

TESIS DE LA CARRERA DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**Teoría de campos en variedades  
con singularidades**

Edith Lorena Losada  
**Maestrando**

Dr. César D. Fosco  
**Director**

San Carlos de Bariloche  
Diciembre de 2007

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina

*Dedicado a mis padres, a mi abuelo y a todos  
aquellos que confiaron en mi, me alentaron a seguir y  
me dieron la oportunidad de poder estar aquí...*

# Resumen

La presencia de condiciones de contorno produce alteraciones en la energía de vacío. En este trabajo se propone un nuevo método que posibilita introducir condiciones de borde no necesariamente perfectas, permitiendo estudiar cómo afecta la inclusión de defectos (bordes) a la energía de Casimir y a la interacción entre dos defectos, dependiendo de la masa del campo cuántico considerado y de cuán perfectas sean las condiciones de contorno. Se analizan el campo escalar real y el campo fermiónico en una y tres dimensiones espaciales.

**Palabras clave:** ENERGÍA DE CASIMIR, FLUCTUACIONES DE VACÍO, CAMPOS.

# Abstract

The presence of boundary conditions produces modifications in the vacuum energy. The method used in this work makes it possible to introduce *soft* boundaries conditions, and to study how defects affect the Casimir energy, calculating the interaction energy between two defects. We have found the dependence on the boundary conditions of the Casimir interaction energy and its relationship with the quantum field mass. We analyzed the real scalar field and the fermionic field in one and three spatial dimensions.

**Keywords:** CASIMIR ENERGY, VACUUM FLUCTUATIONS, FIELDS.

# Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Método</b>	<b>5</b>
<b>3. Cálculo de energías de vacío para un campo escalar real</b>	<b>9</b>
3.1. El caso de un único defecto con un campo escalar real en $D = 1+1$ dimensiones . . . . .	9
3.2. Dos defectos en $D = d+1$ dimensiones . . . . .	14
3.2.1. Una dimensión espacial $d=1$ . . . . .	18
3.2.2. Tres dimensiones espaciales $d=3$ . . . . .	22
<b>4. Cálculo de energías de vacío para un campo fermiónico</b>	<b>26</b>
4.1. Un único defecto en $D = 1+1$ dimensiones . . . . .	26
4.2. Dos defectos en $D = d+1$ dimensiones . . . . .	32
4.2.1. El caso particular $d = 1, g_1 = g_2$ . . . . .	36
4.2.2. El caso particular $d = 3, g_1 = g_2$ . . . . .	43
<b>5. Cálculo de magnitudes locales</b>	<b>53</b>
5.1. Propagador para el campo fermiónico. . . . .	53
5.1.1. Caso particular para un solo defecto . . . . .	60
<b>6. Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>A. Propagador bosónico libre en espacio euclídeo</b>	<b>71</b>
<b>B. Propagador fermiónico libre en espacio euclídeo</b>	<b>72</b>
<b>Referencias</b>	<b>73</b>

# Introducción

La presencia de bordes en una región espacial sobre la cual está definida un campo cuántico, modifica drásticamente el espectro de energías de vacío. Es un efecto puramente cuántico ya que si se consideraran las mismas condiciones de contorno dentro del marco de la electrodinámica clásica no se observaría ninguna variación. Esta *energía de vacío* o *energía de Casimir*, tiene muchas consecuencias físicas interesantes, que van desde la existencia de fuerzas entre superficies metálicas no cargadas hasta efectos potencialmente relevantes en algunos escenarios cosmológicos(1). Por otra parte, en muchas situaciones físicas surgen teorías cuánticas en presencia de campos de fondo, como cuando se consideran los efectos de los campos de fondo gravitacional o electromagnético sobre la amplitud de persistencia del vacío. Los campos cuánticos acoplados con campos de fondo y modelos definidos sobre espacios con fronteras no triviales comparten algunas propiedades importantes. Estos últimos algunas veces pueden ser considerados como un caso especial de los primeros. Los campos de fondo por supuesto modifican el espectro de energía de manera no trivial. Como resultado de esto, la amplitud de persistencia del vacío, obtenida por integración de los campos cuánticos, generalmente se convierte en una funcional complicada del campo de fondo.

Las primeras observaciones sobre éste tema fueron realizadas por Casimir (1948), quien notó que dado que, *en el vacío, el campo electromagnético en realidad no se anula sino que fluctúa*, tales fluctuaciones pueden producir efectos observables en las circunstancias apropiadas.

Cuando cuerpos macroscópicos, no necesariamente cargados, introducen condiciones de contorno, se puede calcular la diferencia de energía de punto cero entre las dos situaciones, esto es con y sin bordes. Para ilustrar este problema, consideraremos como lo hizo originalmente Casimir, que se tienen dos grandes placas paralelas perfectamente conductoras y separadas entre sí a una distancia  $L$ . Por simplicidad se las supone cuadradas y de lado  $a$  con  $a \gg L$ . Al tener al campo electromagnético confinado en el interior del volumen delimitado por las placas, las frecuencias de oscilación de los modos normales están cuantizadas y cada una de ellas está asociada con un estado de energía bien definida. Estas frecuencias dependen de la forma geométrica. Al cambiar la forma geométrica también va a cambiar la energía de vacío. Lo que se hace es calcular la diferencia de energía entre dos configuraciones diferentes (se le resta a una configuración a una distancia  $a$  dada la configuración a una distancia  $L$  mucho mayor). Si luego se toma el límite cuando  $L \rightarrow \infty$  se obtiene la diferencia de energía de punto cero del campo electromagnético entre la condición de borde con las placas separadas a

una distancia  $a$  y la configuración sin condiciones de borde. Al sustraer la energía de vacío infinita, con la energía potencial resultante, se puede calcular la fuerza entre ambas placas. Aparece una fuerza atractiva entre las placas, a pesar de que no están cargadas, esta fuerza disminuye a medida que aumenta la distancia de separación entre ellas. Es un efecto puramente cuántico, ya que si se considerasen las mismas condiciones de contorno para el campo electromagnético dentro del marco de la electrodinámica clásica no aparecería ninguna fuerza. De ésta manera, la fuerza de Casimir es una manifestación directa de la dependencia del vacío cuántico con las condiciones de contorno(2).

Además de lo que tradicionalmente se considera “efecto Casimir”, esto es, el debido a condiciones de contorno estáticas, existen otras situaciones similares en cuanto a manifestación de las fluctuaciones de vacío:

- **Efecto de polarización del vacío por campos externos.**

Otro ejemplo de la teoría cuántica de campos conectado con la existencia de oscilaciones de punto cero es el de la polarización del vacío por campos externos. La propiedad característica de este efecto es la existencia de una energía de vacío no nula que depende de la intensidad del campo. Los bordes, por otro lado, se pueden considerar como un campo externo concentrado. En este caso, la energía de vacío en un volumen de cuantización restringido es análogo a la polarización del vacío de un campo cuantizado, y la fuerza debida al contorno puede pensarse como resultado de esa polarización.

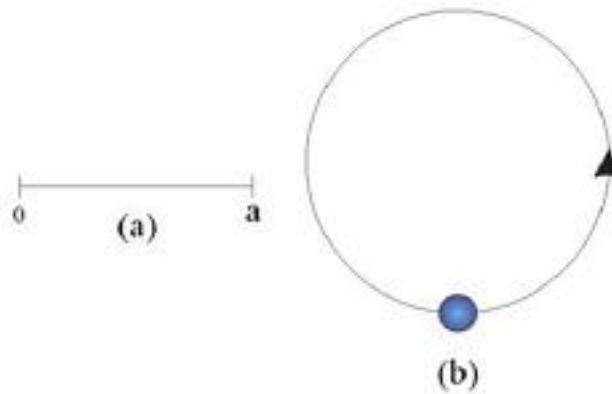
- **Efecto Casimir dinámico.**

Existen al menos dos manifestaciones dinámicas del efecto Casimir y surgen de considerar condiciones de contorno que varían en el tiempo. Una es la aparición de una fuerza que actúa sobre el contorno (como en el caso de las dos placas, salvo que ahora la fuerza cambia en el tiempo). La otra manifestación es más interesante y es la creación de partículas (fotones) a partir del vacío debido a ese movimiento que se atribuye a la acción de campos externos. La energía es transferida desde el campo externo a las partículas virtuales (oscilaciones de vacío) transformándolas en partículas reales. Un ejemplo de este caso lo constituyen dos placas perfectamente conductoras planas donde una de ellas se encuentra sometida a una fuerza externa que hace variar su separación en el tiempo. En este ejemplo tanto la energía de Casimir como la fuerza resultante debida a la interacción entre las placas dependen de la velocidad con que se produce el movimiento. Otro ejemplo se produce al considerar campos de fondo clásicos (triviales o no triviales) a cuyas configuraciones se les permite fluctuar. Generalmente esto se realiza sin modificar ni la topología ni las condiciones de contorno del campo clásico.

- **Espacios con topologías no triviales.**

El efecto Casimir no solo surge en presencia de condiciones de contorno materiales, sino también en espacios con topologías no triviales. Estas aparecen por ejemplo, al imponer condiciones de periodicidad sobre los campos, y tienen un efecto similar al de los contornos materiales. Como consecuencia, aparece una energía de vacío no nula, a pesar de que no hay bordes y de que ninguna fuerza puede actuar sobre ellos (3).

Un ejemplo para este tipo de problemas surge de considerar el intervalo  $0 < x < a$  al que se le imponen las condiciones de contorno:  $\varphi(t, 0) = \varphi(t, a)$  y  $\partial_x \varphi(t, 0) = \partial_x \varphi(t, a)$ , que, como se muestra en la figura (1.1) describen la identificación de los puntos  $x = 0$  con  $x = a$ . Como resultado, se tiene un campo escalar sobre una variedad con la topología de  $S_1$ .



**Figura 1.1:** Condiciones de contorno periódicas

En cuanto a sus aplicaciones, el efecto Casimir juega un rol importante en una variedad de campos de la Física:

1. **En la teoría cuántica de campos:** En el *bag model* de hadrones de la Cromodinámica Cuántica, la energía de Casimir de los campos de quarks y gluones hace una contribución esencial a la energía nucleónica total (4). En teorías de campos de Kaluza-Klein el efecto Casimir ofrece uno de los mecanismos más efectivos de compactificación espontánea de dimensiones espaciales extras. Más aún, mediciones de la fuerza de Casimir proveen oportunidades de obtener condiciones más fuertes para los parámetros de interacción a largo rango y para las partículas elementales más livianas predichas por las teorías de unificación de gauge, supersimetría, supergravedad y teoría de cuerdas.
2. **En la física de materia condensada:** El efecto Casimir da lugar a fuerzas atractivas y repulsivas entre los contornos materiales cercanamente espaciados que dependen de las configuraciones geométricas, de la temperatura y de las propiedades electromagnéticas de la superficie de contorno (5). Es



responsable de algunas propiedades de películas delgadas y debe ser tenida en cuenta en investigaciones de tensión superficial y calor latente.

3. **En gravitación, astrofísica y cosmología:** En espacio-tiempos con topologías no triviales también puede aparecer el efecto Casimir. Un ejemplo se da en la cosmología, de acuerdo con el concepto de la cosmología estándar, el espacio de nuestro Universo es isótropo y homogéneo. Dependiendo del valor de la densidad media de materia, los modelos cosmológicos pueden ser abiertos (espacio hiperbólico curvo de volumen infinito), cuasi-euclídeos (espacio plano infinito en tres dimensiones) o cerrados (espacio esférico curvo de volumen finito). Si bien se puede introducir una topología no trivial en cualquiera de estos modelos - incluyendo el cuasi-euclídeo - mediante la imposición de alguna identificación de puntos, el modelo de Friedman cerrado es topológicamente no trivial e incorpora naturalmente el efecto Casimir.
  
4. **En la física atómica:** Las interacciones de Casimir a largo rango dan lugar a correcciones de los niveles de energía de los estados de Rydberg. Varios efectos del tipo Casimir surgen en cavidades electrodinámico-cuánticas.

En esta Tesis se aborda el estudio del efecto Casimir estático para un campo escalar real y para un campo fermiónico acoplado a un campo de fondo estático determinado por la presencia de uno o dos defectos materiales que modelan las condiciones de contorno. Estos defectos se presentan concentrados en una región de codimensión 1, motivo por el cual se los representa mediante una delta de Dirac con un factor de acoplamiento caracterizado por una constante  $g$ . Si bien la energía de Casimir total en ambos casos diverge, lo que se hace es calcular la *energía de Casimir de interacción* que se obtiene mediante la diferencia entre dos configuraciones de las condiciones de contorno. La obtención de estas energías de interacción entre defectos es muy importante porque a partir de ellas se puede calcular la fuerza resultante que actúa sobre los bordes. Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se desarrolla el caso bosónico correspondiente al campo escalar real para uno y dos defectos en una y tres dimensiones. Si bien el caso bosónico está bastante estudiado sirve como verificación del método con el cual estamos trabajando. En el capítulo 3 se desarrolla el caso fermiónico, para uno y dos defectos en una y tres dimensiones comparándolo con el problema anterior.

## M todo

El método utilizado en esta Tesis para calcular las energías de vacío comienza por encontrar una expresión para la función de partición  $\mathcal{Z}$ , para después relacionarla con la amplitud de persistencia del vacío  $\Gamma$  mediante la relación:  $\mathcal{Z} = e^{-\Gamma}$ . Para eso se trabaja con la acción efectiva en espacio euclídeo en la cual se considera una componente de la acción debida a la interacción con los “bordes” y la acción libre (6). Primero se considera la energía que cuesta modificar el vacío por haber introducido defectos. La energía de vacío  $E$  se puede reescribir entonces como el límite de  $\Gamma/T$  cuando  $T \rightarrow \infty$  donde  $T$  es la extensión del intervalo de tiempo imaginario. En dimensiones espaciales mayores que 1,  $E$  es proporcional al área  $L^{d-1}$  de los defectos (que se supone que son cuadrados de dimensión  $d-1$  de lado  $a$ ). Como  $a \rightarrow \infty$  es conveniente introducir la densidad de energía  $\mathcal{E}$ , de manera tal que:

$$\mathcal{E}_0 \equiv \lim_{T, a \rightarrow \infty} \left( \frac{\Gamma}{a^{d-1} T} \right). \quad (2.1)$$

Para obtener esta densidad de energía, lo que se hace es considerar el volumen contenido en el espacio delimitado por los defectos aplicando condiciones de contorno que pueden ser periódicas, antiperiódicas o nulas (para discretizar los modos de oscilación) y luego pasar al límite continuo. Un ejemplo es tomar condiciones espacio-temporales periódicas. Por ejemplo, considerando un volumen en un espacio-tiempo de dimensión  $D = d + 1 = 3$ , contenido en una caja de paredes planas tal que la separación entre paredes en la dirección  $x_i$  sea  $a_i$ . Para una función de los momentos dada  $f(q_0, q_1, q_2)$  se cumple que:

$$f(q_0, q_1, q_2) = f\left(\frac{2\pi n_1}{a_1}, \frac{2\pi n_2}{a_2}, \frac{2\pi n_3}{a_3}\right)$$

donde los  $n_i$  son los modos de oscilación y los  $k_{i n_i} = \frac{2\pi n_i}{a_i}$  son los números de onda que en este sistema de unidades son iguales a los momentos  $q_{i n_i}$  correspondientes a cada modo. Para obtener el caso continuo, se toma el límite cuando  $a_i \rightarrow \infty$  en cuyo caso, una suma sobre modos se puede reemplazar por una integral. Por simplicidad se supone  $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{aligned} q_{0n_0} = \frac{2\pi n}{T} &\Rightarrow dn_0 = \frac{T}{2\pi} dq_0 \\ q_{1n_1} = \frac{2\pi l}{a} &\Rightarrow dn_1 = \frac{a}{2\pi} dq_1 \end{aligned}$$

$$q_{2n_2} = \frac{2\pi s}{a} \Rightarrow dn_2 = \frac{a}{2\pi} dq_2$$

Entonces, dada una función  $f(q_{0n_0}, q_{1n_1}, q_{2n_2}) = F(n_0, n_1, n_2)$ , en el límite cuando  $T \rightarrow \infty$  y  $a \rightarrow \infty$  se cumple que:

$$\begin{aligned} \lim_{T, a \rightarrow \infty} \sum_{q_n} f(q_{0n_0}, q_{1n_1}, q_{2n_2}) &= \lim_{T, a \rightarrow \infty} \sum_{n_0, n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} F(n_0, n_1, n_2) = \lim_{T, a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(n_0, n_1, n_2) dn = \\ &= \lim_{T, a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{2\pi} T a^2 f(q_0, q_1, q_2) \end{aligned}$$

La generalización a espacios de dimensión  $d$  arbitraria es inmediata, dando como resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{T, a \rightarrow \infty} \sum_{q_{in_i}} f(q_{0n_0}, \dots, q_{0n_d}) &= \\ &= \lim_{T, a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_d}{2\pi} T a^d f(q_0, \dots, q_d) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aplicando esta propiedad se obtiene la densidad de energía de vacío. Además, en el caso de dos defectos, normalmente uno no está interesado en la cantidad  $\mathcal{E}$  sino en lo que se denomina *energía de Casimir de interacción*  $\mathcal{E}_{int}$ , que se obtiene tomando la diferencia entre la configuraciones con un defecto en infinito ( $L \rightarrow \infty$ ) - suficientemente lejos como para que no interactúen - y la que corresponde a una separación finita  $L$  entre los mismos. El origen de este interés es que mediante la variación de esta energía en función de la posición de los defectos se puede obtener la fuerza resultante que actúa sobre los defectos. Para calcular los propagadores los procedimientos son muy similares, salvo que en estos casos además de considerar la acción libre y la acción debida a la interacción, se debe tener en cuenta la acción debida a fuentes externas.

En todos estos cálculos se trabaja dentro el formalismo de integrales de camino, donde se introducen campos auxiliares que viven sobre el defecto para posteriormente trabajar en un espacio de menor dimensión que el espacio-tiempo original. Para reescribir la interacción con los defectos en función de esos campos auxiliares, se utilizan, entre otras, las propiedades que se describen a continuación:

1. En el caso del campo escalar real se aprovecha la *propiedad de las integrales gaussianas*(6):

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \phi(y) A(y, y') \phi(y')\right] &= [\det\left(\frac{A^{-1}}{2\pi}\right)]^{1/2} \\ \times \int \mathcal{D}\chi \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \chi(y) A^{-1}(y, y') \chi(y') + \int d^d y \phi(y) \chi(y)\right] \end{aligned}$$

que en particular, cuando  $\phi(y) = 0$  implica:

$$\left[ \det\left(\frac{A^{-1}(y, y')}{2\pi}\right) \right]^{-1/2} = \int \mathcal{D}\chi \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \chi(y) A^{-1}(y, y') \chi(y')\right]$$

Esta propiedad permite escribir la exponencial que contiene a la acción debida a la interacción como una integral de camino en función de un campo auxiliar (que en este ejemplo correspondería a la variable  $\chi(y)$ ).

2. En el caso del campo fermiónico, la exponencial que contiene a la acción debida a la interacción por la presencia de defectos o bordes se puede escribir como una integral de camino mediante la introducción de variables de Grassmann auxiliares por medio de la *relación para determinantes fermiónicos*:

$$\exp\left[-\int dz \int dz' \bar{\psi}(z) B(z, z') \psi(z')\right] = \left[\det[B^{-1}(z, z')]\right]^{-1} \\ \times \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp\left[\int dz [\bar{\psi}(z) \chi(z) + \bar{\chi}(z) \psi(z)] + \int dz \int dz' \bar{\chi}(z) B^{-1}(z, z') \chi(z')\right].$$

En particular, cuando  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  son nulos se tiene la expresión:

$$\int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp\left[\int dz \int dz' \bar{\chi}(z) B^{-1}(z, z') \chi(z')\right] = \det[B^{-1}(z, z')]$$

La manera en que se resuelven los problemas en esta Tesis no sólo permite desarrollarlos mucho más sencillamente que por métodos tradicionales, sino que también deja abierta la posibilidad de imponer condiciones de contorno denominadas *blandas*. Este tipo de condiciones de contorno, a diferencia de las condiciones de contorno *perfectas* o *duras*, puede describir de manera más realista las propiedades de los materiales. Para condiciones de contorno perfectas, los bordes se comportan como espejos perfectos para todas las frecuencias de las ondas que incidan sobre ellos. Para las condiciones blandas puede ocurrir que una fracción de la onda incidente atraviese la frontera o que haya una dependencia con la frecuencia para la filtración de las ondas que deja pasar. Por otra parte, mediante los métodos tradicionales, para poder resolver un problema es necesario encontrar todos los autovalores y autofunciones de las funciones de onda involucradas. Esto suele ser bastante complicado, incluso mediante la utilización de programas de cálculo matemático. Aquí sólo basta con conocer las funciones de Green y determinantes que, como se podrá ver más adelante se obtienen muy fácilmente por consideraciones de simetría y métodos algebraicos. Trabajos anteriores (7) plantearon el problema de dos defectos para el caso bosónico pero tomando condiciones de contorno duras. En este trabajo se toman condiciones de

contorno blandas, que es similar a considerar *plasma sheets*, láminas conductoras de plasma que deja pasar una fracción de la onda incidente dependiendo de la frecuencia de oscilación de la misma.

# Cálculo de energías de vacío para un campo escalar real

En este capítulo se hacen diferentes cálculos relacionados con la energía de vacío en presencia de defectos para un campo escalar real. En la sección 1 se obtiene una expresión para la energía de vacío para un único defecto en una dimensión espacial. En la sección 2 se consideran dos defectos en dimensión espacial arbitraria  $d$  y posteriormente se analizan los casos particulares en  $d = 1$  y  $d = 3$  para campos masivos y no masivos. El objetivo es estudiar la dependencia de la energía de Casimir con la separación entre defectos, la masa del campo y la constante de interacción  $g$  con el defecto.

## 3.1. El caso de un único defecto con un campo escalar real en $D = 1+1$ dimensiones

La densidad lagrangiana libre para un campo escalar real en el espacio euclídeo tiene la forma:

$$\mathcal{L}_0(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2$$

que, pensada dentro de una integral sin bordes en la acción, se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_0(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi(x)(-\partial^2 + m)\varphi(x). \quad (3.1)$$

Para incluir la interacción con el medio que impone las condiciones de contorno, se agrega a la acción un nuevo término; de modo que  $\mathcal{Z}$ , la función de partición resulta:

$$\mathcal{Z} = e^{-\Gamma} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi)} \quad (3.2)$$

donde:

$$S = S_0 + S_I$$

$$S_0 = \int d^2x \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \int d^2x \varphi(x)(-\partial^2 + m)\varphi(x) \quad (\text{Acción libre})$$

$$S_I = \int d^2x \varphi(x)V(x)\varphi(x) \quad (\text{Acción debida a la interacción}).$$

Se denomina  $x \in \mathfrak{R}^2$  con  $x = (t, x_1)$  y  $p \in \mathfrak{R}^2$  con  $p = (p_0, p_1)$ , a las componentes de la posición y de los momentos, respectivamente.

Si se considera un solo defecto en la posición  $x_1 = 0$  el potencial que consideramos es (8):

$$V(x) = \frac{g}{2} \delta(x_1).$$

El término  $e^{-S_I}$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} e^{-S_I} &= \exp\left[-\frac{g}{2} \int dt \int dx_1 \varphi(x)\delta(x_1)\varphi(x)\right] = \exp\left[-\frac{g}{2} \int dt \varphi^2(t, 0)\right] \\ &= \det\left[-\frac{1}{2\pi g}\right] \int \mathcal{D}\chi \exp\left[-\frac{1}{2g} \int dt \chi^2(t) + i \int dt \int dx_1 \varphi(x)\delta(x_1)\chi(t)\right] \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utiliza la propiedad de las integrales gaussianas. Empleando esta expresión, la función de partición - ecuación (3.2) - resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0} e^{-S_I} = \left[\det\left(-\frac{\mathbf{1}}{2\pi g}\right)\right]^{1/2} \int \mathcal{D}\chi \exp\left[-\frac{1}{2g} \int dt \chi^2(t)\right] \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\frac{1}{2} \int d^2x \varphi(x)(\partial_\mu^2 - m^2)\varphi(x) + i \int d^2x \varphi(x)\delta(x_1)\chi(t)\right] \end{aligned}$$

Volviendo a utilizar la propiedad de las integrales gaussianas, pero esta vez sólo en la integral de camino en la variable  $\varphi$  queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \left[\det\left(-\frac{\mathbf{1}}{2\pi g}\right)\right]^{1/2} \left[\det\left(\frac{-\partial^2 + m^2}{2\pi}\right)\right]^{-1/2} \int \mathcal{D}\chi \exp\left[-\frac{1}{2g} \int dt \chi^2(t)\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{1}{2} \int d^2x \int d^2x' i \delta(x_1)\chi(t) \left[(-\partial^2 + m^2)^{-1}\right]_{(x,x')} i \delta(x'_1)\chi(t')\right]. \end{aligned}$$

Si al operador  $(-\partial^2 + m^2)^{-1}$ , que es el propagador bosónico libre, se lo denomina  $G_B^{(0)}(x, x')$ , entonces:

$$\mathcal{Z} = \left[ \det \left( -\frac{\mathbf{1}}{2\pi g} \right) \right]^{1/2} \left[ \det \left( \frac{-\partial^2 + m^2}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2g} \int dt \chi^2(t) \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt \int dt' \chi(t) G_B^{(0)}(t, 0, t', 0) \chi(t') \right] .$$

Se puede hacer un cambio de variable en la integral de camino del primer determinante para extraer la constante  $g$ . Se considera:

$$\chi = \sqrt{g} \chi' \\ \mathcal{D}\chi = \det(\sqrt{g} \mathbf{1}) \mathcal{D}\chi' .$$

Haciendo el mismo cambio de variable en la integral de camino que queda en la función de partición, resulta:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt \chi^2(t) \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{g}{2} \int dt \int dt' \chi(t) G_B^{(0)}(t, 0, t', 0) \chi(t') \right]$$

$$\text{donde se definió } \mathcal{A} = \left[ \det \left( -\frac{\mathbf{1}}{2\pi} \right) \right]^{1/2} \left[ \det \left( \frac{-\partial^2 + m^2}{2\pi} \right) \right]^{-1/2}$$

Reemplazando la expresión para el propagador bosónico libre en espacio euclídeo  $G_B^{(0)}(x, x')$ , cuya deducción se muestra en el apéndice A:

$$G_B^{(0)}(t, 0, t', 0) = \int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{(p_1^2 + p_0^2 + m^2)} = \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} ,$$

se obtiene que:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt \chi^2(t) \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{g}{2} \int dt \int dt' \chi(t) \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \chi(t') \right] \\ = \mathcal{A} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt \int dt' \chi(t) \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t-t')} \chi(t') \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{g}{2} \int dt \int dt' \chi(t) \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \chi(t') \right] \tag{3.3}$$



$$= \mathcal{A} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \left( \int dt \chi(t) e^{-ip_0 t} \right) \left[ 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right] \right. \\ \left. \times \left( \int dt' e^{ip_0 t'} \chi(t') \right) \right].$$

Haciendo un cambio de variable en la integral de camino para escribirla en función de la transformada de Fourier de la variable de integración:

$$\tilde{\chi}(p_0) = \int dt \chi(t) e^{ip_0 t} \quad \tilde{\chi}^*(p_0) = \int dt \chi^*(t) e^{-ip_0 t} \quad ; \quad \mathcal{D}\chi = \mathcal{D}\tilde{\chi} \quad (3.4)$$

la función de partición se puede escribir como:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \tilde{\chi}^*(p_0) \left[ 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right] \tilde{\chi}(p_0) \right].$$

Omitiendo escribir las tildes, pero teniendo en cuenta que son las variables transformadas, se tiene que:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dp_0 \chi^*(p_0) \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right] \chi(p_0) \right] \\ = \mathcal{A} \left\{ \det \left[ \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right) \right] \right\}^{-1/2} \\ = \mathcal{A} \left\{ \prod_{p_0} \left[ \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right) \right] \right\}^{-1/2}.$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (3.2), se tiene que la amplitud de persistencia del vacío  $\Gamma$  es:

$$\Gamma = -\ln \mathcal{Z} = -\ln \mathcal{A} + \frac{1}{2} \sum_{p_0=-\infty}^{\infty} \ln \left[ \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right) \right]$$

La energía de vacío entonces es <sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Las consideraciones que se hacen para obtener la energía de vacío se desarrollan en el capítulo denominado Método

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma}{T} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{A}}{T} \\
&+ \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{p_0=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \ln \left[ \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right) \right] \\
&= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{A}}{T} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dp_0 \ln \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right).
\end{aligned}$$

La energía de vacío sin el defecto (cuando  $g = 0$ ) es:

$$- \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{A}}{T} - \frac{\ln(2\pi)}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda$$

Renormalizando la energía de vacío de manera que cuando no haya defectos su valor sea nulo, queda:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dp_0 \ln \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right). \quad (3.5)$$

Esta integral es divergente, pero la energía puede ser renormalizada. Esta energía es la que resultaría de redefinir la función de partición tomando:

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi) - S_I(\varphi)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi)}} = \frac{\det^{-1/2}(-\partial^2 + m^2 + g\delta(x_d))}{\det^{-1/2}(-\partial^2 + m^2)}.$$

Entonces:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(-\partial^2 + m^2 + g\delta(x_d))] - \frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(-\partial^2 + m^2)]$$

Expandiendo  $\Gamma$  en potencias de  $g$ :

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \dots$$

se puede ver que:

$$\Gamma^{(0)} = 0$$

$$\Gamma^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(-\partial^2 + m^2)^{-1} g \delta(x_d)]$$

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(-\partial^2 + m^2)^{-1} g \delta(x_d) (-\partial^2 + m^2)^{-1} g \delta(x_d)]$$

esto es equivalente a tener un diagrama de Feynman de un loop con tantos vértices como potencias de  $g$  aparezcan en el desarrollo de  $\Gamma$ . Es decir que cada término del desarrollo va a tener una integral en los momentos que tiene en el numerador  $d^D p$  (siendo  $D = d + 1$ ) y en el denominador  $(p^2)^n$  donde  $n$  es el orden de la expansión en  $g$ . Cuando  $D = 2$  se tiene que a partir de  $n = 2$  los términos

dejan de ser divergentes. En una dimensión arbitraria, siempre va a existir algún valor de  $n$  para el cual los términos dejan de ser divergentes.

Teniendo esto en cuenta, si se denomina  $I(g, \Lambda)$  a la integral:

$$I(g, \Lambda) = \int_0^\Lambda dp_0 f(p_0, g) \quad (3.6)$$

donde  $f(p_0, g) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{g}{2\sqrt{p_0^2 + m^2}} \right)$ , se puede definir una función  $\tilde{I}(g, \Lambda)$  como:

$$\tilde{I}(g, \Lambda) = \int_0^\Lambda dp_0 \left[ f(p_0, g) - f(p_0, 0) - \left. \frac{\partial f(p_0, g)}{\partial g} \right|_{g=0}, g \right]. \quad (3.7)$$

Nótese que se sustrajo sólo hasta primer orden en la derivada por considerarse  $d = 1$  porque los términos de orden superior ya no van a ser divergentes cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Esto permite redefinir la energía quitando los términos divergentes y dejando la predicción finita.

## 3.2. Dos defectos en $D = d+1$ dimensiones

En un espacio de  $D = d + 1$  dimensiones, la densidad lagrangiana libre para un campo escalar real en espacio euclídeo está dada por la ecuación (3.1).

La función de partición  $\mathcal{Z}$  es:

$$\mathcal{Z} = e^{-\Gamma} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi)} \quad (3.8)$$

donde:

$$S = S_0 + S_I$$

$$S_0 = \int d^D x \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \int d^D x \varphi(x) (-\partial^2 + m) \varphi(x) \quad (\text{Acción libre})$$

$$S_I = \int d^D x \varphi(x) V(x) \varphi(x) \quad (\text{Acción debida a la interacción})$$

Si se consideran dos defectos, uno en la posición  $x_d = 0$  y otro en la posición  $x_d = L$ , el potencial que da la interacción con los defectos es:

$$V(x) = \frac{g}{2} [\delta(x_d) + \delta(x_d - L)].$$

Para simplificar la notación se utilizan algunas definiciones, mediante las cuales se denomina  $x \in \mathfrak{R}^D$  e  $y \in \mathfrak{R}^d$  a las componentes de la posición en el espacio-tiempo (donde la componente temporal es  $x_0$ ):

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) = (y, x_d) \quad y = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$$

y a las componentes de los momentos se las denota mediante:

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_{d-1}, p_d) = (q, p_d) \quad q = (p_0, p_1, \dots, p_{d-1}) .$$

De esta manera se puede trabajar en un espacio de dimensión  $d$  donde  $y$  y  $q$  son respectivamente las componentes de la posición y el momento en las direcciones perpendiculares a la que contiene al defecto  $x_d$ .

Trabajando con  $e^{-S_I}$  se puede escribir:

$$\begin{aligned} e^{-S_I} &= \exp \left[ -\frac{g}{2} \int d^D x \varphi(x) (\delta(x_d) + \delta(x_d - L)) \varphi(x) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \varphi(y, 0) (-g \delta(y - y')) \varphi(y', 0) \right] + \\ &+ \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \varphi(y, L) (-g \delta(y - y')) \varphi(y', L) \right] . \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la propiedad de las integrales gaussianas en cada uno de los términos exponenciales, resulta:

$$\begin{aligned} e^{-S_I} &= \left[ \det \left( -\frac{1}{g} \frac{\delta(y-y')}{2\pi} \right) \right] . \\ &\times \int \mathcal{D}\chi_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' i \chi_0(y) \left[ -\frac{1}{g} \delta(y - y') \right] i \chi_0(y') \right. \\ &+ \left. i \int d^d y \varphi(y, 0) \chi_0(y) \right] . \\ &\times \int \mathcal{D}\chi_L \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' i \chi_L(y) \left[ -\frac{1}{g} \delta(y - y') \right] i \chi_L(y') \right. \\ &+ \left. i \int d^d y \varphi(y, L) \chi_L(y) \right] = \\ &= \mathcal{N}_I^{-1} \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\chi_L \exp \left[ -\frac{1}{2g} \int d^d y (\chi_0^2(y) + \chi_L^2(y)) \right] . \\ &\times \exp \left[ i \int d^D x \varphi(x) \left( \delta(x_d) \chi_0(y) + \delta(x_d - L) \chi_L(y) \right) \right] \end{aligned}$$

donde se definió:

$$\mathcal{N}_I = \left( \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ -\frac{1}{2g} \int d^d y \chi^2(y) \right] \right)^2$$

Reemplazando este resultado, la función de partición ec.(3.8), resulta:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0} e^{-S_I} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^D x \varphi(x) (-\partial^2 + m^2) \varphi(x) \right] e^{-S_I}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}_I^{-1} \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\chi_L \exp\left[-\frac{1}{2g} \int d^d y (\chi_0^2(y) + \chi_L^2(y))\right] \\
&\times \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^D x \varphi(x)(-\partial^2 + m^2)\varphi(x)\right. \\
&\left.+ i \int d^D x \varphi(x) \left(\delta(x_d) \chi_0(y) + \delta(x_d - L) \chi_L(y)\right)\right] \\
&= \mathcal{N}_I^{-1} \left[ \det\left(\frac{(-\partial^2 + m^2)\delta(x-x')}{2\pi}\right) \right]^{-1/2} \\
&\times \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\chi_L \exp\left[-\frac{1}{2g} \int d^d y (\chi_0^2(y) + \chi_L^2(y))\right] \\
&\times \exp\left[\frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' i \left(\delta(x_d) \chi_0(y) + \delta(x_d - L) \chi_L(y)\right)\right. \\
&\left.\times \left[(-\partial^2 + m^2)\delta(x-x')\right]^{-1} i \left(\delta(x'_d) \chi_0(y') + \delta(x'_d - L) \chi_L(y')\right)\right].
\end{aligned}$$

Se denomina:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0 &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0} = \left[ \det\left(\frac{(-\partial^2 + m^2)\delta(x-x')}{2\pi}\right) \right]^{-1/2} = \\
&= \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^D x \varphi(x)(-\partial^2 + m^2)\varphi(x)\right]
\end{aligned}$$

con lo cual queda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_0 \mathcal{N}_I^{-1} \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\chi_L \exp\left[-\frac{1}{2g} \int d^d y (\chi_0^2(y) + \chi_L^2(y))\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' \left(\delta(x_d) \chi_0(y) + \delta(x_d - L) \chi_L(y)\right)\right. \\
&\left.\times G_B^{(0)}(x, x') \left(\delta(x'_d) \chi_0(y') + \delta(x'_d - L) \chi_L(y')\right)\right] \\
&= \mathcal{Z}_0 \mathcal{N}_I^{-1} \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\chi_L \exp\left[-\frac{1}{2g} \int d^d y (\chi_0^2(y) + \chi_L^2(y))\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \chi_0(y) G_B^{(0)}(y, 0, y', 0) \chi_0(y')\right. \\
&\left.-\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \chi_0(y) G_B^{(0)}(y, 0, y', L) \chi_L(y')\right. \\
&\left.-\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \chi_L(y) G_B^{(0)}(y, L, y', 0) \chi_0(y')\right. \\
&\left.-\frac{1}{2} \int d^d y \int d^d y' \chi_L(y) G_B^{(0)}(y, L, y', L) \chi_L(y')\right]
\end{aligned}$$

A partir de la expresión para el propagador bosónico libre en en espacio euclídeo  $G_B^{(0)}(x, x')$  desarrollada en el apéndice A, resulta que:

$$\begin{aligned} G_B^{(0)}(y, 0, y', 0) &= G_B^{(0)}(y, L, y', L) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{dp_d}{2\pi} \frac{e^{-iq(y-y')}}{(p_d^2 + q^2 + m^2)} \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{-iq(y-y')}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_B^{(0)}(y, 0, y', L) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{dp_d}{2\pi} \frac{e^{ip_d L}}{(p_d^2 + q^2 + m^2)} e^{-iq(y-y')} \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}} e^{-iq(y-y')}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_B^{(0)}(y, L, y', 0) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{dp_d}{2\pi} \frac{e^{-ip_d L}}{(p_d^2 + q^2 + m^2)} e^{-iq(y-y')} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}} e^{-iq(y-y')}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \end{aligned}$$

Reemplazando ésto en la la función de partición y haciendo un cambio de variables en la integral de camino como se hizo para una sola placa, ec.(3.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\tilde{\chi}_0 \mathcal{D}\tilde{\chi}_L \exp \left[ -\frac{1}{2g} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( \tilde{\chi}_0^*(q) \tilde{\chi}_0(q) + \tilde{\chi}_L^*(q) \tilde{\chi}_L(q) \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\chi}_0^*(q) \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \tilde{\chi}_0(q) - \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\chi}_L^*(q) \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \tilde{\chi}_L(q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\chi}_0^*(q) \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \tilde{\chi}_L(q) - \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\chi}_L^*(q) \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \tilde{\chi}_0(q) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{\chi}_0 \mathcal{D}\tilde{\chi}_L \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \tilde{\chi}_0^*(q) \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right) \tilde{\chi}_0(q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{\chi}_L^*(q) \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right) \tilde{\chi}_L(q) + \tilde{\chi}_0^*(q) \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \tilde{\chi}_L(q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{\chi}_L^*(q) \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \tilde{\chi}_0(q) \right] \right\} \end{aligned}$$

donde se ignoró un factor independiente de L.

Omitiendo escribir las tildes, pero teniendo en cuenta que son las variables transformadas, se tiene que:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\chi_L \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (\chi_0(q) \ \chi_L(q))^* \mathcal{M} \begin{pmatrix} \chi_0(q) \\ \chi_L(q) \end{pmatrix} \right]$$

siendo:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2+m^2}} & \frac{e^{-L\sqrt{q^2+m^2}}}{2\sqrt{q^2+m^2}} \\ \frac{e^{-L\sqrt{q^2+m^2}}}{2\sqrt{q^2+m^2}} & \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2+m^2}} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Usando la fórmula de la integral gaussiana la función de partición se puede escribir de forma mucho mas simple como un determinante:

$$\mathcal{Z} = \left[ \prod_q \det \mathcal{M} \right]^{-1/2} \quad (3.10)$$

### 3.2.1. Una dimensión espacial d=1.

La ecuación (3.10) para d=1 queda:

$$\mathcal{Z} = \left[ \prod_E \det \mathcal{M} \right]^{-1/2}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (3.8), se tiene que la amplitud de persistencia del vacío  $\Gamma$  es:

$$\Gamma = -\ln \mathcal{Z} = \frac{1}{2} \sum_{E_n} \ln \det \mathcal{M}$$

La energía de vacío en este caso es función de la separación L entre los defectos y tiene la forma:

$$\mathcal{E}(L) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \ln \det \mathcal{M} + \text{Términos que no dep. de } L$$

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{E}(L) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 - \left( \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \right]$$

+Términos que no dep. de  $L$

La energía de Casimir de interacción se obtiene tomando la diferencia entre la configuraciones con un defecto en infinito ( $L \rightarrow \infty$ ) - suficientemente lejos como para que no interactúen - y la que corresponde a una separación finita  $L$  entre defectos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Int} &= \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(L) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 - \left( \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left( \frac{\left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 - \left( \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2}{\left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{e^{-2L\sqrt{q^2 + m^2}}}{4(q^2 + m^2) \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2} \right). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{E}_{int} = - \int_0^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left[ 1 - \frac{e^{-2L\sqrt{q^2 + m^2}}}{\left( 1 + \frac{2\sqrt{q^2 + m^2}}{g} \right)^2} \right]. \quad (3.11)$$

Haciendo el cambio de variable  $x = qL$  se tiene:

$$\mathcal{E}_{int} = - \frac{1}{L} \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \ln \left[ 1 - \frac{e^{-2\sqrt{x^2 + (mL)^2}}}{\left( 1 + \frac{2\sqrt{x^2 + (mL)^2}}{gL} \right)^2} \right]$$



si además se llama  $M = m L$  y  $G = g L$  queda:

$$L \mathcal{E}_{int} = - \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{G^2 e^{-2\sqrt{x^2+M^2}}}{(G + 2\sqrt{x^2+M^2})^2} \right)$$

### 3.2.1.1. Masa nula ( $m = 0$ ).

Cuando  $m = 0$  la ecuación se reduce a:

$$L \mathcal{E}_{int} = - \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{G^2 e^{-2x}}{(G + 2x)^2} \right)$$

En el límite para  $G \rightarrow 0$  queda:

$$\lim_{G \rightarrow 0} L \mathcal{E}_{int} = - \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \ln 1 = 0 ,$$

como debe ser, ya que no hay defecto.

En el límite para  $G \rightarrow \infty$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{G \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{G^2 e^{-2x}}{(G + 2x)^2} \right) &= \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{G^2 (1 - e^{-2x}) - 4Gx + 4x^2}{(G + 2x)^2} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{2G(1 - e^{-2x}) - 4x}{2(G + 2x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{2(1 - e^{-2x})}{2} = 1 - e^{-2x} \end{aligned}$$

donde  $L'H$  significa que se ha aplicado el teorema de L'Hopital.

Reemplazando esto en el logaritmo del integrando queda que:

$$\lim_{G \rightarrow \infty} L \mathcal{E}_{int} = - \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \ln (1 - e^{-2x}) = \frac{\pi}{24} \simeq 0,131 ,$$

lo que da el resultado exacto  $\mathcal{E} = \pi/(24 L)$  (2).

En la figura 3.2.1.1 se muestra la variación de  $L \mathcal{E}_{int}$  en función de  $G = g L$ .

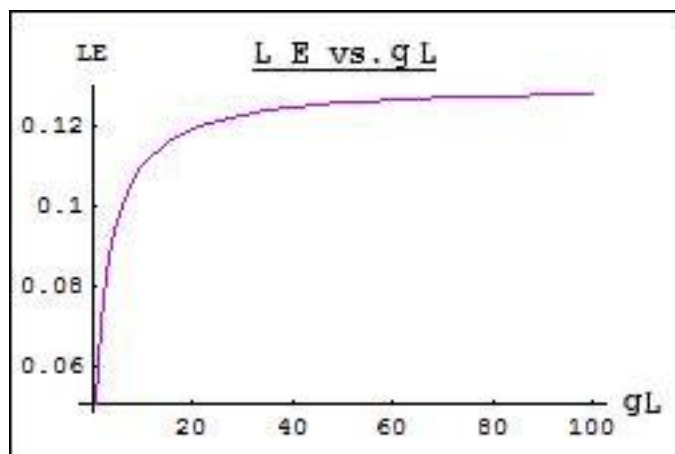


Figura 3.1:  $L E_{Int}$  en el caso  $d = 1$  para masa nula.

### 3.2.1.2. Masa no nula ( $m \neq 0$ ).

En la figura 3.2 se presenta la dependencia de  $L \mathcal{E}_{Int}$  en función de  $G = g L$  para distintos valores de  $M$ . Mientras que en la figura 3.3 se presenta la dependencia de  $L \mathcal{E}_{Int}$  en función de  $M = m L$  para distintos valores de  $G$ .

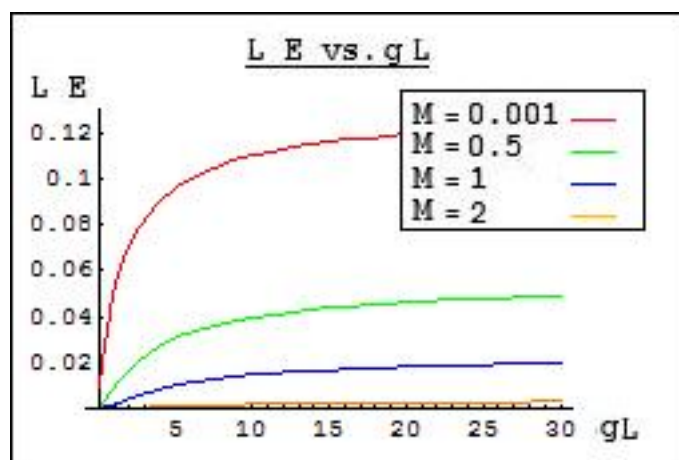
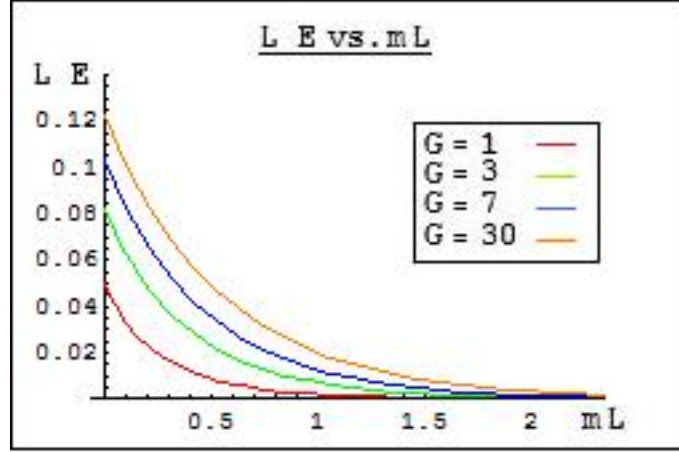


Figura 3.2: Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{int}$  vs.  $gL$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$ .

Se puede ver que, cuanto menor es la masa y mayor la constante  $g$ , mayor es la energía de Casimir de interacción. Esto ocurre debido a que cuanto menor es la masa, el propagador del campo escalar decae más lentamente con la distancia de separación entre las placas y mayor es la interacción. Por otra parte, cuanto mayor es la constante  $g$ , las condiciones de contorno son más fuertes y por lo tanto más marcada es la diferencia entre los modos dentro y fuera de las placas, lo que aumenta la energía de interacción.



**Figura 3.3:** Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $mL$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$

### 3.2.2. Tres dimensiones espaciales $d=3$ .

Si la dimensión espacial es  $d = 3$ , entonces, la ecuación (3.10) queda:

$$\mathcal{Z} = [\det \mathcal{M}]^{-1/2} = \left[ \prod_q \det \mathcal{M} \right]^{-1/2}$$

y por lo tanto, la amplitud de persistencia del vacío  $\Gamma$  es:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{E_n} \ln \det \mathcal{M} + \text{Términos que no dep. de } L$$

La energía de vacío es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L) &= \frac{1}{2} \lim_{T, a \rightarrow \infty} \sum_{q_{nls}} \frac{1}{T a^2} \ln [\det \mathcal{M}] + \text{Términos que no dep. de } L \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dq_0}{2\pi} \int \frac{dq_1}{2\pi} \int \frac{dq_2}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 - \left( \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \right] \\ &\quad + \text{Términos que no dep. de } L \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas esféricas:

$$\mathcal{E}(L) = \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} q^2 \ln \left[ \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 - \left( \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \right]$$

+ *Términos que no dep. de L*

La energía de Casimir de interacción se obtiene tomando la diferencia entre la configuraciones con un defecto en infinito ( $L \rightarrow \infty$ ) - suficientemente lejos como para que no interactúen - y la que corresponde a una separación finita  $L$  entre defectos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int} = \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(L) &= \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} q^2 \ln \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \\ &- \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} q^2 \ln \left[ \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 - \left( \frac{e^{-L\sqrt{q^2 + m^2}}}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{E}_{int} = - \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} q^2 \ln \left[ 1 - \frac{g^2 e^{-2L\sqrt{q^2 + m^2}}}{\left( 2\sqrt{q^2 + m^2} + g \right)^2} \right] \quad (3.12)$$

Haciendo el cambio de variable  $x = qL$ , y llamando  $M = mL$  y  $G = gL$  se tiene:

$$L^3 \mathcal{E}_{Int} = - \int_0^\infty \frac{dx}{(2\pi)^2} x^2 \ln \left[ 1 - \frac{G^2 e^{-2\sqrt{x^2 + M^2}}}{\left( G + 2\sqrt{x^2 + M^2} \right)^2} \right]$$

Notemos que la integral es finita, aún cuando  $G \rightarrow \infty$ . Esta es una de las virtudes del método empleado.

### 3.2.2.1. Masa nula ( $m = 0$ ).

Cuando  $m = 0$  la ecuación se reduce a:

$$L^3 \mathcal{E}_{Int} = - \int_0^\infty \frac{dx}{(2\pi)^2} x^2 \ln \left( 1 - \frac{G^2 e^{-2x}}{(G + 2x)^2} \right).$$

En el límite para  $G \rightarrow 0$  queda:

$$\lim_{G \rightarrow 0} L^3 \mathcal{E}_{Int} = - \int_0^\infty \frac{dx}{(2\pi)^2} x^2 \ln 1 = 0 .$$

En el límite para  $G \rightarrow \infty$  se tiene que:

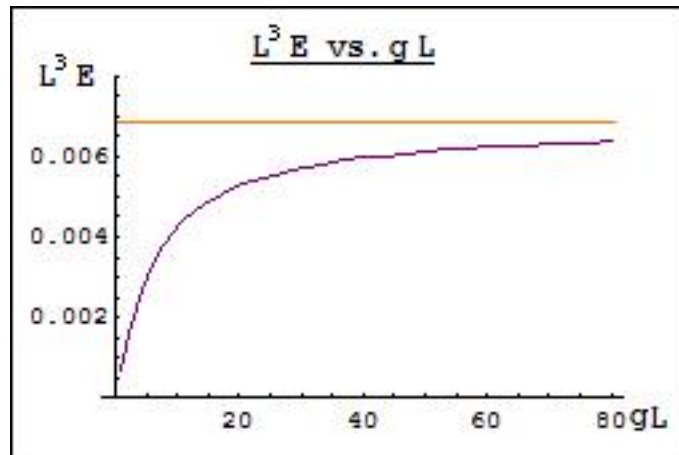
$$\begin{aligned} \lim_{G \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{G^2 e^{-2x}}{(G + 2x)^2} \right) &= \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{G^2 (1 - e^{-2x}) - 4Gx + 4x^2}{(G + 2x)^2} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{2G(1 - e^{-2x}) - 4x}{2(G + 2x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{2(1 - e^{-2x})}{2} = 1 - e^{-2x} . \end{aligned}$$

Reemplazando esto en el logaritmo del integrando queda que:

$$\lim_{G \rightarrow \infty} L^3 \mathcal{E}_{Int} = - \int_0^\infty \frac{dx}{(2\pi)^2} x^2 \ln(1 - e^{-2x}) = \frac{\pi^2}{1440} \simeq 6,854 \cdot 10^{-3} .$$

Por lo tanto, la integral tiende a un valor constante para valores grandes de  $G$  que es el valor exacto en  $d = 3$ .

En la figura 3.4 se presenta la dependencia de  $L^3 \mathcal{E}$  en función de  $G = gL$ . La línea recta representa el límite asintótico para valores grandes de  $g$ .



**Figura 3.4:** Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $gL$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$

### 3.2.2.2. Masa no nula ( $m \neq 0$ ).

En la figura 3.5 se presenta la dependencia de  $L^3 \mathcal{E}$  en función de  $G = gL$  para distintos valores de  $M$ . Mientras que en la figura 3.6 se presenta la dependencia de  $L^3 \mathcal{E}$  en función de  $M = mL$  para distintos valores de  $G$ .

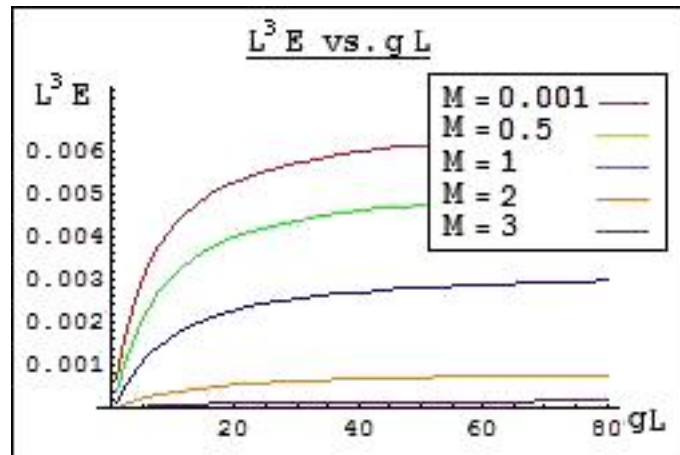


Figura 3.5: Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $gL$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$

Se puede ver que cuanto menor es la masa y mayor la constante  $g$ , es mayor la energía de Casimir de interacción.

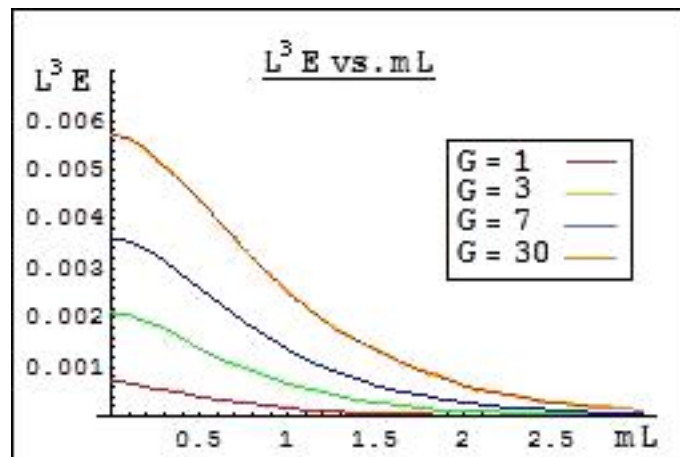


Figura 3.6: Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $mL$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$

# Cálculo de energías de vacío para un campo fermiónico

En este capítulo se presentan cálculos relacionados con la energía de vacío en presencia de defectos, para un campo fermiónico. En la sección 1 se llega a una expresión para la energía de vacío teniendo un único defecto en una dimensión espacial. En la sección 2 se consideran dos defectos en dimensión espacial arbitraria  $d$  y posteriormente se analizan los casos particulares en  $d = 1$  y  $d = 3$  para campos masivos y no masivos. El objetivo es estudiar la dependencia de la energía de Casimir con la separación entre defectos, la masa del campo y la constante de interacción  $g$  con el defecto para poder compararlo con los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

## 4.1. Un único defecto en $D = 1+1$ dimensiones

La función de partición  $\mathcal{Z}$  se define como:

$$\mathcal{Z} = e^{-\Gamma} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E} \quad (4.1)$$

siendo  $\Gamma$  lo que se conoce como *amplitud de persistencia del vacío*, y:

$$S_E = S_0 + S_I$$

$$S_0 = \int d^2x \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x) \quad (\text{Acción libre})$$

$$S_I = \int d^2x \bar{\psi}(x) V(x) \psi(x) \quad (\text{Acción debida a la interacción})$$

Si se considera un potencial que corresponda a un único defecto en el origen de la dirección espacial  $x_1$ ,  $V(x)$  toma la forma (8):

$$V(x) = g \delta(x_1)$$

Se denomina  $x \in \mathbb{R}^2$  a las componentes del espacio-tiempo  $x = (x_0, x_1) = (t, x_1)$  donde  $t = x_0$  es la componente temporal. Se considera también que  $p = (p_0, p_1)$

donde  $p_1$  es la componente de momento en la dirección de  $x_1$  y  $p_0$  es la energía.

$e^{-S_E}$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
e^{-S_E} &= \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m + V) \psi(x) \right] \\
&= \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x) \right] \exp \left[ - g \int d^2x \bar{\psi}(x) \delta(x_1) \psi(x) \right] \\
&= e^{-S_0} \exp \left[ - g \int dt \bar{\psi}(t, 0) \psi(t, 0) \right]
\end{aligned}$$

Utilizando la relación para determinantes fermiónicos se pueden introducir variables de Grassman auxiliares  $\chi$  y  $\bar{\chi}$  para reescribir el último término exponencial en  $e^{-S_E}$ .

$$\begin{aligned}
\exp \left[ - g \int dt \bar{\psi}(t, 0) \psi(t, 0) \right] &= \exp \left[ - \int dt \int dt' \bar{\psi}(t, 0) g \delta(t - t') \psi(t', 0) \right] \\
&= \left[ \det \left( \frac{\mathbf{1}}{g} \right) \right]^{-1} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \frac{1}{g} \int dt \bar{\chi}(t) \chi(t) \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \int dt [\bar{\psi}(t, 0) \chi(t) + \bar{\chi}(t) \psi(t, 0)] \right]
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable se puede sacar  $g$  fuera del determinante.

$$\eta(t) = \sqrt{g} \eta'(t) \quad \mathcal{D}\eta = \det(\sqrt{g} \mathbf{1}) \mathcal{D}\eta' \quad (\text{Igual cambio para } \bar{\eta})$$

y por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{aligned}
e^{-S_E} &= e^{-S_0} \left[ \det(\delta(t - t')) \right]^{-1} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int dt \bar{\chi}(t) \chi(t) \right] \\
&\quad \times \left[ \sqrt{g} \int dt [\bar{\psi}(t, 0) \chi(t) + \bar{\chi}(t) \psi(t, 0)] \right] \\
&= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int dt \bar{\chi}(t) \chi(t) \right] \\
&\quad \times \exp \left[ - \int d^2x [\bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x)] \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \int d^2x [\bar{\psi}(x) (\sqrt{g} \chi(t) \delta(x_1)) + (\sqrt{g} \bar{\chi}(t) \delta(x_1)) \psi(x)] \right]
\end{aligned}$$

donde se ignoró un factor independiente de  $g$ .



Usando la identidad para determinantes fermiónicos mencionada anteriormente, y utilizando la definición en la nomenclatura para el propagador fermiónico libre  $G_F^{(0)}(x, x') = [(\not{\partial} + m) \delta(x - x')]^{-1}$  cuya deducción se encuentra en el apéndice B, se puede escribir a  $\mathcal{Z}$  como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int dt \bar{\chi}(t) \chi(t) \right] \\
&\times \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ \int d^2x \int d^2x' \bar{\psi}(x) [-(\not{\partial} + m) \delta(x - x')] \psi(x') \right] \\
&\times \exp \left[ \int d^2x [\bar{\psi}(x)(\sqrt{g} \chi(t) \delta(x_1)) + (\sqrt{g} \bar{\chi}(t) \delta(x_1)) \psi(x)] \right] \\
&= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int dt \int dt' \bar{\chi}(t) \delta(t - t') \chi(t') \right] \\
&\times \exp \left[ g \int dt \int dt' \bar{\chi}(t) G_F^{(0)}(t, 0, t', 0) \chi(t') \right] \\
&= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int dt \int dt' \bar{\chi}(t) [\delta(t - t') + g G_F^{(0)}(t, 0, t', 0)] \chi(t') \right]
\end{aligned}$$

siendo:

$$G_F^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{m + i \not{p}}{(m^2 + p^2)} e^{-ip(x-x')} \quad (4.2)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\delta(t - t') = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t-t')}$$

y que:

$$\begin{aligned}
G_F^{(0)}(t, 0, t', 0) &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{m + i \not{p}}{(m^2 + p^2)} e^{-ip_0(t-t')} = \\
&= m \mathcal{I} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{(m^2 + p^2)} + i\gamma_0 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p_0 e^{-ip_0(t-t')}}{(m^2 + p^2)} + i\gamma_1 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p_1 e^{-ip_0(t-t')}}{(m^2 + p^2)} \\
&= m \mathcal{I} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t-t')}}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} + i\gamma_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{p_0 e^{-ip_0(t-t')}}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \\
&= \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{(m \mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} e^{-ip_0(t-t')}
\end{aligned}$$

donde se llamó  $\mathcal{I}$  a la matriz identidad y el término en  $\gamma_1$  se va por integración simétrica de una potencia impar de  $p_1$ , la función de partición queda:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \times \exp \left[ \int \frac{dp_0}{2\pi} \left( \int dt \bar{\chi}(t) e^{-ip_0 t} \right) \left[ 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right] \left( \int dt' \chi(t') e^{ip_0 t'} \right) \right]$$

Haciendo un cambio de variable en la integral de camino pasando de las variables  $\chi(t)$  y  $\bar{\chi}(t)$  a sus transformadas de Fourier  $\tilde{\chi}(p_0)$  y  $\bar{\tilde{\chi}}(p_0)$  que están dadas por:

$$\bar{\tilde{\chi}}(p_0) = \int dt \bar{\chi}(t) e^{-ip_0 t}$$

y

$$\tilde{\chi}(p_0) = \int dt \chi(t) e^{ip_0 t}$$

y dado que esta transformación tiene determinante Jacobiano igual a 1:  $\mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} = \mathcal{D}\tilde{\chi} \mathcal{D}\bar{\tilde{\chi}}$ , se puede reescribir a  $\mathcal{Z}$  de forma más sencilla. Omitiendo escribir las tildes, pero asumiendo que son las variables transformadas queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int \frac{dp_0}{2\pi} \bar{\chi}(p_0) \left( 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \chi(p_0) \right] = \\ &= \det \left[ \left( 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Por otra parte, como las matrices gamma en d=1 son de rango 2 se tiene:

$$\det \left[ \left( 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \right] = \prod_{P_0} \det \left( 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right)$$

Ahora bien, como  $\mathcal{Z} = e^{-\Gamma}$ , queda:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\ln \mathcal{Z} = -\ln \prod_{P_0} \det \left( 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \\ &= -\sum_{P_0} \ln \det \left( 1 + g \frac{(m\mathcal{I} + ip_0 \gamma_0)}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \end{aligned}$$

donde se omiten términos que no dependen de g.

Para calcular ese determinante, se necesita conocer la matriz euclídea  $\gamma_0$ . Como se trabaja en  $D = 1 + 1$ , se puede elegir como  $\gamma_0$  a la matriz de Pauli  $\sigma_3$ .

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Queda entonces:

$$1 + g \frac{m \mathcal{I} + p_0 \gamma_0}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} = \begin{pmatrix} 1 + g \frac{m+ip_0}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} & 0 \\ 0 & 1 + g \frac{m-ip_0}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante va a ser el producto de sus elementos diagonales.

Entonces queda:

$$\begin{aligned} \Gamma &= - \sum_{P_0} \ln \left[ \left( 1 + g \frac{m + ip_0}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \left( 1 + g \frac{m - ip_0}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \right] \\ &= - \sum_{P_0} \ln \left[ \left( 1 + \frac{g m}{2\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right)^2 + \frac{g^2 p_0^2}{4(m^2 + p_0^2)} \right] \end{aligned}$$

Es decir que:

$$\Gamma = - \sum_{P_0} \ln \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g m}{\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \quad (4.4)$$

Entonces, la energía de Casimir es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma}{T} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g m}{\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \\ &= - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda} \frac{dp_0}{\pi} \ln \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g m}{\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se puede ver en la ecuación (4.5) que cuando  $g = 0$  la energía de vacío es nula. Para  $g \neq 0$  finito, se tiene:

Si  $m=0$ :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{4}{4 + g^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{4}{4 + g^2} \right) \lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0$$

Si  $m \neq 0$  se puede hacer el cambio de variable  $p_0 = mp$ :

$$\mathcal{E} = - \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g}{\sqrt{1 + p^2}} \right) = - \frac{m}{\pi} \int_0^{\infty} dp \ln \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g}{\sqrt{1 + p^2}} \right)$$

$$- \frac{4mg}{\pi(4+g^2)} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \arg \sinh(p) \right] - \frac{m}{\pi} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ p \log \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right]$$

+ *Términos finitos*

Esta energía es divergente, pero puede ser renormalizada mediante la redefinición de un número finito de parámetros. Esto se ve a partir de la función de partición tomando:

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_0(\psi, \bar{\psi}) - S_I(\varphi)}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_0(\psi, \bar{\psi})}} = \frac{\det(\not{\partial} + m + g\delta(x_d))}{\det(\not{\partial} + m)}$$

Entonces:

$$\Gamma = Tr[\ln(\not{\partial} + m + g\delta(x_d))] - Tr[\ln(\not{\partial} + m)]$$

Expandiendo  $\Gamma$  en potencias de  $g$ :

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \dots$$

se puede ver que:

$$\Gamma^{(0)} = 0$$

$$\Gamma^{(1)} = Tr[(\not{\partial} + m)^{-1} g \delta(x_d)]$$

$$\Gamma^{(2)} = Tr[(\not{\partial} + m)^{-1} g \delta(x_d) (\not{\partial} + m)^{-1} g \delta(x_d)]$$

esto es equivalente a tener un diagrama de Feynman de un loop con tantos vértices como potencias de  $g$  aparezcan en el desarrollo de  $\Gamma$ . Es decir, que cada término del desarrollo va a tener una integral en los momentos que tiene en el numerador  $d^D p$  (siendo  $D = d + 1$ ) y en el denominador  $p^n$  donde  $n$  es el orden de la expansión en  $g$ . Cuando  $D = 2$  se tiene que a partir de  $n = 3$  los términos dejan de ser divergentes y cuando  $D = 4$  los términos dejan de ser divergentes desde  $n = 5$ . En una dimensión arbitraria, siempre va a existir algún valor de  $n$  para el cual los términos dejan de ser divergentes.

Teniendo esto en cuenta, si se denomina  $I(g, \Lambda)$  a la integral:

$$I(g, \Lambda) = \int_0^\Lambda dp_0 f(p_0, g)$$

donde  $f(p_0, g) = -\frac{1}{\pi} \ln \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{gm}{\sqrt{m^2 + p_0^2}} \right)$ , se puede definir una función  $\tilde{I}(g, \Lambda)$  como:

$$\tilde{I}(g, \Lambda) = \int_0^\Lambda dp_0 \left[ f(p_0, g) - f(p_0, 0) - \left. \frac{\partial f(p_0, g)}{\partial g} \right|_{g=0} g - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f(p_0, g)}{\partial g^2} \right|_{g=0} g^2 \right].$$

Nótese que se sustrajo sólo hasta segundo orden en la derivada por considerarse  $d = 1$  porque los términos de orden superior ya no van a ser divergentes cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Esto permite redefinir la energía quitando los términos divergentes.

## 4.2. Dos defectos en $D = d+1$ dimensiones

Se considera un potencial que corresponde a tener dos defectos separados una distancia  $L$  en la dirección de la variable  $x_d$ . El potencial es:

$$V(x) = g_1 \delta(x_d) + g_2 \delta(x_d - L).$$

Para simplificar la notación se utilizan algunas definiciones, mediante las cuales se denomina  $x \in \mathfrak{R}^D$  e  $y \in \mathfrak{R}^d$  a las componentes de la posición en el espacio-tiempo (donde la componente temporal es  $x_0$ ):

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) = (y, x_d) \quad y = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}),$$

y a las componentes de los momentos se las denota mediante las letras:

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_{d-1}, p_d) = (q, p_d) \quad q = (p_0, p_1, \dots, p_{d-1}).$$

De esta manera se puede trabajar en un espacio de dimensión  $d$  donde  $y$  y  $q$  son respectivamente las componentes de la posición y el momento en las direcciones perpendiculares a la que contiene al defecto  $x_d$ .

La función de partición  $\mathcal{Z}$  es:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E} \quad (4.6)$$

siendo:

$$S_E = S_0 + S_I$$

$$S_0 = \int d^D x \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x) \quad (\text{Acción libre})$$

$$S_I = \int d^D x \bar{\psi}(x) V(x) \psi(x) \quad (\text{Acción debida a la interacción})$$

Trabajando con  $e^{-S_E}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{-S_E} &= \exp \left[ - \int d^D x \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m + V) \psi(x) \right] \\
&= e^{-S_0} \cdot \exp \left[ - g_1 \int d^d y \bar{\psi}(y, 0) \psi(y, 0) \right] \\
&\quad \times \exp \left[ - g_2 \int d^d y \bar{\psi}(y, L) \psi(y, L) \right]
\end{aligned}$$

Utilizando variables de Grassman auxiliares  $\chi$  y  $\bar{\chi}$  se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\exp \left[ - g_2 \int d^d y \bar{\psi}(y, L) \psi(y, L) \right] &= \left[ \det \left( \frac{1}{g_2} \delta(y - y') \right) \right]^{-1} \\
&\quad \times \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \frac{1}{g_2} \int d^d y \bar{\chi}(y) \chi(y) \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \int d^d y [\bar{\psi}(y, L) \chi(y) + \bar{\chi}(y) \psi(y, L)] \right]
\end{aligned}$$

Para el término en  $g_1$  se utiliza el mismo resultado, pero cambiando  $g_2$  por  $g_1$  y tomando  $L=0$ . Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
e^{-S_E} &= e^{-S_0} \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \exp \left[ \int d^d y \bar{\xi}(y) \xi(y) \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \sqrt{g_1} \int d^d y [\bar{\psi}(y, 0) \xi(y) + \bar{\xi}(y) \psi(y, 0)] \right] \\
&\quad \times \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int d^d y \bar{\chi}(y) \chi(y) \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \sqrt{g_2} \int dy [\bar{\psi}(y, L) \chi(y) + \bar{\chi}(y) \psi(y, L)] \right] \\
&= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \exp \left[ \int d^d y \bar{\chi}(y) \chi(y) \right] \exp \left[ \int d^d y \bar{\xi}(y) \xi(y) \right] \\
&\quad \times e^{-S_0} \int d^D x \left[ \bar{\psi}(x) \left( \sqrt{g_1} \xi(y) \delta(x_d) + \sqrt{g_2} \chi(y) \delta(x_d - L) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \sqrt{g_1} \bar{\xi}(y) \delta(x_d) + \sqrt{g_2} \bar{\chi}(y) \delta(x_d - L) \right) \psi(x) \right]
\end{aligned}$$

Reemplazando esta exponencial la función de partición y volviendo a utilizar la relación para determinantes fermiónicos para la integral de camino en las variables  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \det [-\delta(x-x')(\not{\partial} + m)] \\
&\times \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \exp \left[ \int d^d y \bar{\chi}(y) \chi(y) \right] \exp \left[ \int d^d y \bar{\xi}(y) \xi(y) \right] \\
&\times \exp \left\{ \int d^D x \left( \sqrt{g_1} \bar{\xi}(y) \delta(x_d) + \sqrt{g_2} \bar{\chi}(y) \delta(x_d - L) \right) G_F^{(0)}(x, x') \right. \\
&\quad \left. \left( \sqrt{g_1} \xi(y) \delta(x_d) + \sqrt{g_2} \chi(y) \delta(x_d - L) \right) \right\}
\end{aligned}$$

donde  $G_F^{(0)}(x, x')$  es el propagador fermiónico libre en espacio euclídeo

$$G_F^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{m + i \not{p}}{(m^2 + p^2)} e^{-ip(x-x')} \quad (4.7)$$

Reemplazando la identidad (4.7) en la función de partición y llamando  $\mathcal{A}_1 = \det [-(\not{\partial} + m)]$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \\
&\times \exp \left[ \int d^d y \int d^d y' \bar{\xi}(y) \left( \delta(y-y') + g_1 G_F^{(0)}(y, 0, y', 0) \right) \xi(y') \right] \\
&\times \exp \left[ \int d^d y \int d^d y' \bar{\chi}(y) \left( \delta(y-y') + g_2 G_F^{(0)}(y, L, y', L) \right) \chi(y') \right] \\
&\times \exp \left[ \sqrt{g_1 g_2} \int d^d y \int d^d y' \bar{\chi}(y) G_F^{(0)}(y, L, y', 0) \xi(y') \right] \\
&\times \exp \left[ \sqrt{g_1 g_2} \int d^d y \int d^d y' \bar{\xi}(y) G_F^{(0)}(y, 0, y', L) \chi(y') \right]
\end{aligned}$$

Usando la ecuación 4.7 e integrando por residuos:

$$\begin{aligned}
G_F^{(0)}(y, 0, y', 0) &= G_F^{(0)}(y, L, y', L) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{m + i \not{q}}{2\sqrt{m^2 + q^2}} e^{-iq(y-y')} \\
G_F^{(0)}(y, L, y', 0) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left( \frac{m + i \not{q}}{\sqrt{m^2 + q^2}} + \gamma_d \right) e^{-iq(y-y')} \\
G_F^{(0)}(y, 0, y', L) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left( \frac{m + i \not{q}}{\sqrt{m^2 + q^2}} - \gamma_d \right) e^{-iq(y-y')}
\end{aligned}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \\
&\times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( \int d^d y \bar{\xi}(y) e^{-iqy} \right) \left( 1 + g_1 \frac{m + i \not{q}}{2\sqrt{m^2 + q^2}} \right) \left( \int d^d y' \xi(y') e^{iqy'} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( \int d^d y \bar{\chi}(y) e^{-iqy} \right) \left( 1 + g_2 \frac{m+iq}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \left( \int d^d y' \chi(y') e^{iqy'} \right) \right] \\
& \times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( \int d^d y \bar{\chi}(y) e^{-iqy} \right) \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2} \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} + \gamma_d \right) e^{-L\sqrt{m^2+q^2}} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \times \left( \int d^d y' \xi(y') e^{iqy'} \right) \right] \\
& \times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( \int d^d y \bar{\xi}(y) e^{-iqy} \right) \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2} \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} - \gamma_d \right) e^{-L\sqrt{m^2+q^2}} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \times \left( \int d^d y' \chi(y') e^{iqy'} \right) \right]
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable en la integral de camino, escribiendo esta expresión en función de las transformadas de Fourier:

$$\tilde{\xi}(q) = \int d^d y \xi(y) e^{iqy}$$

$$\bar{\tilde{\xi}}(q) = \int d^d y \bar{\xi}(y) e^{-iqy}$$

$$\mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} = \mathcal{D}\tilde{\xi} \mathcal{D}\bar{\tilde{\xi}}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{\tilde{\xi}}(q) \left( 1 + g_1 \frac{m+iq}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \xi(q) \right] \\
& \quad \times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{\chi}(q) \left( 1 + g_2 \frac{m+iq}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \chi(q) \right] \\
& \quad \times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{\chi}(q) \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2} \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} + \gamma_d \right) e^{-L\sqrt{m^2+q^2}} \xi(q) \right] \\
& \quad \times \exp \left[ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{\tilde{\xi}}(q) \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2} \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} - \gamma_d \right) e^{-L\sqrt{m^2+q^2}} \chi(q) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\bar{\chi}_0 \mathcal{D}\chi_1 \mathcal{D}\bar{\chi}_1 \exp \left[ \int d^d q \left( \bar{\chi}_0(q) \bar{\chi}_1(q) \frac{\mathcal{M}(q)}{(2\pi)^d} \begin{pmatrix} \chi_0(q) \\ \chi_1(q) \end{pmatrix} \right) \right],
\end{aligned}$$

Donde se llamó:

$$\mathcal{M}(q) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{g_1(m+iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} & \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2} \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} - \gamma_d \right) e^{-L\sqrt{m^2+q^2}} \\ \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2} \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} + \gamma_d \right) e^{-L\sqrt{m^2+q^2}} & 1 + \frac{g_2(m+iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \end{pmatrix}$$

La anterior integral de camino no es mas que un determinante fermiónico, pudiendo expresarse como:

$$\mathcal{Z} = \det \mathcal{M}(q) = \prod_q \mathcal{M}(q). \quad (4.8)$$



### 4.2.1. El caso particular $\mathbf{d} = \mathbf{1}$ , $g_1 = g_2$ .

Si la dimensión espacial es  $d = 1$ , entonces, las matrices gamma son de rango 2 y la matriz  $\mathcal{M}$  es de rango 4 en bloques de  $2 \times 2$ . Utilizando las propiedades de las matrices por bloques se tiene que:

$$\det \mathcal{M}(q) = \det \mathcal{M}_{00} \det \mathcal{M}_{11} \det \left[ \mathcal{I} - \mathcal{M}_{00}^{-1} \mathcal{M}_{01} \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{10} \right] \quad (4.9)$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{g(m+iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \left( 1 + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) &= \left( 1 + \frac{g(m+iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} + \frac{g^2(m+iq)(m-iq)}{4(m^2+q^2)} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{gm}{\sqrt{m^2+q^2}} + \frac{g^2}{4} \right) \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{00}^{-1} &= \mathcal{M}_{11}^{-1} = \left( 1 + g \frac{m+i\cancel{q}}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right)^{-1} \\ &= \left( 1 + \frac{g^2}{4} + g \frac{m}{\sqrt{m^2+q^2}} \right)^{-1} \left( 1 + g \frac{m-i\cancel{q}}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por lo tanto queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{00}^{-1} \mathcal{M}_{01} \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{10} &= \frac{g^2}{4} e^{-2L\sqrt{m^2+q^2}} \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{gm}{\sqrt{m^2+q^2}} \right)^{-2} \\ &\times \left( 1 + g \frac{m-i\cancel{q}}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \left( \frac{m+i\cancel{q}}{\sqrt{m^2+q^2}} - \gamma_d \right) \left( 1 + g \frac{m-i\cancel{q}}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \left( \frac{m+i\cancel{q}}{\sqrt{m^2+q^2}} + \gamma_d \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por simplicidad se analiza el caso de masa nula ( $m = 0$ ), para el cual queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{00}^{-1} \mathcal{M}_{01} \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{10} &= \frac{g^2}{4} e^{-2L|q|} \left( 1 + \frac{g^2}{4} \right)^{-2} \\ &\times \left( 1 - ig \frac{\cancel{q}}{2|q|} \right) \left( i \frac{\cancel{q}}{|q|} - \gamma_d \right) \left( 1 - ig \frac{\cancel{q}}{2|q|} \right) \left( i \frac{\cancel{q}}{|q|} + \gamma_d \right) \\ &\times \frac{4g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \left( \frac{g}{2} - \gamma_d + i \frac{\cancel{q}}{|q|} + ig \frac{\cancel{q}\gamma_d}{2|q|} \right) \left( 1 - ig \frac{\cancel{q}}{2|q|} \right) \left( i \frac{\cancel{q}}{|q|} + \gamma_d \right) \\ &\times \frac{4g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \left( \frac{g}{2} - \gamma_d + i \frac{\cancel{q}}{|q|} + i \frac{g}{2} \frac{\cancel{q}\gamma_d}{|q|} - i \frac{g^2}{4} \frac{\cancel{q}}{|q|} + i \frac{g}{2} \frac{\gamma_d \cancel{q}}{|q|} + \frac{g}{2} - \frac{g^2}{4} \gamma_d \right) \left( i \frac{\cancel{q}}{|q|} + \gamma_d \right) \\ &= \frac{4g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \left( g - \left( 1 + \frac{g^2}{4} \right) \gamma_d + i \left( 1 - \frac{g^2}{4} \right) \frac{\cancel{q}}{|q|} \right) \left( i \frac{\cancel{q}}{|q|} + \gamma_d \right) \\ &= \frac{4g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \left( ig \frac{\cancel{q}}{|q|} + i \left( 1 + \frac{g^2}{4} \right) \frac{\cancel{q}\gamma_d}{|q|} - \left( 1 - \frac{g^2}{4} \right) + g\gamma_d - \left( 1 + \frac{g^2}{4} \right) + i \left( 1 - \frac{g^2}{4} \right) \frac{\cancel{q}\gamma_d}{|q|} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \left( -2 + g\gamma_d + ig\frac{q'}{|q|} + 2i\frac{q'\gamma_d}{|q|} \right)$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} - \mathcal{M}_{00}^{-1}\mathcal{M}_{01}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{M}_{10} &= \left( 1 + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \right) \mathcal{I} \\ &\quad - e^{-2L|q|} \left( \frac{4g^3}{(4+g^2)^2} \gamma_d + i\frac{4g^3}{(4+g^2)^2} \frac{q'}{|q|} + i\frac{8g^2}{(4+g^2)^2} \frac{q'\gamma_d}{|q|} \right) \end{aligned}$$

Para simplificar la notación y el cálculo, se denomina:

$$a(q) = 1 + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \quad (4.12)$$

$$b(q) = -\frac{4g^3}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \quad (4.13)$$

$$c(q) = -i\frac{4g^3}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \quad (4.14)$$

$$d(q) = -\frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \quad (4.15)$$

$$\sigma_1 = \gamma_d \quad \sigma_2 = \frac{q'}{|q|} \quad \sigma_3 = i\frac{q'\gamma_d}{|q|} \quad (4.16)$$

Se definen las matrices de esta manera aprovechando que verifican el álgebra:  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  y  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ . Se tiene entonces que:

$$\mathcal{K} = \mathcal{I} - \mathcal{M}_{00}^{-1}\mathcal{M}_{01}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{M}_{10} = a(q)\mathcal{I} + b(q)\sigma_1 + c(q)\sigma_2 + d(q)\sigma_3 \quad (4.17)$$

Como el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores, para encontrar el determinante de  $\mathcal{K}$  basta con encontrar sus autovalores. Por las propiedades conmutativas, es mucho mas simple trabajar con  $\mathcal{K}^2$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^2 &= (a(q)\mathcal{I} + b(q)\sigma_1 + c(q)\sigma_2 + d(q)\sigma_3)^2 = a^2\mathcal{I} + ba\sigma_1 + ca\sigma_2 + da\sigma_3 \\ &\quad + ab\sigma_1 + b^2\mathcal{I} - icb\sigma_3 + idb\sigma_2 + ac\sigma_2 + ibc\sigma_3 + c^2\mathcal{I} - idc\sigma_1 + ad\sigma_3 - ibd\sigma_2 \\ &\quad + icd\sigma_1 + d^2\mathcal{I} \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathcal{I} + 2ab\sigma_1 + 2ac\sigma_2 + 2ad\sigma_3 \end{aligned}$$

Ahora bien, la identidad ya es una matriz diagonal. Interesa conocer entonces los autovalores de la otra parte que compone a  $\mathcal{K}^2$ . Para ello se denomina  $\mathcal{A}$  a la matriz:

$$\mathcal{A} = 2ab\sigma_1 + 2ac\sigma_2 + 2ad\sigma_3$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= (2ab \sigma_1 + 2ac \sigma_2 + 2ad \sigma_3)^2 = 4a^2b^2 \mathcal{I} - i 4a^2cb \sigma_3 + i 4a^2db \sigma_2 \\
&\quad + i 4a^2bc \sigma_3 + 4a^2c^2 \mathcal{I} - i 4a^2dc \sigma_1 - i 4a^2bd \sigma_2 + i 4a^2cd \sigma_1 + 4a^2d^2 \mathcal{I} \\
&= 4a^2(b^2 + c^2 + d^2)\mathcal{I}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{A}^2$  es una matriz diagonal que tiene un único autovalor:

$$\lambda_{\mathcal{A}^2} = 4a^2(b^2 + c^2 + d^2) \quad (4.18)$$

de multiplicidad 2 (por estar en  $d=1$  las matrices gamma son de rango 2). Reemplazando las definiciones (4.12)-(4.15) en la ecuación (4.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathcal{A}^2} &= 4 \left( 1 + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \right)^2 \left[ \frac{16g^6}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} - \frac{16g^6}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} + \frac{64g^4}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \right] \\
&= \left( \frac{8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|}}{(4+g^2)^2} \right)^2 \frac{256g^4}{(4+g^2)^4} e^{-8L|q|} \\
&= \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right)^2 \frac{256g^4}{(4+g^2)^8} e^{-8L|q|} \\
&= \left[ \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \frac{16g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \right]^2
\end{aligned}$$

Ahora bien, existe una base en la que  $\mathcal{A}$  es diagonal y sus elementos diagonales van a ser sus respectivos autovalores. Como las matrices gamma son de rango 2, los autovalores de  $\mathcal{A}$  también van a ser dos y tales que elevados al cuadrado coincidan con los autovalores de  $\mathcal{A}^2$ .

Por lo tanto, la matriz  $\mathcal{A}$  sólo puede tener como posibles autovalores:

$$\lambda_{\mathcal{A}} = \pm \left[ 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right] \frac{16g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \quad (4.19)$$

Quedaría por verificar si son los dos del mismo signo o de diferente signo. Para delucidar esto se tiene en cuenta que las matrices gamma tienen la propiedad de que su traza es nula, por lo tanto una combinación de matrices gamma multiplicadas por una función, como lo es  $\mathcal{A}$  tiene que tener también traza nula. Esto tiene como consecuencia que la suma de los autovalores de  $\mathcal{A}$  tiene que ser cero. Se puede afirmar entonces que los autovalores de  $\mathcal{A}$  son exactamente los dos que describe la ecuación (4.19).

Por otra parte:

$$\mathcal{K}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathcal{I} + \mathcal{A}$$

y como:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= \left[ \left( 1 + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \right)^2 + \frac{64g^4}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \right] \\
&= \left[ 1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} + \frac{128g^4}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \right] \\
&= \left[ 1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \right]
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando los resultados de la ecuación (4.19) los autovalores de  $\mathcal{K}^2$  son:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathcal{K}^2 \pm} &= \left[ 1 + \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \frac{16g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \right] \\
&\quad \pm \left[ 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right] \frac{16g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|}
\end{aligned}$$

expresión que se puede simplificar, dando como resultado:

$$\lambda_{\mathcal{K}^2+} = 1 + \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \frac{32g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|} \tag{4.20}$$

$$\lambda_{\mathcal{K}^2-} = 1$$

Teniendo en cuenta esto, los dos autovalores de  $\mathcal{K}$  - véase la ecuación (4.17) - tienen que ser tales que su valor absoluto verifique:

$$|\lambda_1| = 1$$

$$|\lambda_2| = \sqrt{1 + \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \frac{32g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|}}$$

Obsérvese además que  $|\lambda_2|$  se puede simplificar:

$$\begin{aligned}
|\lambda_2| &= \sqrt{1 + \left( 8g^2 + (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \frac{32g^2}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|}} = \\
&= \sqrt{\left( (4+g^2)^4 e^{4L|q|} + 256g^4 + 32g^2 (4+g^2)^2 e^{2L|q|} \right) \frac{1}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|}} = \\
&= \sqrt{\left( (4+g^2)^2 e^{2L|q|} + 16g^2 \right)^2 \frac{1}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|}}
\end{aligned}$$

Es decir que:

$$|\lambda_2| = 1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|}$$

Como se trabaja en  $D = 1 + 1$ , se pueden elegir como matrices gamma:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_S = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Reemplazando esto en (4.16) se tiene que:

$$\sigma_1 = \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = S(q_0)\gamma_0 = S(q_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = iS(q_0)\gamma_0 \gamma_1 = S(q_0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, la ecuación (4.17) en función de estas matrices queda:

$$\mathcal{K}(q) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{8g^2 e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} - \frac{i4g^3 S(q_0) e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} & -\frac{8g^2 S(q_0) e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} + \frac{i4g^3 e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} \\ -\frac{8g^2 S(q_0) e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} - \frac{i4g^3 e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} & 1 + \frac{8g^2 e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} + \frac{i4g^3 S(q_0) e^{-2L|q_0|}}{(4+g^2)^2} \end{pmatrix}$$

Mediante programas de cálculo matemático se puede demostrar que los autovalores que corresponden a esta matriz son:

$$\lambda_{\mathcal{K}1} = 1$$

$$\lambda_{\mathcal{K}2} = 1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q_0|}$$
(4.21)

Pero también se hubiese podido resolver en forma general sin necesidad de especificar la elección de las matrices gamma. Para ello se utiliza el teorema matemático que dice que la existencia de un polinomio anulador para una matriz dada implica que los ceros de ese polinomio son los autovalores de la matriz. Esto se puede utilizar para la matriz  $\mathcal{K}$  que se demostró que verifica las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{K} = a(q)\mathcal{I} + b(q)\sigma_1 + c(q)\sigma_2 + d(q)\sigma_3 \quad (4.22)$$

$$\mathcal{K}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathcal{I} + \mathcal{A} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{A} = 2ab\sigma_1 + 2ac\sigma_2 + 2ad\sigma_3 \quad (4.24)$$

Reemplazando (4.24) en (4.22) se tiene que:

$$\mathcal{A} = (\mathcal{K} - a(q)\mathcal{I})^2 a(q)$$

y reemplazando esto en (4.23) queda:

$$\mathcal{K}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \mathcal{I} + (\mathcal{K} - a\mathcal{I}) 2a$$

$$\mathcal{K}^2 - 2a\mathcal{K} + (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) \mathcal{I} = 0$$

Se tiene entonces un polinomio anulador en la matriz  $\mathcal{K}$  que tiene la forma:

$$P(x) = x^2 - 2ax + (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) = 0$$

cuyas raíces son:

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)}}{2} = a \pm \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

Se tiene entonces que la matriz  $\mathcal{K}$  tiene dos autovalores distintos de la forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{K}1} &= a + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \\ \lambda_{\mathcal{K}2} &= a - \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Mirando los cálculos realizados para llegar a la forma de  $\lambda_{\mathcal{A}^2}$  se encuentra que:

$$b^2 + c^2 + d^2 = \frac{64g^4}{(4+g^2)^4} e^{-4L|q|}$$

con lo cual:

$$a - \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = 1 + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} - \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} = 1$$

$$a + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = 1 + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} + \frac{8g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} = 1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|}$$

Obteniéndose el mismo resultado que en las ecuaciones (4.25) realizadas con un procesador matemático.

Usando estos resultados en la ecuación (4.9) se tiene que:

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M}(q) &= \det^2 \mathcal{M}_{00} \det \mathcal{K} = \det^2 \mathcal{M}_{00} \lambda_{\mathcal{K}1} \lambda_{\mathcal{K}2} = \\ &= \det^2 \mathcal{M}_{00} \left( 1 + \frac{16g^2}{(4+g^2)^2} e^{-2L|q|} \right) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{M}_{00}$  no depende de la separación  $L$  entre los defectos.  
y reemplazando esto en la (4.8):

$$\mathcal{Z} = \prod_{q_0} \det^2 \mathcal{M}_{00} \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2L|q_0|} \right)$$

Es decir que la *amplitud de persistencia del vacío* es:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\ln \mathcal{Z} = -\ln \prod_{q_0} \det^2 \mathcal{M}_{00} \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2L|q_0|} \right) = \\ &= -\sum_{q_0} \ln \left[ \det^2 \mathcal{M}_{00} \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2L|q_0|} \right) \right] \end{aligned}$$

La *energía de vacío en presencia de los defectos* es:

$$\mathcal{E} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma}{T} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \ln \left[ \det^2 \mathcal{M}_{00} \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2L|q_0|} \right) \right]$$

La *energía de Casimir de interacción* entre los defectos es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int}(L) &= \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(L) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \ln \left[ \det^2 \mathcal{M}_{00} \right] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \ln \left[ \det^2 \mathcal{M}_{00} \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2L|q_0|} \right) \right] \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{E}_{Int}(L) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dq_0 \ln \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2L q_0} \right) \quad (4.26)$$

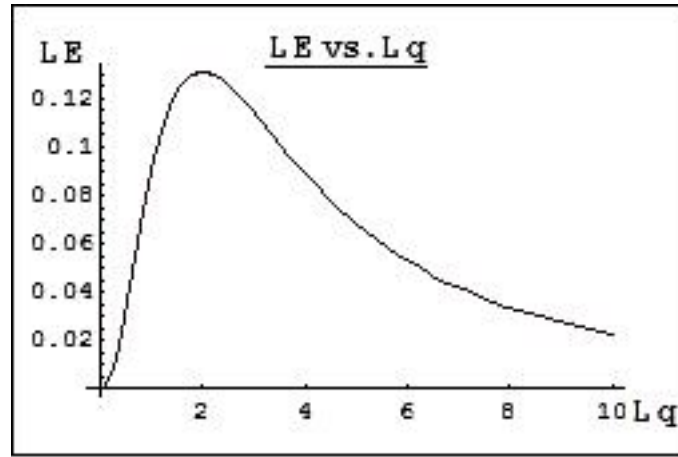
Haciendo un cambio de variable, en el cual se llama  $r = L q_0$  se tiene que:

$$L \mathcal{E}_{Int} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dr \ln \left( 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2r} \right) = -\frac{1}{2\pi} PolyLog \left[ 2, \frac{-16 g^2}{(4 + g^2)^2} \right]$$

donde se usó la nomenclatura  $PolyLog[n, Z]$  para expresar la función polilogaritmo:

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}.$$

En la figura (4.1) se muestra la variación de  $L \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $L q_0$ .



**Figura 4.1:** Gráfico de  $L \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $L q_0$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 1$

#### 4.2.2. El caso particular $d = 3$ , $g_1 = g_2$ .

Si la dimensión espacial es  $d = 3$ , entonces, las matrices gamma son de rango 4 y la matriz  $\mathcal{M}$  es de rango 8 en bloques de  $4 \times 4$ . Utilizando las propiedades de las matrices por bloques se obtiene un resultado análogo al de la ecuación (4.9) que en este caso se convierte en:

$$\det[\mathcal{M}(q)] = \det \mathcal{M}_{00} \det \mathcal{M}_{11} \det \left[ \mathcal{I} - \mathcal{M}_{00}^{-1} \mathcal{M}_{01} \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{10} \right] \quad (4.27)$$

mientras que las ecuaciones (4.10) y (4.11) permanecen igual:

$$\mathcal{M}_{00}^{-1} = \mathcal{M}_{11}^{-1} = \left( 1 + \frac{g(m+iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right)^{-1} = \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{gm}{\sqrt{m^2+q^2}} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{00}^{-1} \mathcal{M}_{01} \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{10} &= \frac{g^2}{4} e^{-2L\sqrt{m^2+q^2}} \left( 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{gm}{\sqrt{m^2+q^2}} \right)^{-2} \\ &\times \left( 1 + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} - \gamma_d \right) \left( 1 + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}} \right) \left( \frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} + \gamma_d \right) \end{aligned}$$



Para simplificar los cálculos se llama  $\beta = \sqrt{m^2 + q^2}$  con lo cual queda:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}}\right) \left(\frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} - \gamma_d\right) \left(1 + \frac{g(m-iq)}{2\sqrt{m^2+q^2}}\right) \left(\frac{m+iq}{\sqrt{m^2+q^2}} + \gamma_d\right) \\
&= \left(1 + g \frac{m-iq}{2\beta}\right) \left(\frac{m+iq}{\beta} - \gamma_d\right) \left(1 + g \frac{m-iq}{2\beta}\right) \left(\frac{m+iq}{\beta} + \gamma_d\right) \\
&= \left(1 + g \frac{m}{2\beta} - i g \frac{q}{2\beta}\right) \left(\frac{m}{\beta} + i \frac{q}{\beta} - \gamma_d\right) \left(1 + g \frac{m}{2\beta} - i g \frac{q}{2\beta}\right) \left(\frac{m}{\beta} + i \frac{q}{\beta} + \gamma_d\right) \\
&= \left[\left(\frac{m}{\beta} + g \frac{m^2}{2\beta^2} + g \frac{q^2}{2\beta^2}\right) \mathcal{I} + \frac{i}{\beta} \not{d} - \left(1 + g \frac{m}{2\beta}\right) \gamma_d + i \frac{g}{2\beta} \not{d} \gamma_d\right] \\
&\times \left[\left(\frac{m}{\beta} + g \frac{m^2}{2\beta^2} + g \frac{q^2}{2\beta^2}\right) \mathcal{I} + \frac{i}{\beta} \not{d} + \left(1 + g \frac{m}{2\beta}\right) \gamma_d - i \frac{g}{2\beta} \not{d} \gamma_d\right] \\
&= \left[\left(\frac{m}{\beta} + g \frac{m^2}{2\beta^2} + g \frac{q^2}{2\beta^2}\right)^2 - \frac{q^2}{\beta^2} - \left(1 + g \frac{m}{2\beta}\right)^2 - g^2 \frac{q^2}{4\beta^2}\right] \mathcal{I} + g \frac{q^2}{\beta^2} \gamma_d \\
&+ \frac{2i}{\beta} \left(\frac{m}{\beta} + g \frac{m^2}{2\beta^2} + g \frac{q^2}{2\beta^2}\right) \not{d} + \frac{2i}{\beta} \left(1 + g \frac{m}{2\beta}\right) \not{d} \gamma_d \\
&= \left[\left(\frac{m}{\beta} + \frac{g}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{\beta^2} - \left(1 + g \frac{m}{\beta} + g^2 \frac{m^2}{4\beta^2}\right) - g^2 \frac{q^2}{4\beta^2}\right] \mathcal{I} + g \frac{q^2}{\beta^2} \gamma_d \\
&+ \frac{2i}{\beta} \left(\frac{m}{\beta} + \frac{g}{2}\right) \not{d} + \frac{2i}{\beta} \left(1 + g \frac{m}{2\beta}\right) \not{d} \gamma_d \\
&= \frac{q^2}{\beta^2} \left[-2\mathcal{I} + g \gamma_d + \frac{2i}{q^2} \left(m + \frac{g\beta}{2}\right) \not{d} + \frac{2i}{q^2} \left(\beta + g \frac{m}{2}\right) \not{d} \gamma_d\right].
\end{aligned}$$

Usando este resultado queda:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{00}^{-1} \mathcal{M}_{01} \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{10} = \\
&= \frac{q^2}{4} e^{-2L\beta} \left(1 + \frac{g^2}{4} + \frac{gm}{\beta}\right)^{-2} \frac{q^2}{\beta^2} \left[-2\mathcal{I} + g \gamma_d + \frac{2i}{q^2} \left(\beta + g \frac{m}{2}\right) \not{d} \gamma_d\right] \\
&= g^2 \left(\frac{2g}{(4+g^2)\beta + 4gm}\right)^2 e^{-2L\beta} \left[-2\mathcal{I} + g \gamma_d + \frac{2i}{q^2} \left(m + \frac{g\beta}{2}\right) \not{d}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{2i}{q^2} \left(\beta + g \frac{m}{2}\right) \not{d} \gamma_d\right] \\
&= -\frac{8g^2 q^2 e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} \mathcal{I} + \frac{4g^3 q^2 e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} \gamma_d + i \frac{4g^2 (2m + g\beta) e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} \not{d}
\end{aligned}$$

$$+ i \frac{4g^2(2\beta+gm)e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \not{d}\gamma_d$$

Obteniéndose que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} - \mathcal{M}_{00}^{-1}\mathcal{M}_{01}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{M}_{10} &= \left(1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2}\right) \mathcal{I} \\ &- \frac{4g^3q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \gamma_d - i \frac{4g^2|q|(2m+g\beta)e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \frac{\not{d}}{|q|} \\ &- \frac{4g^2|q|(2\beta+gm)e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \frac{i \not{d}\gamma_d}{|q|} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Para simplificar la notación y el cálculo, se denomina:

$$a(q) = 1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \quad (4.29)$$

$$b(q) = - \frac{4g^3q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \quad (4.30)$$

$$c(q) = -i \frac{4g^2|q|(2m+g\beta)e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \quad (4.31)$$

$$d(q) = - \frac{4g^2|q|(2\beta+gm)e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \quad (4.32)$$

$$\sigma_1 = \gamma_d \quad \sigma_2 = \frac{\not{d}}{|q|} \quad \sigma_3 = i \frac{\not{d}\gamma_d}{|q|}. \quad (4.33)$$

Se aprovecha que las matrices  $\sigma_j$  verifican el álgebra:  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  y  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ .

Llamando:

$$\mathcal{K} = \mathcal{I} - \mathcal{M}_{00}^{-1}\mathcal{M}_{01}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{M}_{10}$$

y volviendo a repetir el procedimiento de la sección anterior, a partir de la página 37, que se realizó en forma general, se obtiene:

$$\mathcal{K} = a(q)\mathcal{I} + b(q)\sigma_1 + c(q)\sigma_2 + d(q)\sigma_3$$

$$\mathcal{K}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathcal{I} + \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = 2ab\sigma_1 + 2ac\sigma_2 + 2ad\sigma_3$$

$$\mathcal{A}^2 = 4a^2(b^2 + c^2 + d^2)\mathcal{I}$$

$$\lambda_{\mathcal{A}^2} = 4a^2(b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\lambda_{\mathcal{K}1} = a + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\lambda_{\mathcal{K}2} = a - \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} .$$

Lo que se diferencia del caso anterior es que ahora las matrices gamma son de rango 4. Por lo tanto las matrices  $\mathcal{K}^2$ ,  $\mathcal{A}^2$ ,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{K}$  tiene que tener 4 autovalores, ya sean distintos o repetidos. Pero  $\mathcal{A}^2$  tiene un único autovalor de multiplicidad 4 que es  $\lambda_{\mathcal{A}^2} = 4a^2(b^2 + c^2 + d^2)$ , por lo tanto  $\mathcal{A}$  sólo puede tener como posibles autovalores  $\lambda_{\mathcal{A}} = \pm 2a\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ . Para encontrar la multiplicidad de cada uno, se utiliza la propiedad que tienen las matrices gamma - y por lo tanto también las matrices  $\sigma$  y  $\mathcal{A}$  - de que su traza es nula. Para que la traza de  $\mathcal{A}$  sea nula, sólo puede tener igual número de autovalores  $2a\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$  que  $-2a\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ . Por lo tanto, la única posibilidad es que cada uno de ellos sea de multiplicidad 2, ya que tiene que tener 4 autovalores. Aprovechando esto, se encuentra que  $\mathcal{K}^2$  va a tener dos autovalores distintos, cada uno de multiplicidad 2 que van a estar dados por:

$$\lambda_{\mathcal{K}^2+} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2a\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\lambda_{\mathcal{K}^2-} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2a\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

Los dos autovalores distintos de  $\mathcal{K}$ ,  $\lambda_{\mathcal{K}1}$  y  $\lambda_{\mathcal{K}2}$ , que van a ser las respectivas raíces de  $\lambda_{\mathcal{K}^2+}$  y  $\lambda_{\mathcal{K}^2-}$ , tienen que tener entonces multiplicidad dos.

Reemplazando las definiciones (4.29)-(4.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{A}^2} &= 4a^2(b^2 + c^2 + d^2) = 4\left(1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2}\right)^2 \\ &\times \left[\frac{16g^6q^4e^{-4L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} - \frac{16g^4q^2(2m+g\beta)^2e^{-4L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} + \frac{16g^4q^2(2\beta+gm)^2e^{-4L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^4}\right] \\ &= \left(1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2}\right)^2 \frac{256g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \\ &= \left[\left(1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2}\right) \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta}\right]^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lambda_{A+} = \sqrt{\lambda_{A^2}} = \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta}$$

$$\lambda_{A-} = -\sqrt{\lambda_{A^2}} = -\frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} - \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= \left(1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2}\right)^2 + \frac{16g^6q^4e^{-4L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} \\ &\quad - \frac{16g^4q^2(2m+g\beta)^2e^{-4L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} + \frac{16g^4q^2(2\beta+gm)^2e^{-4L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} \\ &= \left(1 + \frac{8g^2q^2e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2}\right)^2 + \frac{64g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \\ &= 1 + \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \end{aligned}$$

Entonces, los autovalores de  $\mathcal{K}^2$  son:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{K}^2+} &= 1 + \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \\ &\quad + \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \\ &= 1 + \frac{32g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{256g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{K}^2-} &= 1 + \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} \\ &\quad - \frac{16g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} - \frac{128g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta} = 1. \end{aligned}$$

Y por lo tanto,  $\mathcal{K}$  tiene como posibles autovalores a:

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{1 + \frac{32g^2q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{256g^4q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta}}$$

$$\lambda_2 = \pm 1.$$

Obsérvese además que  $\lambda_1$  se puede simplificar ya que:

$$\begin{aligned}
|\lambda_1| &= \sqrt{1 + \frac{32 g^2 q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} + \frac{256 g^4 q^4}{((4+g^2)\beta+4gm)^4} e^{-4L\beta}} \\
&= \frac{e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \\
&\times \sqrt{((4+g^2)\beta+4gm)^4 e^{4L\beta} + 32 g^2 q^2 ((4+g^2)\beta+4gm)^2 e^{2L\beta} + 256 g^4 q^4} \\
&= \frac{e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \cdot \sqrt{\left[ ((4+g^2)\beta+4gm)^2 e^{2L\beta} + 16 g^2 q^2 \right]^2} \\
&= \frac{e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} \cdot \left[ ((4+g^2)\beta+4gm)^2 e^{2L\beta} + 16 g^2 q^2 \right] \\
&= 1 + \frac{16 g^2 q^2}{((4+g^2)\beta+4gm)^2} e^{-2L\beta} .
\end{aligned}$$

Pero  $\mathcal{K}$  tiene solo dos autovalores distintos que se obtienen tomando alguno de los dos signos posibles para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \pm 1 + \frac{16 g^2 q^2}{[4gm + (4+g^2)\sqrt{q^2+m^2}]^2} e^{-2L\sqrt{q^2+m^2}} \\
\lambda_2 &= \pm 1 .
\end{aligned}$$

Como se trabaja en  $D = 3 + 1$ , habrá cuatro matrices gamma de rango 4 y se pueden elegir como:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que las matrices sigma (4.33) se pueden escribir como:

$$\sigma_1 = \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{A}{|q|} = \frac{q_0 \gamma_0 + q_1 \gamma_1 + q_2 \gamma_2}{|q|} = \\ &= \frac{1}{|q|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i q_0 & q_1 - i q_2 \\ 0 & 0 & q_1 + i q_2 & -i q_0 \\ i q_0 & q_1 - i q_2 & 0 & 0 \\ q_1 + i q_2 & i q_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = i \frac{q \gamma_3}{|q|} = \frac{1}{|q|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_0 \\ q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular los autovalores de  $\mathcal{K}$  reemplazando estas matrices en su definición es muy engorroso. Tal es así que hasta es bastante complicado solamente verificar cuáles de los 4 autovalores posibles son los que realmente corresponden. Pero aplicando como en el caso anterior el teorema del polinomio anulador mínimo (que se podría haber utilizado desde el comienzo), se obtiene que los únicos autovalores de  $\mathcal{K}$  tienen la forma:

$$\lambda_{\mathcal{K}1} = a + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\lambda_{\mathcal{K}2} = a - \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}.$$

Reemplazando a, b, c y d se encuentra que:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{K}1} &= 1 + \frac{8g^2 q^2 e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta + 4gm)} + \sqrt{\frac{64g^4 q^4}{((4+g^2)\beta + 4gm)^4} e^{-4L\beta}} \\ &= 1 + \frac{8g^2 q^2 e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta + 4gm)} + \frac{8g^2 q^2}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} e^{-2L\beta} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{16 g^2 q^2}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} e^{-2L\beta}$$

$$\lambda_{\mathcal{K}2} = 1 + \frac{8g^2 q^2 e^{-2L\beta}}{((4+g^2)\beta + 4gm)} - \frac{8g^2 q^2}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} e^{-2L\beta} = 1$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (4.27) y teniendo en cuenta que para  $d=3$  las matrices gamma son de rango 4 se tiene:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} &= \ln \prod_q \det \mathcal{M}(q) = \sum_q \ln \det \mathcal{M}(q) \\ &= \sum_q \ln \left[ \det \mathcal{M}_{00} \det \mathcal{M}_{11} \det \mathcal{K} \right] \\ &= \sum_q \ln \left[ \lambda_{\mathcal{K}1}^2 \lambda_{\mathcal{K}2}^2 \right] + \text{Términos que no dependen de } L \\ &= 2 \sum_q \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 q^2}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} e^{-2L\beta} \right] \\ &\quad + \text{Términos que no dependen de } L . \end{aligned}$$

La amplitud de persistencia del vacío se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Gamma = -\ln \mathcal{Z} &= -2 \sum_q \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 q^2}{((4+g^2)\beta + 4gm)^2} e^{-2L\beta} \right] \\ &\quad - 2 \sum_q \ln \left[ \det \mathcal{M}_{00} \right] . \end{aligned} \quad (4.34)$$

La energía de punto cero en presencia de los defectos  $\mathcal{E}$ , queda entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L) &= \text{Términos que no dependen de } L \\ &\quad - 2 \lim_{T, d \rightarrow \infty} \frac{1}{Td^2} \sum_q \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 q^2 e^{-2L\sqrt{q^2+m^2}}}{[4gm + (4+g^2)\sqrt{q^2+m^2}]^2} \right] \\ &= \text{Términos que no dependen de } L \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{2\pi} \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 q^2 e^{-2L\sqrt{q^2+m^2}}}{[4gm + (4+g^2)\sqrt{q^2+m^2}]^2} \right] . \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas esféricas queda:

$$\mathcal{E}(L) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 q^2 e^{-2L\sqrt{q^2+m^2}}}{[4 g m + (4 + g^2) \sqrt{q^2 + m^2}]^2} \right] \\ + \text{Términos que no dependen de } L .$$

La energía de Casimir de interacción se define como la diferencia entre las configuraciones con y sin los defectos:

$$\mathcal{E}_{int} = \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(L) \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 q^2 e^{-2L\sqrt{q^2+m^2}}}{[4 g m + (4 + g^2) \sqrt{q^2 + m^2}]^2} \right] . \quad (4.35)$$

Haciendo el cambio de variable  $r = qL$  se puede escribir como:

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{1}{\pi^2 L^3} \int_0^\infty dq r^2 \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 r^2 e^{-2\sqrt{r^2+(mL)^2}}}{[4 g m L + (4 + g^2) \sqrt{r^2 + (mL)^2}]^2} \right] ,$$

que es convergente en el IR y en el UV.

El caso no masivo se obtiene tomando el límite cuando  $m \rightarrow 0$  y da como resultado una dependencia de la energía de Casimir de interacción con  $g$  de la forma:

$$(m = 0) \quad L^3 \mathcal{E}_{Int} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dq r^2 \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2}{(4 + g^2)^2} e^{-2r} \right] = \infty . \quad (4.36)$$

Esta energía diverge, ya que el mismo integrando tiende a infinito cuando  $r$  tiende a infinito.

En el caso masivo se denota  $M = mL \neq 0$  con lo cual queda:

$$L^3 \mathcal{E}_{Int} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dr r^2 \ln \left[ 1 + \frac{16 g^2 r^2 e^{-2\sqrt{r^2+M^2}}}{[4 g M + (4 + g^2) \sqrt{r^2 + M^2}]^2} \right] .$$

En la figura 4.2 se muestra la relación entre la densidad de energía de interacción de Casimir por  $L^3$  en función de  $g$  para distintos valores de  $M = mL$  que van de 0.1 a 1. Se puede ver que la energía es mayor cuanto menor es  $m$  (valor que diverge cuando  $m = 0$ ) y que tiene un valor máximo para  $g = 2$ . Esto ocurre debido a que cuanto menor es la masa, el propagador del campo escalar decae



mas lentamente con la distancia de separación entre las placas y mayor es la interacción. Por otra parte, cuando  $g = 2$  se alcanzan las condiciones de *bag model* donde la corriente fermiónica perpendicular a las placas se anula, es decir que no se escapan fermiones.

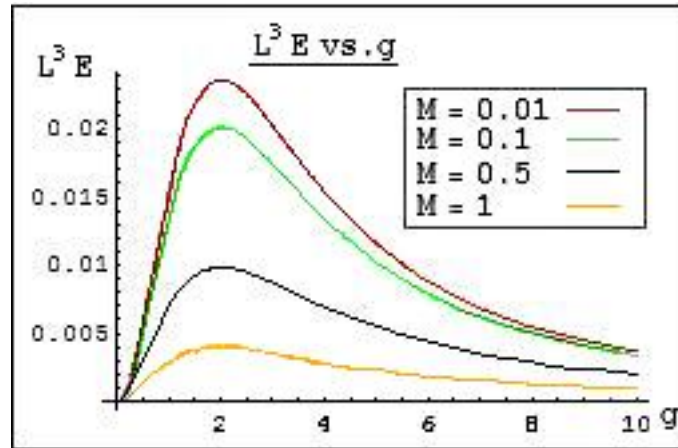


Figura 4.2: Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $g$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$

En la figura 4.3 se muestra la relación entre la densidad de energía de interacción de Casimir por  $L^3$  en función de  $M = mL$  para distintos valores de  $g$  que van de 0.1 a 3. Se puede ver que la energía es mayor cuanto menor es  $m$  y que para  $M \simeq 2$  (es decir cuando  $L \simeq 2/m$ ), la energía ya resulta muy pequeña.

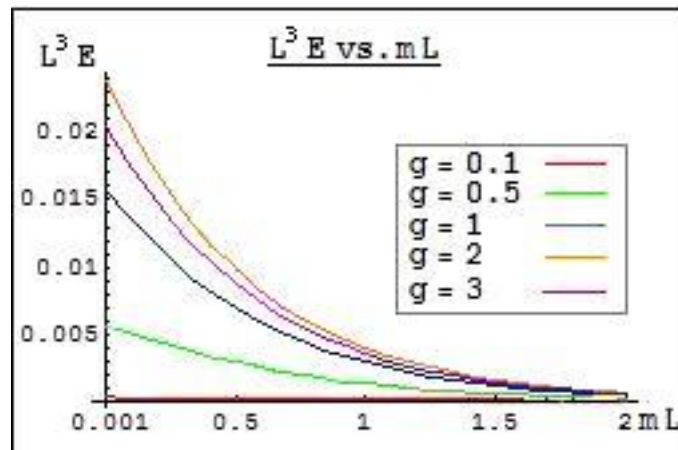


Figura 4.3: Gráfico de  $L^3 \mathcal{E}_{Int}$  vs.  $M$  para dos defectos separados una distancia  $L$  en  $d = 3$

## C lculo de magnitudes locales

En este capítulo, siguiendo con la metodología implementada anteriormente, se encuentra una expresión para el propagador completo de un campo fermióni-  
co. Esto es de gran utilidad porque permite el cálculo del valor medio de ob-  
servables locales (normalmente bilineales en los campos fermiónicos), como por  
ejemplo la densidad de carga y las componentes de la corriente. En este trabajo  
se estudia la función  $\sigma(x) = \langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle$ , que depende de la presencia de tipo de  
defectos que consideramos.

### 5.1. Propagador para el campo fermiónico.

Para calcular el propagador de un campo fermiónico, se considera en la fun-  
ción de partición  $\mathcal{Z}$  la acción debida a las fuentes:

$$\mathcal{Z}(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} \quad (5.1)$$

$$S = S_0 + S_I + S_F$$

$$S_0 = \int d^D x \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x) \quad (\text{Acción libre})$$

$$S_I = \int d^D x \bar{\psi}(x) V(x) \psi(x) \quad (\text{Acción debida a la interacción})$$

$$S_F = - \int d^D x (\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)) \quad (\text{Acción de las fuentes})$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{Z}(0, 0) \quad (\text{Factor de normalización})$$

siendo  $V(x) = g\delta(x_d) + g\delta(x_d - L)$  el potencial correspondiente a tener dos  
defectos separados una distancia  $L$ .

Se denomina  $x \in \mathbb{R}^D$  e  $y \in \mathbb{R}^d$  a las componentes de la posición en el espacio-  
tiempo (donde la componente temporal es  $x_0$ ):

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) = (y, x_d) \quad y = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$$

y a las componentes de los momentos:

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_{d-1}, p_d) = (q, p_d) \quad q = (p_0, p_1, \dots, p_{d-1}) .$$

Para simplificar la notación se va a expresar el potencial como:

$$V(x) = g \sum_{\alpha=0}^1 \delta(x_d - a_\alpha) \quad (5.2)$$

con  $a_0 = 0$  y  $a_1 = L$ .

Se tiene entonces que  $e^{-S_I}$  es:

$$e^{-S_I} = \prod_{\alpha} \exp \left[ -g \int d^d y \int d^d y' \bar{\psi}(y, a_\alpha) \delta(y - y') \psi(y', a_\alpha) \right] .$$

Utilizando variables de Grassmann auxiliares  $\bar{\chi}_\alpha(y)$  y  $\chi_\alpha(y)$ , haciendo el cambio de variables:

$$\chi(y) = \sqrt{g} \chi'(y)$$

$$\mathcal{D}\chi = \det(\sqrt{g} \mathbf{1}) \mathcal{D}\chi'$$

y llamando:  $\xi_\alpha = \sqrt{g} \delta(x_d - a_\alpha) \chi_\alpha(y)$  queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\eta, \bar{\eta}) &= \int \prod_{\alpha} (\mathcal{D}\chi_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\chi}_{\alpha}) \exp \left[ \sum_{\alpha} \int d^d y \chi_{\alpha}^2(y) \right] \\ &\times \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ - \int d^D x \int d^D x' \bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \delta(x - x') \psi(x) \right] \\ &\times \exp \left[ \int d^D x \left[ \bar{\psi}(x) \left( \eta(x) + \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}(x) \right) + \left( \bar{\eta}(x) + \sum_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}(x) \right) \psi(x) \right] \right] \\ &= \int \prod_{\alpha} (\mathcal{D}\chi_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\chi}_{\alpha}) \exp \left[ \sum_{\alpha} \int d^d y \chi_{\alpha}^2(y) \right] \\ &\times \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \left( \bar{\eta}(x) + \sum_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}(x) \right) G_F^{(0)}(x, x') \left( \eta(x') + \sum_{\beta} \xi_{\beta}(x') \right) \right] \\ &= \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(x, x') \eta(x') \right] \\ &\times \int \prod_{\alpha} (\mathcal{D}\chi_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\chi}_{\alpha}) \exp \left[ \sum_{\alpha, \beta} \int d^d y \int d^d y' \bar{\chi}_{\alpha}(y) \delta_{\alpha\beta} \delta(y - y') \chi_{\beta}(y') \right] \\ &\times \exp \left[ g \sum_{\alpha, \beta} \int d^d y \int d^d y' \bar{\chi}_{\alpha}(y) G_F^{(0)}(y, a_{\alpha}, y', a_{\beta}) \chi_{\beta}(y') \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[ \sqrt{g} \sum_{\beta} \int d^D x \int d^d y' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(y, x_d, y', a_{\beta}) \chi_{\beta}(y') \right] \\
& \times \exp \left[ \sqrt{g} \sum_{\alpha} \int d^d y \int d^D x' \bar{\chi}_{\alpha}(y) G_F^{(0)}(y, a_{\alpha}, y', x'_d) \eta(x') \right]. \\
& = \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(x, x') \eta(x') \right] \int \prod_{\alpha} (\mathcal{D}\chi_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\chi}_{\alpha}) \\
& \times \exp \left[ \sum_{\alpha, \beta} \int d^d y \int d^d y' \bar{\chi}_{\alpha}(y) \left( \delta_{\alpha\beta} \delta(y - y') + g G_F^{(0)}(y, a_{\alpha}, y', a_{\beta}) \right) \chi_{\beta}(y') \right] \\
& \times \exp \left[ \sum_{\alpha} \int d^d y \bar{\chi}_{\alpha}(y) \left( \sqrt{g} \int d^D x' G_F^{(0)}(y, a_{\alpha}, y', x'_d) \eta(x') \right) \right] \\
& \times \exp \left[ \sum_{\beta} \int d^d y' \left( \sqrt{g} \int d^D x \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(y, x_d, y', a_{\beta}) \right) \chi_{\beta}(y') \right],
\end{aligned}$$

Llamando:

$$\sigma_{\alpha}(y) = \sqrt{g} \int d^D x' G_F^{(0)}(y, a_{\alpha}, y', x'_d) \eta(x')$$

$$\bar{\sigma}_{\beta}(y') = \sqrt{g} \int d^D x \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(y, x_d, y', a_{\beta}) \chi_{\beta}(y')$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta(y - y') + g G_F^{(0)}(y, a_{\alpha}, y', a_{\beta}),$$

queda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\eta, \bar{\eta}) &= \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(x, x') \eta(x') \right] \int \prod_{\alpha} (\mathcal{D}\chi_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\chi}_{\alpha}) \\
& \exp \left[ \sum_{\alpha, \beta} \int d^d y \int d^d y' \bar{\chi}_{\alpha}(y) \mathcal{K}_{\alpha\beta} \chi_{\beta}(y') \right] \\
& \exp \left[ \sum_{\alpha} \int d^d y \left( \bar{\chi}_{\alpha}(y) \sigma_{\alpha}(y) + \bar{\sigma}_{\alpha}(y) \chi_{\beta}(y') \right) \right] \\
& = \det[\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y, y')] \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(x, x') \eta(x') \right] \\
& \times \exp \left[ - \sum_{\alpha, \beta} \int d^d y \int d^d y' \bar{\sigma}_{\alpha}(y) [\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y, y')]^{-1} \sigma_{\beta}(y') \right] \\
& = \det[\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y, y')] \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(x, x') \eta(x') \right] \\
& \times \exp \left[ - g \sum_{\alpha, \beta} \int d^d y \int d^d y' \left( \int d^D \tilde{x} \bar{\eta}(\tilde{x}) G_F^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{x}_d, y, a_{\alpha}) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y, y')]^{-1} \left( \int d^D \tilde{x}' G_F^{(0)}(y', a_\beta, \tilde{y}', \tilde{x}'_d) \eta(\tilde{x}') \right) \\
& = \det[\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y, y')] \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) G_F^{(0)}(x, x') \eta(x') \right] \\
& \times \exp \left[ -g \sum_{\alpha, \beta} \int d^D \tilde{x} \int d^D \tilde{x}' \bar{\eta}(\tilde{x}) \left( \int d^d y G_F^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{x}_d, y, a_\alpha) \right) \right. \\
& \quad \left. \times [\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y, y')]^{-1} \left( \int d^d y' G_F^{(0)}(y', a_\beta, \tilde{y}', \tilde{x}'_d) \right) \eta(\tilde{x}') \right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, la primer exponencial no es más que  $\mathcal{Z}_0(\bar{\eta}, \eta)$  y la función de partición se puede escribir entonces de forma mucho mas sencilla como:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0(\bar{\eta}, \eta) \exp \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) T(x, x') \eta(x') \right] \quad (5.3)$$

donde se han eliminado factores independientes de  $\bar{\eta}$  y  $\eta$ , y se definió:

$$\begin{aligned}
T(x, x') &= -g \sum_{\alpha, \beta} \left( \int d^d \tilde{y} G_F^{(0)}(y, x_d, \tilde{y}, a_\alpha) \right) \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{-1}(\tilde{y}, \tilde{y}') \\
&\quad \times \left( \int d^d \tilde{y}' G_F^{(0)}(\tilde{y}', a_\beta, y', x'_d) \right)
\end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}') = \delta_{\alpha\beta} \delta(\tilde{y} - \tilde{y}') + g G_F^{(0)}(\tilde{y}, a_\alpha, \tilde{y}', a_\beta). \quad (5.5)$$

El propagador fermiónico libre, como se demostró en secciones anteriores, tiene la forma:

$$G_F^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \int \frac{dp_d}{2\pi} \frac{i p_d \gamma_d + (i \not{H} + m)}{(p_d^2 + q^2 + m^2)} e^{-ip_d(x_d - x'_d)} \right] e^{-iq(y - y')}.$$

Para simplificar la notación, de aquí en adelante se define:

$$\tilde{S}(q, x_d, x'_d) = \int \frac{dp_d}{2\pi} \frac{i p_d \gamma_d + (i \not{H} + m)}{(p_d^2 + q^2 + m^2)} e^{-ip_d(x_d - x'_d)} \quad (5.6)$$

con lo cual se tiene que:

$$G_F^{(0)}(y, x_d, y', x'_d) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q, x_d, x'_d) e^{-iq(y - y')}.$$

En particular:

$$G_F^{(0)}(y, x_d, \tilde{y}, a_\alpha) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) e^{-iq(y-\tilde{y})}$$

$$G_F^{(0)}(\tilde{y}', a_\beta, y', x'_d) = \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q', a_\beta, x'_d) e^{-iq'(\tilde{y}'-y')} .$$

Reemplazando esto en la ecuación (5.4):

$$T(x, x') = -g \sum_{\alpha, \beta} \left( \int d^d \tilde{y} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) e^{-iq(y-\tilde{y})} \right) \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{-1}(\tilde{y}, \tilde{y}')$$

$$\times \left( \int d^d \tilde{y}' \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q', a_\beta, x'_d) e^{-iq'(\tilde{y}'-y')} \right)$$

$$= -g \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) e^{-iqy}$$

$$\times \left( \int d^d \tilde{y} \int d^d \tilde{y}' e^{-iq'\tilde{y}'} e^{iq\tilde{y}} \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{-1}(\tilde{y}, \tilde{y}') \right) \tilde{S}(q', a_\beta, x'_d) e^{iq'y'} .$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (5.5):

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}') = \delta_{\alpha\beta} \delta(\tilde{y} - \tilde{y}') + g \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{S}(k, a_\alpha, a_\beta) e^{-ik(\tilde{y}-\tilde{y}')}$$

$$= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[ \delta_{\alpha\beta} + g \tilde{S}(k, a_\alpha, a_\beta) \right] e^{-ik(\tilde{y}-\tilde{y}')} . \quad (5.7)$$

Si se denomina:

$$B_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} + g \tilde{S}(k, a_\alpha, a_\beta)$$

entonces:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} B_{\alpha\beta}(k) e^{-ik(\tilde{y}-\tilde{y}')} .$$

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}') = \tilde{B}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}') ,$$

donde  $\tilde{B}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}')$  es la transformada de Fourier de  $B_{\alpha\beta}(k)$ ,

Aplicando la propiedad de que la inversa de la transformada de Fourier de una función es igual a la transformada de Fourier de la inversa de esa función, se

encuentra que:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{-1}(\tilde{y}, \tilde{y}') = (\tilde{B}_{\alpha\beta}(\tilde{y}, \tilde{y}'))^{-1} = \widetilde{B_{\alpha\beta}^{-1}}(k) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} B_{\alpha\beta}^{-1}(k) e^{-ik(\tilde{y}-\tilde{y}')} \quad (5.8)$$

Para dos defectos, uno en  $x_d = a_0 = 0$  y otro en  $x_d = a_1 = L$ , la matriz  $B_{\alpha\beta}$  es:

$$B_{\alpha\beta}(k) = \begin{pmatrix} 1 + g \tilde{S}(k, 0, 0) & \tilde{S}(k, 0, L) \\ g \tilde{S}(k, L, 0) & 1 + g \tilde{S}(k, L, L) \end{pmatrix}.$$

Por ser una matriz por bloques, se puede invertir utilizando la fórmula:

$$B_{\alpha\beta}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} C_0^{-1} & -B_{00}^{-1} B_{10} C_1^{-1} \\ -C_1^{-1} B_{10} B_{00}^{-1} & C_1^{-1} \end{pmatrix},$$

siendo  $C_0 = B_{00} - B_{01} B_{11}^{-1} B_{10}$  y  $C_1 = B_{11} - B_{10} B_{00}^{-1} B_{01}$ .

Una vez invertida esta matriz, se reemplaza en la última expresión para  $T(x, x')$ , junto con la ecuación (5.8) para  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{-1}$ . Finalmente  $T(x, x')$  queda de la forma:

$$\begin{aligned} T(x, x') &= -g \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int d^d k \int d^d q' \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) e^{-iqy} B_{\alpha\beta}^{-1}(k) \\ &\quad \times \tilde{S}(q', a_\beta, x'_d) e^{iq'y'} \left( \int \frac{d^d \tilde{y}}{(2\pi)^d} e^{-i\tilde{y}(k-q)} \int \frac{d^d \tilde{y}'}{(2\pi)^d} e^{-i\tilde{y}'(q'-k)} \right) \\ &= -g \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int d^d k \int d^d q' \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) e^{-iqy} B_{\alpha\beta}^{-1}(k) \\ &\quad \times \tilde{S}(q', a_\beta, x'_d) e^{iq'y'} \delta(k - q) \delta(q' - k) \\ &= -g \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) e^{-iqy} B_{\alpha\beta}^{-1}(q) \tilde{S}(q, a_\beta, x'_d) e^{iqy'}. \end{aligned}$$

Si bien esta expresión parece bastante complicada, se simplifica mucho en el caso en que  $x = x'$  y - como se verá mas adelante - es lo único que se necesita para calcular el propagador fermiónico. En dicho caso se tiene:

$$T(x, x) = -g \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{S}(q, x_d, a_\alpha) B_{\alpha\beta}^{-1}(q) \tilde{S}(q, a_\beta, x_d)$$

Para evitar confusiones con la nomenclatura, se va a llamar  $M_{\alpha\beta}(q) = (B_{\alpha\beta}(q))^{-1}$  - Inversa de la matriz  $B_{\alpha\beta}(q)$  -, para distinguirla de las matrices  $B_{\alpha\beta}^{-1}(q)$  inversas del bloque de matriz de  $B$  que tiene índices  $\alpha, \beta$ .

Para dos defectos, uno en  $x_d = a_0 = 0$  y otro en  $x_d = a_1 = L$ , queda:

$$\begin{aligned}
T(x, x) = & -g \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \tilde{S}(q, x_d, 0) M_{00}(q) \tilde{S}(q, 0, x_d) \right. \\
& + \tilde{S}(q, x_d, L) M_{11}(q) \tilde{S}(q, L, x_d) + \tilde{S}(q, x_d, 0) M_{01}(q) \tilde{S}(q, L, x_d) \\
& \left. + \tilde{S}(q, x_d, L) M_{10}(q) \tilde{S}(q, 0, x_d) \right] \tag{5.9}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(q, x_d, 0) &= \frac{1}{2} \left( \frac{i q + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} + Sg(x_d) \gamma_d \right) e^{-|x_d| \sqrt{q^2 + m^2}} \\
\tilde{S}(q, x_d, L) &= \frac{1}{2} \left( \frac{i q + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} + Sg(x_d - L) \gamma_d \right) e^{-|x_d - L| \sqrt{q^2 + m^2}} \\
\tilde{S}(q, 0, x_d) &= \frac{1}{2} \left( \frac{i q + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} - Sg(x_d) \gamma_d \right) e^{-|x_d| \sqrt{q^2 + m^2}} \\
\tilde{S}(q, L, x_d) &= \frac{1}{2} \left( \frac{i q + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} - Sg(x_d - L) \gamma_d \right) e^{-|x_d - L| \sqrt{q^2 + m^2}}
\end{aligned}$$

El *propagador fermiónico* resulta entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle &= \left. \frac{\delta \ln \mathcal{Z}(\eta, \bar{\eta})}{\delta \eta(x') \delta \bar{\eta}(x')} \right|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \left. \frac{\delta \mathcal{Z}_0(\eta, \bar{\eta})}{\delta \eta(x') \delta \bar{\eta}(x)} \right|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
&+ \left. \frac{\delta \left[ \int d^D x \int d^D x' \bar{\eta}(x) T(x, x') \eta(x') \right]}{\delta \eta(x') \delta \bar{\eta}(x')} \right|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
&= G_F^{(0)}(x, x') + T(x, x') . \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Entonces, el valor medio de la traza del propagador es:

$$\sigma(x) = -Tr \langle \psi(x) \bar{\psi}(x) \rangle = -Tr G_F^{(0)}(x, x') - Tr T(x, x') . \tag{5.11}$$



El primer término es la contribución del vacío y el segundo es el debido a la interacción con los defectos. En particular nos interesa la componente debida a la interacción, definida como:

$$\sigma_{int}(x) = -Tr [T(x, x)], \quad (5.12)$$

que es el único término que depende de  $x$ .

### 5.1.1. Caso particular de un solo defecto

Si se tiene un único defecto en la posición  $x_d = 0$ , en la ecuación para el potencial (ec. 5.2) solo se considera  $\alpha = 0$  con  $a_\alpha = 0$ . Es decir que sólo habrá que incorporar las variables de Grassman auxiliares  $\chi_0$  y  $\bar{\chi}_0$ , con lo cual la ecuación (5.9) para  $T(x, x)$  se reduce a:

$$\begin{aligned} T(x, x) &= -g \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \tilde{S}(q, x_d, 0) B_{00}^{-1}(q) \tilde{S}(q, 0, x_d) \right] \\ &= -g \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \tilde{S}(q, x_d, 0) \left[ 1 + g \tilde{S}(q, 0, 0) \right]^{-1} \tilde{S}(q, 0, x_d) \right] \\ &= -\frac{g}{4} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \left( \frac{i \not{q} + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} + Sg(x_d) \gamma_d \right) \left[ 1 + \frac{g}{2} \frac{i \not{q} + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} \right]^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{i \not{q} + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} - Sg(x_d) \gamma_d \right) e^{-2|x_d| \sqrt{q^2 + m^2}} \right]. \end{aligned}$$

Pero se tiene que:

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \frac{g}{2} \frac{i \not{q} + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} \right]^{-1} &= 2 \sqrt{q^2 + m^2} \left[ 2 \sqrt{q^2 + m^2} + g m + i g \not{q} \right]^{-1} \\ &= 2 \sqrt{q^2 + m^2} \frac{(2 \sqrt{q^2 + m^2} + g m) - i g \not{q}}{(2 \sqrt{q^2 + m^2} + g m)^2 + g^2 q^2} \\ &= \frac{2 \sqrt{q^2 + m^2} (2 \sqrt{q^2 + m^2} + g m)}{(2 \sqrt{q^2 + m^2} + g m)^2 + g^2 q^2} \mathcal{I} - \frac{2 i g |q| \sqrt{q^2 + m^2}}{(2 \sqrt{q^2 + m^2} + g m)^2 + g^2 q^2} \frac{\not{q}}{|q|} \\ &= \alpha \mathcal{I} - \beta \frac{\not{q}}{|q|}. \end{aligned}$$

Entonces queda:

$$\left[ \frac{i \not{q} + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} + Sg(x_d) \gamma_d \right] \left[ \alpha \mathcal{I} - \beta \frac{\not{q}}{|q|} \right] \left[ \frac{i \not{q} + m}{\sqrt{q^2 + m^2}} - Sg(x_d) \gamma_d \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= (q^2 + m^2)^{-1} \left[ m + i \not{q} + Sg(x_d) \sqrt{q^2 + m^2} \gamma_d \right] \left[ \alpha \mathcal{I} - \beta \frac{\not{q}}{|q|} \right] \\
&\times \left[ m + i \not{q} - Sg(x_d) \sqrt{q^2 + m^2} \gamma_d \right] \\
&= (q^2 + m^2)^{-1} \left[ m + i \not{q} + Sg(x_d) \sqrt{q^2 + m^2} \gamma_d \right] \left[ \alpha m - i\beta \frac{q^2}{|q|} + \right. \\
&\quad \left. + i\alpha \not{q} - \beta m \frac{\not{q}}{|q|} - \alpha Sg(x_d) \sqrt{q^2 + m^2} \gamma_d + \beta Sg(x_d) \sqrt{q^2 + m^2} \frac{\not{q} \gamma_d}{|q|} \right] \\
&= (q^2 + m^2)^{-1} \left[ \alpha m^2 - i q^2 m \frac{\beta}{|q|} - \alpha (q^2 + m^2) - \alpha q^2 - i m q^2 \frac{\beta}{|q|} \right] \\
&\quad + \text{Términos proporcionales a } \not{q} \\
&= - \frac{2q^2}{(q^2 + m^2)} \left[ \alpha + i m \frac{\beta}{|q|} \right] + \text{Térm. proporcionales a } \not{q}.
\end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en la integral que define el operador  $T(x, x)$ , y teniendo en cuenta que los términos en  $\not{q}$  se anulan por integración simétrica resulta:

$$\begin{aligned}
T(x, x) &= \frac{g}{4} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2q^2}{(q^2 + m^2)} \left[ \alpha + i m \frac{\beta}{|q|} \right] e^{-2|x_d| \sqrt{q^2 + m^2}} = \\
&= g \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2q^2 e^{-2|x_d| \sqrt{q^2 + m^2}}}{[2\sqrt{q^2 + m^2} + gm]^2 + g^2 q^2}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

### 5.1.1.1. Una dimensión espacial. ( $d = 1$ )

Cuando  $d = 1$ , solamente se tiene  $x = (x_0, x_1)$  y  $q = p_0$ . Por simplicidad, en lugar de seguir denominando a  $x$  de esta manera se llamará a  $x_0$ ,  $t$  y a  $x_1$ ,  $x$ . De esta manera, la ecuación (5.13) queda de la forma:

$$T(x, x) = g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2q^2 e^{-2|x| \sqrt{q^2 + m^2}}}{[2\sqrt{q^2 + m^2} + gm]^2 + g^2 q^2}.$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (5.12) se encuentra que:

$$\begin{aligned}\sigma_{int}(x) &= -Tr T(x, x') = -2 T(x, x) \\ &= -4g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{q^2 e^{-2|x|\sqrt{q^2+m^2}}}{[2\sqrt{q^2+m^2} + gm]^2 + g^2 q^2}.\end{aligned}$$

■ **Cuando la masa es nula:**

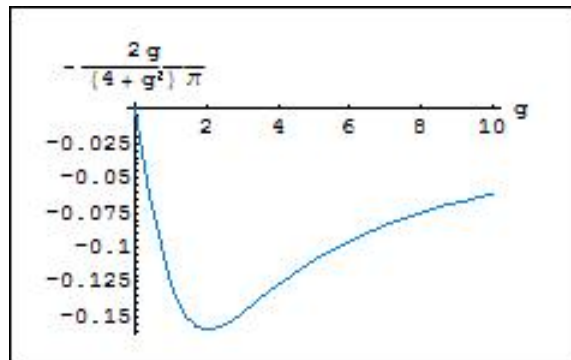
$$\sigma_{int}(x) = \frac{-4g}{\pi(4+g^2)} \int_0^{\infty} dq e^{-2q|x|}$$

Considerando  $|x| \neq 0$  puede hacer un cambio de variable, llamando  $q' = q|x|$ , con lo cual queda:

$$\sigma_{int}(x) = \frac{-4g}{\pi(4+g^2)|x|} \int_0^{\infty} dq e^{-2q}$$

$$\sigma_{int}(x) = \frac{-2g}{\pi(4+g^2)|x|}. \quad (5.14)$$

En la figura 5.1 se muestra la variación de variación del factor  $\frac{-2g}{\pi(4+g^2)}$  en función de la constante  $g$ . Teniendo esto en cuenta, en la figura 5.2, se pre-



**Figura 5.1:** Variación del factor  $\frac{-2g}{\pi(4+g^2)}$  en función de la constante  $g$

senta  $\sigma_{int}$  en función de  $x$  para distintos valores de  $g$ . Se puede observar que cuando  $g = 2$  alcanza un valor mínimo.

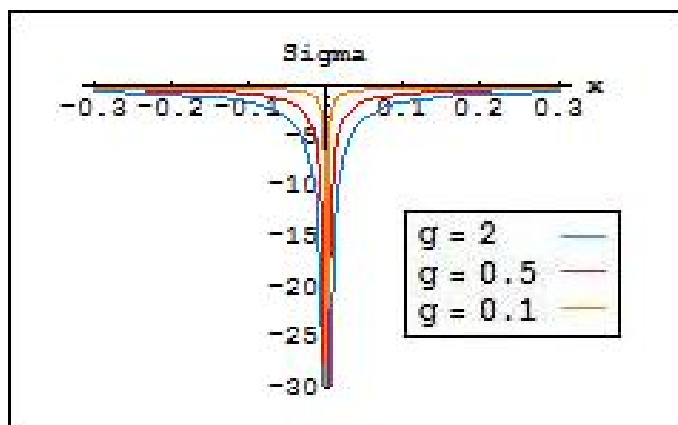


Figura 5.2:  $\sigma_{int}$  en funci n de  $x$  para distintos valores de  $g$

■ Cuando la masa es no nula:

$$\begin{aligned}\sigma_{int}(x) &= -\frac{4g}{\pi} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2 x^2 e^{-2\sqrt{q^2 x^2 + m^2 x^2}}}{[2\sqrt{q^2 x^2 + m^2 x^2} + gm|x|]^2 + g^2 q^2 x^2} = \\ &= -\frac{4g}{\pi|x|} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2 e^{-2\sqrt{q^2 + m^2 x^2}}}{[2\sqrt{q^2 + m^2 x^2} + gm|x|]^2 + g^2 q^2},\end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variable:  $q' = q|x|$ .

Llamando  $M = m|x|$  se puede escribir:

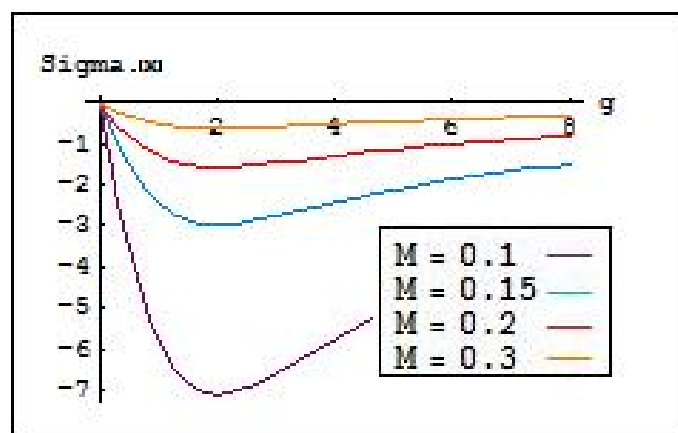
$$\begin{aligned}\sigma_{int}(x) &= -\frac{4g}{\pi|x|} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2 e^{-2\sqrt{q^2 + M^2}}}{[2\sqrt{q^2 + M^2} + gM]^2 + g^2 q^2} \\ &= -\frac{4g}{\pi|x|} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2 e^{-2M\sqrt{(\frac{q}{M})^2 + 1}}}{M^2[2\sqrt{(\frac{q}{M})^2 + 1} + g]^2 + g^2 (\frac{q}{M})^2 M^2} \\ &= -\frac{4gM}{\pi|x|} \int_{2M}^{\infty} dq \frac{q\sqrt{(\frac{q}{2M})^2 - 1}}{4M^2} \frac{[(\frac{q}{2M})^2 - 1]e^{-q}}{[\frac{q}{M} + g]^2 + g^2[(\frac{q}{2M})^2 - 1]} \\ &= -\frac{2g}{4\pi M^2(4 + g^2)|x|} \int_{2M}^{\infty} dq \frac{[q^2 - (2M)^2]^{3/2} e^{-q}}{q + \frac{8gM}{(4 + g^2)}}\end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{g}{2\pi M^2(4+g^2)|x|} \int_{2M}^{\infty} dq \frac{[q^2 - (2M)^2]^{3/2} e^{-q}}{q + \frac{8gM}{(4+g^2)}} \quad (5.15)$$

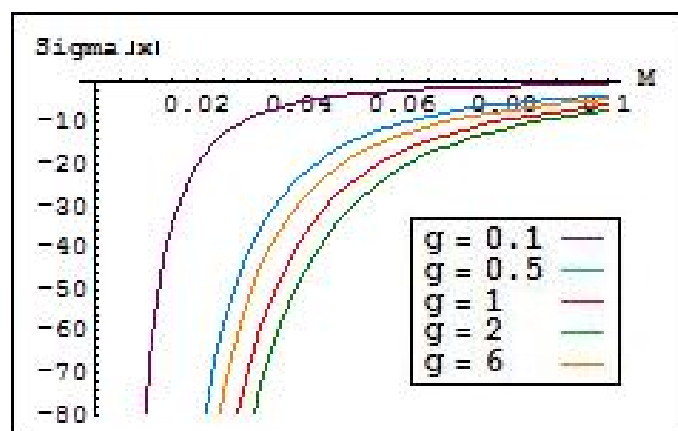
donde  $M = m|x|$ .

En la figura 5.3 se puede observar la dependencia de  $\sigma_{int}$  respecto a la variación de  $g$ , para distintos valores de  $M$ . La figura 5.4 muestra la dependencia de  $\sigma_{int}(x)$  respecto a la variación de  $M$ , para distintos valores de  $g$ .



**Figura 5.3:**  $\sigma_{int}|x|$  en función de  $g$  para distintos valores de  $M$ .

Se puede observar que para cualquier valor de  $M$  hay un máximo cuando  $g = 2$  y que el propagador diverge cuando  $|x| \rightarrow 0$  ( $M \rightarrow 0$ ).



**Figura 5.4:**  $\sigma_{int}|x|$  en función de  $M$  para distintos valores de  $g$ .

Se puede observar que los valores más grandes se obtienen cuando  $g = 2$

### 5.1.1.2. Dimensión espacial 3. ( $d = 3$ )

$$T(x, x) = g \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{2 q^2 e^{-2|x_3|\sqrt{q^2+m^2}}}{[2\sqrt{q^2+m^2} + gm]^2 + g^2 q^2}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (5.12) se encuentra que:

$$\begin{aligned} \sigma_{int}(x) &= -Tr T(x, x') = -4 T(x, x) \\ &= -4g \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{2 q^2 e^{-2|x_3|\sqrt{q^2+m^2}}}{[2\sqrt{q^2+m^2} + gm]^2 + g^2 q^2} \end{aligned}$$

Cuando  $d = 3$ , se tiene  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  y  $q = (p_0, p_1, p_2)$ . Haciendo un cambio de variables a coordenadas esféricas, la ecuación (5.13) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{int}(x) &= -16\pi g \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{2 q^4 e^{-2|x_3|\sqrt{q^2+m^2}}}{[2\sqrt{q^2+m^2} + gm]^2 + g^2 q^2} = \\ &= -\frac{4g}{\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^4 e^{-2|x_3|\sqrt{q^2+m^2}}}{[2\sqrt{q^2+m^2} + gm]^2 + g^2 q^2} \end{aligned}$$

■ **Cuando la masa es nula:**

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{4g}{\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^4 e^{-2|x_3|q}}{(4 + g^2) q^2}$$

Considerando  $|x_3| \neq 0$  puede hacer un cambio de variable, llamando  $q' = q |x_3|$ , con lo cual queda:

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{4g}{\pi^2 (4 + g^2) |x_3|^3} \int_0^\infty dq q^2 e^{-2q} = -4 \frac{g}{\pi^2 (4 + g^2) |x_3|^3} \frac{\Gamma(3)}{2^3}$$

Entonces, usando que  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , se encuentra que el **propagador de un campo fermiónico con masa nula** en  $d = 3$ , en presencia de un único defecto en la posición  $x_3 = 0$  es:

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{g}{\pi^2 (4 + g^2) |x_3|^3} \quad (5.16)$$

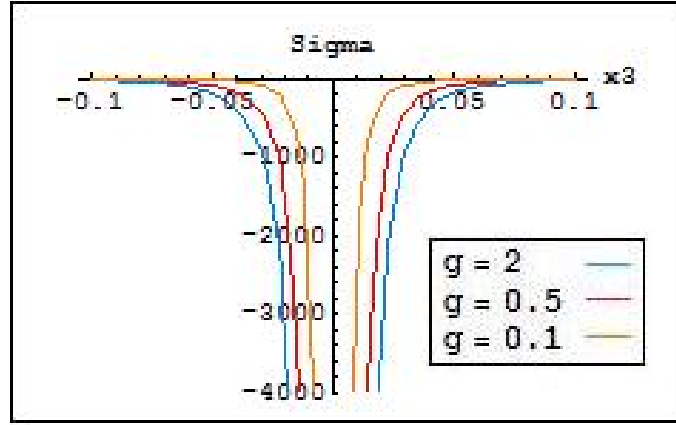


Figura 5.5:  $\sigma_{int}$  en función de  $x_3$  para un solo defecto en  $d = 3$ .

■ Cuando la masa es no nula:

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{4g}{\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^4 e^{-2|x_3|\sqrt{q^2+m^2}}}{[2\sqrt{q^2+m^2} + gm]^2 + g^2 q^2}$$

Se puede ver que  $\sigma_{int}(x)$  solo depende de la variable  $x_3$ . Por simplicidad en la notación de aquí en adelante se escribirá  $x$  en lugar de  $x_3$  para describir la dependencia con la posición respecto al defecto.

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{4g}{\pi^2 x^2} \int_0^\infty dq \frac{q^4 x^4 e^{-2\sqrt{q^2 x^2 + m^2 x^2}}}{[2\sqrt{q^2 x^2 + m^2 x^2} + gm|x|]^2 + g^2 q^2 x^2}$$

Llamando  $M = m|x|$  y haciendo el cambio de variable  $q' = q|x|$  queda:

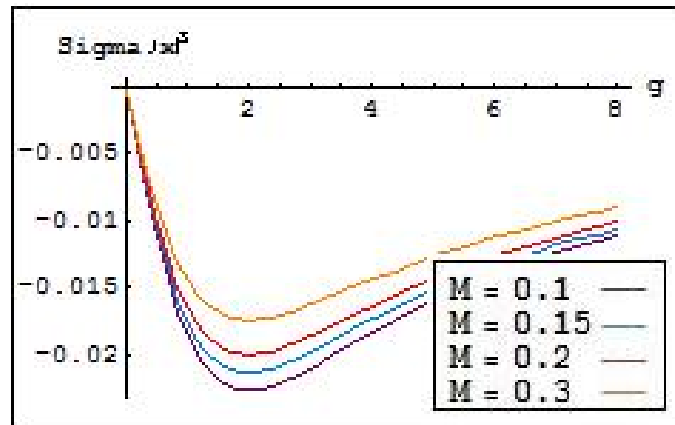
$$\begin{aligned} \sigma_{int}(x) &= -\frac{4g}{\pi^2 |x|^3} \int_0^\infty dq \frac{q^4 e^{-2\sqrt{q^2 + M^2}}}{[2\sqrt{q^2 + M^2} + gM]^2 + g^2 q^2} \\ &= -\frac{4gM}{\pi^2 |x|^3} \int_0^\infty dq \frac{q^4 M^4 e^{-2M\sqrt{q^2+1}}}{M^2[2\sqrt{q^2+1} + g]^2 + g^2 q^2 M^2} \\ &= -\frac{4gM}{4\pi^2 |x|^3} \int_{2M}^\infty dq \frac{q \left[\left(\frac{q}{2M}\right)^2 - 1\right]^{3/2} e^{-q}}{\left[\frac{q}{M} + g\right]^2 + g^2 \left[\left(\frac{q}{2M}\right)^2 - 1\right]} \\ &= -\frac{4g}{8\pi^2 (4 + g^2) |x|^3} \int_{2M}^\infty dq \frac{[q^2 - (2M)^2]^{3/2} e^{-q}}{q + \frac{8gM}{(4+g^2)}} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\sigma_{int}(x) = -\frac{g}{2\pi^2(4+g^2)|x|^3} \int_{2M}^{\infty} dq \frac{[q^2 - (2M)^2]^{3/2} e^{-q}}{q + \frac{8gM}{(4+g^2)}} \quad (5.17)$$

donde  $M = m|x|$ .

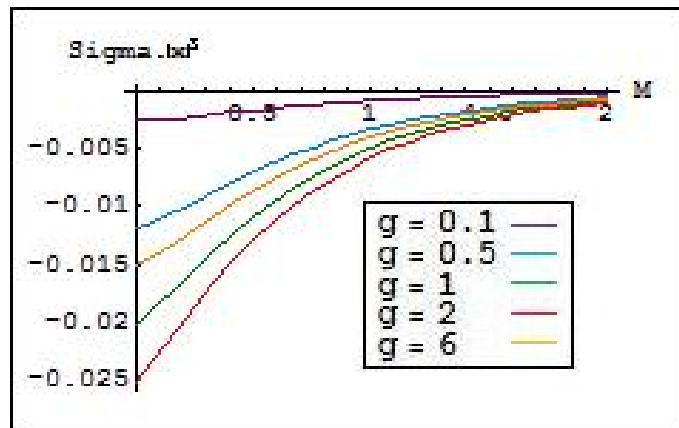
En la figura 5.6 se puede observar la dependencia de  $\sigma_{int}(x)|x|^3$  respecto a la variación de  $g$ , para distintos valores de  $M$ . La figura 5.7 muestra la dependencia de  $\sigma_{int}(x)|x|^3$  respecto a la variación de  $M$ , para distintos valores de  $g$ .



**Figura 5.6:**  $\sigma_{int}(x)|x|^3$  en función de  $g$  para distintos valores de  $M$ .

Se puede observar que para cualquier valor de  $M$  hay un máximo cuando  $g = 2$  y que  $\sigma_{int}(x)$  diverge cuando  $|x| \rightarrow 0$ , que ocurre cuando  $M \rightarrow 0$ .





**Figura 5.7:**  $\sigma_{int}(x)|x|^3$  en funci  $n$  de  $M$  para distintos valores de  $g$ .  
 Se puede observar que los valores mas grandes se obtienen cuando  $g = 2$ .

## Conclusiones

En esta Tesis, hemos aplicado un método funcional al cálculo de energías y funciones de correlación en el efecto Casimir estático, con espejos imperfectos. Este método se basó en representar la interacción de una manera equivalente, mediante campos auxiliares localizados sobre el volumen de mundo (espacio-tiempo que ocupan al evolucionar los espejos). Dado que consideramos siempre defectos de codimensión uno, tales campos auxiliares “viven” en una dimensión espacial menos que los campos originales. La *acción efectiva* para estos campos auxiliares depende de la constante  $g$  que determina intensidad de la interacción con el defecto y de las propiedades del campo cuántico considerado (masa, espín,...).

Consideramos primeramente el caso del campo escalar real, calculando la energía total para el caso de uno y dos defectos. Para un defecto obtuvimos la dependencia de la energía de vacío en función de  $g$ , identificando su parte divergente (que depende del número de dimensiones consideradas) y relacionándola con el conteo de potencias de la teoría de campos correspondiente. En el caso de dos defectos, el método empleado nos permitió aislar completamente las divergencias debidas a las autoenergías de las placas, obteniendo un resultado finito y sin ambigüedades para la energía de Casimir de interacción entre las placas, tanto para el caso de espejos perfectos como imperfectos (con  $g < \infty$ ) y para campos con y sin masa en una y tres dimensiones espaciales. Este estudio generaliza resultados previos de la literatura (9).

Para el campo de Dirac seguimos la misma metodología, que nos llevó a la introducción de campos auxiliares de Grassmann y con igual espín que el campo de Dirac (aunque en una dimensión espacial menos). Obtuvimos también la dependencia de la energía de un único defecto con la constante de acoplamiento, discutiendo su renormalización. Seguidamente consideramos el caso de dos defectos, derivando una expresión general para la energía de interacción de Casimir. Analizamos este resultado para diferentes condiciones particulares de interés. Nuevamente reproducimos algunos resultados ya conocidos (8) y los generalizamos a tres dimensiones espaciales. El uso de este método nos permitió simplificar el tratamiento de defectos tipo delta que son de dificultosa formulación en el tratamiento habitual, donde necesariamente debe plantearse el problema usando un aproximante de la delta de Dirac para el potencial de interacción. La razón es que el problema de autovalores para la ecuación de Dirac en presencia de una delta, está mal definido mientras que la función de Green correspondiente se puede obtener sin dificultad.

Para el campo de Dirac, también obtuvimos la función de correlación en pres-

encia de los espejos imperfectos y la aplicamos al estudio de la dependencia espacial del valor medio  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ . Mostramos que este observable está fuertemente concentrado en las proximidades de los defectos y esto constituye una manifestación de la inhomogeneidad en la distribución espacial de la densidad de energía del vacío.

Para concluir, mencionamos la posibilidad de aplicar el resultado anterior al cálculo de funciones respuesta de sistemas fermiónicos en presencia de defectos, un tema de interés en la física de materia condensada (10).

# Propagador bosónico libre en espacio euclídeo

Se denomina *propagador bosónico libre* y se lo denota como  $G_B^{(0)}(x, x')$  al inverso del operador  $B(x, x') = (-\partial_\mu^2 + m^2)\delta(x - x')$ , que verifica la siguiente expresión:

$$\int d^D x' B(x, x') B^{-1}(x', x'') = \delta(x - x'')$$

Proponiendo que el inverso tenga la forma de la transformada de Fourier de una cierta función  $\tilde{\Delta}(p)$  que se deberá determinar:

$$B^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(p) e^{-ip(x'-x'')}$$

se encuentra que:

$$\begin{aligned} \int d^D x' B(x, x') B^{-1}(x', x'') &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(p) (p^2 + m^2) e^{-ip(x-x'')} \\ &= \delta(x - x'') \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple cuando:

$$\tilde{\Delta}(p) = (p^2 + m^2)^{-1}$$

con lo cual se obtiene que el propagador bosónico libre en espacio euclídeo es:

$$G_B^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ip(x-x')}}{(p^2 + m^2)} \quad (\text{A.1})$$

# Propagador fermiónico libre en espacio euclídeo

Se denomina *propagador fermiónico libre* y se lo denota como  $G_F^{(0)}(x, x')$  al inverso del operador  $B_2(x, x') = (\not{\partial} + m) \delta(x - x')$ . Por lo tanto, estos operadores deben verificar la ecuación:

$$\int dx' B_2(x, x') B_2^{-1}(x', x'') = \delta(x - x'')$$

Proponiendo que  $B_2^{-1}$  sea la transformada de Fourier de una cierta función  $\tilde{\Delta}(p)$

a determinar:

$$B_2^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^2} \tilde{\Delta}(p) e^{-ip(x' - x'')}$$

se encuentra que:

$$\int dx' B_2(x, x') B_2^{-1}(x', x'') = - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^2} \tilde{\Delta}(p) (-m + i \not{p}) e^{-ip(x - x'')} = \delta(x - x'')$$

La última igualdad se cumple cuando:

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{m + i \not{p}}{(m^2 + p^2)}$$

ya que:

$$\not{p} \not{p} = p_\mu \gamma_\mu p_\nu \gamma_\nu = \frac{1}{2} 2 p_\mu p_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu 2\delta_{\mu\nu} = p^2$$

y por lo tanto:

$$\frac{(-m - i \not{p})(-m + i \not{p})}{(m^2 + p^2)} = \frac{(m^2 + \not{p} \not{p})}{(m^2 + p^2)} = 1$$

Se obtiene entonces como resultado que:

$$G_F^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^2} \frac{m + i \not{p}}{(m^2 + p^2)} e^{-ip(x - x')} \quad (\text{B.1})$$

# Referencias

- [1] M. Bordag and U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, "Phys.Rep," 353, 1 (2001)
- [2] P. W. Milonni, "The Quantum vacuum: An Introduction to quantum electrodynamics," Boston, USA: Academic (1994) 522 p
- [3] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields In Curved Space," Cambridge, Uk: Univ. Pr. ( 1982) 340p
- [4] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, "Dynamics Of The Standard Model," Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **2**, 1 (1992).
- [5] A. Lopez and E. Fradkin, "Bosonization rules in  $1/2 + 1$  dimensiones," Nuc. Phys. B , 450, 3, pp. 603-640(38), (1995) , .
- [6] J. Zinn-Justin, "Quantum Field Theory and Critical Phenomena," Oxford Science Publications,4th Ed.,(2002)
- [7] Hao Li and Mehran Kardar, "Fluctuation-Induced Forces between Rough Surfaces", Phys. Rev. Lett., 67, 23, (1991)
- [8] P. Sundeberg and R. L. Jaffe, "The Casimir Effect for Fermions in One Dimension", Annals Phys. 309, 442,(2004)[arXiv:hep-th/0308010]
- [9] N. Graham, R. L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, O. Schroeder and H. Weigel, "The Dirichlet Casimir problem," Nucl. Phys. B **677**, 379 (2004) [arXiv:hep-th/0309130].
- [10] E. H. Fradkin, "Field theories of condensed matter systems," Redwood City, USA: Addison-Wesley (1991) 350 p. (Frontiers in physics, 82)

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer al Sr. Armando Guillermet, por su gran amabilidad y su constante preocupación por los estudiantes. También a mi Director, César, quien me dió la gran oportunidad de aprender y poder trabajar con él. No puedo dejar de mencionar a mis compañeros, los que todavía están y los que ya se fueron, porque sin su apoyo y su amistad hubiese sido muy difícil llegar hasta aquí. Y finalmente a mi querido amigo Daniel S. quien fué el que siempre me dió esperanzas, me alentó a seguir insistiendo y estuvo en mis momentos mas difíciles.