \int d^D x f_1(x) \star \dots \star f_n(x) \quad (1.22)$$

es invariante bajo permutaciones cíclicas de las funciones $f_i(x)$. En particular podemos ver que

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x) \quad (1.23)$$

puede obtenerse para funciones de Schuartz integrando por partes en \mathbb{R}^D .

1.6. Teoría de perturbaciones no conmutativa

En esta sección introduciremos básicamente la expansión perturbativa de una teoría cuántica de campos en un ambiente no conmutativo. A modo de ilustrar las ideas generales consideraremos un teorá de un campo escalar real masivo junto con una interacción ϕ^4 en D dimensiones. Escrita en términos del operador de Weyl asociado al campo escalar $\phi(x)$, la acción toma

la siguiente forma:

$$S[\phi] = \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu \phi])^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\mathcal{W}}^2[\phi] + \frac{g^2}{4!} \hat{\mathcal{W}}^4[\phi] \right). \quad (1.24)$$

Reescribiendo esta expresión en el espacio de coordenadas con la ayuda de 1.10 y 1.19, obtenemos:

$$S[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{g^2}{4!} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right]. \quad (1.25)$$

Teniendo en cuenta la propiedad 1.23, vemos que la teoría no conmutativa es idéntica a la ordinaria en lo que respecta al término cinético. El propagador libre por ende mantiene la misma forma y los cambios recién se manifiestan en el término de interacción:

$$\text{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}^4[\phi] \right) \prod_{a=1}^4 \int d^D k_a \tilde{\phi}(k_a) \delta^D \left(\sum_{a=1}^4 k_a \right) V(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (1.26)$$

donde el vértice en espacio de momentos es

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} k_{ai} \theta^{ij} k_{bj}}. \quad (1.27)$$

Aquí podemos observar que la dependencia en los momentos k_i del vértice produce que la interacción sea no local. En general el producto estrella introduce diversos efectos físicos dependiendo del tipo de teoría en donde actúe. En los modelos no conmutativos que analizaremos en los capítulos 3-5 veremos en detalle cuáles son las diferencias que aparecen con sus análogos conmutativos.

1.7. Modelos matriciales

En un sentido formal, toda representación operatorial es una representación matricial. Comenzaremos con la descripción de bases matriciales en dos dimensiones y luego veremos brevemente la generalización a un número arbitrario de ellas. Definimos primero una función gaussiana $f_0(x)$ sobre \mathbb{R}^2 :

$$f_0(x) = 2e^{-\frac{1}{\theta}(x_1^2 + x_2^2)}, \quad (1.28)$$

donde $\theta = \theta^{12} = -\theta^{21} > 0$ es una constante. La función $f_0(x)$ definida de esta manera cumple con

$$f_0(x) \star f_0(x) = f_0(x). \quad (1.29)$$

Consideremos, como sucede en un oscilador armónico unidimensional, los operadores de creación y aniquilación a y a^\dagger :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2) & \bar{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - ix_2) \\ \frac{\partial}{\partial a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2) & \frac{\partial}{\partial \bar{a}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Usando estas definiciones, para cualquier función $f(x) \in \mathbb{R}^2$ tenemos:

$$\begin{aligned} (a \star f)(x) &= a(x)f(x) + \frac{\theta_1}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(x) & (f \star a)(x) &= a(x)f(x) - \frac{\theta_1}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(x) \\ (\bar{a} \star f)(x) &= \bar{a}(x)f(x) - \frac{\theta_1}{2} \frac{\partial f}{\partial a}(x) & (f \star \bar{a})(x) &= \bar{a}(x)f(x) + \frac{\theta_1}{2} \frac{\partial f}{\partial a}(x). \end{aligned} \quad (1.31)$$

De forma muy similar a como uno opera con a y a^\dagger sobre el estado vacío el oscilador, podemos observar que

$$\begin{aligned} a \star \bar{a}^{\star m} \star f_0 &= \begin{cases} m\theta_1(\bar{a}^{\star(m-1)} \star f_0) & \text{para } m \geq 1 \\ 0 & \text{para } m = 0. \end{cases} \\ f_0 \star a^{\star n} \star \bar{a} &= \begin{cases} n\theta_1(f_0 \star a^{\star(n-1)}) & \text{para } n \geq 1 \\ 0 & \text{para } n = 0. \end{cases}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

siendo $a^{\star n} = a \star a \star \dots \star a$ (n factores). Con estas herramientas, definimos los elementos de nuestra base matricial f_{mn} como:

$$f_{mn} = \frac{\bar{a}^{\star m} \star f_0 \star a^{\star n}}{\sqrt{n!m!\theta_1^{m+n}}} \quad (1.33)$$

. Veamos ahora qué propiedades tienen estos elementos. De las ecuaciones 1.29 y 1.32 obtenemos:

$$f_{mn}(x) \star f_{kl}(x) = \delta_{nk} f_{ml}(x). \quad (1.34)$$

La regla de multiplicación 1.34 identifica el producto estrella con el producto matricial. Para dos funciones arbitrarias $a(x) = \sum_{mn=0}^{\infty} a_{mn} f_{mn}(x)$ y $b(x) =$

$\sum_{mn=0}^{\infty} b_{mn} f_{mn}(x)$ se tiene

$$a(x) \star b(x) = \sum_{mn=0}^{\infty} (ab)_{mn} f_{mn}(x) \quad (ab)_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} (ab)_{mk} b_{kn}. \quad (1.35)$$

Con la finalidad de describir cualquier función sobre \mathbb{R}^2 los coeficientes a_{mn} deben decaer rápidamente [18]. Finalmente, usando 1.29 y 1.32 obtenemos:

$$\begin{aligned} \int d^2x f_{mn}(x) &= \frac{1}{\sqrt{n!m!\theta_1^{m+n}}} \int d^2x (\bar{a}^{\star m} \star f_0 \star f_0 \star a^{\star n}) \\ &= \delta_{mn} \int d^2x f_0(x) = 2\pi\theta_1 \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

La generalización de nuestra base matricial a D dimensiones puede efectuarse situándonos en un sistema tal que θ^{ij} tiene la forma 1.7. Definimos cada elemento de la base sobre \mathbb{R}^D como:

$$b_{mn}(x) = f_{m_1 n_1}(x_1, x_2) f_{m_2 n_2}(x_3, x_4) \cdots f_{m_{D/2} n_{D/2}}(x_{D-1}, x_D), \quad (1.37)$$

siendo $m = (m_1, m_2, \dots, m_{D/2}) \in \mathbb{R}^{D/2}$ y $n = (n_1, n_2, \dots, n_{D/2}) \in \mathbb{R}^{D/2}$. Una de las ventajas de este tipo de base es que el producto estrella es reemplazado por un producto de infinitas matrices, como se ve claramente en 1.35. Como ejemplo, la expansión de los campos de la acción 1.25 solo en dos dimensiones toma la forma:

$$\phi(x) = \sum_{mn \in \mathbb{N}^{D/2}} \phi_{mn} b_{mn}(x) \quad (1.38)$$

y en particular, el término de interacción $V_I = \int d^2x \phi \star \phi \star \phi \star \phi$ puede escribirse simplemente como:

$$V_I = 2\pi\theta \sum_{mnkl=0}^{\infty} \phi_{mn} \phi_{nk} \phi_{kl} \phi_{lm}. \quad (1.39)$$

1.8. Confinando nuestro sistema

Una de las principales características de la presente Tesis, es la incorporación de la versión no conmutativa de condiciones de borde tipo Dirichlet sobre una curva espacial \mathcal{C} , definida por ejemplo en forma paramétrica como:

$$\mathcal{C}) \quad \xi \longrightarrow z(\xi), \quad (1.40)$$

donde ξ es un parámetro real. Usaremos, en lo que sigue, las relaciones de conmutación 1.5 con $D = 3$. La coordenada $x_0 \equiv t$ representará el tiempo y conmutará con el resto de las variables \hat{x}_1 y \hat{x}_2 siendo $\theta^{ij} = \theta_1 \epsilon^{ij}$. La curva \mathcal{C} es un objeto geométrico estándar y conmutativo. En la imposición de condiciones de borde sobre Non commutative quantum field theories (NCQFT) seguimos el enfoque de [19], donde las condiciones de tipo Dirichlet son impuestas por medio de una interacción específica en la acción del sistema. Esto inducirá condiciones especiales para los campos en una región *difusa* determinada por la curva y al mismo tiempo preservando la propiedad de mantener el correcto límite conmutativo. En los modelos que analizaremos en capítulos posteriores utilizaremos una teoría de un campo escalar complejo masivo junto con dos condiciones de borde no equivalentes dadas por

$$\begin{aligned} S_b^{(L)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_L \int d^3x \phi(x) \star \delta_{\mathcal{C}}(x) \star \phi^\dagger(x) \\ S_b^{(R)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_R \int d^3x \phi^\dagger(x) \star \delta_{\mathcal{C}}(x) \star \phi(x) \end{aligned} \quad (1.41)$$

con el mismo comportamiento en $\theta \rightarrow 0$. Aquí $\delta_{\mathcal{C}}(x)$ es el análogo no conmutativo de la delta bidimensional usual, distribución que solo tiene soporte sobre \mathcal{C} . En términos de la forma paramétrica de \mathcal{C} , el operador de Weyl 1.9 asociado a $\delta_{\mathcal{C}}(x)$ resulta:

$$\hat{\mathcal{W}}[\delta] = \int d\xi |\dot{z}(\xi)| \delta^{(2)}[\hat{x} - z(\xi)], \quad (1.42)$$

con $\dot{z}(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} z(\xi)$. Notemos que solo \hat{x}_1 y \hat{x}_2 son objetos no conmutativos y la función delta tiene sentido si suponemos que

$$\delta^{(2)}[\hat{x} - z(\xi)] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik \cdot [\hat{x} - z(\xi)]}. \quad (1.43)$$

Nos será útil en ciertos casos considerar una representación alternativa de la curva. En efecto, asumiendo que \mathcal{C} puede también ser descrita por la ecuación $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x) = 0$, $\delta_{\mathcal{C}}(x)$ puede ser escrita como sigue:

$$\delta_{\mathcal{C}}(x) = |\nabla \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x)| \delta[\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x)]. \quad (1.44)$$

Esta representación, excepto para ciertos casos espaciales, no es recomendable en un inmediato paso a la versión no conmutativa, dado que ambos factores en 1.44 pueden no conmutar. Existen dos casos en particular en

donde esto no sucede: una función lineal, digamos $\mathcal{F}_C = a_1x_1 + a_2x_2$, y $\mathcal{F}_C = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R$, que corresponde a un círculo de radio R . En el caso general, $|\nabla\mathcal{F}_C|$ no conmutará con \mathcal{F}_C . Sin embargo, con la excepción de que el gradiente se anule en puntos pertenecientes a \mathcal{C} , podemos en principio encontrar una función alternativa \mathcal{F}'_C tal que su gradiente tenga módulo uno y describa la misma curva. Definimos entonces

$$\mathcal{F}'_C(x) = g(x) \mathcal{F}_C(x) \quad (1.45)$$

donde g es una función tal que

$$g(x) \equiv |\nabla\mathcal{F}_C(x)|^{-1} \quad (1.46)$$

para todo $x \in \mathcal{C}$. Cuando $x \notin \mathcal{C}$, g se extiende suavemente de forma arbitraria, con la condición de ser positiva. Siempre que usemos la representación $\mathcal{F}_C = 0$ asumiremos que ya ha sido *normalizada*, y entonces:

$$\delta_C(x) = \delta[\mathcal{F}_C(x)] \quad (1.47)$$

lo que permite que $\delta_C(x)$ sea traducido sin ambigüedades a su versión no conmutativa ¹. La idea intuitiva de que la no conmutatividad introduce una *difusión* y por lo tanto que las condiciones de borde afectarán a los campos en una región finita puede verse más concretamente teniendo en cuenta la relación desarrollada en [20]:

$$S_b^{(R)} = \lambda_R \int dt d^2x \phi^\dagger(t, x) \delta_C(x + i\frac{\theta}{2} \tilde{\partial}) \phi(x) \quad (1.48)$$

con $\tilde{\partial}_j \equiv \epsilon_{jk} \partial_k$. Luego, expandiendo en potencias de θ , $S_b^{(R)} = S_b^{(R)}|_{\theta=0} + \delta S_b^{(R)}$, donde el primer término contiene la parte puramente conmutativa y

$$\begin{aligned} \delta S_b^{(R)} &= -\frac{i\lambda_R \theta}{2} \int dt d^2x \delta_C(x) \epsilon_{jk} \partial_j \phi^\dagger(t, x) \partial_k \phi(t, x) \\ &+ \frac{\lambda_R \theta^2}{8} \int dt d^2x \delta_C(x) \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi^\dagger(t, x) (\delta_{j_1 j_2} \partial^2 - \partial_{j_1} \partial_{j_2}) \phi(t, x) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.49)$$

Esto significa que en una expansión en θ la condición de borde no solo incluye el campo evaluado sobre la curva sino también sus valores en puntos

¹Como de costumbre, mapearemos funciones a sus correspondientes operadores de Weyl.

cercanos, lo que pone en manifiesto la existencia de un *ancho* efectivo. Con el objetivo de comprender el efecto de este término es conveniente volver a la representación operatorial. En el caso $S_b^{(R)}$ tenemos:

$$S_b^{(R)} = 2\pi\theta \lambda_R \int dt \text{Tr}[\phi^\dagger(t)\delta_C\phi(t)] , \quad (1.50)$$

(con $S_b^{(L)}$ la expresión es similar). Para proceder resulta conveniente introducir una representación particular para los campos en donde $\delta_C(x)$ sea diagonal (o lo que es equivalente, que \mathcal{F}_C sea diagonal).

Existe una diferencia cualitativa de acuerdo a si el espectro de \mathcal{F}_C es continuo o discreto y la razón está íntimamente ligada a si la curva conmutativa \mathcal{C} divide al espacio en dos regiones no limitadas o encierra un área finita, respectivamente. El límite conmutativo puede ser obtenido asumiendo que θ es muy pequeño en comparación con un elemento de área; por lo que considerando a \mathcal{F}_C como el Hamiltoniano de una evolución temporal ficticia, podemos obtener sus autovalores aplicando el procedimiento de Bohr-Sommerfeld. De aquí deducimos que el área queda cuantizada solo para una curva que encierra un área finita. Este razonamiento conduce a un posible modo de construir la condición de borde para una dada curva: buscamos un Hamiltoniano tal que en el límite semiclásico tenga una curva de energía constante que coincida con la que estamos considerando. Entonces, el Hamiltoniano menos la correspondiente energía, es esencialmente la ecuación para \mathcal{F}_C . Por ejemplo, $\mathcal{F}_C = a_1x_1 + a_2x_2$ se corresponde con un espectro continuo y $\mathcal{F}_C = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R$ con uno discreto.

Borde recto en 2+1 dimensiones

*"Aprendí bien temprano la diferencia entre saber algo
y saber el nombre de algo"*

Richard Feynman

En una primera aproximación al confinamiento de sistemas no conmutativos analizaremos un modelo de un campo escalar complejo con masa en dos dimensiones espaciales no conmutativas más el tiempo, que supondremos conmutativo. Las curvas en la que impondremos las condiciones de borde serán rectas en donde $x_2 = \text{cte}$. Expandiendo de los campos en ondas planas estudiaremos el comportamiento de paquetes de ondas bajo este tipo de condiciones y obtendremos una expresión explícita para el propagador correspondiente.

2.1. Descripción general del modelo

El modelo que analizaremos consta de un campo escalar complejo con masa definido sobre \mathbb{R}^3 , donde $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ y $[\hat{x}^1, t] = [\hat{x}^2, t] = 0$. La acción euclídea correspondiente en términos del producto estrella introducido en la sección 1.5 resulta:

$$\begin{aligned} S(\phi^\dagger, \phi) &= S_f + S_b \\ &= \int d^3x [(\partial_\mu \phi(x))^\dagger \star \partial_\mu \phi(x) + \mu_0^2 \phi^\dagger(x) \star \phi(x)] + S_b, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde S_b incluye los términos de interacción que utilizaremos para confinar al sistema. Consideremos los dos términos de borde no equivalentes introducidos en 1.8:

$$\begin{aligned} S_b^{(L)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_L \int d^3x \phi(x) \star \delta_C^l(x) \star \phi^\dagger(x) \\ S_b^{(R)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_R \int d^3x \phi^\dagger(x) \star \delta_C^l(x) \star \phi(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aquí $\delta_{\mathcal{C}}^l(x)$ es el analogo no conmutativo de la delta bidimensional usual que solo tiene soporte sobre la recta $x_2 = l$. Como se mencionó en 1.8, el hecho de que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ tenga un espectro continuo se corresponde con curvas que dividen al espacio en dos regiones no acotadas, como sucede en este modelo donde $\mathcal{C} \equiv (x_1, x_2) : x_2 = l$. Sea $|\epsilon\rangle$ una base ortonormal para $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} |\epsilon\rangle = \epsilon |\epsilon\rangle, \quad \langle \epsilon' | \epsilon \rangle = \delta(\epsilon' - \epsilon). \quad (2.3)$$

Expandiendo los campos ϕ y ϕ^\dagger en esta base obtenemos:

$$\phi(t) = \int d\epsilon d\epsilon' \phi_{\epsilon, \epsilon'}(t) |\epsilon\rangle \langle \epsilon'|, \quad \phi^\dagger(t) = \int d\epsilon d\epsilon' \phi_{\epsilon', \epsilon}^*(t) |\epsilon\rangle \langle \epsilon'|. \quad (2.4)$$

Leugo, para el término de borde $S_b^{(R)}$,

$$S_b^{(R)} = 2\pi\theta \lambda_R \int dt \int_{\epsilon} |\phi_{0, \epsilon}(t)|^2 \quad (2.5)$$

que en el límite de Dirichlet ($\lambda \rightarrow \infty$) impone la condición:

$$\phi_{0, \epsilon}(t) = \langle 0 | \phi(t) | \epsilon \rangle = 0, \quad \forall \epsilon \quad (2.6)$$

o en términos de operadores, $\langle 0 | \phi(t) = 0$ (y $\phi^\dagger(t) | 0 \rangle = 0$ ¹). Por otro lado, un procedimiento análogo para el término $S_b^{(L)}$ nos lleva a

$$S_b^{(L)} = 2\pi\theta \lambda_L \int dt \int d\epsilon |\phi_{\epsilon, 0}(t)|^2, \quad (2.7)$$

que en el límite de Dirichlet toma la forma:

$$\phi_{\epsilon, 0}(t) = \langle \epsilon | \phi(t) | 0 \rangle = 0, \quad \forall \epsilon, \quad (2.8)$$

o en términos de operadores $\phi(t) | 0 \rangle = 0$ (y $\langle 0 | \phi^\dagger(t) = 0$). Ambos términos de borde pueden escribirse también como

$$\begin{aligned} S_b^{(R)} &= 2\pi\theta \lambda_R \int dt \text{Tr}[\phi^\dagger(t) \mathcal{P}_{\mathcal{C}} \phi(t)] \\ S_b^{(L)} &= 2\pi\theta \lambda_L \int dt \text{Tr}[\phi(t) \mathcal{P}_{\mathcal{C}} \phi^\dagger(t)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

¹Hemos adoptado una notación tipo bra-ket para denotar elementos de matriz de objetos del álgebra no conmutativa. Estos no deben confundirse con los elementos de matriz en el espacio de Fock de los operadores de campo.

con $\mathcal{P}_c \equiv |0\rangle\langle 0|$. Este razonamiento nos permite ver qué condiciones deben cumplir los campos, independientemente de la forma de la base escogida para su representación, siempre que ella sea continua. Consideremos en particular el término $S_b^{(R)}$. Utilizando las propiedad 1.23 podemos eliminar uno de los productos de Moyal, obteniendo:

$$\begin{aligned} S_b^{(R)} &= \lambda_R \int d^3x \delta(x_2) \phi(x) \star \phi^\dagger(x) \\ &= \lambda_R \int dx_0 dx_1 \phi(x) \star \phi^\dagger(x) \Big|_{x_2=l} \end{aligned} \quad (2.10)$$

. El producto estrella $\phi(x) \star \phi^\dagger(x)$ puede escribirse alternativamente como

$$\phi(x) \star \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \exp(ik_i x_i) \star \exp(-ip_i x_i) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}^\dagger(p) \quad (2.11)$$

con la transformación de Fourier usual $\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(ik_i x_i) \tilde{\phi}(k)$ y teniendo en cuenta que $x_0 \equiv t$. Apartando la dependencia temporal, resolviendo el producto estrella y reemplazando en 2.10, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_b^{(R)} &= \lambda_R \int dx_0 dx_1 \int \frac{dk_0 dp_0}{(2\pi)^6} \exp[ix_0(k_0 - p_0)] \int d^2k d^2p \tilde{\phi}(k) \\ &\quad \tilde{\phi}^\dagger(p) \exp[ix_1(k_1 - p_1)] \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{12}(k_1 p_2 - k_2 p_1)\right] \exp[il(k_2 - p_2)] \\ &= \lambda_R \int \frac{dk_0 dk_1}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(k_0, k_1, l - \frac{\theta k_1}{2}) \tilde{\phi}^\dagger(k_0, k_1, l - \frac{\theta k_1}{2}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Realizando los mismos pasos para el término $S_b^{(L)}$ obtenemos una expresión similar:

$$S_b^{(L)} = \lambda_L \int \frac{dk_0 dk_1}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}^\dagger(k_0, k_1, l + \frac{\theta k_1}{2}) \tilde{\phi}(k_0, k_1, l + \frac{\theta k_1}{2}). \quad (2.13)$$

2.2. Scattering de ondas planas

Consideremos ahora las ecuaciones de movimiento que surgen de la acción $S_f + S_b$ para un borde recto tipo R en $x_2 = 0$ (adoptaremos la notación R y L para referirnos a las condiciones $S_b^{(R)}$ y $S_b^{(L)}$). Tomando la transformada de Fourier de S_f en las coordenadas t y x_1 , obtenemos en tiempo real:

$$(\partial_2^2 + k_2^2) \tilde{\phi}(k, x_2) = \int dx'_2 \tilde{V}(k, x_2, x'_2) \tilde{\phi}(k, x'_2), \quad (2.14)$$

donde hemos introducido el núcleo

$$\tilde{V}(k, x_2, x'_2) = \lambda \delta(x_2 + \frac{\theta k_1}{2}) \delta(x'_2 + \frac{\theta k_1}{2}), \quad (2.15)$$

con la condición de capa de masa $k_2 = \sqrt{k_0^2 - k_1^2 - m^2} > 0$ (usamos el resultado positivo de la raíz cuadrada a fin de considerar una solución que corresponde a una onda plana incidente desde valores negativos de x_2). Para este tipo de soluciones, que trataremos como inherentes a un problema de scattering, utilizaremos la ecuación integral de Lippmann-Schinger (L-S):

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(k, x_2) &= \tilde{\phi}^{(0)}(k, x_2) \\ &+ \int dx'_2 \int dx''_2 \Delta_R(k_2, x_2, x'_2) \tilde{V}(k, x'_2, x''_2) \tilde{\phi}(k, x''_2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

siendo $\tilde{\phi}^{(0)}$ la solución incidente de una partícula libre definida por

$$(\partial_2^2 + k_2^2) \tilde{\phi}^{(0)}(k_2, x_2) = 0 \quad (2.17)$$

y Δ_R la función de Green Retardada que satisface

$$(\partial_2^2 + k_2^2) \Delta_R(k_2, x_2 - x'_2) = \delta(x_2 - x'_2). \quad (2.18)$$

Para este problema en particular, la ecuación 2.18 tiene la siguiente solución explícita:

$$\Delta_R(k_2, x_2 - x'_2) = \frac{i}{2k_2} e^{ik_2|x_2 - x'_2|}. \quad (2.19)$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de L-S 2.16 en una forma análoga a la presentada en [21], obteniendo

$$\tilde{\phi}(k, x_2) = e^{ik_2 x_2} + r(k) e^{-i\frac{\theta k_1 k_2}{2}} e^{ik_2|x_2 + \frac{\theta k_1}{2}|}, \quad (2.20)$$

donde $r(k) \equiv -\frac{\frac{i\lambda}{2k_2}}{1 + \frac{i\lambda}{2k_2}}$. De la solución 2.20 podemos extraer, considerando las situaciones donde $x_2 > 0$ y $x_2 < 0$, las propiedades de las ondas transmitidas y reflejadas respectivamente. En particular estudiaremos la dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión con el momento incidente k_1 . En este sentido, recordemos que la solución de onda tiene una dependencia en x_1 que ha sido factorizada dado que no resulta afectada por la condición de borde. Para la onda transmitida, $\tilde{\phi}_>$, se cumple:

$$\tilde{\phi}_>(k, x_2) = [1 + r(k)] e^{ik_2 x_2} \quad (2.21)$$

siempre que $k_1 > 0$ y $x_2 + \frac{\theta k_1}{2} > 0$ (que resulta trivial) de forma similar al caso conmutativo. En particular, no hay onda transmitida cuando $\lambda \rightarrow \infty$ dado que $r(k) \rightarrow -1$. Notemos sin embargo que existe una diferencia cualitativa para $k_1 < 0$. En este caso la condición $x_2 + \frac{\theta k_1}{2} < 0$ puede satisfacerse y lleva a

$$\tilde{\phi}_>(k, x_2) = e^{ik_2 x_2} + r(k) e^{-i\theta k_1 k_2} e^{-ik_2 x_2}, \quad (2.22)$$

tomando en el límite de Dirichlet la forma:

$$\tilde{\phi}_>(k, x_2) = e^{ik_2 x_2} - e^{-i\theta k_1 k_2} e^{-ik_2 x_2}. \quad (2.23)$$

Esta expresión es sustancialmente diferente al caso en donde $x_2 + \frac{\theta k_1}{2} > 0$, existe una onda reflejada y el sistema se comporta como si hubiera una pared en $x_2 = -\frac{\theta k_1}{2}$ que solo actúa si $k_1 < 0$ (asumimos que $\theta > 0$). El comportamiento de la onda en $x_2 < 0$, $\tilde{\phi}_<$, es consistente con los resultados obtenidos hasta el momento. Para $k_1 < 0$ y $x_2 + \frac{\theta k_1}{2} < 0$ (que resulta trivial) la pared actúa de forma similar y la solución se reduce a

$$\tilde{\phi}_<(k, x_2) = e^{ik_2 x_2} + r(k) e^{-i\theta k_1 k_2} e^{-ik_2 x_2}. \quad (2.24)$$

Con $x_2 < 0$ y $k_1 > 0$, $\tilde{\phi}_<$ se anula si $x_2 > -\frac{\theta k_1}{2}$ en el límite de Dirichlet y toma la forma 2.24 si $x_2 < -\frac{\theta k_1}{2}$. Vemos entonces que para distintos valores de k_1 tanto la función de onda transmitida como la reflejada se corresponden con el resultado conmutativo cuando $\lambda \rightarrow \infty$, excepto que lo hacen con la pared en $x_2 = -\frac{\theta k_1}{2}$. Resumimos el análisis anterior diciendo que si imaginamos un paquete de ondas con una dispersión no nula en la dirección x_1 , el término de borde R se comporta como si tuviera un ancho finito $\delta x_2 \sim \theta \delta k_1$. O, por aplicación directa del principio de incertidumbre:

$$\delta x_1 \delta x_2 \sim \theta. \quad (2.25)$$

Como prueba de consistencia de la derivación anterior, notemos que la condición 2.6 puede ser escrita como:

$$0 = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \langle 0 | e^{ik \cdot x} | x_2 \rangle \tilde{\phi}(k), \quad \forall x_2; \quad (2.26)$$

quedando implícita la dependencia temporal en $\tilde{\phi}(k)$. Esta expresión conduce directamente a

$$\tilde{\phi}\left(-\frac{x_2}{\theta}; \frac{x_2}{2}\right) = 0 \quad , \quad \forall x_2 \quad , \quad (2.27)$$

o lo que resulta equivalente,

$$\tilde{\phi}\left(k_1; -\frac{\theta k_1}{2}\right) = 0 \quad , \quad \forall k_1 \quad . \quad (2.28)$$

Esto prueba que los campos deben anularse en $x_2 = -\frac{\theta k_1}{2}$ como mencionamos anteriormente. Una simple extensión al caso de la línea recta es el caso de dos líneas rectas paralelas en $x_2 = 0$ y $x_2 = l$. Ahora bien, para cada línea podemos elegir una condición tipo R o L . En el caso RR , el término de borde resultante tiene la forma:

$$\begin{aligned} S_b^{(RR)} &= \lambda \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \left[\tilde{\phi}^\dagger(k_0, k_1; -\frac{\theta k_1}{2}) \tilde{\phi}(k_0, k_1; -\frac{\theta k_1}{2}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\phi}^\dagger(k_0, k_1; l - \frac{\theta k_1}{2}) \tilde{\phi}(k_0, k_1; l - \frac{\theta k_1}{2}) \right] \quad . \quad (2.29) \end{aligned}$$

En particular, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, encontramos que $\tilde{\phi}$ debe satisfacer las condiciones $\tilde{\phi}(k_0, k_1; -\frac{\theta k_1}{2}) = 0$ y $\tilde{\phi}(k_0, k_1; l - \frac{\theta k_1}{2}) = 0$. La solución es no trivial si $k_2 = \frac{n\pi}{l}$, como sucede en el caso conmutativo. Esto permite asegurar que la fuerza de Casimir tiene el mismo valor. Sucede lo mismo si se imponen condiciones del estilo LL . La situación sin embargo cambia si consideramos ambos tipos de borde L y R . Utilizamos una condición tipo R en $x_2 = l$ y otra L en $x_2 = 0$, en el límite de Dirichlet se obtienen las restricciones $\tilde{\phi}(k_0, k_1; l - \frac{\theta k_1}{2}) = 0$ y $\tilde{\phi}(k_0, k_1; \frac{\theta k_1}{2}) = 0$. De esta manera los modos resultan estar cuantizados y satisfacen

$$k_2 = \frac{n\pi}{|l - \theta k_1|} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad . \quad (2.30)$$

La introducción de los dos tipos de borde difiere de los casos RR o LL y conduce a un ancho efectivo $l - \frac{\theta k_1}{2}$. El desplazamiento, claramente simétrico, proviene de una simetría de paridad en el término de interacción con respecto al punto medio $x_2 = l/2$. La energía de Casimir por unidad de longitud o tensión que le corresponde a este caso híbrido puede calcularse

directamente y resulta ser:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{dk_0 dk_1}{(2\pi)^2} \ln \left[1 - e^{-2\sqrt{k_0^2 + k_1^2} |l - \theta k_1|} \right]. \quad (2.31)$$

En el límite $l^2 \gg \theta$ la energía de Casimir tiende al valor conmutativo y crece más rápido que l^{-2} a distancias cortas.

2.3. Propagador

La deducción del propagador para un borde tipo L en $x_2 = 0$ y otro tipo R en $x_2 = l$ no resulta complicada utilizando la forma transformada de los campos en 2.13. La acción $S_f + S_b$ en esta base resulta:

$$\begin{aligned} S_f + S_b = \int \frac{dk_0 dk_1 dx_2}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}^\dagger(k_0, k_1, x_2) [k_0^2 + k_1^2 - \partial_2^2 + m^2 + \lambda_R \delta(x_2 - l + \frac{\theta k_1}{2}) \\ + \lambda_L \delta(x_2 - \frac{\theta k_1}{2})] \tilde{\phi}(k_0, k_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

El propagador $\Delta(k_0, k_1, x_2, y_2) \equiv \Delta(x_2, y_2)$, la inversa de la forma cuadrática en la ecuación anterior, puede obtenerse a partir de la siguiente expresión recurrente:

$$\Delta(x_2, y_2) = \Delta_0(x_2, y_2) - \int dw_2 dz_2 \Delta_0(x_2, w_2) V(w_2, z_2) \Delta(z_2, y_2), \quad (2.33)$$

donde $V(w_2, z_2) = \delta(w_2 - z_2) [\lambda_L \delta(w_2 - \frac{\theta k_1}{2}) + \lambda_R \delta(w_2 - l + \frac{\theta k_1}{2})]$ y $\Delta_0(x_2, y_2)$ es el propagador asociado a la acción libre S_f . De [19]:

$$\Delta_0(x_2, y_2) = \frac{e^{-k_2 |x_2 - y_2|}}{2k_2} = \int \frac{ds}{2\pi} \frac{\exp[is(x_2 - y_2)]}{k_2 + s^2} \quad (2.34)$$

La evaluación en los puntos $x_2 = \frac{\theta k_1}{2}$ y $x_2 = l - \frac{\theta k_1}{2}$ nos permite despejar $\Delta(x_2, y_2)$ en forma explícita. Si tomamos $\lambda_R = \lambda_L = \lambda$ y evaluamos el límite

$\lambda \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_2, y_2) &= \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[e^{-k_{\parallel}|x_2-y_2|} \right. \\
&- \frac{1}{1 - e^{-2k_{\parallel}|l-\theta k_1|}} e^{-k_{\parallel} \left(|x_2-l+\frac{\theta k_1}{2}| + |y_2-l+\frac{\theta k_1}{2}| \right)} \\
&- \frac{1}{1 - e^{-2k_{\parallel}|l-\theta k_1|}} e^{-k_{\parallel} \left(|x_2-\frac{\theta k_1}{2}| + |y_2-\frac{\theta k_1}{2}| \right)} \\
&+ \frac{e^{-k_{\parallel}|l-\theta k_1|}}{1 - e^{-2k_{\parallel}|l-\theta k_1|}} e^{-k_{\parallel} \left(|x_2-l+\frac{\theta k_1}{2}| + |y_2-\frac{\theta k_1}{2}| \right)} \\
&+ \left. \frac{e^{-k_{\parallel}|l-\theta k_1|}}{1 - e^{-2k_{\parallel}|l-\theta k_1|}} e^{-k_{\parallel} \left(|x_2-\frac{\theta k_1}{2}| + |y_2-l+\frac{\theta k_1}{2}| \right)} \right]. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Si bien 2.35 representa el caso de un borde tipo L en $x_2 = 0$ y otro tipo R en $x_2 = l$, podemos apropiadamente tomar $l \rightarrow 0$ para incluir condiciones tipo R y L solo en $x_2 = 0$. En el límite de Dirichlet, donde $\langle 0|\phi|\epsilon \rangle = \langle \epsilon|\phi|0 \rangle = 0 \quad \forall \epsilon$, el propagador $\Delta(x_2, y_2)$ toma la forma simplificada:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_2, y_2) &= \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[e^{-k_{\parallel}|x_2-y_2|} - e^{-k_{\parallel} \left(|x_2+\frac{\theta k_1}{2}| + |y_2+\frac{\theta k_1}{2}| \right)} \right. \\
&- \left. e^{-k_{\parallel} \left(|x_2-\frac{\theta k_1}{2}| + |y_2-\frac{\theta k_1}{2}| \right)} \right]. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Ambos tipos de condiciones en $x_2 = 0$ permiten que el sistema adquiera simetrías de paridad y conjugación de carga $\phi \rightarrow \phi^\dagger$, $\phi^\dagger \rightarrow \phi$. La expresión 2.36, que resulta comportarse en forma simétrica frente a una onda con valores positivos y negativos del momento incidente k_1 , despierta interés en el análisis de un paquete de ondas con una dispersión no nula en k_1 . De los resultados de la sección 2.2 vemos que el efecto de ambos tipos de borde es producir un ensanchamiento efectivo de la pared en $x_2 = 0$ que interactúa en forma diferente para cada componente de Fourier del paquete. Consideremos en concreto un paquete de ondas con un momento definido $k_2 = K$ y una distribución gaussiana en k_1 dada por $g(k_1)$ con momento medio $k_1 = P$. La expresión para la solución de onda 2.20 con la condición de capa de masa $k_2 = \sqrt{k_0^2 - k_1^2 - m^2}$ y tomando $\lambda \rightarrow \infty$ es entonces:

$$\phi(x_1, x_2, t) = \int \frac{dk_1}{2\pi} g(k_1) e^{ik_1 x_1 - i\sqrt{k_1^2 + K^2 + m^2} t} \left(e^{iK x_2} - e^{-i\frac{\theta k_1 K}{2}} e^{iK|x_2 + \frac{\theta k_1}{2}|} \right) \quad (2.37)$$

Si bien esta solución proviene de implementar solo la condición tipo R , puede generalizarse para ambos tipos de condiciones resolviendo la ecuación 2.16 con $\tilde{V}(k; x_2, x'_2) = \lambda [\delta(x_2 + \frac{\theta k_1}{2}) \delta(x'_2 + \frac{\theta k_1}{2}) + \delta(x_2 - \frac{\theta k_1}{2}) \delta(x'_2 - \frac{\theta k_1}{2})]$, donde

hemos igualado $\lambda_R = \lambda_L = \lambda$. La expresión para el paquete toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, t) = & \int \frac{dk_1}{2\pi} g(k_1) e^{ik_1 x_1 - i\sqrt{k_1^2 + K^2 + m^2} t} [e^{ik_2 x_2} - e^{-i\frac{\theta k_1 k_2}{2}} e^{ik_2 |x_2 + \frac{\theta k_1}{2}|} \\ & - (e^{ik_2 |x_2 + \frac{\theta k_1}{2}|} e^{i2k_2 |\frac{\theta k_1}{2}|} - e^{ik_2 |x_2 - \frac{\theta k_1}{2}|}) \gamma(k_1, k_2, \theta)], \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde

$$\gamma(k_1, k_2, \theta) = \frac{e^{i\frac{\theta k_1 k_2}{2}} - e^{-i\frac{\theta k_1 k_2}{2}} e^{i2k_2 \frac{|\theta k_1}{2}|}}{e^{i2k_2 |\theta k_1|} - 1}. \quad (2.39)$$

Para aquellas componentes del paquete con $k_1 > 0$ la solución se reduce a la ecuación 2.37 y para aquellas con $k_1 < 0$ la expresión es exactamente la misma intercambiando $\theta k_1/2 \rightarrow -\theta k_1/2$, como esperábamos que sucediera dada la simetría del sistema. Siguiendo los pasos de [22] [23] en el análisis de un paquete de ondas para el caso particular de una condición tipo R , desarrollamos el término que corresponde a la energía $\sqrt{k_1^2 + K^2 + m^2}$ a segundo orden en $k_1 - P$ y definimos la distribución gaussiana $g(k_1) = \exp[-\alpha(k_1 - P)^2/2]$. En la región donde $x_2 + \frac{\theta k_1}{2} > 0$ la solución se anula como ya vimos y en donde $x_2 + \frac{\theta k_1}{2} < 0$ la ecuación 2.37 se reduce a:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, t) = & e^{iKx_2} \frac{e^{i[Px_1 - \epsilon t]}}{\sqrt{2\pi(\alpha + i2\beta t)}} e^{\frac{-(x_1 - v_g t)^2}{(2\alpha + i4\beta t)}} \\ & - e^{-iKx_2} \frac{e^{i[P(x_1 - \theta K) - \epsilon t]}}{\sqrt{2\pi(\alpha + i2\beta t)}} e^{\frac{-(x_1 - \theta K - v_g t)^2}{(2\alpha + i4\beta t)}}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\epsilon \equiv k_0(P)$, $v_g \equiv \frac{\partial k_0}{\partial k_1}(P)$ y $\beta \equiv \frac{\partial^2 k_0}{\partial k_1^2}(P)$. Comparando con la situación conmutativa, la solución reflejada se ve trasladada o *demorada* por un valor $K\theta$ en la variable x_1 .

Borde circular en dos dimensiones

“Lo que observamos no es la naturaleza en sí, sino la naturaleza expuesta a nuestro método de cuestionamiento.”

Werner Heisenberg

Como describimos en la sección 1.8, el confinamiento en un volumen finito de teorías no conmutativas no es nada trivial. En el modelo que describimos a continuación implementamos un borde circular en un modelo de un campo escalar complejo con interacciones del estilo ϕ^4 , sobre un espacio de dos dimensiones espaciales no conmutativas. Una de las herramientas principales que utilizaremos es la base matricial introducida en 1.7. En esta representación, obtendremos el propagador que incorpora la información del borde y derivaremos las reglas de Feynman asociadas a la expansión diagramática.

3.1. Descripción general del modelo

El modelo que analizaremos consta de un campo escalar complejo con masa definido sobre \mathbb{R}^2 , donde $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$. La acción euclídea correspondiente en términos del producto estrella introducido en la sección 1.5 resulta:

$$\begin{aligned} S(\phi^\dagger, \phi) &= S_f + S_b + S_I \\ &= \int d^2x [(\partial_\mu \phi(x))^\dagger \star \partial_\mu \phi(x) + \mu_0^2 \phi^\dagger(x) \star \phi(x)] + S_b + S_I, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde S_I contiene los términos de interacción que describiremos luego en 3.3 y S_b incluye los términos de borde previamente introducidos en 1.8:

$$\begin{aligned} S_b^{(L)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_L \int d^2x \phi(x) \star \delta_C(x) \star \phi^\dagger(x) \\ S_b^{(R)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_R \int d^2x \phi^\dagger(x) \star \delta_C(x) \star \phi(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aquí, $\delta_C(x)$ es el analogo noconmutativo de la delta bidimensional conmutativa que tiene soporte sobre un círculo de radio R . Si bien λ_R y λ_L son en principio arbitrarias, las tomaremos iguales en lo que sigue. Pasando a la representación operatorial, el término de borde puede escribirse como

$$S_b = 2\pi\theta \lambda \text{Tr}[\phi^\dagger \delta_C \phi + \phi \delta_C \phi^\dagger], \quad (3.3)$$

donde δ_C toma la forma:

$$\delta_C = \delta[\mathcal{F}_C] = \delta(\sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} - R). \quad (3.4)$$

Introducimos $\hat{a} = (\hat{x}_1 + i\hat{x}_2)/\sqrt{2\theta}$ y $\hat{a}^\dagger = (\hat{x}_1 - i\hat{x}_2)/\sqrt{2\theta}$ con el objeto de poder escribir a la delta operatorial δ_C como

$$\delta[\mathcal{F}_C] = \delta[\sqrt{2\theta}(\sqrt{\hat{n} + 1/2} - \frac{R}{\sqrt{2\theta}})] , \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.5)$$

Aquí \hat{n} representa el operador de número de un oscilador armónico unidimensional. Notemos que para que la función \mathcal{F}_C pueda anularse, el radio debe quedar restringido a

$$\frac{R}{\sqrt{2\theta}} = \sqrt{N + \frac{1}{2}}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

Con estas consideraciones, el siguiente paso es escoger una representación adecuada para el campo escalar. En este caso escogemos una base matricial que diagonaliza a δ_C y que se corresponde, como mencionamos en 1.7, con los autoestados de un oscilador armónico a través del operador de creación $\hat{a}^\dagger \equiv \frac{\hat{x}_1 - i\hat{x}_2}{\sqrt{2\theta}}$. Expandiendo los campos ϕ y ϕ^\dagger en esta base obtenemos:

$$\phi = \sum_{nm=0}^{\infty} \phi_{nm} |n\rangle \langle m|, \quad \phi^\dagger = \sum_{nm=0}^{\infty} \phi_{mn}^* |n\rangle \langle m|, \quad (3.7)$$

donde los estados $|n\rangle$ satisfacen

$$\mathcal{F}_C |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \quad (3.8)$$

Siguiendo los pasos de la sección 2.5 con la excepción de que ahora el espectro para \mathcal{F}_C es discreto, obtenemos:

$$S_b^{(R)} = 2\pi\theta \lambda_R \sum_{n=0}^{\infty} |\phi_{0n}|^2, \quad (3.9)$$

Al tomar el límite $\lambda_R \rightarrow \infty$ encontramos que el campo ϕ debe satisfacer la condición

$$\phi_{0n} = \langle 0|\phi|n\rangle = 0, \quad \forall n. \quad (3.10)$$

Consideremos ahora el término $S_f + S_b$ expandiendo a los campos según 3.7:

$$\begin{aligned} S_f + S_b = & 2\pi\theta \sum_{n,m,k,l=0}^{\infty} \{ \phi_{nm}^\dagger [(G_{mnkl}^0 + \lambda(\delta_{m,l}\delta_{n,k}\delta_{N,k} \\ & + \delta_{k,n}\delta_{l,m}\delta_{N,m})] \phi_{kl} \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

El subíndice N , sobre el cual no estamos sumando, es un parámetro constante que queda definido una vez que fijemos el radio R de nuestro sistema según la relación 3.6. La inversa de la forma cuadrática G_{mnkl}^0 , que denominaremos propagador libre, ha sido calculada previamente por [24] y tiene la siguiente expresión:

$$\Delta_{nmkl}^0 = \int_0^\infty dv v^{n-m} e^{-v} \sqrt{\frac{m!l!}{n!k!}} \frac{\mathcal{L}_m^{n-m}(v) \mathcal{L}_l^{k-l}(v)}{2\sqrt{\mu_0^2 + v^2}} \delta_{m+k,n+l}, \quad (3.12)$$

donde la función $\mathcal{L}_m^{n-m}(v)$ es el polinomio de Laguerre generalizado. El hecho de que el propagador libre sea la inversa de la forma cuadrática G_{mnkl}^0 significa específicamente que

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} G_{mnkl}^0 \Delta_{lksr}^0 = \sum_{k,l=0}^{\infty} \Delta_{nmkl}^0 G_{klrs}^0 = \delta_{mr} \delta_{ns}. \quad (3.13)$$

3.2. Propagador

Una vez establecida la descripción fundamental del modelo, nos proponemos a encontrar una expresión para el propagador de la acción $S_f + S_b$. Para ello deberemos invertir la forma cuadrática:

$$G_{mnkl} = G_{mnkl}^0 + \lambda(\delta_{m,l}\delta_{n,k}\delta_{N,k} + \delta_{k,n}\delta_{l,m}\delta_{N,m}) \quad (3.14)$$

La relacion entre este nuevo propagador que denominaremos Δ_{mnlk}^λ con G_{mnlk} es similar a 3.13. Seguiremos los pasos de la sección 2.3 y partiremos de la expresión recurrente

$$\begin{aligned}\Delta_{mnlk}^\lambda &= \Delta_{mnlk}^0 - \lambda \sum_{o,p,q,r=0}^{\infty} \Delta_{mnop}^0 (\delta_{p,q} \delta_{o,q} \delta_{N,r} + \delta_{o,r} \delta_{p,q} \delta_{N,p}) \Delta_{qrkl}^\lambda \\ &= \Delta_{mnlk}^0 - \lambda \sum_{g=0}^{\infty} (\Delta_{mnNg}^0 \Delta_{gNlk}^\lambda + \Delta_{mngN}^0 \Delta_{Nglk}^\lambda). \quad (3.15)\end{aligned}$$

Evaluando en una primera instancia en $a = N$ obtenemos:

$$\Delta_{Nnlk}^\lambda = \Delta_{Nnlk}^0 - \lambda \sum_{g=0}^{\infty} (\Delta_{NnNg}^0 \Delta_{gNlk}^\lambda + \Delta_{NngN}^0 \Delta_{Nglk}^\lambda). \quad (3.16)$$

En base a la definición 3.12 separamos la contribucion $\delta_{m+k,n+l}$ de Δ_{nmlk}^0 definiendo una funcion f_{nmlk} tal que

$$\begin{aligned}\Delta_{NmNg}^0 &= f_{NmNg} \delta_{N+N,m+g} \\ \Delta_{NmgN}^0 &= f_{NmgN} \delta_{N+g,N+m} = f_{NmgN} \delta_{g,m}.\end{aligned} \quad (3.17)$$

Reemplazando estas expresiones en 3.16 obtenemos

$$\Delta_{Nnlk}^\lambda = \frac{\Delta_{Nnlk}^0 - \lambda \sum_{g=0}^{\infty} \Delta_{NnNg}^0 \Delta_{gNlk}^\lambda}{1 + \lambda f_{NnmN}}. \quad (3.18)$$

La expresión 3.18 nos permite reemplazar en 3.16 uno de los términos recurrentes en Δ^λ . Sin embargo, dado que el término de borde que hemos introducido consta de dos partes no equivalentes, necesitamos de una segunda evaluación en particular para despejar completamente Δ^λ . En efecto, reemplazando 3.18 en 3.15 y evaluando en $n = N$, obtenemos luego de algunos pasos algebraicos:

$$\Delta_{mNlk}^\lambda = \frac{1}{H_{mn}} \left(\Delta_{mnlk}^0 - \lambda \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\Delta_{mNgN}^0 \Delta_{Nglk}^0}{1 + \lambda f_{NggN}} \right), \quad (3.19)$$

donde

$$H_{mn} = 1 + \lambda \left(f_{mNnN} - \lambda \frac{f_{mN,2N-m,N} f_{N,2N-m,Nm}}{1 + \lambda f_{N,2N-m,2N-m,N}} \right). \quad (3.20)$$

Ahora sí podemos reemplazar 3.19 en 3.15 para despejar completamente el propagador en términos de los parámetros N y λ :

$$\begin{aligned} \Delta_{mnlk}^\lambda &= \Delta_{mnlk}^0 - \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\Delta_{mnzN}^0 \Delta_{Nzlk}^0}{1 + \lambda f_{NzzN}} - \lambda \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{H_{gn}} \left[(\Delta_{mnNg}^0 \right. \\ &\quad \left. - \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\Delta_{mnzN}^0 \Delta_{NzNg}^0}{1 + \lambda f_{NzzN}}) (\Delta_{gNlk}^0 - \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\Delta_{gNyN}^0 \Delta_{Nylk}^0}{1 + \lambda f_{NyyN}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2.1. Análisis del propagador con $\lambda \rightarrow \infty$

En el límite $\lambda \rightarrow \infty$, el propagador toma forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta_{mnlk}^\lambda &= \Delta_{mnlk}^0 - \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\Delta_{mnzN}^0 \Delta_{Nzlk}^0}{f_{NzzN}} - \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{H}_{gn}} \left[(\Delta_{mnNg}^0 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\Delta_{mnzN}^0 \Delta_{NzNg}^0}{f_{NzzN}}) (\Delta_{gNlk}^0 - \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\Delta_{gNyN}^0 \Delta_{Nylk}^0}{f_{NyyN}}) \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

siendo

$$\tilde{H}_{gn} = (f_{mNnN} - \frac{f_{mN,2N-m,N} f_{N,2N-m,Nm}}{f_{N,2N-m,2N-m,N}}). \quad (3.23)$$

3.3. Términos de interacción

Los términos de interacción permiten que los campos puedan acoplarse entre sí y dan lugar a correcciones cuánticas al propagador. La renormalizabilidad de una teoría de campos está por supuesto relacionada con estos términos. En [24] se prueba que el modelo que estamos analizando para un campo real es renormalizable con una interacción $\sim \phi^4$. Para un campo escalar complejo existen dos arreglos no equivalentes del estilo ϕ^4 , que se diferencian en el orden en que multiplicamos a ϕ y ϕ^\dagger . A continuación describimos en detalle cada uno de ellos.

3.3.1. Interacción cíclica

La primera de las interacciones que introduciremos se denomina *cíclica* y su expresión esta dada por

$$V_I^{(c)}(\phi^\dagger, \phi) = g^{(1)} \int d^2x (\phi^\dagger(x) \star \phi(x) \star \phi^\dagger(x) \star \phi(x)). \quad (3.24)$$

Expandiendo los campos según 3.7 y resolviendo los productos estrella obtenemos:

$$V_I^{(c)}(\phi^\dagger, \phi) = 2\pi\theta g^{(1)} \sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} \phi_{mn}^\dagger \phi_{mr} \phi_{sr}^\dagger \phi_{sn} . \quad (3.25)$$

El nombre de esta interacción proviene de la propiedad cíclica del producto estrella 1.22, que nos permite permutar cíclicamente los campos en 3.25 obteniendo el mismo término de interacción.

3.3.2. Intereacción no cíclica

La segunda de las interacciones se denomina *no cíclica* y su expresión es ligeramente diferente al término cíclico:

$$V_I^{(nc)}(\phi^\dagger, \phi) = g^{(2)} \int d^2x (\phi^\dagger(x) \star \phi^\dagger(x) \star \phi(x) \star \phi(x)) \quad (3.26)$$

Expandiendo los campos según 3.7 y luego de resolver los productos estrella obtenemos:

$$V_I^{(nc)}(\phi^\dagger, \phi) = 2\pi\theta g^{(2)} \sum_{s,t,u,z=0}^{\infty} \phi_{sz}^\dagger \phi_{ts}^\dagger \phi_{tu} \phi_{uz} \quad (3.27)$$

Como podemos observar, ninguna permutación cíclica en los campos puede llevar la expresión 3.26 a la forma 3.24. Por esta razón es que mencionamos que no son equivalentes.

3.3.3. Corrección a primer orden del propagador

Calcularemos las correcciones cuánticas al propagador de nuestro modelo con la integral funcional:

$$I(b, b^\dagger) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi^\dagger, \phi \exp \left\{ 2\pi\theta \sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} \left[-\phi_{nm}^\dagger G_{mnrs} \phi_{rs} - g^{(1)} \phi_{mn}^\dagger \phi_{mr} \phi_{sr}^\dagger \phi_{sn} - g^{(2)} \phi_{sm}^\dagger \phi_{ns}^\dagger \phi_{nr} \phi_{rm} + \phi_{nm}^\dagger b_{mn} + b_{nm}^\dagger \phi_{mn} \right] \right\} , \quad (3.28)$$

donde hemos introducido las fuentes para el campo complejo b y b^\dagger . Procedemos ahora de la misma forma que en el caso conmutativo. Extraemos los términos de interacción intercambiando los campos por derivadas funcionales con respecto a sus fuentes y resolvemos la integral funcional, que

solo depende de $S_b + S_f$, obteniendo:

$$I(b, b^\dagger) = \mathcal{N} \exp \left\{ -V_I \left(\frac{\partial}{\partial 2\pi\theta b}, \frac{\partial}{\partial 2\pi\theta b^\dagger} \right) \right\} \exp \left[\sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} 2\pi\theta b_{nm}^\dagger \Delta_{nmrs}^\lambda b_{sr} \right]. \quad (3.29)$$

La expresión para el propagador con todas las correcciones en términos de la integral funcional resulta

$$\langle \phi_{ab}^\dagger \phi_{cd} \rangle = \frac{\partial}{\partial 2\pi\theta b_{ba}} \frac{\partial}{\partial 2\pi\theta b_{dc}^\dagger} I(b, b^\dagger) |_{b, b^\dagger=0}. \quad (3.30)$$

Quedándonos a primer orden en g^1 y g^2 obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{ab}^\dagger \phi_{cd} \rangle = & \left[\frac{\Delta_{dcab}^\lambda}{2\pi\theta} - \frac{g^{(1)}}{(2\pi\theta)^2} \sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} (\Delta_{nrab}^\lambda \Delta_{smmn}^\lambda \Delta_{dcrs}^\lambda + \Delta_{smab}^\lambda \Delta_{nrmn}^\lambda \Delta_{dcrs}^\lambda \right. \\ & + \Delta_{nrab}^\lambda \Delta_{smrs}^\lambda \Delta_{dcmn}^\lambda + \Delta_{smab}^\lambda \Delta_{nrrs}^\lambda \Delta_{dcmn}^\lambda) \\ & + \frac{g^{(2)}}{(2\pi\theta)^2} \sum_{s,t,u,z=0}^{\infty} (\Delta_{utab}^\lambda \Delta_{zuts}^\lambda \Delta_{dcsz}^\lambda + \Delta_{zuab}^\lambda \Delta_{utts}^\lambda \Delta_{dcsz}^\lambda + \Delta_{utab}^\lambda \Delta_{zusz}^\lambda \Delta_{dcts}^\lambda \\ & \left. + \Delta_{zuab}^\lambda \Delta_{utsz}^\lambda \Delta_{dcts}^\lambda) \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

Hemos diferenciado las sumas solo para distinguir entre las contribuciones de las dos interacciones. Los términos $\sim \sum_{m,n,r,s} \Delta_{dcab}^\lambda \Delta_{smrs}^\lambda \Delta_{nrmn}^\lambda$, que no están en 3.31, dan lugar a diagramas desconectados de vacío que no forman parte de la expansión por la correspondiente normalización de la integral funcional a través del factor \mathcal{N} .

3.4. Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman de teorías no conmutativas en donde se ha usado una base matricial para el desarrollo de los campos son levemente más complicadas que en el caso conmutativo. Dado que ahora distinguimos cada campo ϕ_{mn} mediante dos índices y cada propagador Δ_{mnkl}^λ mediante cuatro, utilizamos diagramas de *dos líneas* o *cintas* como se los suele llamar. En la figura 3.1 mostramos el diagrama asociado al propagador obtenido en 3.21. Notemos que las líneas continuas unen los índices internos mientras que las de trazos unen los índices externos. De forma similar a todo campo cargado conmutativo, encontramos dos flechas (una por línea) que apuntan en sentidos opuestos. El término de interacción cíclica proporciona

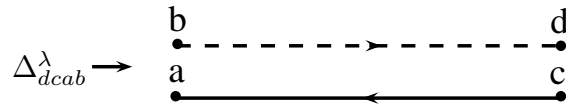


Figura 3.1: Diagrama asociado al propagador Δ_{dcab}^λ .

a la teoría un vértice de cuatro *patas* que diagramáticamente representamos en la figura 3.2. Como podemos observar el vértice cíclico no intercambia tipos de líneas, es decir, toda línea que entra continua sale continua y toda línea que entra de trazos sale de trazos. El término de interacción no cíclica

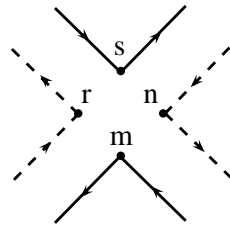


Figura 3.2: Diagrama del vértice cíclico $\phi^\dagger\phi\phi^\dagger\phi$.

proporciona el vértice que representamos en la figura 3.3. A diferencia del vértice cíclico, este puede intercambiar tipos de líneas. La única regla que vale para ambos es que los acoplamientos deben respetar el sentido de las flechas sobre cada línea.

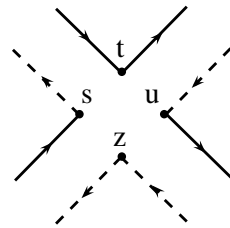


Figura 3.3: Diagrama del vértice no cíclico $\phi^\dagger\phi^\dagger\phi\phi$.

La expansión de $\langle\phi_{ab}^\dagger\phi_{cd}\rangle$ a primer orden en $g^{(1)}$ tiene cuatro contribuciones que usualmente se denominan tadpoles planares (más las de vacío) y pueden observarse en detalle en la figura 3.4. La palabra planar hace referencia a que ninguna cinta del diagrama pasa por debajo de otra. La expansión a primer orden en $g^{(2)}$, que podemos observar en la figura 3.5, introduce dos nuevos diagramas que llamaremos tadpoles no planares. A diferencia de los planares, aquí una de las cintas pasa por debajo de otra. La necesidad

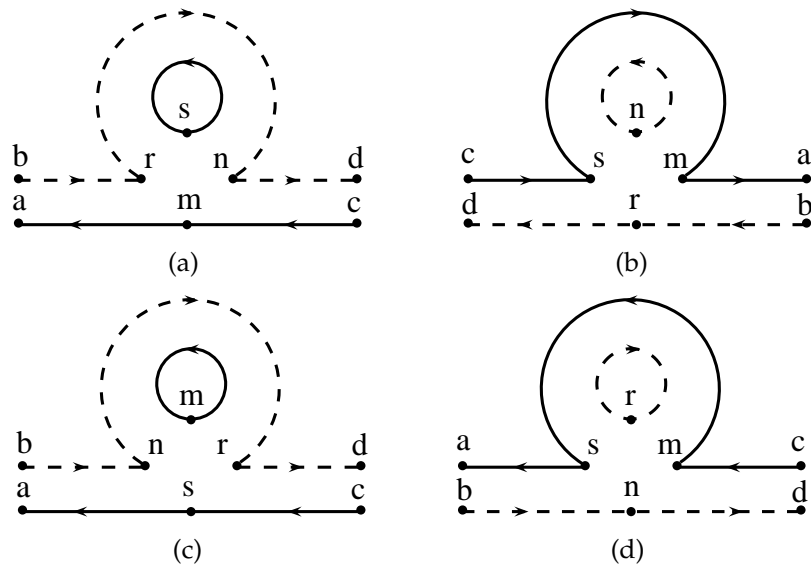


Figura 3.4: Contribuciones del vértice cíclico a $\langle \phi_{ab}^\dagger \phi_{cd} \rangle$ a primer orden en $g^{(1)}$.

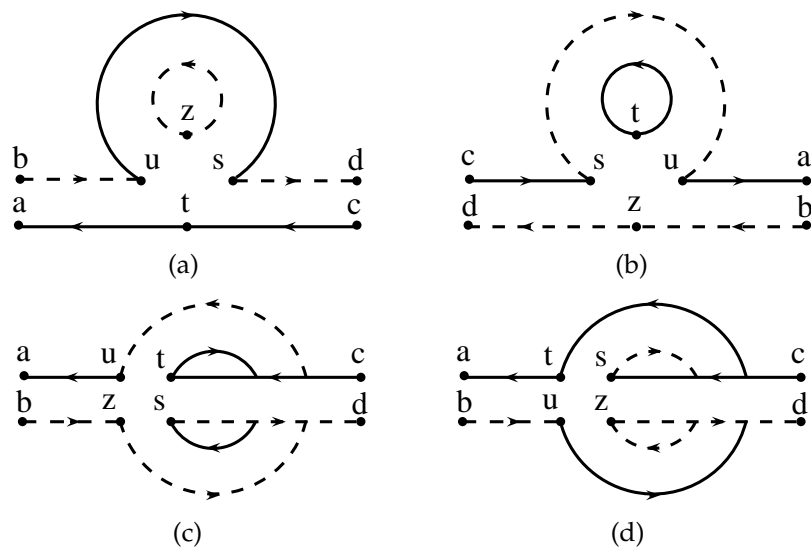


Figura 3.5: Contribuciones del vértice no cíclico a $\langle \phi_{ab}^\dagger \phi_{cd} \rangle$ a primer orden en $g^{(2)}$.

de introducir dos tipos de líneas se basa en las dos posibles contracciones del propagador: Δ_{annb}^λ y Δ_{nabn}^λ . Utilizando la expresión 3.21 obtenemos luego de

algunos pasos la simplificación siguiente:

$$\sum_n \Delta_{annb}^\lambda = \sum_n \delta_{a,b} \left\{ f_{annb} - \lambda \frac{f_{an\alpha N}^2}{1 + \lambda f_{N\alpha\alpha N}} - \frac{\lambda}{H(\beta N)} \left[f_{anN\beta} - \lambda \frac{f_{\beta N\alpha N} f_{N\alpha na}}{1 + \lambda f_{N\alpha\alpha N}} \right]^2 \right\}, \quad (3.32)$$

donde $\alpha = N + n - a$ y $\beta = N + a - n$. Lo interesante de 3.32 es que permite escribir la contracción Δ_{nabn}^λ con solo cambiar $n \leftrightarrow a$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$. (La existencia de la delta $\delta_{a,b}$ deja de lado cualquier regla para b). En el límite $\lambda \rightarrow \infty$, 3.32 toma la forma:

$$\sum_n \Delta_{annb}^\lambda = \sum_n \left[f_{anna} - \frac{f_{an\alpha N}^2}{f_{N\alpha\alpha N}} - \frac{(f_{anN\beta} f_{N\alpha\alpha N} - f_{\beta N\alpha N} f_{N\alpha na})^2}{f_{N\alpha\alpha N} (f_{\beta N\alpha N} f_{N\alpha\alpha N} - f_{\beta N\alpha N}^2)} \right]. \quad (3.33)$$

Borde circular en 2+1 dimensiones

"La imaginación es más importante que el conocimiento..."

Albert Einstein

Este capítulo complementa el modelo presentado en el capítulo 3, añadiendo una dependencia en el tiempo que consideraremos conmuta con el resto de las coordenadas. Como veremos a continuación, esta pequeña generalización no presenta grandes dificultades y llevaremos a cabo su análisis de forma similar al caso de dos dimensiones.

4.1. Borde circular

La acción que describe este modelo incorpora a la que introducimos en 3.1 la dependencia en la variable temporal $x_0 \equiv t$:

$$\begin{aligned} S(\phi^\dagger, \phi) &= S_f + S_b + S_I \\ &= \int d^3x [(\partial_\mu \phi(x))^\dagger \star \partial_\mu \phi(x) + \mu_0^2 \phi^\dagger(x) \star \phi(x)] + S_b + S_I, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde ahora $\mu = 0, 1, 2$. El término S_I contiene las interacciones cíclicas y no cíclicas introducidas en 3.3 y S_b incluye las dos condiciones de borde:

$$\begin{aligned} S_b^{(L)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_L \int d^3x \phi(x) \star \delta_C(x) \star \phi^\dagger(x) \\ S_b^{(R)}(\phi^\dagger, \phi) &= \lambda_R \int d^3x \phi^\dagger(x) \star \delta_C(x) \star \phi(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aquí, $\delta_C(x)$ es el análogo noconmutativo de la delta bidimensional con soporte sobre el círculo de radio R y no incorpora ninguna dependencia en el tiempo. Siguiendo los pasos de la sección anterior, obtenemos para S_b la expresión:

$$S_b = 2\pi\theta\lambda \int dt \text{Tr}[\phi^\dagger \delta_C \phi + \phi \delta_C \phi^\dagger] \quad (4.3)$$

Expandiendo los campos en la base matricial 1.7, el término $S_f + S_b$ toma la forma:

$$S_f + S_b = 2\pi\theta \int dt \sum_{n,m,k,l=0}^{\infty} \{ \phi_{nm}^\dagger(t) [(G_{mnkl}^0 + \lambda(\delta_{m,l}\delta_{n,k}\delta_{N,k} + \delta_{k,n}\delta_{l,m}\delta_{N,m}))] \phi_{kl}(t) \} \quad (4.4)$$

El subíndice N , sobre el cual no estamos sumando, es un parámetro constante que queda definido una vez que fijemos el radio R de nuestro sistema según la relación 3.6. La inversa de la forma cuadrática G_{mnkl}^0 que denominaremos propagador libre, ha sido calculada previamente por [24] y con la sutileza de reemplazar μ_0^2 por $\mu_0^2 + w^2$ tiene en el espacio de frecuencias la siguiente expresión:

$$\Delta_{nmkl}^0(w) = \int_0^\infty dv v^{n-m} e^{-v} \sqrt{\frac{m!l!}{n!k!}} \frac{\mathcal{L}_m^{n-m}(v)\mathcal{L}_l^{k-l}(v)}{2\sqrt{\mu_0^2 + w^2 + v_\theta^2}} \delta_{m+k,n+l}, \quad (4.5)$$

donde w es la transformada de Fourier del tiempo t . La condición 3.13 queda ahora generalizada como:

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} G_{mnkl}^0(w) \Delta_{lkrs}^0(w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \Delta_{nmkl}^0(w) G_{klrs}^0(w) = \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (4.6)$$

4.2. Propagador

La forma de encontrar el propagador en el espacio de frecuencias, con la información del borde circular, es similar a la que realizamos en 3.2 teniendo en cuenta que los propagadores libres Δ_{mnlk}^0 deben reemplazarse por la expresión 4.5 dependiente de w . La forma explícita del propagador en función del tiempo es bastante más complicada dado que requiere la transformación inversa de Fourier de cada uno de los términos en 3.21.

4.3. Términos de interacción

Los términos de interacción no contienen ningún operador dependiente del tiempo, como lo tiene el término cinético. Las expresiones para las inter-

acciones cíclicas y no cíclicas resultan:

$$\begin{aligned}
 V_I^{(c)}(\phi^\dagger, \phi) &= 2\pi\theta g^{(1)} \int dt \sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} \phi_{mn}^\dagger(t) \phi_{mr}(t) \phi_{sr}^\dagger(t) \phi_{sn}(t) \\
 V_I^{(nc)}(\phi^\dagger, \phi) &= 2\pi\theta g^{(2)} \int dt \sum_{s,t,u,z=0}^{\infty} \phi_{sz}^\dagger(t) \phi_{ts}^\dagger(t) \phi_{tu}(t) \phi_{uz}(t)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.4. Corrección a primer orden del propagador

En la corrección a primer orden del propagador necesitamos generalizar la expresión 3.31 para $\langle \phi_{ab}^\dagger(t_1) \phi_{cd}(t_2) \rangle$. Teniendo en cuenta que los términos de interacción contienen ahora una integral en el tiempo, debemos reemplazar:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{dcab}^\lambda &\rightarrow \Delta_{dcab}^\lambda(t_2 - t_1) \\
 \sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} \Delta_{nrab}^\lambda \Delta_{smmn}^\lambda \Delta_{dcrs}^\lambda &\rightarrow \int dt \sum_{m,n,r,s=0}^{\infty} \Delta_{nrab}^\lambda(t - t_1) \Delta_{smmn}^\lambda(0) \Delta_{dcrs}^\lambda(t_2 - t)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.5. Reglas de Feynman

En lo que respecta a la expansión diagramática no hay ninguna modificación con la excepción de tener en cuenta la integración adicional en el tiempo en cada vértice.

Modelo autodual

*"Finalmente, se pondrá el propio Sol en el centro del
Universo."*

Nicolaus Copernicus

La autodualidad en una teoría de campos se encuentra íntimamente relacionada con la posibilidad de encontrar soluciones exactas de movimiento o de correlación. A continuación describiremos cómo con los términos de borde R y L introducidos en 1.8 podemos lograr que el modelo de la sección 3 sea autodual. En [25] se analiza el mismo modelo sin la condición de borde circular.

5.1. Descripción general

El único sistema en donde podemos encontrar una base que diagonalice de forma simultánea a S_f y S_b definidos previamente en 4.1, consiste en el modelo autodual de Langmann-Szabo [25] con una condición de borde circular. Para construir modelos autoduales introducimos un acoplamiento entre ϕ y un campo magnético crítico o un potencial de confinamiento del estilo Grosse-Wulkenhaar. En el primero de ellos, usamos uno de los dos campos magnéticos B_L o B_R , correspondientes a la transformación de gauge $U_{\star 1}$ fundamental o antifundamental, respectivamente. Las derivadas covariantes que actúan sobre ϕ tienen la forma:

$$\begin{aligned} D_\mu^{(L)} \phi &= \partial_\mu \phi + i A_\mu^{(L)} \star \phi \\ D_\mu^{(R)} \phi &= \partial_\mu \phi + i \phi \star A_\mu^{(R)}, \end{aligned} \tag{5.0}$$

con $A_j^{(L,R)} \equiv -\frac{B^{(L,R)}}{2}\epsilon_{jk}x_k$ y $A_0^{(L,R)} \equiv 0$. La acción libre S_f que resulta para cada caso es:

$$\begin{aligned} S_f^{(R)} &= \int d^3x \left[(D_\mu^{(R)}\phi)^\dagger \star D_\mu^{(R)}\phi + m^2\phi^\dagger \star \phi \right] \\ S_f^{(L)} &= \int d^3x \left[(D_\mu^{(L)}\phi)^\dagger \star D_\mu^{(L)}\phi + m^2\phi^\dagger \star \phi \right]. \end{aligned} \quad (5.0)$$

La autodualidad puede ser alcanzada bajo diferentes condiciones, dependiendo de si $\theta B^{(R)} = -2$, $\theta B^{(L)} = 2$. Aplicando estas condiciones en 5.1:

$$\begin{aligned} S_f^{(R)} &= \int d^3x \phi^\dagger \star \left[-\partial_t^2 + \frac{2}{\theta}(a^\dagger \star a + \frac{1}{2}) + m^2 \right] \star \phi \\ S_f^{(L)} &= \int d^3x \phi \star \left[-\partial_t^2 + \frac{2}{\theta}(a^\dagger \star a + \frac{1}{2}) + m^2 \right] \star \phi^\dagger. \end{aligned} \quad (5.0)$$

El sistema con el potencial confinante, por el otro lado, se corresponde con la acción $S_f^{(A)}$:

$$\begin{aligned} S_f^{(A)} &= \int d^3x \left[(\partial_\mu\phi)^\dagger \star \partial_\mu\phi + \frac{2}{\theta^2}\phi^\dagger \star x_j \star \phi \star x_j + m^2\phi^\dagger \star \phi \right] \\ &= \int d^3x \left\{ \phi^\dagger \star (-\partial_\tau^2 + m^2)\phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\theta} \left[\phi^\dagger \star (a^\dagger \star a + \frac{1}{2})\phi + \phi \star (a^\dagger \star a + \frac{1}{2})\phi^\dagger \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.-1)$$

La acción con mayor simetría [26] corresponde al caso del potencial confinante (aquí podemos intercambiar el campo con su adjunto). Existe por tanto una elección natural del término de borde: la suma de R y L , con la misma constante de acoplamiento, es decir, con $\lambda_R = \lambda_L = \lambda$. Escribimos a continuación, en la base matricial, la acción $S_b = S_b^{(R)} + S_b^{(L)}$ bajo las condiciones recién mencionadas.

$$\begin{aligned} S_b^{(R)} &= 2\pi\theta\lambda_R \int dt \sum_n \phi_{Nn}^*(t)\phi_{Nn}(t) \\ S_b^{(L)} &= 2\pi\theta\lambda_L \int dt \sum_n \phi_{nN}^*(t)\phi_{nN}(t). \end{aligned} \quad (5.-1)$$

Aquí N denota el estado correspondiente al radio R de \mathcal{C} . El propagador en espacio de frecuencias puede ser encontrado explícitamente:

$$\langle \phi_{jk}^*(\omega)\phi_{nl}(\omega) \rangle = (2\pi\theta)^{-1} \frac{\delta_{jn}\delta_{kl}}{\omega^2 + m^2 + \frac{2}{\theta}(j+k+1) + \lambda(\delta_{jN} + \delta_{kN})}. \quad (5.0)$$

En el límite de Dirichlet, los vínculos resultantes pueden ser inmediatamente resueltos restringiendo a los campos a ser de la forma:

$$\phi(t) = \sum_{n,m \neq N} \phi_{nm}(t) |n\rangle \langle m|, \quad \phi^\dagger(t) = \sum_{n,m \neq N} \phi_{mn}^*(t) |n\rangle \langle m|. \quad (5.0)$$

Cuando introducimos esta expansión en cada uno de los términos de interacción (cíclico y no cíclico), interpretamos que hemos eliminado uno de los elementos de la base, $|N\rangle$.

La energía de Casimir en este caso es justamente la energía de vacío para el modo ϕ_{NN} . Este objeto tiene la misma acción que un oscilador, por lo que su energía es: $E = \sqrt{\frac{2}{\theta}} (2N + 1)$. En términos de R , esto corresponde a una tensión:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{\theta^{3/2}}. \quad (5.0)$$

Es importante notar que esta energía de vacío diverge con $\theta \rightarrow 0$, es decir, en el límite conmutativo. Los detalles de por qué sucede este fenómeno pueden verse en [27].

Conclusiones

La imposición de condiciones de borde en una teoría no conmutativa no es algo que inmediatamente pueda obtenerse a partir del caso conmutativo. Considerando un campo escalar complejo en dos coordenadas espaciales, vimos que existen dos términos de interacción no equivalentes R y L con los que podemos introducir condiciones del tipo Dirichlet a lo largo de una curva espacial \mathcal{C} . Cada uno de estos términos contiene el producto estrella de ϕ , ϕ^\dagger y $\delta_{\mathcal{C}}$ integrado sobre todo \mathbb{R}^2 (más eventualmente el tiempo, que conmuta con el resto de las variables). Si bien $\delta_{\mathcal{C}}$, el análogo no conmutativo de la delta bidimensional usual, puede obtenerse a partir del mapeo simétrico de Weyl; mostramos que existe una representación alternativa en donde $\delta_{\mathcal{C}} = \delta[\mathcal{F}_{\mathcal{C}}]$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ puede interpretarse como un Hamiltoniano ficticio con curvas de energía constante que coinciden con \mathcal{C} en un límite semiclásico. Siguiendo este tipo de razonamiento dedujimos que la discretización en el espectro de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ aparece únicamente cuando la curva \mathcal{C} encierra un área finita.

En un primer modelo, imponiendo condiciones de borde tipo R y L sobre rectas definidas por $x_2 = \text{cte}$, analizamos el scattering de soluciones en forma de ondas. En particular observamos como ambos tipos de condiciones en $x_2 = 0$ le brindan a la recta un ancho efectivo compatible con el principio de incertidumbre propio de las coordenadas espaciales no conmutativas. Mostramos también los cambios que aparecen en la energía de Casimir para dos *espejos* o condiciones de borde en $x_2 = 0$ y $x_2 = l$ y calculamos el propagador en forma explícita.

En un segundo modelo, pretendiendo encerrar un área finita, impusimos condiciones tipo R y L sobre un círculo de radio R . Expandiendo los campos en una base matricial que diagonaliza a $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ logramos despejar una expresión para el propagador y así deducir las reglas de Feynman para las dos interacciones (cíclica y no cíclica) no equivalentes del estilo $\sim \phi^4$. La generalización de este modelo con la adición del tiempo no introduce nuevos

conceptos, dado que son solo las coordenadas espaciales las que no conmutan.

Finalmente, mostramos que el modelo autodual de un campo escalar complejo con el término de Grosse-Wulkenhaar y con condiciones de borde tipo R y L sobre un círculo de radio R conduce en el límite de Dirichlet a una energía de Casimir $\mathcal{E} \sim \theta^{-3/2}$. En el mismo límite y usando la misma base matricial del segundo modelo calculamos explícitamente el propagador y mostramos que la condición de borde elimina uno de los elementos o modos de la base.

Bibliografía

- [1] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [2] Alain Connes. Noncommutative geometry. *Academic Press*, 1994.
- [3] Giovanni Landi. An introduction to noncommutative spaces and their geometry. 1997.
- [4] J. Madore. An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 257:1–371, 2000.
- [5] A. Connes. Noncommutative differential geometry and the structure of space time. Prepared for NATO Advanced Study Institute on Quantum Fields and Quantum Space Time, Cargese, France, 22 Jul - 3 Aug 1996.
- [6] S. L. Woronowicz. Twisted SU(2) group: An Example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, 23:117–181, 1987.
- [7] A. Connes and Marc A. Rieffel. Yang-Mills for noncommutative two-tori. *Contemp. Math.*, 62:237–266, 1987.
- [8] Ali H. Chamseddine, Giovanni Felder, and J. Frohlich. Gravity in noncommutative geometry. *Commun. Math. Phys.*, 155:205–218, 1993.
- [9] S. Majid. HOPF ALGEBRAS FOR PHYSICS AT THE PLANCK SCALE. *Class. Quant. Grav.*, 5:1587–1606, 1988.
- [10] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 09:032, 1999.
- [11] L. D. Landau and L. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press, Oxford, 1977.

- [12] Gerald V. Dunne and R. Jackiw. 'Peierls substitution' and Chern-Simons quantum mechanics. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 33C:114–118, 1993.
- [13] M.A. Rieffel. Deformation Quantization for Actions of \mathbb{R}^d . *Mem. Am. Math. Soc.*, 106:1, 1993.
- [14] Richard J. Szabo. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. *Phys. Rept.*, 378:207–299, 2003.
- [15] Eugene P. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–760, 1932.
- [16] H. J. Groenewold. On the Principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12:405–460, 1946.
- [17] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 45:99–124, 1949.
- [18] Jose M. Gracia-Bondia and Joseph C. Varilly. Algebras of distributions suitable for phase space quantum mechanics. 1. *J. Math. Phys.*, 29:869–879, 1988.
- [19] C. D. Fosco and G. A. Moreno. Casimir effect in 2+1 dimensional non-commutative theories. *Phys. Lett.*, B659:901–905, 2008.
- [20] Luca Mezincescu. Star Operation in Quantum Mechanics. 2000.
- [21] C. D. Fosco, F. C. Lombardo, and F. D. Mazzitelli. Neumann Casimir effect: a singular boundary-interaction approach. *Phys. Lett.*, B690:189–195, 2010.
- [22] Stephen Gasiorowicz. *Quantum Physics*. International, Wiley, third edition, 2003.
- [23] Cohen, Bernard Diu, and Frank Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley-Interscience, 1977.
- [24] Harald Grosse and Raimar Wulkenhaar. Renormalisation of ϕ^4 -theory on noncommutative r^2 in the matrix base. *JHEP*, 12:019, 2003.
- [25] Edwin Langmann and Richard J. Szabo. Duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces. *Phys. Lett.*, B533:168–177, 2002.

- [26] C. D. Fosco and G. A. Moreno. One-loop effects in a self-dual planar noncommutative theory. *JHEP*, 11:046, 2007.
- [27] C. D. Fosco and P. Scuracchio. Dirichlet boundary conditions in a non-commutative theory. *JHEP*, 09:066, 2010.

Agradecimientos

*"In a little while
Surely you'll be mine
In a little while I'll be there
In a little while this hurt will hurt no more
I'll be home love..."*
In a little while, U2.

Uno no se encuentra nunca solo en el camino del conocimiento, muchas personas son las que colaboran diariamente en cada paso que damos y cada decisión que tomamos. Comienzo entonces por agradecerle a mi familia por todo su apoyo en mi formación como Licenciado y Magister en ciencias físicas. A mamá, papá, Naty, Panchi, tías/os, abuelas/os, primas/os: Gracias!

La distancia está lejos de ser algo bueno en el amor. Vine al instituto en el 2007 estando de novio con la mujer que cambiaría muchas cosas en mí y que sigo amando profundamente en la actualidad. A ella, Estefanía, que ha sabido bancarme en en los peores y mejores momentos de mi estadía en el Instituto: Gracias!

En la búsqueda de nuevas fronteras y la lucha constante frente a cada desafío, las estrategias son importantes. No solo por una cuestión de tiempo, sino por alcanzar una verdadera comprensión de lo que estudiamos. A mi querido director de tesis, César, por su dedicación, su tiempo y sus ganas: Gracias!

En general, uno no invierte todo su tiempo en cuestiones académicas, a menos que se trate de las semanas anteriores a un final o algo parecido (como entregar esta Tesis). A esas personas que he dejado atrás en Mendoza, a aquellas que me han acompañado desde que ingresé al instituto, a mis amigos: Gracias!