

TESIS
MAESTRIA EN FÍSICA

DUALIDAD-T DE POISSON-LIE
EN SISTEMAS HAMILTONIANOS

Alejandro Cabrera

Alejandro Cabrera
Tesista

Hugo S. Montani
Director

Instituto Balseiro
S.C. de Bariloche, 30 de Noviembre de 2003

*"El hombre es un dios cuando sueña
y no es más que un mendigo cuando piensa"*
Hölderlin

Resumen

La dualidad-T de Poisson-Lie relaciona dos teorías de campos denominadas modelos sigma definidas por lagrangianas distintas, una sobre un grupo Lie-Poisson y la otra sobre su dual. Describiremos esta dualidad desde el formalismo hamiltoniano en términos geométricos. Esta descripción permitirá observar la existencia de acciones de simetría de un mismo grupo, el loop group del doble de Drinfeld centralmente extendido, sobre los espacios de fases correspondientes a los modelos T-duales.

Las transformaciones canónicas de dualidad serán obtenidas en términos de las aplicaciones momento que generan estas simetrías y mapeos Poisson que vinculan la órbita coadjunta de extensión central pura con subsistemas hamiltonianos dentro de los espacios de fases, a los que llamamos subespacios dualizables admisibles. Sintetizaremos estos espacios y las flechas, simbolizando los mapeos Poisson correspondientes, en un diagrama a partir del cual se pueden leer las transformaciones de dualidad.

Las funciones hamiltonianas que dan las dinámicas en los espacios de fases de los modelos duales deben estar escritas en forma de movimiento colectivo con respecto a las aplicaciones momento correspondientes y a una función hamiltoniana arbitraria sobre la órbita. De este modo, construimos una familia de modelos duales sobre grupos Lie-Poisson duales, cada par parametrizado por el hamiltoniano impuesto sobre la órbita. Elecciones particulares de esta dinámica nos permiten reconstruir los modelos sigma duales conocidos y sus respectivas transformaciones de dualidad, así como también los subespacios dualizables admisibles en estos casos particulares, recuperando sistemáticamente resultados para la dualidad-T abeliana y semiabeliana.

Mediante esta descripción de la dualidad-T, identificamos los elementos geométricos que son esenciales para generar sistemas dinámicos duales. Abstrayéndonos de las características particulares de la dualidad basada en grupos Lie-Poisson, proponemos caminos para generalizarla y analizamos criterios generales para la construcción de los modelos duales correspondientes.

Abstract

Poisson-Lie T-duality relates two different sigma models, one defined over a Poisson-Lie group and the other over its dual. We shall describe this duality within the hamiltonian formalism in geometrical terms. This description will show the existence of symmetry actions of the same group, the central extension of the loop group of the Drinfeld double, on the phase spaces corresponding to the T-dual models.

The canonical duality transformations will be obtained in terms of the moment mappings that generate this symmetries and in terms of Poisson maps that relates the coadjoint orbit through the pure central extension element with hamiltonian subsystems in the phase spaces, which we called admissible dualizable subspaces.

We shall summarize this spaces and the arrows, simbolizing the corresponding Poisson maps, in a diagram from which the duality transformations can be directly read. The hamiltonian functions that give the dynamics on the phase spaces of the dual models must be written in the collective motion form with respect to the corresponding moment maps and an arbitrary hamiltonian function on the orbit. So, a family of dual models on Poisson-Lie groups can be constructed for each hamiltonian imposed on the orbit. For particular choices of this dynamics, we shall recover the well-known dual sigma models, the corresponding duality transformations and the admissible dualizable subspaces, sistematically re-obtaining known results for abelian T-duality and semi-abelian T-duality. From this description of the T-duality, we identify the geometrical elements that are esencial for the generation of dual dynamical systems. Disregarding the particular characteristics of the duality based on Poisson-Lie groups, we shall propose several ways to generalize it and some general criteria for the construction of the corresponding dual models.

Introducción

El estudio de la dualidad-T de Poisson-Lie comenzó con el análisis de una característica que presentan ciertas teorías de campos en $1 + 1$ dimensiones sobre grupos Lie-Poisson [5]. Estas teorías de campos son los llamados modelos sigma y describen el movimiento de una cuerda en una variedad M . El término dualidad-T o *target space duality* hace referencia a que es posible que dos modelos sigma definidos por funcionales lagrangianas completamente diferentes sobre variedades M y \widetilde{M} describan la misma física, es decir, que sean físicamente equivalentes. Más precisamente, dentro del formalismo hamiltoniano, existe una transformación canónica entre los espacios de fases correspondientes a las dos teorías de campos sobre variedades M y \widetilde{M} distintas que preserva las densidades hamiltonianas.

Una de las motivaciones para el estudio de estas dualidades está basado en la creencia general de que existe un espacio de parámetros que describe la *teoría de cuerdas* [29]. Para valores especiales de estos parámetros, obtendríamos las teorías conocidas Tipo *I*, *II*, etc. y éstas estarían relacionadas mediante diversos tipos de dualidades. Entre estas dualidades, se cuenta la dualidad-T y su entendimiento y la clasificación de las teorías duales es un avance hacia la descripción del espacio de parámetros de la teoría de cuerdas.

El caso más simple de dualidad-T es la llamada dualidad-T abeliana. En este caso, una teoría sobre un espacio S^1 o \mathbb{R} es dual a una teoría sobre otro espacio tipo S^1 o \mathbb{R} [54]. Esta dualidad comenzó como una propiedad de las correspondientes teorías cuánticas y luego se observó su existencia a nivel clásico [7]. Siguiendo estas ideas, se generalizó la dualidad a nivel clásico a teorías sobre un grupo de Lie compacto simple G y otra sobre su álgebra de Lie \mathfrak{g} [7]. A esta nueva dualidad se la llamó dualidad-T no abeliana y coincide con la dualidad-T abeliana al tomar G un grupo abeliano. Con argumentos basados en cuantización mediante integrales de camino, se pudo probar la equivalencia de teorías no-abelianas T-duales a nivel cuántico.

Las transformaciones de dualidad son transformaciones canónicas entre los espacios de fases clásicos y la funcional generatriz de estas transformaciones sugiere una íntima relación con la geometría del fibrado cotangente $T^*G \sim G \times \mathfrak{g}$ del grupo de Lie G .

Una nueva generalización surgió [5] en base a los conceptos de grupos Lie-Poisson y de grupos dobles de Drinfeld, dando origen a la *dualidad-T de Poisson-Lie*. También, trabajos anteriores como [59] pueden tomarse como primeros indicios de la existencia de la dualidad-T de Poisson-Lie.

Un grupo Lie-Poisson es un grupo de Lie dotado de una estructura de Poisson compatible con la multiplicación en el grupo. Estos grupos Lie-Poisson tienen naturalmente asociado otro grupo Lie-Poisson,

llamado su *dual* y, a su vez, existe un tercer grupo más grande que los contiene a los dos, éste es el llamado grupo doble de Drinfeld [56].

Así como en el caso de la dualidad-T no abeliana la transformación canónica de dualidad estaba relacionada con la geometría del fibrado cotangente del grupo de Lie, en el caso Poisson-Lie, la transformación de dualidad está relacionada con la estructura simpléctica del grupo doble de Drinfeld [14]. Esta construcción constituye, claramente, una generalización de las dualidades anteriores, dado que el doble de Drinfeld contiene como caso particular al fibrado cotangente y a su estructura simpléctica.

En un principio, la dualidad-T de Poisson-Lie se relacionaba con dos modelos sigma sobre un grupo Lie-Poisson y su dual, y las transformaciones canónicas de dualidad estaban escritas en términos algebraicos y en base a las funcionales lagrangianas que definían estos modelos [55].

En [6], se dió una descripción hamiltoniana de esta dualidad para cuerdas cerradas. Este nuevo enfoque, hizo notar la existencia de mapeos Poisson de los espacios de fases de los modelos a el álgebra de Lie del loop group del grupo doble de Drinfeld extendido centralmente. En este sentido, se pudo ver que la dualidad es una característica geométrica que está basada en esta álgebra y es independiente de la dinámica hamiltoniana elegida sobre ella.

Por otro lado, se observó que ambos modelos sigma duales pueden obtenerse a partir de un modelo tipo WZW sobre el grupo doble de Drinfeld [5] [9] con una dinámica hamiltoniana particular.

Las estructuras algebraicas que están detrás de los grupos Lie-Poisson son las biálgebras de Lie y en [8] se hizo un análisis exhaustivo de la dualidad-T de Poisson-Lie en términos algebraicos y se propuso un camino para generalizarla, reemplazando el doble de Drinfeld por un producto bicruzado de álgebras de Lie, imponiendo una dinámica particular que asegura la dualidad.

Basándonos en estas ideas, en el presente trabajo, presentaremos una descripción hamiltoniana de la dualidad-T de Poisson-Lie que engloba y generaliza todas las descripciones precedentes.

Al describir los espacios involucrados y las transformaciones de dualidad en términos geométricos, veremos que la dualidad-T está íntimamente relacionada con la acción de simetría del loop group del doble de Drinfeld sobre los espacios de fases de los modelos sigma correspondientes.

Esta acción de simetría admite aplicaciones momento, equivariantes con respecto al grupo extendido centralmente, que son mapeos Poisson. Como, además, los hamiltonianos correspondientes a los modelos sigma están escritos en forma de movimiento colectivo ([21]), los sistemas se mapean a las órbitas coadjuntas del dual del álgebra centralmente extendida. La extensión central involucrada está intrínsecamente ligada a las teorías de campos en $1 + 1$ ([20]) y a la anomalía conforme.

Entre estas órbitas se cuenta la que corresponde al elemento de extensión central pura, que es la "más grande" y que es la única que se identifica simplecticamente con el subgrupo de lazos por el origen dentro del grupo de lazos del doble de Drinfeld.

Utilizando las acciones dressing y la factorización en el grupo doble $D \sim G \times \tilde{G}$, se pueden obtener dos mapeos simplécticos desde esta órbita de vuelta a los espacios de fases.

Además, dada la naturaleza simétrica en la que están incluidos los grupos G y \tilde{G} en el doble D , cualquier proposición $P(D)$, tomada como una proposición $\hat{P}(G)$ sobre el grupo G , que se base solo en las propiedades de G como grupo que admite una estructura Lie-Poisson, tendrá la misma veracidad que la proposición $P(D)$ tomada como proposición $\tilde{P}(\tilde{G})$ sobre el grupo \tilde{G} .

Este es el elemento básico que permite construir sistemas hamiltonianos duales sobre G y \tilde{G} , partiendo de un sistema adecuado sobre D .

En suma, se puede pasar de un espacio de fases al otro por medio de *mapeos Poisson*, a través de la órbita coadjunta de extensión central pura y este paso da origen a las *transformaciones canónicas de dualidad*. Estas transformaciones son una construcción puramente geométrica, y las dinámicas que acompañan a la dualidad se obtienen escribiendo hamiltonianos en forma colectiva en base a cualquier hamiltoniano en la órbita.

Entre las posibles elecciones de estos hamiltonianos, están las que permiten reconstruir los modelos sigma duales que encontramos en la literatura [5][55].

El haber desentrañado la naturaleza geométrica de la dualidad-T y el haber construido explícitamente la forma en la que se desdobra la transformación de dualidad, nos permite observar que no **todo** el espacio de fases de un modelo sigma es dualizable, sino un subespacio y, también, nos permite construir estos subespacios a los que llamamos *subespacios dualizables admisibles*. Las soluciones de un modelo que están incluidas en el subespacio admisible pueden ser mapeadas a una solución dentro del subespacio admisible del otro modelo, y viceversa.

Este hecho era conocido para la dualidad-T abeliana y para la dualidad-T no abeliana o semiabeliana ([7]), pero no conocemos ninguna referencia en la que se halla notado ni descrito sistemáticamente en el caso general.

Una característica singular de la dualidad-T de Poisson-Lie, es que los mapeos de dualidad están relacionados con las aplicaciones momento correspondientes a la acción de simetría *hamiltoniana* del loop group LD centralmente extendido. Decimos que es singular, ya que, al tratarse de grupos Lie-Poisson, se esperaría que las estructuras de Poisson involucradas en los espacios de fases den origen a simetrías *Lie-Poisson*[2] en lugar de simetrías hamiltonianas usuales.

Por otro lado, el poner la dualidad-T en estos términos, nos permite tomar caminos de generalización que se desprenden inmediatamente del análisis de los elementos geométricos que son indispensables para la dualidad.

Algunas de las nuevas dualidades que encontramos al generalizar ya son conocidas, pero este nuevo enfoque daría un marco general en el cual serían casos particulares y esto permitiría su mejor entendimiento y una mejor forma de generalizarlas para encontrar nuevas dualidades.

Entre estas nuevas dualidades, por ejemplo, encontramos la que se da entre modelos sigma-Poisson sobre grupos Lie-Poisson duales [16]. Esta dualidad está basada en simetrías tipo Lie-Poisson que, en contraste con la dualidad-T original y como habíamos notado en el párrafo anterior, está basada en simetrías hamiltonianas usuales.

Otros caminos de generalización no han sido tomados previamente y serán sugeridos como nuevos caminos que llevan a la construcción y caracterización de modelos duales

En el Capítulo 1, daremos una reseña sobre la geometría de los sistemas hamiltonianos, acciones de simetría hamiltoniana y una introducción a la teoría de los grupos Lie-Poisson y sus acciones de simetría sobre sistemas dinámicos.

En el Capítulo 2, presentaremos la descripción hamiltoniana de la dualidad-T de Poisson-Lie, introduciendo todos los elementos que intervienen en nuestra presentación.

En el Capítulo 3, basándonos en lo hecho en el capítulo anterior en términos generales, nos especializaremos en algunos casos particulares y recuperaremos los modelos sigma T-duales y las transformaciones de dualidad entre ellos que se encuentran en la literatura. Además, agregaremos la descripción de los subespacios dualizables admisibles sobre los cuales están definidas las transformaciones de dualidad.

En el Capítulo 4, analizaremos las estructuras geométricas que son esenciales para obtener sistemas hamiltonianos duales y, en base a este análisis, discutiremos la generalización de la dualidad-T. Algunas de estas generalizaciones ya han sido presentadas en la literatura y las describiremos destacando la presencia de los elementos geométricos esenciales para la dualidad. Otras generalizaciones no se encuentran en la literatura y las indicamos como nuevas formas de obtener sistemas dinámicos duales.

Finalmente, en el Capítulo 5 presentamos las conclusiones que pudimos sacar del presente trabajo.

Índice general

1. Sistemas Hamiltonianos y grupos Lie-Poisson	1
1.1. Sistemas Hamiltonianos	1
1.1.1. Geometría simpléctica	1
1.1.2. Acciones de simetría	5
1.2. Grupos Lie-Poisson, Bialgebras de Lie, Dobles	9
1.2.1. Simetrías Lie-Poisson	15
2. Dualidad-T de Poisson Lie	18
2.1. Notación y preliminares	18
2.2. Loop Groups, extensiones centrales, órbitas coadjuntas	19
2.3. Modelos WZW y su reducción hamiltoniana	21
2.4. Algunos mapeos Poisson y acciones de simetría	24
2.5. El diagrama de la Dualidad-T de Poisson-Lie	33
2.5.1. Versión Lagrangiana	37
3. Casos Particulares	41
3.1. Modelos sigma T-Duales	41
3.2. Modelos Hamiltonianos singulares: WZNW y sus duales	44
3.3. El caso Abelian. Intercambio "momentum-winding".	46
3.4. El caso semiabeliano o dualidad-T "no Abeliana"	49
4. Generalizaciones y discusión	54
4.1. Estructuras esenciales de la dualidad	54
4.2. Dualidad entre modelos sobre espacios cocientes	59
4.3. Modelos duales con simetrías Lie-Poisson	61
4.3.1. Modelos sigma-Poisson sobre grupos Lie-Poisson	62
4.4. Dualidad entre modelos sigma	66
4.5. Nuevas dualidades	69
4.5.1. Dualidad basada en productos bicruzados de álgebras de Lie	69
4.5.2. Dualidad e integrabilidad	71
5. Conclusiones	73

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos y grupos Lie-Poisson

En este capítulo introduciremos las nociones geométricas que definen a los sistemas hamiltonianos y sus simetrías, para luego utilizar estos conceptos al describir aquellos sistemas que admiten dualidad-T y al tratar de generalizar esta dualidad.

1.1. Sistemas Hamiltonianos

Seguiremos, básicamente, la exposición de [10]. El lector interesado puede referirse, también, a [44], [21]. La notación que utilizaremos referente a elementos de geometría diferencial puede encontrarse en esas mismas referencias o en [52].

1.1.1. Geometría simpléctica

Definimos una **variedad simpléctica** como el par (M, ω) donde M es una variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^2(M)$ es una 2-forma cerrada y no degenerada llamada **forma simpléctica**.

Si $f \in C^\infty(M)$, definimos el **campo vectorial hamiltoniano** asociado a f , como el campo vectorial $V_f \in \mathfrak{X}(M)$ que cumple

$$df = i_{V_f} \omega$$

Este concepto se puede definir localmente, entonces, por el teorema de Poincaré, todos los campos vectoriales son localmente hamiltonianos.

La forma simpléctica es constante sobre las curvas integrales de los campos hamiltonianos V_f , ya que

$$\mathbf{L}_{V_f} \omega = (d \circ i_{V_f} + i_{V_f} \circ d) \omega = d^2 f + i_{V_f} (d\omega) = 0 \quad (1.1)$$

Dados (M, ω) y (N, ρ) variedades simplécticas, un mapeo diferenciable $F : M \rightarrow N$ es llamado **simplectomorfismo** o **transformación canónica** si $F^* \rho = \omega$.

Por otro lado, si M es una variedad de dimensión finita y $C^\infty(M)$ es el álgebra de funciones suaves sobre M con valores en \mathbb{R} , definimos una **estructura de Poisson** sobre M como un mapeo \mathbb{R} -bilineal

$$\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \quad (1.2)$$

llamado corchete de Poisson, tal que $\forall f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$,

1. $(C^\infty(M), \{, \})$ es un álgebra de Lie,
2. $\{, \}$ es una derivación en $C^\infty(M)$ para cada argumento,

$$\{f_1 f_2, f_3\} = f_1 \{f_2, f_3\} + \{f_1, f_3\} f_2 \quad (1.3)$$

Este último axioma implica que para toda $f \in C^\infty(M)$ existe un campo vectorial X_f sobre M tal que

$$V_f(g) \equiv \langle dg, V_f \rangle = \{g, f\} \quad (1.4)$$

para toda $g \in C^\infty(M)$. Como en el caso de las variedades simplécticas, llamamos a X_f el *campo vectorial hamiltoniano* asociado a f .

Dada la identidad de Jacobi para $\{, \}$, se deduce que

$$V_{\{f_1, f_2\}} = -[V_{f_1}, V_{f_2}] \quad (1.5)$$

donde $[,]$ es el conmutador entre campos vectoriales sobre M .

Proposición: Si $H \in C^\infty(M)$ y φ_t es el flujo del campo V_H (es decir, $d_t \varphi_t \equiv V_H$) entonces, para toda $F \in C^\infty(M)$,

$$\frac{d}{dt} (F \circ \varphi_t) = \{F, H\} \circ \varphi_t \quad (1.6)$$

y, entonces,

$$H \circ \varphi_t = H \quad (1.7)$$

Dado que $\{, \}$ es antisimétrico, tenemos

$$\{g, f\} = \langle dg, X_f \rangle = -\langle df, X_f \rangle$$

con lo que podemos deducir que el valor de $\{g, f\}$ depende solo de los diferenciales de f y g . Entonces, introducimos la sección $\pi \in \Gamma(M, \Lambda_2(TM))$, llamada **bivector de Poisson**

$$\pi : M \longrightarrow \Lambda_2 TM$$

que cumple

$$\{f_1, f_2\}_M(m) = \langle df_1 \wedge df_2, \pi_M(m) \rangle \quad (1.8)$$

En coordenadas locales de M , $\{u^i\}$,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i \\ \pi_M &= \sum_{ij} \pi^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \pi^{ij} &= -\pi^{ji} \end{aligned} \quad (1.9)$$

entonces,

$$\{f_1, f_2\}_M(x) = \sum_{ij} \pi^{ij}(x) \frac{\partial f_1}{\partial u^i} \frac{\partial f_2}{\partial u^j} \quad (1.10)$$

π_M define un morfismo de T^*M en TM dado por

$$B_x : T_x^*M \longrightarrow T_xM \quad (1.11)$$

tal que para todo $\xi_x \rightarrow B_x(\xi_x)$, $\xi_x \in T_x^*M$, y para todo $\eta_x \in T_x^*M$,

$$\langle \eta_x, B_x(\xi_x) \rangle \equiv \langle \eta_x \wedge \xi_x, \pi_x \rangle \quad (1.12)$$

En particular, para toda función $f \in C^\infty(M)$ este mapeo nos da el campo vectorial hamiltoniano V_f asociado a f

$$B(df) = V_f \quad (1.13)$$

y el corchete de Poisson de dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \langle df \wedge dg, \pi_M \rangle \\ &= \langle df, V_g \rangle \\ &= \mathbf{L}_{V_g} f \end{aligned}$$

Además,

Proposición: Si φ_t es el flujo de V_H , entonces

$$\{f, g\} \circ \varphi_t = \{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\} \quad (1.14)$$

es decir, el flujo hamiltoniano preserva la estructura de Poisson.

Una variedad de Poisson M es simpléctica si $B_x : T_x^*M \rightarrow T_xM$ es un isomorfismo para todo $x \in M$. Esto significa que el bivector de Poisson es no-degenerado como forma bilineal sobre T^*M . En este caso, podemos definir $\omega_M \in \Lambda^2 T^*M$

$$\omega_M = (B \otimes B)^{-1} \pi_M \quad (1.15)$$

e, inversamente,

Proposición: Toda variedad simpléctica (M, ω) es una variedad de Poisson, con corchete definido por

$$\{f, g\}(x) = \langle \omega, V_f \otimes V_g \rangle_M \quad (1.16)$$

para $f, g \in C^\infty(M)$.

Si M es una variedad de Poisson, definimos la relación de equivalencia \sim para puntos de M dada por $x \sim y$ sii existe una curva suave a trozos que une x e y cuyas partes suaves son curvas integrales de un campo vectorial hamiltoniano en M . Entonces las clases de equivalencia dadas por \sim son subvariedades simplécticas-Poisson de M , llamadas las **hojas simplécticas** de M .

Toda variedad de Poisson es una unión disjunta de subvariedades simplécticas, sus hojas simplécticas. El espacio tangente a una hoja simpléctica en un punto x se puede definir como el subespacio de T_xM formado por los valores de todos los campos hamiltonianos X_f en el punto x .

El ejemplo típico de una variedad simpléctica está dado por $M = T^*Q$, siendo Q una variedad de dimensión n . Considerando

$$\tau_Q^* : M \rightarrow Q$$

y

$$(\tau_Q^*)_* : TM \rightarrow TQ$$

y siendo $\alpha_q \in (T^*Q)_q$ y $(V)_{\alpha_q} \in (TM)_{\alpha_q}$, definimos

$$\begin{aligned} \vartheta_{\alpha_q} & : T_{\alpha_q}M \longrightarrow \mathbf{R} \\ \vartheta_{\alpha_q} \left((V)_{\alpha_q} \right) & = \left\langle \alpha_q, (\tau_Q^*)_*(V)_{\alpha_q} \right\rangle_Q \end{aligned} \quad (1.17)$$

y

$$\vartheta_0 : (T^*Q)_q \rightarrow (T^*M)_{\alpha_q}$$

tal que

$$\vartheta_0(\alpha_q) = \vartheta_{\alpha_q} \quad (1.18)$$

entonces $\vartheta_0 \in \mathfrak{X}^*(M)$, y $\omega_0 = -d\vartheta_0$ es una forma simpléctica en M ; ϑ_0 y ω_0 son llamadas **formas canónicas** en M .

Si $H \in C^\infty(M)$, entonces las ecuaciones para la curva integral φ_t del campo vectorial hamiltoniano V_H asociado a H , es decir,

$$i_{V_H}\omega_0 = dH$$

son las **ecuaciones de Hamilton** con

$$\dot{\varphi}_t \equiv V_H$$

Para llevarlas a una forma más usual, denotamos (q^1, \dots, q^n) coordenadas locales en Q y $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ en $T^*Q = M$, entonces

$$\vartheta_0 = p_i dq^i$$

$$\omega_0 = -d\vartheta_0 = dq^i \wedge dp_i$$

y para una función $H(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

y para el campo vectorial hamiltoniano V_H , dada la curva $\varphi_t = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)(t)$

$$V_H = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} i_{V_H}\omega_0 & = dH \implies \\ \dot{q}^i & = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i & = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

1.1.2. Acciones de simetría

Si M es una variedad diferenciable y $\rho : G \times M \rightarrow M$ una **acción** por izquierda de un grupo de Lie G sobre M , esto quiere decir que el mapeo ρ satisface

1. Para todo $g, h \in G$ y $m \in M$,

$$\rho(g, \rho(h, m)) = \rho(gh, m) \quad (1.19)$$

2. Para el elemento neutro $e \in G$, y $m \in M$,

$$\rho(e, m) = m \quad (1.20)$$

Asociamos dos mapeos a ρ . Primero, para todo $h \in G$ tenemos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \rho_h & : M \rightarrow M \\ \rho_h(x) & = \rho(h, x) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Análogamente, en cada $x \in M$, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_x & : G \rightarrow M \\ \varphi_x(h) & = \rho(h, x) \end{aligned} \quad (1.22)$$

que da origen a la **órbita** a través de x . De las propiedades de $\rho : G \times M \rightarrow M$ se deduce,

$$\rho_g \circ \varphi_x = \varphi_x \circ L_g \quad (1.23)$$

y

$$\varphi_{\rho(h,x)} = \varphi_x \circ R_h \quad (1.24)$$

Diremos que la acción de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (M, ω) es una **acción simpléctica** si G actúa mediante simplectomorfismos, es decir, que deja la forma simpléctica invariante

$$(\rho_h)^* \omega = \omega$$

para todo $h \in G$.

Definimos ahora la **acción infinitesimal** del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G sobre M como el diferencial del mapeo $\varphi_x : G \rightarrow M$

$$(X_M)_x = (\varphi_x)_{*e} X = \left[\frac{d}{dt} \varphi_x(e^{tX}) \right]_{t=0} \quad (1.25)$$

Esta asignación $X \in \mathfrak{g} \mapsto X_M \in \mathfrak{X}(M)$ es un anti-homomorfismo de álgebras de Lie desde $\mathfrak{g} = T_e G$ al álgebra de Lie de los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ sobre M , con el conmutador $[\cdot, \cdot]$, es decir,

$$([X, Y]_M)_x = -[X_M, Y_M]_x \quad (1.26)$$

Los campos vectoriales X_M transforman de la siguiente manera

$$(\rho_h)_{*x} (X_M)_x = ([Ad_h X]_M)_{\rho(h,x)} \cdot \quad (1.27)$$

Todos los campos vectoriales Z_M , $Z \in \mathfrak{g}$ dejan invariante la forma simpléctica, entonces

$$\mathbf{L}_{Z_M} \omega = (d \circ i_{Z_M} + i_{Z_M} \circ d) \omega = (d \circ i_{Z_M}) \omega = 0$$

nos dice que $i_{Z_M}\omega$ es una 1-forma cerrada en M . Localmente, es exacta, entonces tenemos una función $\phi_Z: M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que Z_M es su campo vectorial hamiltoniano asociado, es decir

$$d\phi_Z = i_{Z_M}\omega \quad (1.28)$$

Ahora introducimos el concepto de *aplicación momento*, considerando la función

$$\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \equiv \Lambda^1(\mathfrak{g}^*) \quad (1.29)$$

tal que

$$\phi_Z(m) = \langle \Phi(m), Z \rangle_{\mathfrak{g}} \quad (1.30)$$

es decir,

$$\langle (d\phi_Z)_m, V \rangle_M = \langle (\Phi_*)_m(V), Z \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \omega, Z_M \otimes V \rangle_M \quad (1.31)$$

Si esta función $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ existe globalmente, se la llama **aplicación momento** para la acción ρ .

En ese caso, llamamos a (M, ω, ρ, Φ) un G -**espacio Hamiltoniano**.

Ahora daremos una versión del teorema de Noether en este contexto, que vincula simetrías del hamiltoniano con cantidades conservadas

Teorema: *Si (M, ω, ρ, Φ) es un G -espacio Hamiltoniano y $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ es G -invariante, esto es*

$$H(m) = H(\rho(g, m)) \quad (1.32)$$

para todo $m \in M$, $g \in G$, entonces Φ es una integral para V_H , o sea, $\Phi(m(t)) = \text{cte}$ para todo t , siendo $m(t)$ una curva integral del campo vectorial hamiltoniano V_H .

Una aplicación momento es llamada Ad^* -equivariante si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_g} & M \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{Ad_g^*} & \mathfrak{g}^* \end{array} \quad (1.33)$$

Si en \mathfrak{g}^* damos la **estructura de Poisson** llamada de **Kirillov-Kostant** definida por

$$\{f, g\}_{K-K}(\xi) = \langle \xi, [df, dg] \rangle$$

siendo f, g funciones sobre \mathfrak{g}^* e identificamos los diferenciales $df, dg \in T_{\xi}^*\mathfrak{g}^* \equiv (\mathfrak{g}^*)^* \sim \mathfrak{g}$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$ y denotando $[,]$ el corchete de Lie en \mathfrak{g} , se tiene

Proposición: *La aplicación momento Φ es Ad^* -equivariante sii es un mapeo Poisson de M en $(\mathfrak{g}^*, \{\}_{K-K})$*

La estructura de Poisson en $(\mathfrak{g}^*, \{\}_{K-K})$ es degenerada y sus hojas simplécticas están dadas por las *órbitas coadjuntas* de G sobre \mathfrak{g}^* , es decir, que la hoja simpléctica que contiene a un elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*$ está dada por

$$O_{\xi} = \{Ad_g^*\xi, g \in G\}$$

Si definimos $G_{\xi} = \{g \in G / : Ad_g^*\xi = \xi\}$ el grupo de isotropía del elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*$ bajo la acción coadjunta de G , entonces se tiene la siguiente identificación $O_{\xi} \sim G/G_{\xi}$.

Ahora, describiremos el mecanismo de reducción simpléctica del espacio de fases para sistemas hamiltonianos con simetría.

Si (M, ω, ρ, Φ) es un G -espacio Hamiltoniano y la aplicación momento Φ es Ad^* -equivariante, entonces definimos el **espacio de fases reducido** M_ξ

$$M_\xi = \Phi^{-1}(\xi) / G_\xi \quad (1.34)$$

para $\xi \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular de Φ , con lo que $\Phi^{-1}(\xi)$ es una subvariedad de M y G_ξ el subgrupo de isotropía. Asumimos que G_ξ actúa libre y propiamente sobre $\Phi^{-1}(\xi)$, entonces M_ξ es una variedad y la proyección canónica $\pi_\xi : \Phi^{-1}(\xi) \rightarrow M_\xi$ es una submersión.

Se tiene que para $m \in \Phi^{-1}(\xi)$,

$$i) T_m(G_\xi \cdot m) = T_m(G \cdot m) \cap T_m(\Phi^{-1}(\xi))$$

$$ii) T_m(\Phi^{-1}(\xi)) \text{ es el complemento } \omega\text{-orthogonal de } T_m(G \cdot m).$$

Entonces,

Teorema: $M_\xi = \Phi^{-1}(\xi) / G_\xi$ tiene una única estructura simpléctica ω_ξ tal que cumple

$$(\pi_\xi)^* \omega_\xi = i_\xi^* \omega \quad (1.35)$$

siendo $i_\xi : \Phi^{-1}(\xi) \rightarrow M$ la inclusión.

Los resultados de los últimos párrafos se pueden resumir en el siguiente diagrama definiendo un par dual ([26])

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi \swarrow & & \searrow \Phi \\ G \backslash M & & \mathfrak{g}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\xi & & O_\xi \end{array}$$

siendo π la proyección canónica y las últimas flechas dan las hojas simplécticas de las correspondientes estructuras de Poisson en $G \backslash M$ y \mathfrak{g}^* que hacen que π y Φ sean mapeos Poisson.

Otro concepto que nos será útil en los capítulos siguientes es el de *movimiento colectivo*.

Un **sistema G -hamiltoniano** (M, ω, H, G, Φ) con aplicación momento Ad^* -equivariante, se dice que su dinámica está escrita en forma de **movimiento colectivo** si

$$H = \mathcal{F} \circ \Phi \quad (1.36)$$

para alguna función $\mathcal{F} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Cualquier función \mathcal{F} define una aplicación lineal $\mathcal{L}_\mathcal{F} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que para $\xi \in \mathfrak{g}^*$

$$\langle \xi, \mathcal{L}_\mathcal{F}(\eta) \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle (d\mathcal{F})_\eta, \xi \rangle_{\mathfrak{g}^*} = \left. \frac{d\mathcal{F}(\eta + t\xi)}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.37)$$

En este caso se tiene que

Proposición: El campo vectorial hamiltoniano asociado a $H = F \circ \Phi$ es

$$V_H = (\varphi_m)_* [\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \circ \Phi] (m) \quad (1.38)$$

La imagen de este campo vectorial a través de Φ es

$$(d\Phi)_m (V_H) = ad_{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Phi(m))}^* \Phi (m) \quad (1.39)$$

Es decir que el sistema hamiltoniano (M, ω, H, G, Φ) se mapea a las órbitas coadjuntas $O_\xi \subset (\mathfrak{g}^*, \{\}_K-K)$, en donde la dinámica pasa a estar dada por la función hamiltoniana \mathcal{F} . Las soluciones del sistema en M , con valor inicial m_0 son de la forma

$$m(t) = \rho(g(t), m_0)$$

donde $g(t)$ es una curva en G , con $g(0) = e$, tal que

$$\gamma(t) = Ad_{g(t)}^* \gamma(0) \quad (1.40)$$

es una curva integral del campo vectorial hamiltoniano asociado a \mathcal{F} en $(\mathfrak{g}^*, \{\}_K-K)$, siendo $\gamma(0) = \Phi(m_0)$, es decir, $g(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{g}(t) = - (R_{g(t)})_{*e} Z (t)$$

siendo $Z (t) \equiv \mathcal{L}_{\mathcal{F}} (\gamma(t))$.

Esta curva $\gamma(t)$ yace completamente en la órbita coadjunta $O_{\gamma(0)=\Phi(m_0)}$.

Si existe una forma bilineal, invariante y no degenerada en \mathfrak{g}

$$(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tenemos el isomorfismo dado por la asignación $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \xi &\longrightarrow X (\xi) \\ \langle \xi, Z \rangle_{\mathfrak{g}} &= (X (\xi), Z) \end{aligned}$$

entonces las ecuaciones de movimiento sobre la órbita $O_{\gamma(0)=\Phi(m_0)}$ se pueden escribir en la forma

$$\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt} = [\tilde{\gamma}(t), \mathcal{L}_{\mathcal{F}} (\gamma(t))] \quad (1.41)$$

Finalmente, diremos cómo se alteran los resultados previos cuando la aplicación momento Φ no es Ad^* -equivariante.

Proposición: Siendo (M, ω, ρ, Φ) un G -espacio Hamiltoniano, definimos para $g \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$, la función $\psi_{g,X} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi_{g,X}(m) = \Phi_X(\rho(g, m)) - \Phi_{Ad_{g^{-1}}^*(X)}(m)$$

entonces, esta función es constante sobre M .

Además, esta función define un Ad^* -cociclo sobre el grupo G a valores en \mathfrak{g}^*

$$\begin{aligned}\sigma & : G \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \sigma(g), X \rangle & = \psi_{g,X}\end{aligned}$$

A su vez, σ define un 2-cociclo $\Sigma : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre \mathfrak{g} con valores en \mathbb{R} dado por

$$\Sigma(X, Y) = d\langle \sigma, X \rangle_{(e)}(Y)$$

para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces se cumple que

$$\{\Phi_X, \Phi_Y\} = \Phi_{[X, Y]} - \Sigma(X, Y)$$

Si definimos $\hat{\mathfrak{g}} \equiv \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ como la extensión central del álgebra de Lie \mathfrak{g} por el 2-cociclo Σ y, asumiendo que existe la extensión central correspondiente \hat{G} del grupo G , tenemos

Proposición: *La aplicación momento $\hat{\Phi} : M \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}, m \longrightarrow (\Phi(m), 1)$ correspondiente a la acción del grupo \hat{G} sobre M , donde la parte extendida centralmente actúa de manera trivial sobre M , es equivariante bajo la acción coadjunta del grupo \hat{G} sobre el dual del álgebra extendida $\hat{\mathfrak{g}}$*

$$Ad_{\hat{\mathfrak{g}}}^*(\xi, a) = (Ad_g^* \xi + a\sigma(g), a)$$

y, entonces, $\hat{\Phi}$ es un mapeo Poisson de M en $(\hat{\mathfrak{g}}^*, \{\cdot, \cdot\}_{K-K})$.

1.2. Grupos Lie-Poisson, Bialgebras de Lie, Dobles

En esta sección, introduciremos las nociones de grupos Lie-Poisson, su descripción geométrica, algebraica y las nociones de simetría basadas en estas propiedades. Estas son las estructuras esenciales sobre las cuales está construida la dualidad-T de Poisson-Lie y explotaremos sus propiedades en el siguiente capítulo al presentar su descripción hamiltoniana.

En la presentación de los resultados conocidos de esta sección, seguiremos [2], [3], [38], [39] y [46] (ver también [10]).

Dadas dos variedades de Poisson $(P, \{\cdot, \cdot\}^P)$ y $(Q, \{\cdot, \cdot\}^Q)$ se puede definir una estructura de Poisson en el producto cartesiano $P \times Q$ de la siguiente forma

$$\{f, g\}^{P \times Q}(p, q) = \{f(-, q), g(-, q)\}^P(p) + \{f(p, -), g(p, -)\}^Q(q)$$

Un grupo de Lie G con una estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\} : Fun(G) \times Fun(G) \longrightarrow Fun(G)$ se llama **Lie-Poisson** si la multiplicación en el grupo $m : G \times G \longrightarrow G$ es un mapeo Poisson, dada en $G \times G$ la estructura de Poisson del producto cartesiano.

Si esta estructura de Poisson en G está dada por el bivector $\pi_G \in TG \otimes TG$, se dice, entonces, que π es *multiplicativo*, y cumple

$$\pi_G(gh) = [(R_h)_* \otimes (R_h)_*]_g \pi_G(g) + [(L_g)_* \otimes (L_g)_*]_h \pi_G(h) \quad (1.42)$$

vemos que

$$\pi_G(e) = 2\pi_G(e) \implies \pi_G(e) = 0 \quad (1.43)$$

con lo cual, la estructura de Poisson π_G es siempre singular en el elemento neutro.

Veremos que, al ser compatible con la multiplicación en G , la estructura de Poisson define una estructura de álgebra de Lie en \mathfrak{g}^* , el dual del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G .

Para ello, es conveniente definir el concepto de **biálgebra de Lie**, que está dado por (\mathfrak{g}, δ) , donde \mathfrak{g} es un álgebra de Lie y

$$\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \quad (1.44)$$

llamado co-conmutador, cumple

i) $\delta_{\mathfrak{g}}^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es un corchete de Lie en \mathfrak{g}^* ,

ii) $\delta_{\mathfrak{g}}$ es un 1-cociclo para \mathfrak{g} con valores en $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, i.e.

$$\delta_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = (ad_X \otimes id + id \otimes ad_X) \delta_{\mathfrak{g}}(Y) - (ad_Y \otimes id + id \otimes ad_Y) \delta_{\mathfrak{g}}(X) \quad (1.45)$$

$X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ahora, si G es un grupo Lie-Poisson, entonces

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = (d\{f_1, f_2\})_e \quad (1.46)$$

define una estructura de biálgebra en $\mathfrak{g} = T_e G$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^* \Rightarrow f_1, f_2 \in C^\infty(G) / df_1 = \xi_1$ y $df_2 = \xi_2$. Esto corresponde a tomar

$$\delta_{\mathfrak{g}} \equiv (d\pi^R)_e \quad (1.47)$$

siendo $\pi^R(g) = [(R_{g^{-1}})_* \otimes (R_{g^{-1}})_*]_g \pi_G(g)$ y dando

$$\delta_{\mathfrak{g}}^*(\xi_1 \wedge \xi_2) = d\{f_1, f_2\}_e$$

La condición de 1-cociclo para $\delta_{\mathfrak{g}}$ se deduce a partir de las propiedades multiplicativas de π_G . A $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ se la llama **biálgebra tangente al grupo Lie-Poisson G** y se cumple

Teorema: *Si G es un grupo Lie-Poisson, $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ define una biálgebra de Lie y, inversamente, toda biálgebra $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ define en el grupo conexo, simplemente conexo G correspondiente a \mathfrak{g} una única estructura de Poisson tal que lo convierte en un grupo Lie-Poisson.*

Dado que si \mathfrak{g} es tiene dimensión finita, entonces \mathfrak{g}^* también es una biálgebra de Lie, podemos llamar al grupo Lie-Poisson \tilde{G} , el **grupo Lie-Poisson dual a G** , siendo \tilde{G} el grupo Lie-Poisson conexo, simplemente conexo definido por la biálgebra de Lie \mathfrak{g}^* correspondiente a la biálgebra \mathfrak{g} tangente a G .

La estructura de biálgebra tangente $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ a un grupo Lie-Poisson G se puede obtener equivalentemente notando que, como para toda variedad de Poisson (P, π) , existe un corchete de Lie en el espacio de las 1-formas sobre P definido por

$$\{\omega_1, \omega_2\} = d\pi(\omega_1, \omega_2) - (d\omega_2)(\pi^\#(\omega_1)) - (d\omega_1)(\pi^\#(\omega_2))$$

donde hemos notado $\pi^\#(\omega_1) = \langle \pi, \omega_1 \otimes - \rangle$. Entonces, se puede probar que para G las formas invariantes por derecha y por izquierda forman una subálgebra de Lie. La correspondiente estructura que se obtiene en \mathfrak{g}^* coincide con la que define $\delta_{\mathfrak{g}}$.

Una caracterización equivalente de las estructuras de biálgebras de Lie está dada por los llamados triples de Manin.

Un **triple de Manin** es un triple de álgebras de Lie $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ junto con una forma bilineal, simétrica y no degenerada $(,)$ sobre \mathfrak{p} , invariante por la representación adjunta de \mathfrak{p}

$$(ad_X Y, Z) + (Y, ad_X Z) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{p} \quad (1.48)$$

tal que se cumple

1. \mathfrak{p}_+ y \mathfrak{p}_- son subálgebras de Lie de \mathfrak{p}
2. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ como espacios vectoriales
3. \mathfrak{p}_+ y \mathfrak{p}_- son subespacios vectoriales isotrópicos en relación a $(,)$.

Un subespacio \mathfrak{W} es isotrópico en relación a una forma bilineal si $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}^\perp$.

Proposición: *Siendo \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita, hay una correspondencia 1 a 1 entre estructuras de biálgebra en \mathfrak{g} y triples de Manin $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p}_-)$*

Entre las estructuras de biálgebra las más simple son aquellas que en las que el 1-cociclo $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es cohomológicamente trivial, es decir, están definidas en base a un coborde

$$\delta(X) = (ad_X \otimes id + id \otimes ad_X) r \quad (1.49)$$

para $X \in \mathfrak{g}$ y $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ tal que satisface que δ^* es un buen corchete de Lie en \mathfrak{g}^* .

Las biálgebras de este tipo son llamadas **biálgebras tipo coborde**.

Proposición: *Siendo \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, entonces (1.49) define una estructura de biálgebra en \mathfrak{g} sii*

1. $r_{12} + r_{21}$ es un elemento \mathfrak{g} -invariante de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$,
2. $[[r, r]] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]$ es un elemento \mathfrak{g} -invariante de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Siendo $[[,]]$ el corchete de Schouten y si $r = \sum_A a_A \otimes b_A$, entonces notamos

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}] &= \sum_{A,B} [a_A, a_B] \otimes b_A \otimes b_B \\ [r_{12}, r_{23}] &= \sum_{A,B} a_A \otimes [b_A, a_B] \otimes b_B \\ [r_{13}, r_{23}] &= \sum_{A,B} a_A \otimes a_B \otimes [b_A, b_B] \end{aligned} \quad (1.50)$$

Entonces, algunas estructuras de biálgebra sobre un álgebra \mathfrak{g} dada están dadas por las soluciones de la ecuación

$$[[r, r]] = 0 \quad (1.51)$$

o

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \quad (1.52)$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación de Yang-Baxter clásica (CYBE)**.

Las biálgebras generadas por soluciones $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ de la *CYBE* son llamadas **biálgebras de Lie cuasitriangulares**. Si, además, $r_{12} + r_{21} = 0$, entonces se las llama **biálgebras de Lie triangulares**.

Proposición: *Siendo (\mathfrak{g}, r) una biálgebra de Lie cuasitriangular, entonces r define una aplicación lineal*

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g}^* &\rightarrow \mathfrak{g} \\ \rho : \mathfrak{g}^* &\rightarrow \mathfrak{g} \quad / \quad \langle \eta, \rho(\xi) \rangle = \langle \xi \otimes \eta, r \rangle \quad , \forall \eta, \xi \in \mathfrak{g}^* \end{aligned} \quad (1.53)$$

que es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Ahora, supongamos que estamos interesados en estructuras de coborde más generales, es decir, que busquemos $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que cumplan

$$\begin{aligned} ad_X(r_{12} + r_{21}) &= 0 \\ ad_X[[r, r]] &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Y supongamos que existe una forma bilineal $(,) : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ simétrica, no-degenerada y invariante (esto es $(ad_X Y, Z) + (Y, ad_X Z) = 0$). Entonces, existe también un elemento invariante canónico en $\Lambda^{\otimes 3} \mathfrak{g}^*$ definido por

$$(X, Y, Z) \in \mathfrak{g}^{\otimes 3} \longrightarrow ([X, Y], Z) \in \mathbf{R}$$

Si \mathfrak{g} es de dimensión finita, entonces hay un isomorfismo entre \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* y, por lo tanto, podemos definir un elemento invariante $w \in \Lambda^{\otimes 3} \mathfrak{g}$ mediante

$$(w, X \otimes Y \otimes Z) = ([X, Y], Z) \quad (1.55)$$

Finalmente, buscaremos $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que cumplan

$$[[r, r]] = -w \quad (1.56)$$

la llamada **ecuación de Yang-Baxter clásica modificada (MCYBE)**.

Las soluciones de esta ecuación pueden ser caracterizadas notando que dado el elemento de Casimir $\tilde{\mathfrak{C}} \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^* \cong \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ asociado a la forma bilineal, y su dual $\mathfrak{C} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definidos por

$$\langle \tilde{\mathfrak{C}}, X \otimes Y \rangle = (\mathfrak{C}, X \otimes Y) = (X, Y) \quad (1.57)$$

se cumple

$$(\mathfrak{C}, [X, Y] \otimes Z) = ([X, Y], Z) = (w, X \otimes Y \otimes Z) \quad (1.58)$$

y, siendo \mathfrak{C} invariante, vale que $w = [[\mathfrak{C}, \mathfrak{C}]]$. Por lo tanto

Proposición: *r es una solución antisimétrica de la ecuación MCYB sii $(r + \mathfrak{C})$ es solución de CYBE.*

Una biálgebra de Lie cuasitriangular (\mathfrak{g}, r) es llamada **factorizable** si r , solución de *CYBE*, puede escribirse como

$$r = \rho + \mathfrak{C} \quad (1.59)$$

con $\rho \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, y $\mathfrak{C} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definiendo una forma bilineal, simétrica, invariante y no-degenerada en \mathfrak{g} . Esto significa que ρ es una solución antisimétrica de la *MCYBE*

$$[[r, r]] = -[[\mathfrak{C}, \mathfrak{C}]]$$

Dada una biálgebra cuasitriangular factorizable (\mathfrak{g}, r) , las aplicaciones lineales $r_{\pm} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ dadas por

$$\begin{aligned} r_+(\xi) &= \langle \xi \otimes id, r \rangle \\ r_-(\xi) &= -\langle id \otimes \xi, r \rangle \end{aligned} \quad (1.60)$$

para $\xi \in \mathfrak{g}^*$, son homomorfismos de biálgebras de Lie. Entonces, definimos el isomorfismo lineal

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} \\ \mathfrak{J}(\xi) &= r_+(\xi) - r_-(\xi) \end{aligned} \quad (1.61)$$

llamado **mapeo de factorización**.

Un ejemplo de biálgebras cuasitriangulares factorizables está dado por \mathfrak{g} un álgebra de Lie simple[11], ya que todas las estructuras de bialgebra δ sobre \mathfrak{g} son del tipo coborde y existe una estructura natural r_0 tal que $(\mathfrak{g}, [], r_0)$ es factorizable [39].

Dada una biálgebra tipo coborde (\mathfrak{g}, r) , tal que $r_{12} = -r_{21}$, entonces siendo G el grupo conexo, simplemente conexo asociado a \mathfrak{g} , tenemos una estructura de Poisson-Lie π_G dada por el 1-cociclo sobre G

$$\pi^R(gh) = (Ad_g \otimes Ad_g)\pi^R(h) + \pi^R(g) \quad (1.62)$$

La forma explícita del corchete de Poisson es

$$\{f_1, f_2\}(g) = \langle [(L_g)_e^{*\otimes 2} - (R_g)_e^{*\otimes 2}] [(df_1)_g \wedge (df_2)_g], r \rangle \quad (1.63)$$

y se lo llama **corchete de Sklyanin** en G .

Ahora, pasamos a la noción de **doble** de una biálgebra de Lie $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. El doble tiene estructura de biálgebra de Lie cuasitriangular, dada por

$$[(X, \eta), (Z, \xi)]_{\mathfrak{D}(\mathfrak{g})} = ([X, Z] - (id \otimes \eta) \delta(Z) + (id \otimes \xi) \delta(X), [\eta, \xi] - (X \otimes id) \delta(\xi) + (Z \otimes id) \delta(\eta)) \quad (1.64)$$

y

$$\delta_{\mathfrak{D}(\mathfrak{g})}(X, \eta) = (\delta_{[1]}(X), 0) \otimes (\delta_{[2]}(X), 0) + (0, \delta_{[1]}(\eta)) \otimes (0, \delta_{[2]}(\eta)) \quad (1.65)$$

$$r = \sum_a (I^a, 0) \otimes (0, I_a) \quad (1.66)$$

donde notamos $\delta(X) = \delta_{[1]}(X) \otimes \delta_{[2]}(X)$ y $\delta(\eta) = \delta_{[1]}(\eta) \otimes \delta_{[2]}(\eta)$, y $\{I_a\}_{a=1}^n$ es la base dual de $\{I^a\}_{a=1}^n$, base de \mathfrak{g} . Con esta definición \mathfrak{g} and $(\mathfrak{g}^*)^{op}$ están incluidas como subbiálgebras de Lie y vale

Proposición: El doble $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ es factorizable. La inversa de $(r_1 - r_2) : \mathcal{D}(\mathfrak{g})^* \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ es un mapeo invariante que define una forma bilineal simétrica invariante

$$K((X, \eta), (Z, \xi)) = \langle \eta, Z \rangle + \langle \xi, X \rangle \quad .$$

El grupo Poisson-Lie D conexo, simplemente conexo asociado a la bialgebra de Lie $(D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, [\cdot, \cdot]_D, \delta_D)$ se lo llama **Grupo Doble o grupo doble de Drinfeld**.

El grupo doble D es localmente difeomorfo a $G \times \tilde{G}$ y en [3] se puede encontrar la prueba de que si G es compacto y \tilde{G} es cerrado en D , entonces el difeomorfismo es global. Por ejemplo, si G es un grupo de Lie compacto, real y simple, entonces D es la complexificación y se tiene factorización global dada por la descomposición de Iwasawa (ver [3][39]).

En los casos en los que $D \sim G \times \tilde{G}$ globalmente, diremos que D es un **doble perfecto**, siguiendo las definiciones usadas en el contexto de la dualidad-T de Poisson-Lie ([5]).

Dada que la estructura de Poisson de un grupo Lie Poisson (G, π) es degenerada, es importante caracterizar sus hojas simplécticas. Para ello, definimos los campos vectoriales

$$\begin{aligned} \lambda & : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ & : \xi \longrightarrow \pi^\#(\xi^l) \\ \rho & : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ & : \xi \longrightarrow -\pi^\#(\xi^r) \end{aligned}$$

que son anti-homomorfismo y homomorfismo de álgebras de Lie, respectivamente. Estos campos definen la **acción infinitesimal dressing**, izquierda y derecha respectivamente, de \mathfrak{g}^* sobre G . Integrando estas acciones localmente, o globalmente si los campos son completos, se da origen a la **acción dressing** del grupo dual \tilde{G} sobre G . La estructura de Poisson π se llama completa si las los campos vectoriales correspondientes a las acciones dressing por izquierda y derecha son completos en G .

De la definición de las acciones dressing, es claro que sus órbitas en G son precisamente las *hojas simplécticas* de la estructura de Poisson π .

Otra caracterización de las acciones dressing está dada en términos del grupo doble de Drinfeld D . Ya que D es localmente difeomorfo a $G \times \tilde{G}$, esto nos permite definir (localmente) la siguiente acción a izquierda de \tilde{G} sobre G

$$\begin{aligned} g & \xrightarrow{\tilde{h}} g^{\tilde{h}} \text{ tal que} \\ \tilde{h}g & = g^{\tilde{h}} \tilde{h}^g \in D \end{aligned}$$

Ahora, definimos una acción por derecha de \tilde{G} sobre G como

$$g \xrightarrow{\tilde{h}} g^{\tilde{h}^{-1}}$$

y esta acción coincide con la acción dressing por derecha que habíamos definido en términos de la estructura π en G .

Si G es simplemente conexo, existen homomorfismos de grupos de Lie $\varphi_{1,2} : G, \tilde{G} \longrightarrow D$ que se obtienen levantando las inclusiones $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^* \hookrightarrow \mathfrak{d}$. Usando la acción adjunta del grupo doble D sobre su álgebra de Lie \mathfrak{d} , podemos expresar las estructuras de Poisson en G y \tilde{G}

$$\begin{aligned} (L_{g^{-1}*}\pi_G(g))(\xi_1, \xi_2) &= \langle \rho_1 Ad_g \xi_1, \rho_2 Ad_g \xi_2 \rangle \\ (R_{\tilde{g}^{-1}*}\pi_{\tilde{G}}(\tilde{g}))(X_1, X_2) &= \langle \rho_1 Ad_{\tilde{g}^{-1}} X_1, \rho_2 Ad_{\tilde{g}^{-1}} X_2 \rangle \end{aligned}$$

para $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$, habiendo notado las proyecciones $\rho_{1,2} : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$.

Esta descripción, nos permite reescribir las expresiones para los campos vectoriales de la acción infinitesimal dressing de \mathfrak{g}^* sobre G

$$\begin{aligned} \lambda(\xi)(g) &= -R_{g*}\rho_1 Ad_g \xi \\ \rho(\xi)(g) &= -L_{g*}\rho_1 Ad_{g^{-1}} \xi \end{aligned}$$

Ahora, en el grupo doble de Drinfeld D , existen dos estructuras de Poisson naturales π_{\pm} definidas por

$$\pi_{\pm}(d) = \frac{1}{2}(R_{d*}\pi_0 \pm L_{d*}\pi_0)$$

para $d \in D$, siendo π_0 la parte antisimétrica de la matriz $r \in \mathfrak{d} \otimes \mathfrak{d}$ (1.66) de la biálgebra doble \mathfrak{d} .

La estructura π_- no es otra que la que define el corchete de Sklyanin en el grupo Lie-Poisson D correspondiente a la biálgebra cuasitriangular factorizable (\mathfrak{d}, r) . La estructura π_+ es no degenerada en un entorno de la identidad en D , su descripción global está relacionada con la globalidad de la factorización en D y sus hojas simplécticas, en el caso general, pueden encontrarse en [14]. A (D, π_+) se lo llama usualmente el *doble de Heisemberg*.

En base a estas definiciones, se tiene

Proposición:

- *Los homomorfismos $\varphi_{1,2} : (G, \pi_G), (\tilde{G}, \pi_{\tilde{G}}) \longrightarrow (D, \pi_-)$ son, respectivamente, mapeos Poisson y anti-Poisson. Por lo tanto, (G, π_G) y $(\tilde{G}, -\pi_{\tilde{G}})$ son subgrupos Lie-Poisson de (D, π_-) .*
- *Los mapeos de multiplicación $(D, \pi_{\mp}) \times (D, \pm\pi_{\pm}) \longrightarrow (D, \pi_+)$ son Poisson*
- *Los mapeos de multiplicación $(G, \pi_G) \times (D, \pi_+) \longrightarrow (D, \pi_+)$ y $(D, \pi_+) \times (\tilde{G}, \pi_{\tilde{G}}) \longrightarrow (D, \pi_+)$, dados por las inclusiones $\varphi_{1,2} : G, \tilde{G} \longrightarrow D$, son Poisson*

1.2.1. Simetrías Lie-Poisson

Para finalizar esta sección, daremos un resumen de los resultados más relevantes de la teoría de acciones de simetría de grupos Lie-Poisson sobre sistemas dinámicos que generaliza la teoría de simetrías hamiltonianas usuales descritas en la sección anterior. Otras generalizaciones de los conceptos de simetría, basados en aplicaciones momento valuadas en grupos de Lie puede encontrarse en [25] y [25] en donde, también, se dan algunas equivalencias entre todas estas teorías.

En principio, definimos una **acción Poisson** de un grupo Lie-Poisson G sobre una variedad de Poisson P como una acción (por izquierda) $A : G \times P \longrightarrow P$ que es un mapeo Poisson dada en $G \times P$ la estructura de Poisson del producto cartesiano.

Si denotamos $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ el anti-homomorfismo de álgebras de Lie que define los generadores infinitesimales de la acción de G sobre P , se tiene

Proposición: Si G es conexo entonces A es una acción Poisson sii $\forall X \in \mathfrak{g}$,

$$L_{A(X)}\pi_P = (A \wedge A)\delta(X) \quad (1.67)$$

donde δ es la estructura de biálgebra tangente correspondiente a G .

Motivado por esta proposición, se define la acción Poisson infinitesimal izquierda (derecha) de la biálgebra (\mathfrak{g}, δ) sobre (P, π_P) como un anti-homomorfismo (homomorfismo) de álgebras de Lie $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ tal que verifica la ecuación (1.67). Por lo tanto, si G es conexo, una acción $G \times P \rightarrow P$ es Poisson sii la correspondiente acción infinitesimal de (\mathfrak{g}, δ) es Poisson.

Para un grupo Lie-Poisson G , las acciones dressing infinitesimales de \mathfrak{g}^* sobre G por derecha e izquierda son acciones Poisson infinitesimales de la biálgebra (\mathfrak{g}, δ) sobre G . Si los campos vectoriales dressing son completos, entonces las acciones dressing derecha e izquierda de \tilde{G} sobre G son Poisson.

Si tenemos un mapeo Poisson $J : P \rightarrow \tilde{G}$, entonces la acción infinitesimal de (\mathfrak{g}, δ) por izquierda

$$\begin{aligned} A & : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P) \\ & : X \rightarrow \pi_P^\#(J^*(X^l)) \end{aligned}$$

donde X^l es la 1-forma invariante por izquierda sobre \tilde{G} con valor $X \in \mathfrak{g}$ en el origen, define una acción Poisson infinitesimal. Diremos que A está generada por J y, si los campos vectoriales son completos, A define una acción Poisson de G sobre P .

Ahora introduciremos la noción de aplicación momento para acciones Poisson de G sobre P .

Un mapeo $J : P \rightarrow \tilde{G}$ se llama **aplicación momento** de la acción Poisson A por izquierda (derecha) si $\forall X \in \mathfrak{g}$

$$A(X) = \pi_P^\#(J^*(X^l)) \quad (\text{resp. } A(X) = \pi_P^\#(J^*(X^r)))$$

donde $X^{l,r}$ denotan las 1-formas invariantes por izquierda sobre \tilde{G} con valor $X \in \mathfrak{g}$ en el origen.

En el caso $(G, \pi = 0)$, esta definición se reduce a la usual que dimos en la sección anterior para acciones de simetría hamiltonianas usuales.

El mapeo identidad en G es la aplicación momento correspondiente a las acciones dressing Poisson de \tilde{G} sobre G .

El equivalente al teorema de Noether está dado en este contexto por

Teorema: Si $A : G \times P \rightarrow P$ es una acción Poisson con aplicación momento $J : P \rightarrow \tilde{G}$ y $H \in C^\infty(P)$ es G -invariante, entonces J es una integral del campo vectorial hamiltoniano ξ_H de H .

Si P es simplemente conexo toda acción Poisson tiene aplicación momento, y si, además P es simpléctica, esta aplicación es única, fijados un punto en P y su valor en \tilde{G} , salvo translaciones por izquierda en \tilde{G} .

Supongamos que los campos vectoriales dressing sobre G son completos, entonces están bien definidas las acciones dressing de G sobre \tilde{G} por izquierda y derecha, que denotamos λ y ρ respectivamente. Decimos que una aplicación momento $J : P \rightarrow \tilde{G}$ correspondiente a una acción Poisson A de G sobre P por izquierda (derecha) es G -equivariante si para todo $g \in G$,

$$J \circ A_g = \lambda_g \circ J \quad (\text{resp. } J \circ A_g = \rho_g \circ J)$$

Como en el caso usual, si G es conexo, J es G -equivariante sii es un mapeo Poisson y, si J no es G -equivariante y P es simpléctica, existe otra estructura de Poisson π_J en \tilde{G} tal que $J : P \rightarrow (\tilde{G}, \pi_J)$ es Poisson. Esta nueva estructura π_J puede elegirse tal que sea la estructura multiplicativa original más un bivector invariante por derecha (izquierda) en \tilde{G} , generalizando la extensión central y el correspondiente corchete de Kirillov-Kostant en \mathfrak{g}^* . Cuando π_J es completa, define una nueva acción dressing de G sobre \tilde{G} y J es equivariante con respecto a ella.

Por último, daremos un esquema de reducción simpléctica para acciones Poisson con aplicaciones momento.

Si A es una acción Poisson por izquierda sobre una variedad simpléctica P y el espacio de las órbitas $G \backslash P$ es una variedad diferenciable, existe una única estructura de Poisson en $G \backslash P$ tal que la proyección canónica $\mathfrak{p} : P \rightarrow G \backslash P$ es un mapeo Poisson. Las hojas simplécticas en $G \backslash P$ pueden ser descritas en términos de una aplicación momento para A .

Si $J : P \rightarrow \tilde{G}$ es una aplicación momento para A , entonces por el teorema de Noether, la distribución en P generada por los campos vectoriales hamiltonianos de funciones G -invariantes sobre P está contenida en la distribución definida por el núcleo del diferencial de J . En puntos regulares de J , como estas distribuciones tienen la misma dimensión, coinciden. Entonces, si $x \in P$ y $J(x) = u \in \tilde{G}$ es un valor regular de J , la imagen bajo \mathfrak{p} de la componente conexa de la superficie de nivel $J^{-1}(u)$ es la hoja simpléctica que contiene a $\mathfrak{p}(x)$ en $G \backslash P$. Es decir, las hojas simplécticas se obtienen del par dual (ver [26])

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \mathfrak{p} \swarrow & & \searrow J \\ G \backslash P & & \tilde{G} \end{array}$$

Como J siempre es equivariante con respecto a la acción dressing de G sobre \tilde{G} generada por la estructura π_J definida más arriba, si el grupo de isotropía $G_u \subset G$ con respecto a esta acción actúa libre y propiamente sobre $J^{-1}(u)$, entonces la imagen a través de \mathfrak{p} de $J^{-1}(u)$ se identifica con el cociente $P_u := G_u \backslash J^{-1}(u)$. Por lo tanto, P_u es una sub-variedad simpléctica de P , cuya estructura simpléctica coincide con la estructura simpléctica de las componentes conexas de las hojas simplécticas de $G \backslash P$. Resuminedo, tenemos

Teorema: *Si A es una acción Poisson por izquierda de un grupo Lie-Poisson G sobre una variedad simpléctica (P, ω) , J una aplicación momento, λ_J la acción dressing de G sobre \tilde{G} correspondiente a la estructura π_J que hace que J sea un mapeo Poisson, $u \in \tilde{G}$ un valor regular de J y, supongamos, que el grupo de isotropía G_u actúa libre y propiamente sobre $J^{-1}(u)$, entonces hay una única estructura simpléctica ω_u en $P_u = G_u \backslash J^{-1}(u)$ tal que $\mathfrak{p}_u^* \omega_u = i_u^* \omega$, siendo $\mathfrak{p}_u : J^{-1}(u) \rightarrow P_u = G_u \backslash J^{-1}(u)$ la proyección canónica y $i_u : J^{-1}(u) \rightarrow P$ la inclusión. Cuando $G \backslash P$ es una variedad y la equipamos con la única estructura de Poisson tal que la proyección canónica $\mathfrak{p} : P \rightarrow G \backslash P$ es un mapeo Poisson, entonces las componentes conexas de P_u se identifican con las hojas simplécticas de $G \backslash P$.*

Con este teorema finalizamos nuestra descripción de las simetrías Lie-Poisson y pasamos al siguiente capítulo en el que introduciremos la noción de dualidad-T de Poisson Lie y veremos que está íntimamente ligada a los conceptos generales introducidos en este capítulo.

Las ideas que introduce el concepto de simetrías Lie-Poisson lo usaremos al generalizar los resultados del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Dualidad-T de Poisson Lie

2.1. Notación y preliminares

Vamos a dar la notación que utilizaremos a lo largo de este capítulo y a aclarar algunos puntos sobre la geometría que utilizaremos.

En principio, como trabajaremos con loop groups $LG = C^\infty(S^1, G)$, utilizaremos la siguiente notación para expresiones del tipo

$$g(\sigma)'g(\sigma)^{-1} \equiv R_{g(\sigma)^{-1}*}V_{g(\sigma)}$$

siendo $V_{g(\sigma)} \in T_{g(\sigma)}G$ el vector tangente a la curva $g(\sigma)$ en G y σ el parámetro del círculo S^1 .

Muchas veces, en lugar de trabajar con el dual del álgebra de loops $(L\mathfrak{g})^*$, trabajaremos con el subconjunto denso $L\mathfrak{g}^* \subset (L\mathfrak{g})^*$ y éste, a su vez, lo identificaremos con $L\mathfrak{g}$ a través de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \int_{S^1} (\cdot, \cdot)$ en $L\mathfrak{g}$, siendo (\cdot, \cdot) una forma bilineal en \mathfrak{g} .

A lo largo de este capítulo, trabajaremos con variedades de dimensión infinita, particularmente con *espacios de loops* LM , con M una variedad diferenciable. Hablaremos de acciones de simetría hamiltonianas de loop groups LG sobre ellos [22] [57]. Para G un grupo conexo, compacto, gran parte de los resultados para un G -espacio Hamiltoniano M tienen su contraparte en el espacio LG -Hamiltoniano LM cuando la aplicación momento que genera esta última simetría es *propia* (ver [57]).

Esta observación tiene una bonita descripción basada en la equivalencia de espacios LG -Hamiltonianos con sistemas q-Hamiltonianos de dimensión finita con acciones de simetría de un grupo G generadas por aplicaciones momento valuadas en el mismo grupo G (ver [25]).

Estos resultados, sin embargo, no son directamente aplicables a nuestro caso, ya que trabajaremos sistemáticamente con acciones de simetría del grupo LD sobre espacios LT^*G y $LT^*\tilde{G}$, siendo D el doble de Drinfeld de los grupos Lie-Poisson G y \tilde{G} . El grupo doble D , aunque G sea compacto, no es compacto en general. Es más, en los casos de mayor interés en donde G es un grupo real, compacto y simple, D se identifica con la complejificación $G_{\mathbb{C}}$ tomada como un grupo real, que es no compacta.

Asumiremos, de todas maneras, que los resultados sobre G -espacios Hamiltonianos de dimensión finita (vease [44]) siguen valiendo en este caso de dimensión infinita, dado que los resultados que precisamos no necesitan valer en general, es decir, para cualquier espacio LM que sea LG -Hamiltoniano, sino solamente en el caso particular de LT^*G y $LT^*\tilde{G}$ como LD -espacios Hamiltonianos (y, es más, en general estamos interesados en el caso en el que G es un grupo real, compacto y simple).

Asumiremos entonces, que todas las aplicaciones momento involucradas son propias y que los valores $U \in L\mathfrak{g}^*$ que utilizamos para tomar preimágenes a través de las aplicaciones momento, son valores regulares para ellas. También, asumiremos que los campos vectoriales que generan las acciones infinitesimales de las álgebras de lazos involucradas son completos, y que, por lo tanto, se pueden integrar dando una acción del grupo de lazos correspondiente¹.

Cuando trabajamos con campos vectoriales sobre espacios de loops LM , supondremos que existe siempre, localmente, una correspondiente curva integral. En dimensión finita, esto es siempre cierto localmente ([52]). En este caso de dimensión infinita, el lector puede referirse a [60].

De todas maneras, para la validez de las afirmaciones de las secciones siguientes, no se requiere que esta afirmación sea cierta para cualquier variedad M , sino para M un grupo de Lie G o el fibrado cotangente T^*G y, en estos casos, aunque no podemos referir al lector a una prueba de la afirmación, podemos referirlo a trabajos en los que se supone cierta [7], [13], [53], [20]. Y, en todo caso, las afirmaciones que se basan en la existencia de curvas que localmente integran los correspondientes campos vectoriales, son ciertas para los campos vectoriales localmente integrables (que, según lo discutido más arriba, serían "casi todos").

Otro tema que abordaremos con frecuencia en este capítulo es el de las extensiones centrales. Dada la extensión central $L\hat{\mathfrak{g}}$ del álgebra $L\mathfrak{g}$, no está garantizada la extensión $L\hat{G}$ del grupo LG . En el caso en el que G es conexo, simplemente conexo y compacto, este problema está exhaustivamente tratado en [22].

Nosotros estaremos interesados en extensiones del álgebra $L\mathfrak{d}$ y del grupo LD , siendo \mathfrak{d} el álgebra doble de Drinfeld y D el correspondiente grupo conexo, simplemente conexo, que, como antes notamos, no es compacto en general.

Sobre el tema de extensiones de álgebras de loops, órbitas coadjuntas y su descripción simpléctica, nos remitimos a los resultados de [1] (véase también [53]), en donde no se usa la hipótesis de compacidad del grupo G involucrado.

Sobre la existencia de las extensiones centrales del grupo LD en base a extensiones del álgebra $L\mathfrak{d}$ mediante un cociclo particular Γ , que introduciremos en las secciones siguientes (estas serán las únicas extensiones que utilizaremos), una buena referencia en la que se prueba su existencia y se da su descripción es [28], para el caso en el que D el doble de un grupo G compacto, real y simple; nuestro caso de mayor interés.

2.2. Loop Groups, extensiones centrales, órbitas coadjuntas

En esta sección, introduciremos la noción de loop group o grupo de lazos, describiremos algunas de sus extensiones centrales y de las órbitas coadjuntas sobre el dual del álgebra extendida. La relación directa entre estas estructuras y ciertos modelos físicos la daremos en la sección siguiente. Estas estructuras resultarán indispensables en nuestra descripción hamiltoniana de la dualidad-T de Poisson-Lie.

¹Todos estos resultados pueden ser probados, ciertos o eventualmente falsos, y es creencia del autor que las pruebas verdaderas, bajo ciertas restricciones sobre los grupos G y D , no deberían presentar mayores dificultades. Por razones de tiempo, no las damos en este trabajo y las asumimos verdaderas, dejándolas para otro posible trabajo futuro.

Como referencia al tema de loop groups, el lector debe remitirse a [22]. En cuanto a su relación con teorías de campos conformes en 1+1 se puede referir a [20], [34], [41]. En los párrafos siguientes seguiremos la exposición de [23].

Definimos el **loop group** LG , siendo G un grupo de Lie, como el espacio $C^\infty(S^1, G)$ de las aplicaciones infinitamente diferenciables de S^1 en el grupo G . Este espacio vuelve a ser un grupo con la multiplicación punto a punto y es un grupo de Lie de dimensión infinita al dotarlo con la topología de la convergencia uniforme.

Su álgebra de Lie se puede identificar con el espacio $L\mathfrak{g}$, siendo \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G , con el corchete definido, también, punto a punto.

Supongamos que el álgebra \mathfrak{g} está equipada con una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$, simétrica, invariante y no degenerada. Entonces tenemos el 2-cociclo dado por

$$\Gamma(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \langle X, Y' \rangle$$

para $X, Y \in L\mathfrak{g}$ y Y' denota la derivación con respecto al parámetro σ del círculo S^1 . Este cociclo es invariante por la acción del grupo de los difeomorfismos del círculo que preservan la orientación $Diff^+(S^1)$ (ver, por ejemplo, [53]). También, es invariante bajo la acción adjunta de loops constantes, es decir

$$\Gamma(Ad_{g_0} X, Ad_{g_0} Y) = \Gamma(X, Y)$$

para $g_0 \in G$. En el caso que \mathfrak{g} sea un álgebra de Lie semisimple, todos los 2-cociclos sobre $L\mathfrak{g}$ a valores en \mathbb{R} son de ésta forma, es decir, se definen a partir de una forma bilineal simétrica e invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre \mathfrak{g} .

El cociclo Γ define una 2-forma cerrada e invariante por izquierda ω sobre LG

$$\omega_g(X, Y) = \Gamma(L_{g^{-1}*} X, L_{g^{-1}*} Y)$$

siendo $g \in LG$, $X, Y \in T_g LG$. Las direcciones degeneradas de esta 2-forma se identifican con el subgrupo G formado por los loops constantes. Entonces, la variedad cociente $\Omega G = LG/G$ admite a ω como estructura simpléctica.

Ahora, consideremos la extensión central $L\hat{\mathfrak{g}}$ del álgebra de Lie $L\mathfrak{g}$ dada por el cociclo Γ , el corchete en $L\hat{\mathfrak{g}} \sim L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ está dado por

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y], \Gamma(X, Y))$$

Identificamos un subconjunto denso del espacio $(L\mathfrak{g})^*$ con $L\mathfrak{g}^*$ y éste, a su vez, lo identificamos con $L\mathfrak{g}$ a través de la forma bilineal denotada $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \int_{S^1} \langle \cdot, \cdot \rangle$. Esto nos permite dar la acción coadjunta de $L\hat{\mathfrak{g}}$ sobre $L\hat{\mathfrak{g}}^* \sim L\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$

$$ad_{(X,a)}^*(\xi, b) = (ad_X^* \xi + bX', 0)$$

Supongamos que existe la extensión central $L\hat{G}$ del grupo LG , correspondiente a la extensión central $L\hat{\mathfrak{g}}$ del álgebra $L\mathfrak{g}$, entonces, siendo \hat{g} un elemento en $L\hat{G}$ sobre g en LG , tenemos

$$Ad_{\hat{g}}^*(\xi, b) = (Ad_g^* \xi + b g' g^{-1}, b)$$

La órbita coadjunta $O_{(0,a)}$ del grupo $L\hat{G}$ sobre el elemento de extensión central pura $(0, a) \in L\hat{\mathfrak{g}}^*$ se identifica con el grupo ΩG , ya que el estabilizador de $(0, a)$ se identifica con G , tomado como subgrupo de loops constantes de LG . Además, esta identificación se cumple a nivel simpléctico, es decir, $(\Omega G, \omega)$ es simplectomorfo a $(O_{(0,a)}, \omega_{K-K})$ siendo ω_{K-K} la estructura simpléctica de Kirillov-Kostant en la órbita $O_{(0,a)}$.

El corchete de Poisson de Kirillov-Kostant en $L\mathfrak{g}^*$ está dado por

$$\{A, B\}(\eta, c) = \langle U, [X_A, Y_B] \rangle + c\Gamma(X_A, Y_B)$$

para funciones A, B sobre $L\mathfrak{g}^*$ tales que $\langle dA, (\xi, d) \rangle_{(\eta, c)} = \langle (\xi, b), (X_A, a) \rangle$ y $\langle dB, (\xi, d) \rangle_{(U, c)} = \langle (\xi, d), (Y_B, b) \rangle$, con $(X_A, a), (Y_B, b) \in L\mathfrak{g}$ y $(\eta, c), (\xi, b) \in L\mathfrak{g}^*$. Este corchete define una estructura simplectica $\omega_{K-K}^{(\xi, a)}$ sobre una órbita $O_{(\xi, a)}$ cocientada por su estabilizador, siendo

$$\omega_{K-K}^{(\xi, a)}((\eta_1, b_1), (\eta_2, b_2)) = -\langle \xi, [\eta_1, \eta_2] \rangle + a\Gamma(\eta_1, \eta_2)$$

para $(\eta_1, b_1), (\eta_2, b_2) \in T_{(\xi, a)} O_{(\xi, a)}$.

Las órbitas coadjuntas de extensión central pura son las *únicas* órbitas coadjuntas simplectomorfas a $(\Omega G, \omega)$.

Estas ideas serán usadas en la siguiente sección para describir el espacio de fases del modelo WZW.

2.3. Modelos WZW y su reducción hamiltoniana

En esta sección, describiremos la reducción hamiltoniana de los modelos WZW siguiendo [1], el lector interesado puede consultar también [20].

Los resultados aquí presentados, serán utilizados en las secciones siguientes al tratar la dualidad T de Poisson Lie relacionándola la geometría de los espacios de fase reducidos de modelos tipo WZW.

El modelo WZW es una modificación del modelo sigma principal sobre un grupo de Lie D mediante la adición de un término topológico (WZ) a la acción, dando como resultado

$$S_{wzw} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle \partial_t l l^{-1}, \partial_{\sigma} l l^{-1} \rangle + \frac{1}{12} \int_B \langle d l l^{-1}, [d l l^{-1}, d l l^{-1}] \rangle$$

donde Σ es una superficie de Riemann, borde de una variedad B , $\partial B = \Sigma$, y $\langle d l l^{-1}, [d l l^{-1}, d l l^{-1}] \rangle$ es la 3-forma bi-invariante en el grupo G , siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una forma bilineal, simétrica, invariante y no-degenerada en el álgebra \mathfrak{d} . Tomando Σ con la topología del cilindro y coordinizando con variables (t, x) , donde $x \in S^1$, las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_t(l^{-1}\partial_t l) - \partial_x(l^{-1}\partial_x l) \pm [l^{-1}\partial_t l, l^{-1}\partial_x l] = 0 \quad (2.1)$$

Estas ecuaciones, tienen como solución general

$$\begin{aligned} l^+ &= l_L(x+t)l_R(x-t) \\ l^- &= l_R(x-t)l_L(x+t) \end{aligned}$$

cumpliéndose

$$\begin{aligned} \partial_t l_L &= \partial_x l_L \\ \partial_t l_R &= -\partial_x l_R \end{aligned}$$

A l_L (l_R) se lo llama modo de propagación (quiral) "left" ("right").

Estas ecuaciones de movimiento no pueden ser obtenidas en forma hamiltoniana a partir del sistema dinámico (LT^*D, ω_0, H) , para ninguna elección del Hamiltoniano H .

Sin embargo, se puede modificar la estructura simpléctica canónica en el cotangente de manera que para una elección apropiada del Hamiltoniano, recuperemos las ecuaciones de movimiento del modelo WZW[1].

Trabajaremos, en principio, sobre el cotangente de un grupo de Lie arbitrario G , describiendo su reducción hamiltoniana a partir de una forma simpléctica modificada, para luego aplicar estos resultados al caso $G = LD$ y recuperar la dinámica del modelo WZW sobre D .

Tomemos el cotangente $T^*G \sim G \times \mathfrak{g}^*$ trivializado por izquierda, equipado con la forma simpléctica canónica

$$\omega_{0(g,\lambda)} = -d\langle \lambda, g^{-1}dg \rangle$$

y sea $C : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ un 1-cociclo en G con valores en \mathfrak{g}^* y $c : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ el 2-cociclo sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ a valores en \mathbb{R} correspondiente, entonces definimos

$$\begin{aligned} \omega_c &= \omega_0 - \frac{1}{2} \langle d(Ad_{g^{-1}}^* C(g)), \hat{g}^{-1}dg \rangle \\ &= \omega_0 + \frac{1}{2} c(dgg^{-1}, dgg^{-1}) \end{aligned}$$

notando $\langle dA, dB \rangle$ como el producto exterior \wedge de los diferenciales valuados en \mathfrak{g} y su contracción mediante \langle, \rangle . Se puede ver que ω_c es cerrada y no degenerada, por lo tanto, es una forma simpléctica deformada sobre T^*G . Además, observese que no es bi-invariante, pero sí invariante por derecha, o sea, ante la acción

$$R_{h^{-1}} : (g, \lambda) \rightarrow (gh^{-1}, Ad_h^* \lambda)$$

La aplicación momento correspondiente a esta acción es

$$J_c^R(g, \lambda) = -\lambda + Ad_{g^{-1}}^* C(g)$$

que no es equivariante, y el correspondiente 2-cociclo es c . También se cumple que $(J_c^R)^{-1}(0) \sim G$, y la forma pre-simpléctica en este espacio es

$$\omega_c|_{(J_c^R)^{-1}(0)} = \frac{1}{2} c(g^{-1}dg, \hat{g}^{-1}dg) \quad (2.2)$$

El núcleo de la distribución en donde esta forma es degenerada está dado por los campos invariantes por izquierda $X_\xi^L = L_{g*} \xi$ asociados a un elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ tales que $c(\xi) = 0$. Al conjunto de los $\xi \in \mathfrak{g}$ que cumplen esta condición lo denotaremos \mathfrak{g}_0 . Asociado a este conjunto, tenemos otro en G , $G_0 = \{g \in G : C(g) = 0\}$.

Entonces, definimos la forma simpléctica en $(J_c^R)^{-1}(0)/G_0$ dada por

$$\omega_R(X_\xi, X_\eta) = \langle C(g), [\xi, \eta] \rangle + c(\xi, \eta)$$

para campos $X_\xi = \pi_R X_{-\xi}^R$, donde $X_{-\xi}^R$ es el campo invariante por derecha en G asociado a $\xi \in \mathfrak{g}$ y π_R es la proyección canónica de $(J_c^R)^{-1}(0) \sim G$ sobre G/G_0 .

Esta construcción es equivalente a la reducción de Marsden-Weinstein [4] si utilizamos la aplicación momento valuada en el dual del álgebra de Lie \mathfrak{g}_c extendida centralmente por el cociclo c

$$\begin{aligned} \widetilde{J}^R &: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}_c^* \\ &: (g, \lambda) \rightarrow (J_c^R, 1) \end{aligned}$$

ahora, G_0 se identifica con el estabilizador de $(0, 1)$ con respecto a la acción coadjunta extendida.

Vemos en (2.2) que ω_R es invariante ante la acción residual por izquierda de G sobre G/G_0 . Esta acción es hamiltoniana, y la aplicación momento correspondiente

$$\begin{aligned} J_c^L &: G/G_0 \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ &: gG_0 \longrightarrow C(g), \end{aligned}$$

es no-equivariante, con cociclo asociado c .

Por lo tanto, la aplicación momento extendida $\widetilde{J}_c^L = (J_c^L, 1)$ es equivariante con la acción coadjunta extendida y da un simplectomorfismo entre la órbita $O_{(0,1)}$ con la estructura simpléctica de Kirillov-Kostant y G/G_0 con la forma simpléctica ω_R .

Consideraremos Hamiltonianos tales que, restringidos a $(J_c^R)^{-1}(0)$, sean G_0 invariantes.

Nota: Considerando el fibrado principal

$$\begin{array}{c} J_c^{R-1}(0) \\ \downarrow \\ (J_c^R)^{-1}(0)/G_0 \end{array}$$

las soluciones del problema anterior serán levantamientos, a través de secciones, de soluciones en $(J_c^R)^{-1}(0)/G_0$. Por lo tanto, estas estarán determinadas a menos de fijaciones de gauge por la acción de elementos de G_0 .

Finalmente, nos concentramos en el caso $G = LD$. Suponemos que el álgebra \mathfrak{d} admite una forma bilineal, invariante, simétrica y no degenerada $b(\cdot, \cdot)$. En el álgebra $L\mathfrak{d}$, define una forma $B = \int_{S^1} b$, con la cual identificamos $L\mathfrak{d}$ con $L\mathfrak{d}^*$, un subconjunto denso en $(L\mathfrak{d})^*$. Tomamos como cociclo en G

$$\begin{aligned} \langle C(g), \xi \rangle &= k B(g'g^{-1}, \xi) \\ c(\xi, \eta) &= k B(\xi, \eta') \end{aligned}$$

y proponemos el Hamiltoniano en LT^*D

$$H(g, \lambda) = \frac{1}{|k|} B(\lambda, \lambda) - \frac{k}{|k|} B(g^{-1}g', \lambda) + \frac{k^2}{2|k|} B(g^{-1}g', g^{-1}g')$$

Las ecuaciones de movimiento, que definen los campos vectoriales Hamiltonianos asociados a $H(g, \lambda)$ en relación a la estructura simpléctica ω_c son, precisamente, las ecuaciones de movimiento del modelo WZW, (2.1). El signo de k indica si se trata de los modos de propagación "left" o "right".

El sistema reducido es $(J_c^R)^{-1}(0)$, $G_0 = \Omega D$, el subgrupo de LD cuyo valor en $0 \in S^1$ es la identidad dado que $G_0 = D$ y $(J_c^R)^{-1}(0) \sim LD$, con la estructura simpléctica reducida

$$\begin{aligned} \omega_R &= \frac{k}{2} c(g^{-1}dg, g^{-1}dg) \\ &= k \int_{S^1} b(g^{-1}dg, (g^{-1}dg)') \end{aligned}$$

La acción residual de LD sobre ΩD por izquierda tiene como aplicación momento extendida con respecto al cociclo c a

$$\widetilde{J}_c^L(g) = (kg'g^{-1}, 1)$$

que identifica simplécticamente a la órbita de extensión central pura $O_{(0,1)}$, munida con la estructura de Kirillov-Kostant, con $(\Omega D, \omega_R)$; reproduciendo el resultado dado en la sección anterior (ver también [22], [23], [20]).

El Hamiltoniano en el espacio reducido toma la forma

$$H|_{\Omega D} = \frac{|k|}{2} B(g'g^{-1}, g'g^{-1}) \quad (2.3)$$

y lleva a las ecuaciones de Hamilton con respecto a ω_R

$$\partial_t g = k \partial_x g$$

Nuevamente, los distintos modos de propagación se obtienen según el signo del parámetro k .

El espacio total correspondiente al modelo WZW, con ambos modos, se obtiene "pegando" dos copias de los espacios reducidos, i.e., considerando $(\Omega D^L \times \Omega D^R, \omega_R^L - \omega_R^R, H_L + H_R)$, donde $(\Omega D^L, \omega_R^L)$ se obtiene por el proceso de reducción análogo al descrito arriba para la forma simpléctica invariante por izquierda $\omega_c = \omega_0 + \frac{1}{2}c(g^{-1}dg, g^{-1}dg)$.

Nota: *Nótese que el Hamiltoniano (2.3) está escrito en forma de movimiento colectivo,*

$$H|_{\Omega D} = \mathfrak{H} \circ \widetilde{J}_c^L$$

siendo $\mathfrak{H}((\pi, 1)) = \frac{|k|}{2} B(\pi, \pi)$ una función con dominio en $L\mathfrak{g}^*$.

2.4. Algunos mapeos Poisson y acciones de simetría

En esta sección, detallaremos las propiedades de dos mapeos que son esenciales para nuestra descripción de la dualidad-T y para futuras generalizaciones: siendo $D \sim G \times \widetilde{G}$ el doble de Drinfeld (perfecto) asociado al grupo Lie-Poisson G , definimos

$$\begin{aligned} J &: \Omega D \longrightarrow LT^*G \overset{izg.}{\simeq} G \times \mathfrak{g}^* \\ &: g\tilde{h} \longrightarrow (g, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}) \\ \mu &: LT^*G \longrightarrow L\widehat{\mathfrak{d}}^* \\ &: (g, \lambda) \longrightarrow (g'g^{-1} + {}^D Ad_g \lambda)^\sim \end{aligned}$$

donde $^\sim : L\mathfrak{d} \longrightarrow L\mathfrak{d}^*$ es la identificación dada por la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \int_{S^1} (\cdot, \cdot)$, siendo (\cdot, \cdot) la forma

bilineal, Ad -invariante, no degenerada y simétrica en $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. Estos mapeos, se relacionan con la aplicación momento equivariante $\Phi : \Omega D \longrightarrow L\widehat{\mathfrak{d}}^*$, correspondiente a la acción residual de LD sobre ΩD introducida previamente, a través del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & LT^*G & \\ J \nearrow & & \searrow \mu \\ \Omega D & \xrightarrow{\Phi} & L\widehat{\mathfrak{d}}^* \end{array}$$

Daremos un enunciado general, para luego aplicarlo a estos elementos

Proposición: Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie, y $(M, \omega^M), (N, \omega^N)$ dos variedades simplécticas. Si $(\varphi^M)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y $(\varphi^N)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ son acciones simplécticas infinitesimales de \mathfrak{g} sobre M y N , con aplicaciones momento equivariantes Φ y μ valuadas en \mathfrak{g}^* , y existe un mapeo simpléctico $J : M \rightarrow N$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & J \nearrow & \searrow \mu \\ M & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

es conmutativo, entonces $[J_* \circ (\varphi^M)_* - (\varphi^N)_*](\mathfrak{g}) \subset (\omega_N(J_*T_m M))^\perp$. La inversa de esta afirmación es cierta dando como resultado que $\Phi - \mu \circ J$ es constante sobre M .

Dem:

Supongamos que el diagrama conmuta, entonces, para cualquier $Z \in \mathfrak{g}$ y $V \in T_m M$

$$\begin{aligned} \langle i_{Z_M} \omega^M, V \rangle_m &= \langle d\langle \Phi, Z \rangle, V \rangle_m \\ &= \langle d\langle \mu \circ J, Z \rangle, V \rangle_m \\ &= \langle d\langle \mu, Z \rangle, J_* V \rangle_{J(m)} \\ &= \langle i_{Z_N} \omega^N, J_* V \rangle_{J(m)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\langle i_{Z_M} \omega^M, V \rangle_m = \langle i_{Z_M} (J^* \omega^N), V \rangle_m = \langle i_{J_*(Z_M)} \omega^N, J_* V \rangle_m$$

Entonces

$$\omega^N(J_*(Z_M) - Z_N, J_*(-)) = 0$$

También, se vé que se pueden revertir los argumentos llegando a que

$$d\langle \Phi - \mu \circ J, Z \rangle = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{g}$$

■.

Claramente, los mapeos

$$\begin{aligned} J &: \Omega D \longrightarrow LT^*G \\ \mu &: LT^*G \longrightarrow L\hat{\mathfrak{d}}^* \end{aligned}$$

cumplen trivialmente la hipótesis de la conmutatividad del diagrama. Veremos, a continuación, que las otras hipótesis también se satisfacen y verificaremos explícitamente que se cumple el teorema en este caso particular.

Primero, veamos que J es un morfismo de estructuras de Poisson.

Proposición: El mapeo $J : (LD/D, L^*\Gamma) \rightarrow (LT^*G, \omega_o)$, con LT^*G trivializado por izquierda, es un morfismo simpléctico.

Dem:

Sea una curva $l(t) = g(t)\tilde{h}(t)$ en LD/D con $l(0) = l = g\tilde{h} \in LD/D$. Y el vector tangente $\frac{d}{dt}|_{t=0} l(t) = A\tilde{h} + gB$ donde A es un vector tangente a g en LG/G y B es un vector tangente a \tilde{h} en $L\tilde{G}/\tilde{G}$. Queremos

probar que

$$(J^*\omega_o)_l = \omega_l$$

donde ω_o es la estructura canónica sobre T^*LG .

Sean $M = A\tilde{h} + gB$ y $N = C\tilde{h} + gD$ dos vectores tangentes a las curvas $m(t)$ y $n(t)$ en $l = m(0) = n(0)$

$$\begin{aligned} (J^*\omega_o)_l(M, N) &= (\omega_o)_{(g, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1})}(J_*M, J_*N) \\ &= d\langle \mu, g^{-1}dg \rangle_{(g, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1})}((A, B'\tilde{h}^{-1} - \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}B\tilde{h}^{-1}), (C, D'\tilde{h}^{-1} - \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}D\tilde{h}^{-1})) \\ &= -\int \langle B'\tilde{h}^{-1} - \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}B\tilde{h}^{-1}, g^{-1}C \rangle + \int \langle D'\tilde{h}^{-1} - \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}D\tilde{h}^{-1}, g^{-1}A \rangle \\ &\quad + \int \langle \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}, [g^{-1}A, g^{-1}C] \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \omega_l(M, N) &= \int \langle l^{-1}M, (l^{-1}N)' \rangle \\ &= \int \langle l^{-1}(A\tilde{h} + gB), (l^{-1}(C\tilde{h} + gD))' \rangle \\ &= \int \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}A + \tilde{h}^{-1}B, (Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}C + \tilde{h}^{-1}D)' \rangle \end{aligned}$$

Usando la Ad -invarianza de la forma bilineal en \mathfrak{d} , y que \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* son subespacios isotrópicos respecto de esta forma bilineal,

$$\begin{aligned} \omega_l(M, N) &= \int \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}A, (Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}C)' \rangle + \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}A, (\tilde{h}^{-1}D)' \rangle \\ &\quad + \langle \tilde{h}^{-1}B, (Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}C)' \rangle + 0 \end{aligned}$$

y, como,

$$\begin{aligned} \int \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}A, (\tilde{h}^{-1}D)' \rangle &= \int \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}A, -\tilde{h}^{-1}\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}D + \tilde{h}^{-1}D' \rangle \\ &= \int \langle g^{-1}A, -\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}D\tilde{h}^{-1} + D'\tilde{h}^{-1} \rangle \end{aligned}$$

análogamente,

$$\begin{aligned} \int \langle \tilde{h}^{-1}B, (Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}C)' \rangle &= -\int \langle (\tilde{h}^{-1}B)', Ad_{\tilde{h}^{-1}}g^{-1}C \rangle \\ &= -\int \langle g^{-1}C, -\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}B\tilde{h}^{-1} + B'\tilde{h}^{-1} \rangle \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \int \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}} g^{-1} A, (Ad_{\tilde{h}^{-1}} g^{-1} C)' \rangle \\
&= \int \langle Ad_{\tilde{h}^{-1}} g^{-1} A, -Ad_{\tilde{h}^{-1}} ad_{\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}} g^{-1} C \rangle + 0 \\
&= \int \langle g^{-1} A, \rangle \\
&= \int \langle g^{-1} A, ad_{g^{-1}C} \tilde{h}'\tilde{h}^{-1} \rangle \\
&= - \int \langle [g^{-1}C, g^{-1}A]_{\mathfrak{g}}, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1} \rangle \\
&= \int \langle [g^{-1}A, g^{-1}C]_{\mathfrak{g}}, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1} \rangle
\end{aligned}$$

de modo que $\omega_l(M, N)$ se reduce a

$$\begin{aligned}
\omega_l(M, N) &= \int \langle g^{-1}A, -\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}D\tilde{h}^{-1} + D'\tilde{h}^{-1} \rangle - \int \langle g^{-1}C, -\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}B\tilde{h}^{-1} + B'\tilde{h}^{-1} \rangle \\
&\quad + \int \langle [g^{-1}A, g^{-1}C]_{\mathfrak{g}}, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1} \rangle
\end{aligned}$$

que coincide con $(J^*\omega_o)_l(M, N)$, ec. (2.4)■.

También, se puede ver que:

- Si usamos la factorización $l = \tilde{g}h (= g\tilde{h})$ y consideramos el mapeo

$$\begin{aligned}
\tilde{J} &: (\Omega D, L_t^*\Gamma) \longrightarrow (LT^*\tilde{G} \overset{izq.}{\sim} \tilde{G} \times \mathfrak{g}, \{\}_{canonico} \equiv \tilde{\omega}_o) \\
&: \tilde{g}h \longrightarrow (\tilde{g}, h'h^{-1})
\end{aligned}$$

entonces, éste es simpléctico.

- Si consideremos $l = \tilde{g}h (= g\tilde{h})$, entonces, el mapeo

$$\begin{aligned}
J^R &: (\Omega D, R_t^*\Gamma) \longrightarrow (LT^*G \overset{der.}{\sim} G \times \mathfrak{g}^*, \{\}_{canonico} \equiv \omega_o^R) \\
&: \tilde{g}h \longrightarrow (h, \tilde{g}^{-1}\tilde{g}')
\end{aligned} \tag{2.5}$$

es simpléctico (análogo para \tilde{G}). Y el mapeo

$$\begin{aligned}
\mu^R &: (LT^*G \overset{der.}{\sim} G \times \mathfrak{g}^*, \{\}_{canonico} \equiv \omega_o^R)(L\hat{\mathfrak{d}}^*, \{\}_{KK}) \\
&: (h, \lambda^R) \longrightarrow (h^{-1}h' + Ad_{h^{-1}}\lambda^R)
\end{aligned}$$

es Poisson y hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
J^R & \nearrow & LT^*G & \searrow & \mu^R \\
& & \Phi^R & & \\
\Omega D & & \xrightarrow{\quad} & & L\hat{\mathfrak{d}}^*
\end{array}$$

siendo

$$\Phi^R(l) = l^{-1}l'$$

la aplicación momento correspondiente a la acción residual de LD por derecha sobre $(\Omega D, R_t^*\Gamma)$.

Proposición: El mapeo $\mu : (LT^*G, \omega_0) \rightarrow (L\hat{\mathfrak{d}}^*; \{, \}_K)$, con $\{, \}_K \equiv [,]_{\hat{\mathfrak{d}}} \equiv [,]_{\mathfrak{d}} + \Gamma$, es un morfismo de variedades de Poisson.

Dem: Los corchetes de Poisson en (LT^*G, ω_0) trivializado por izquierda son

$$\begin{aligned} \{f, h\}_{(g, \lambda)} &= 0 \\ \{f, \langle, X \rangle\}_{(g, \lambda)} &= \int_{S^1} df(g.X) \\ \{\langle, X \rangle, \langle, Y \rangle\}_{(g, \lambda)} &= -\langle \lambda, [X, Y] \rangle \end{aligned}$$

donde f y h son funciones (funcionales) sobre LG y $\langle, X \rangle$ es la funcional lineal sobre $L\mathfrak{g}^*$, con valor $\langle \xi, X \rangle$

al actuar sobre un $\xi \in L\mathfrak{g}^*$, y $\langle, \rangle \equiv \int_{S^1} (,)$ siendo $(,)$ la forma bilineal, Ad -invariante, no degenerada y simétrica en $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$.

Los corchetes de Poisson en $(L\hat{\mathfrak{d}}^*; \{, \}_{K-K})$ en un punto (U, e) son

$$\{\langle, (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle, (Y \oplus \eta, b) \rangle\}_{(U, e)} = \langle U, [X \oplus \xi, Y \oplus \eta] \rangle + e \Gamma(X \oplus \xi, Y \oplus \eta)$$

donde $\Gamma(U, V) = \langle U, V' \rangle$, y las funcionales lineales sobre $L\hat{\mathfrak{d}}^*$ que son de la forma $\langle, (X \oplus \xi, a) \rangle$ con $(X \oplus \xi, a) \in L\mathfrak{d}$ forman un subconjunto denso dentro de todos las funcionales.

El mapeo está definido como

$$\begin{aligned} \mu &: LT^*G \longrightarrow L\hat{\mathfrak{d}}^* \\ &: (g, \lambda) \longrightarrow ((g'g^{-1} \oplus Ad_g^D \lambda)^\sim, 1) \end{aligned}$$

donde $^\sim : L\mathfrak{d} \longrightarrow L\mathfrak{d}^*$ es la identificación dada por la forma bilineal \langle, \rangle .

Queremos probar que para dos funcionales $\langle, (X \oplus \xi, a) \rangle$ y $\langle, (Y \oplus \eta, b) \rangle$ sobre $L\hat{\mathfrak{d}}^*$ se cumple

$$\{\langle -, (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle -, (Y \oplus \eta, b) \rangle\}^{L\hat{\mathfrak{d}}^*}(\mu(g, \lambda)) = \{\langle \mu(-), (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle \mu(-), (Y \oplus \eta, b) \rangle\}^{LT^*G}(g, \lambda)$$

El miembro izquierdo es

$$\{\langle, (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle, (Y \oplus \eta, b) \rangle\}_{\mu(g, \lambda)} = \langle g'g^{-1} \oplus Ad_g^D \lambda, [X \oplus \xi, Y \oplus \eta] \rangle + \Gamma(X \oplus \xi, Y \oplus \eta)$$

Para el lado derecho, tendremos las funciones sobre LT^*G tienen la forma

$$\langle \mu(-), (X \oplus \xi, a) \rangle(g, \lambda) = \langle g'g^{-1} \oplus Ad_g^D \lambda, X \oplus \xi \rangle + a$$

entonces

$$\begin{aligned} \{\langle \mu(-), (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle \mu(-), (Y \oplus \eta, b) \rangle\}^{LT^*G}(g, \lambda) &= \{\langle g'g^{-1}, \xi \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, Y \oplus \eta \rangle\}^{LT^*G}(g, \lambda) \\ &\quad - \{\langle g'g^{-1}, \eta \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, X \oplus \xi \rangle\}^{LT^*G}(g, \lambda) \\ &\quad + \{\langle Ad_g^D \lambda, X \oplus \xi \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, Y \oplus \eta \rangle\}^{LT^*G}(g, \lambda) \end{aligned}$$

El primer término es

$$\{\langle g'g^{-1}, \xi \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, Y \oplus \eta \rangle\}^{LT^*G}(g, \lambda) = \left. \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t) \gamma(t)^{-1}, \xi \rangle \right|_{t=0}$$

donde $\gamma(t)$ es una curva en LT^*G que cumple

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= g \\ \left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0} &= g \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta))\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t) \gamma(t)^{-1}, \xi \rangle \right|_{t=0} &= \langle (g \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)))' g^{-1} - g' g^{-1} g \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)) g^{-1}, \xi \rangle \\ &= - \langle g \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)) g^{-1}, \xi' \rangle + \\ &\quad + \langle g \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)) g^{-1} g' g^{-1}, \xi \rangle - \langle g^{-1} g' \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)), g^{-1} \xi g \rangle \\ &= - \langle \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)), Ad_{g^{-1}}^D \xi' \rangle + \langle [\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(Y \oplus \eta)), g^{-1} g'], Ad_{g^{-1}}^D \eta \rangle\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}- \{ \langle g' g^{-1}, \eta \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, X + \xi \rangle \}_{(g, \lambda)}^{LT^*G} &= \langle \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(X + \xi)), Ad_{g^{-1}}^D \eta' \rangle - \\ &\quad - \langle [\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(X + \xi)), g^{-1} g'], Ad_{g^{-1}}^D \eta \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}&\{ \langle g' g^{-1}, \xi \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, Y \oplus \eta \rangle \}_{(g, \lambda)}^{LT^*G} - \{ \langle g' g^{-1}, \eta \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, X \oplus \xi \rangle \}_{(g, \lambda)}^{LT^*G} \\ &= \langle X, \eta' \rangle - \langle Y, \xi' \rangle + \langle g' g^{-1}, [X, \eta] + [\xi, Y] \rangle + \langle Ad_{g^{-1}}^D \eta, (Ad_{g^{-1}}^D \xi)' \rangle + 2 \langle g' g^{-1}, [\xi, \eta] \rangle\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\langle Ad_{g^{-1}}^D \eta, (Ad_{g^{-1}}^D \xi)' \rangle &= - \langle Ad_{g^{-1}}^D \eta, Ad_{g^{-1}}^D ad_{g' g^{-1}}^D \xi \rangle + 0 \\ &= \langle \eta, [\xi, g' g^{-1}] \rangle \\ &= - \langle [\xi, \eta], g' g^{-1} \rangle\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}&\{ \langle g' g^{-1}, \xi \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, Y \oplus \eta \rangle \}_{(g, \lambda)}^{LT^*G} - \{ \langle g' g^{-1}, \eta \rangle, \langle Ad_g^D \lambda, X \oplus \xi \rangle \}_{(g, \lambda)}^{LT^*G} \\ &= \langle X, \eta' \rangle - \langle Y, \xi' \rangle + \langle g' g^{-1}, [X, \eta] + [\xi, Y] + [\xi, \eta] \rangle\end{aligned}$$

que coinciden con los primeros términos de $\{ \langle (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle (Y \oplus \eta, b) \rangle \}_{\mu(g, \lambda)}$.

Falta ver la parte

$$\begin{aligned}\langle (Ad_g \lambda, X \oplus \xi), (Ad_g \lambda, Y \oplus \eta) \rangle_{(g, \lambda)}^{LT^*G} &= d_t \langle Ad_{\gamma(t)} \lambda, X \oplus \xi \rangle - d_t \langle Ad_{\tilde{\gamma}(t)} \lambda, Y \oplus \eta \rangle - \\ &\quad - \langle \lambda, [\rho_1(Ad_{g^{-1}}(Y \oplus \eta)), \rho_1(Ad_{g^{-1}}(X \oplus \xi))] \rangle\end{aligned}$$

donde $\tilde{\gamma}$ es una curva definida en forma análoga a γ pero en base a $X \oplus \xi$,

$$\begin{aligned}&= \langle Ad_g ad_{\rho_1(Ad_{g^{-1}}(Y \oplus \eta))} \lambda, X \oplus \xi \rangle - \langle Ad_g ad_{\rho_1(Ad_{g^{-1}}(X \oplus \xi))} \lambda, Y \oplus \eta \rangle - \\ &\quad - \langle \lambda, [\rho_1(Ad_{g^{-1}}(Y \oplus \eta)), \rho_1(Ad_{g^{-1}}(X \oplus \xi))] \rangle \\ &= - \langle \lambda, [\rho_1(Ad_{g^{-1}}(Y \oplus \eta)), Ad_{g^{-1}}(X \oplus \xi)] \rangle + \langle \lambda, [\rho_1(Ad_{g^{-1}}(X \oplus \xi)), Ad_{g^{-1}}(Y \oplus \eta)] \rangle - \\ &\quad - \langle \lambda, [\rho_1(Ad_{g^{-1}}(Y \oplus \eta)), \rho_1(Ad_{g^{-1}}(X \oplus \xi))] \rangle \\ &= - \langle Ad_g \lambda, [Y \oplus \eta, X \oplus \xi] \rangle\end{aligned}$$

Finalmente, juntando todos los términos, se verifica que

$$\begin{aligned} \{ \langle \mu, (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle \mu, (Y \oplus \eta, b) \rangle \}_{(g, \lambda)}^{LT^*G} &= \{ \langle (X \oplus \xi, a) \rangle, \langle (Y \oplus \eta, b) \rangle \}_{\mu(g, \lambda)} \\ &= \langle g'g^{-1} + Ad_g^D \lambda, [X \oplus \xi, Y \oplus \eta] \rangle + \Gamma(X \oplus \xi, Y \oplus \eta) \end{aligned}$$

■.

Seguimos con el cálculo de la acción infinitesimal de $L\hat{\mathfrak{d}}$ sobre LT^*G generada por μ , pero, antes, damos una caracterización de las *acciones dressing* que están involucradas en este cálculo:

Definición: [3] Dada la factorización en el doble D , introducimos la siguiente acción a izquierda de \tilde{G} sobre G

$$g \xrightarrow{\tilde{h}} g^{\tilde{h}} \quad / \quad \tilde{h}g = g^{\tilde{h}}\tilde{h}^g \in D$$

Ahora, definimos la **acción dressing por derecha** de \tilde{G} sobre G como

$$g \xrightarrow{\tilde{h}} g^{\tilde{h}^{-1}}$$

[2] El campo vectorial que genera esta acción en G es

$${}^R Dress_g(\xi) = -L_{g^*} \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi)$$

donde $\xi \in \mathfrak{g}^*$ y $\rho_1 : \mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{g}$ es la proyección sobre el primer factor en la descomposición $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$.

Proposición: El campo vectorial hamiltoniano A^μ asociado a la función $\langle \mu(-), X \oplus \xi \rangle$ sobre LT^*G es

$$A^\mu(g, \lambda) = (Xg \oplus g\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi), -ad_{\lambda}^{\tilde{G}} \rho_2(Ad_{g^{-1}}^D \xi) - \rho_2(-Ad_{g^{-1}}^D \xi' + Ad_{g^{-1}}^D ad_{g'^{-1}}^G \xi))$$

y representa la acción infinitesimal de $L\mathfrak{d}$ sobre LT^*G , de la cual μ es la aplicación momento.

Dem: Sea un elemento $X \oplus \xi$ de $L\mathfrak{d}$, y consideramos la función $\langle \mu, X \oplus \xi \rangle : LT^*G \rightarrow \mathfrak{A}$, veamos, entonces, su diferencial

$$d \langle \mu, X \oplus \xi \rangle_{(g, \lambda)} = \left\langle dgg^{-1}, \rho_2(-\xi' + ad_{g'^{-1}}^{G^*} \xi + ad_{\mathfrak{A}}^D(X \oplus \xi)) \right\rangle + \left\langle d\lambda, \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(X \oplus \xi)) \right\rangle$$

Ahora, tenemos en LT^*G la forma simpléctica canónica invariante por izquierda

$$\omega_{0(g, \lambda)} = \langle \lambda, [g^{-1}dg, g^{-1}dg] \rangle - \langle d\lambda, g^{-1}dg \rangle$$

entonces, la forma de un campo hamiltoniano asociado a una función H sobre LT^*G es tal que

$$\begin{aligned} i_{X_H} \omega_{0(g, \lambda)} &= dH = \langle H_g, g^{-1}dg \rangle + \langle H_\lambda, d\lambda \rangle \quad \text{con } H_g \in \mathfrak{g}^* \text{ y } H_\lambda \in \mathfrak{g} \\ X_H &= (gH_\lambda, ad_{H_\lambda}^{G^*} \lambda - H_g) \in T_g LG \times T_\lambda L\mathfrak{g}^* \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, el campo hamiltoniano asociado a $\langle \mu, X \oplus \xi \rangle$ es de la forma

$$\begin{aligned} A^\mu(g, \lambda) &= (Xg \oplus g\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi), ad_{\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D(X \oplus \xi))}^{G^*} \lambda - \\ &\quad - \rho_2(-Ad_{g^{-1}}^D \xi' + Ad_{g^{-1}}^D ad_{g'^{-1}}^G \xi + Ad_{g^{-1}}^D ad_{Ad_g^D \lambda}(X \oplus \xi))) \end{aligned}$$

usando que

$$\begin{aligned} -\rho_2(Ad_{g^{-1}}^D ad_{Ad_g^D \lambda}(X \oplus \xi)) &= -\rho_2([\lambda, Ad_{g^{-1}}^D(X \oplus \xi)]_{\mathfrak{d}}) \\ &= \rho_2([\lambda, Ad_{g^{-1}} X]_{\mathfrak{d}} + [\lambda, (\rho_1 + \rho_2)Ad_{g^{-1}} \xi]) \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$-\rho_2(ad_{\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D X \oplus \xi)}^{G^*} \lambda) = -\rho_2([\lambda, \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D X) + \rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi)]_{\mathfrak{d}})$$

finalmente, se llega a

$$A^\mu(g, \lambda) = (Xg + g\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi), -ad_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{G}} \rho_2(Ad_{g^{-1}}^D \xi) - \rho_2(-Ad_{g^{-1}}^D \xi' + Ad_{g^{-1}}^D ad_{g^{-1}}^G \xi))$$

■.

Proposición: Sea $(X \oplus \xi)_{g\tilde{h}}$ el campo vectorial sobre ΩD que genera la acción residual de LD por izquierda. Entonces la imagen por J de este campo es el siguiente campo sobre LT^*G

$$J_*((X \oplus \xi)_{g\tilde{h}}) = (Xg + g\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi), \rho_2(Ad_{g^{-1}}^D \xi' - Ad_{g^{-1}}^D ad_{g^{-1}}^{G^*} \xi) + ad_{\rho_2(Ad_{g^{-1}}^D \xi)}^{\tilde{G}} \lambda)$$

Dem: El campo generador de la acción residual de LD sobre ΩD por izquierda es

$$(X \oplus \xi)_{g\tilde{h}} = (X \oplus \xi)g\tilde{h}$$

para elementos $g\tilde{h} \in \Omega D \subset LD$.

Tomemos una curva de funciones $(\tilde{ab})(t)$ en ΩD tal que $(\tilde{ab})(t=0) = e\tilde{e}$ y $d_{t=0}(\tilde{ab}) = (X \oplus \xi)$, entonces

$$\begin{aligned} J_*((X \oplus \xi)_{g\tilde{h}}) &= d_{t=0}(J((\tilde{ab})(t)g\tilde{h})) \\ &= d_{t=0}(a(t)g^{\tilde{b}(t)}, (\tilde{b}^g(t)\tilde{h})'(\tilde{b}^g(t)\tilde{h})^{-1}) \end{aligned}$$

donde hemos usado la factorización del producto en D , $\tilde{b}^g = g^{\tilde{b}} \tilde{b}^g$, entonces,

$$d_{t=0}(\tilde{b}^g(t)) = -g^{-1}d_{t=0}(g^{\tilde{b}(t)}) + {}^D Ad_{g^{-1}} \xi$$

y, de la definición y propiedades que dimos previamente de las acciones *dressing*, sabemos que

$$d_{t=0}(g^{\tilde{b}(t)}) = -{}^R Dress_g(\xi) = L_{g^*} \rho_1({}^D Ad_{g^{-1}} \xi)$$

para dar,

$$d_{t=0}(\tilde{b}^g(t)) = \rho_2({}^D Ad_{g^{-1}} \xi)$$

Utilizando estas expresiones, llegamos a que

$$J_*((X \oplus \xi)_{g\tilde{h}}) = (Xg + g\rho_1(Ad_{g^{-1}}^D \xi), \rho_2(Ad_{g^{-1}}^D \xi' - Ad_{g^{-1}}^D ad_{g^{-1}}^{G^*} \xi) + ad_{\rho_2(Ad_{g^{-1}}^D \xi)}^{\tilde{G}} \lambda)$$

■.

De las dos últimas proposiciones, vemos que $A^\mu(g, \lambda)$ y $J_*((X \oplus \xi)_{g\tilde{h}})$ coinciden, con lo cual verificamos el enunciado del teorema que dimos inicialmente.

Finalmente, se puede interpretar que J mapea la acción residual por izquierda de LD sobre ΩD en una acción infinitesimal de $L\mathfrak{d}$ sobre LT^*G , y esta nueva acción tiene como aplicación momento a μ por cumplirse la relación

$$\Phi = \mu \circ J$$

La acción infinitesimal de Ld^* se puede "integrar" dando una acción² de LD^\wedge sobre LT^*G

$$A_{a\tilde{b}}(g, \lambda) = (ag^{\tilde{b}}, \tilde{b}^g l' \tilde{b}^{g^{-1}} + \tilde{G} Ad_{\tilde{b}^g} \lambda)$$

que es la acción generada por la aplicación momento μ .

Nota: *La posibilidad de llevar la acción infinitesimal a una acción finita esta ligada, con vistas a generalizaciones, a la existencia de una extensión central del grupo LD . Si esto no es posible, se procede de manera análoga pero en términos de mapeos de campos Hamiltonianos y no siempre de curvas integrales.*

Esta acción no es libre, ya que $\tilde{G} \subset LD$ deja el punto $(e, 0)$ fijo en LT^*G . De todas formas, teniendo en cuenta la descomposición $LD = \Omega D \triangleleft D$, y restringiendonos a ΩD , se encuentra que

$$\begin{aligned} J & : \Omega D \longrightarrow LT^*G \\ & : a\tilde{b} \longrightarrow A_{a\tilde{b}}(e, 0) \end{aligned}$$

De esta observación, se ve naturalmente que J es un morfismo simpléctico, ya que A es una acción simpléctica sobre LT^*G , y entonces, el pull-back $A(e, 0)^* \omega_0$ es la forma simpléctica de Kirillov-Kostant en la órbita coadjunta $O_{(0,1)} \sim \Omega D$.

Nota: *Esta es una observación general que permitirá generalizar el concepto de dualidad como mapeo de soluciones a otros espacios que se obtienen como órbitas coadjuntas (ver capítulo siguiente).*

Nótese, también, que

$$A_{a\tilde{b}}(g, \lambda) = (\mathfrak{A}_{a\tilde{b}}(g), \theta(\mathfrak{A}_{a\tilde{b}}^* \lambda) + \rho_2({}^D Ad_{(ag^{\tilde{b}})} \hat{\Gamma}(a\tilde{b}g))) \quad (2.7)$$

donde $\mathfrak{A}_{a\tilde{b}}$ es la acción (dressing) de LD sobre LG , $\theta(\alpha)$ son las coordenadas de la 1-forma α en la base de las formas de Maurer-Cartan invariantes por izquierda sobre LG con valores en $L\mathfrak{g}$ y

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} & : LD \longrightarrow L\mathfrak{d} \\ & : l \longrightarrow l'l^{-1} \end{aligned}$$

es el 1-cociclo sobre LD relacionado con el 2-cociclo Γ en $L\mathfrak{d} \otimes L\mathfrak{d}$, $\Gamma(U, V) = \langle U, V \rangle$ que extiende centralmente el álgebra $L\mathfrak{d}^\wedge$.

Como veremos en la sección siguiente, estas dos aplicaciones y su relación con las acciones de simetría en los espacios mencionados, son fundamentales para nuestro tratamiento de la dualidad-T.

²La parte extendida centralmente en LD^\wedge actúa trivialmente sobre LT^*G .

2.5. El diagrama de la Dualidad-T de Poisson-Lie

Tomamos un grupo doble de Drinfeld D (perfecto), tal que, globalmente

$$D \sim G \times \tilde{G} \sim \tilde{G} \times G$$

Este es el caso correspondiente a G un grupo real, simple, compacto. Si no es perfecto, se puede proceder análogamente en un grupo doble arbitrario cuya algebra de Lie se descompone en un *triple de Manin*, si uno se restringe a la celda maximal $D_0 = G\tilde{G} \cap \tilde{G}G$ (ver [14] y [15]).

Planteamos un modelo tipo WZW en D , en un cilindro (o disco) como superficie de Riemann³, en forma Lagrangiana.

Sabemos [1] que en su versión Hamiltoniana, obtenemos como un espacio de fases reducido

$$(\Omega D, \omega = L_{g^{-1}}^* \Gamma) \stackrel{\text{diff} \sim \text{simpl}}{\sim} (\mathcal{O}_{(0,1)}, \omega_{K-K})$$

donde ω_{K-K} es la forma simpléctica de Kirillov-Kostant en la órbita coadjunta $\mathcal{O}_{(0,1)}$,

$$\mathcal{O}_{(0,1)} \equiv \{Ad_l^*(0,1) / l \in LD\} \quad ,$$

y el diffeomorfismo está dado por $\Phi : \Omega D \rightarrow \mathcal{O}_{(0,1)}$, que es la aplicación momento correspondiente a la acción residual por izquierda de LD sobre ΩD .

Ahora, introducimos un Hamiltoniano en de la forma de *movimiento colectivo* [21]

$$\mathfrak{H} = H \circ \Phi \tag{2.8}$$

para alguna función $H : \mathcal{O}_{(0,1)} \rightarrow \mathbb{R}$. La única restricción en la elección de H es que sea una buena función Hamiltoniana en $\mathcal{O}_{(0,1)}$. Ahora, sabemos de la existencia de los mapeos Poisson (y simplécticos) J y \tilde{J} de ΩD a los cotangentes LT^*G y $LT^*\tilde{G}$ y, también, conocemos los mapeos Poisson μ y $\tilde{\mu}$ de vuelta al álgebra $L\mathfrak{d}^*$.

Desde este punto de vista, es claro que si planteamos los sistemas $(LT^*G, H \circ \mu)$ y $(LT^*\tilde{G}, H \circ \tilde{\mu})$, partiendo de una solución en $(\Omega D, \mathfrak{H})$, uno obtendrá *soluciones duales* en LT^*G y $LT^*\tilde{G}$. Más aún, toda solución de alguno de los sistemas, con valor inicial tal que su imagen en el álgebra está en $\mathcal{O}_{(0,1)}$, tiene su contraparte *dual* en el otro. Entonces, podemos llamar a este par, **sistemas duales con respecto a $\mathcal{O}_{(0,1)}$** , y la dualidad se hace manifiesta en el siguiente diagrama

³Este modelo describe el movimiento de una cuerda cerrada en el grupo D . El tratamiento para una cuerda abierta (ver [29]) es similar, la diferencia deviene principalmente de considerarse como dominio de los campos, en el escenario hamiltoniano, en lugar del círculo S^1 un intervalo abierto $(0, \pi)$ y se imponen condiciones de contorno tipo Newman en los extremos de la cuerda, lo que garantiza que no se escape momento por los extremos de la cuerda. Las formas sobre este nuevo espacio de fases $C^\infty((0, \pi), D)$ contendrán un término adicional con los valores en los bordes del intervalo que garantiza, al integrar sobre $(0, \pi)$, la antisimetría de las formas (ver por ej. en [8], [58] o [16])

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{O}_{(0,1)} & \hookrightarrow & (L\mathfrak{d}^*; \{\}_{K-K}; H) \\
& \nearrow \mu & \uparrow \Phi & & \nwarrow \tilde{\mu} \\
(LT^*G; \omega_0; H \circ \mu) & & & & (LT^*\tilde{G}; \omega_0; H \circ \tilde{\mu}) \\
& \searrow J & \downarrow \Phi & & \nearrow \tilde{J} \\
& & (\Omega D(G); L_i^* \omega_l \equiv \Gamma; H \circ \Phi) & &
\end{array}$$

(2.9)

Tomando otro punto de vista, por ejemplo, si uno considera un modelo en un cilindro sobre el grupo G tal que su versión hamiltoniana sea $(LT^*G; \omega_0; H \circ \mu)$, entonces, no todas las soluciones de este sistema tienen su contraparte dual en $(LT^*\tilde{G}; \omega_0; H \circ \tilde{\mu})$. Esto se explica del hecho de que no todo elemento de LT^*G se mapea a través de μ a la órbita coajunta $Ad_{LD}^*(0, 1)$, que es donde tenemos bien definido el camino de la dualidad. Por lo tanto, para obtener una *dualidad completa*, uno debe restringirse a un subespacio de LT^*G que llamaremos **subespacio dualizable admisible**. En principio, lo podemos caracterizar como la preimagen por μ de la órbita coadjunta, o sea,

$$S = \mu^{-1}(Ad_{LD}^*(0, 1)).$$

Pero, para obtener un buen subsistema Hamiltoniano en S del sistema $(LT^*G; \omega_0; H \circ \mu)$, podemos tener en cuenta la acción de simetría de LD sobre LT^*G cuya aplicación momento es μ y que, como habíamos visto en la sección anterior, coincide con la acción que mapea J a partir de la acción residual de LD sobre ΩD .

Para construir el subespacio admisible de manera que sea un *subsistema hamiltoniano*, veamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& & LT^*G \\
& \swarrow \pi & \\
LD \backslash LT^*G & & L\mathfrak{d}^* \\
& \searrow \mu &
\end{array}$$

en el que las dos flechas son mapeos Poisson y π es la proyección canónica. La fibra sobre la clase $[(e, 0)] \in LD \backslash LT^*G$ es el subespacio

$$S_R \equiv LD \bullet (e, 0) \subset LT^*G \quad (2.10)$$

Es interesante observar que $LD \backslash LT^*G$ y $L\mathfrak{d}^*$ forman un *par dual*[26].

La construcción que presentaremos a continuación es un caso particular del siguiente diagrama [21]

$$\begin{array}{ccc}
\mu^{-1}(O_l) & & \\
\downarrow \rho & \searrow \mu & \\
Z_{O_l} = O_l \times \mu^{-1}(l)/G_l & \xrightarrow{\mu_{Z_{O_l}}} & O_l \\
\downarrow \pi & & \\
\mu^{-1}(l)/G_l & &
\end{array}$$

(2.11)

donde μ es una aplicación momento sobre un G -espacio M , O_l es una órbita coadjunta en \mathfrak{g}^* que pasa por l . Z_{O_l} es una subvariedad simpléctica de M tal que, la foliación nula del pull-back por μ de la forma de Kirillov-Kostant en O_l , es fibrante y corresponde a

$$\begin{array}{c}
\mu^{-1}(O_l) \\
\downarrow \rho \\
Z_{O_l} = O_l \times \mu^{-1}(l)/G_l
\end{array}$$

siendo la fibra sobre $z \in Z_{O_l}$ la órbita del estabilizador $G_{\mu(z)}$, $\mu_{Z_{O_l}}$ y π son la aplicación momento y la proyección canónica, respectivamente, de la correspondiente acción de G sobre Z_{O_l} .

La identificación $Z_{O_l} \rightarrow O_l \times \mu^{-1}(l)/G_l$ está dada por la aplicación

$$\begin{aligned}
\gamma & : O_l \times \mu^{-1}(l)/G_l \rightarrow Z_{O_l} \\
& : (g \cdot l, [x]) \rightarrow g \cdot x
\end{aligned}$$

que está bien definida, dado que el grupo de isotropía G_l de $l \in \mathfrak{g}^*$ coincide con el grupo de isotropía G_x de $x \in Z_{O_l}$.

En nuestro caso particular, $M = LT^*G$ y $G = LD^\wedge$ con aplicación momento μ , consideramos la órbita $O_{(0,1)}$ en $L\hat{\mathfrak{d}}^*$, el grupo de isotropía correspondiente es D , el espacio reducido $\mu^{-1}(0,1)/G_{(0,1)}$ tiene un solo elemento $[(e, 0)]$ y, finalmente, la subvariedad simpléctica S_R se identifica con $Z_{O_{(0,1)}}$ via γ .

Dado que el hamiltoniano está escrito en forma de *movimiento colectivo* $H \circ \mu$, sabemos (ver por ej [21] y [10]) que las curvas integrales de los campos Hamiltonianos son de la forma

$$\gamma(t) = g(t) \cdot x$$

con $x = \gamma(0)$ y $g(0) \in G_{(0,1)} = \{l \in G / l \cdot (0,1) \equiv Ad_l^{D^*}(0,1) = (0,1)\}$. Nuestra atención se centra en las curvas correspondientes a la órbita coadjunta de extensión central pura $O_{(0,1)}$. Es decir, las curvas $\gamma(t)$ que pasan por un punto x tal que $\mu(x) \in O_{(0,1)}$.

Por lo tanto, vemos que $(S_R, \omega_0|_{S_R}, H|_{S_R})$ es subsistema hamiltoniano de LT^*G , ya que las curvas integrales de los campos hamiltonianos en LT^*G , si tienen valor inicial en S_R , se quedan en S_R .

Por lo tanto, podemos tomar S_R como el *subespacio dualizable admisible* que estamos buscando.

Como es de esperar, la *dualidad completa* se dará entre S_R y \tilde{S}_R , donde \tilde{S}_R se construye en $LT^*\tilde{G}$ de manera enteramente análoga a S_R en LT^*G . El camino de la dualidad queda garantizado en ambos

sentidos por la factorización de la aplicación Φ expresada en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_{(0,1)} & & \\
 & \nearrow \mu & \updownarrow \Phi & \nwarrow \tilde{\mu} & \\
 S_R & & & & \tilde{S}_R \\
 & \searrow J & \downarrow & \nearrow \tilde{J} & \\
 & & \Omega D & &
 \end{array}$$

Una propiedad importante de estas *transformaciones de dualidad* entre los sistemas en G y \tilde{G} es que serán **transformaciones canónicas**, hecho que se ve claramente al observar que todos los mapeos involucrados son Poisson. Por otro lado, al estar escritos todos los Hamiltonianos en forma de *movimiento colectivo*, sabemos que la *dinámica* también será respetada por estas transformaciones.

Notemos que S_R y \tilde{S}_R son *más grandes* que ΩD , ya que $S_R \sim \Omega D \cdot (G, 0)$ y $\tilde{S}_R \sim \Omega D \cdot (\tilde{G}, 0)$. Esto se refleja en el hecho de que si uno toma una curva solución en S_R , $\gamma(t)$ será de la forma

$$\gamma(t) = l(t) \cdot (g_0, 0)$$

con $l(t) \in \Omega D \forall t$ y algún $g_0 \in G$. Al mapearla a la órbita coadjunta $\mathcal{O}_{(0,1)}$ del álgebra a través de μ , tenemos

$$\mu(\gamma(t)) = Ad_{l(t)}^* \mu(g_0, 0) = l(t)' l(t)^{-1} \xrightarrow{\Phi^{-1}} l(t)$$

y, factorizando $l(t) = (\tilde{g}h)(t) = \tilde{l}(t)$, pasamos a $LT^*\tilde{G}$

$$\tilde{J}(l(t)) = (\tilde{g}(t), h'h^{-1}(t)) = \tilde{l}(t) \bullet (\tilde{e}, 0)$$

en donde vemos que la información que se mapea es la de la órbita coadjunta solamente, independientemente del g_0 de partida. También, vemos que $\tilde{l}(t) \bullet (\tilde{g}_0, 0)$ será otra una curva solución para cualquier $\tilde{g}_0 \in \tilde{G}$.

Por lo tanto, y como era de esperar, las transformaciones de dualidad están definidas a menos de elementos o *fijaciones de gauge* parametrizadas por elementos $l_0 \in D$. Es decir, hay que elegir una sección en cada uno de los fibrados

$$\begin{array}{ccc}
 LD \bullet (e, 0) \subset LT^*G & & L\tilde{D} \bullet (\tilde{e}, 0) \subset LT^*\tilde{G} \\
 \downarrow & y & \downarrow \\
 \Omega D \bullet (e, 0) & & \Omega\tilde{D} \bullet (\tilde{e}, 0)
 \end{array}$$

Los mapeos J y \tilde{J} con los que venimos trabajando corresponden a la elección del gauge $l_0 = e\tilde{e}$, pero la elección de otro elemento l_0 también define buenas transformaciones de dualidad. La elección del gauge se puede ver como *condición de contorno* sobre los campos, $g(0) = g_0$ y $\tilde{g}(0) = \tilde{g}_0$.

Partiendo de un modelo $(LT^*G; \omega_0; H \circ \mu)$, se puede reinterpretar, desde un punto de vista más cercano a la teoría de campos, la necesidad de restringirse al subespacio S_R como la de imponer *condiciones de dualizabilidad* sobre los campos. Y, dentro del formalismo Lagrangeano, se puede pensar como la

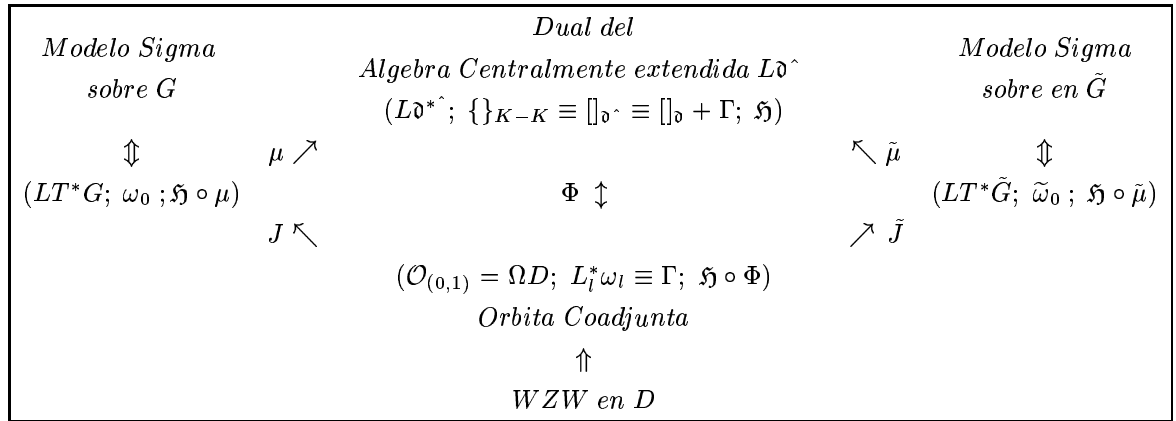
necesidad de imponer *términos de vínculos*, de manera que al pasar al formalismo Hamiltoniano estos vínculos restrinjan el sistema al subespacio S_R .

Finalmente, observemos que si se considera un modelo dentro del formalismo Lagrangeano dado por una funcional acción

$$S = \int_{\Sigma} L(g(x, t); \partial g(x, t))$$

cuyo sistema Hamiltoniano es de la forma $(LT^*G; \omega_0; H \circ \mu)$, es natural pensar en encontrar el Lagrangiano⁴ \tilde{L} asociado al *sistema dual* $(LT^*\tilde{G}; \omega_0; H \circ \tilde{\mu})$, y, teniendo en cuenta que se debe restringirse a los subespacios S_R y \tilde{S}_R , se puede llamar también, a los modelos (G, L) y (\tilde{G}, \tilde{L}) , **duales**.

Para concluir, la interpretación geométrica, o teoría geométrica de la dualización, que hemos desarrollado se esquematiza en el diagrama



(2.9)

2.5.1. Versión Lagrangiana

Describiremos en esta sección la contraparte Lagrangiana de los modelos Hamiltonianos que hemos presentado. Para ello, haremos primero unas consideraciones sobre la forma del Hamiltoniano y nos restringiremos al estudio de una clase de Hamiltonianos en el algebra $L\mathfrak{d}$.

Como habíamos notado, la condición a priori que debemos imponer sobre la función Hamiltoniana $\mathfrak{h} : L\mathfrak{d} \rightarrow \mathbb{R}$, es que lleve a una dinámica bien comportada en $\mathcal{O}_{(0,1)}$. Ahora, como estamos interesados

⁴Respecto al tema de los modelos Lagrangianos, vale la pena aclarar que, como tratamos con teorías de campos, o sea, variedades de dimensión infinita, aunque este bien definido el paso de un dado modelo en su versión Lagrangiana a su versión Hamiltoniana, la inversa no está unívocamente definida en general. Esto se debe a que no siempre todas las soluciones que se obtienen de minimizar la acción se pueden obtener en el formalismo Hamiltoniano. Por ejemplo, dado un modelo sigma para una cuerda cerrada moviéndose en un grupo G , las soluciones del tipo solitón no se pueden obtener Hamiltonianamente en el correspondiente modelo sobre LT^*G (notese la diferencia entre LT^*G y T^*LG).

en construir un Lagrangiano en $G(\tilde{G})$ a partir de los Hamiltonianos en los cotangentes correspondientes, i.e.,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h} \circ \mu & : LT^*G \longrightarrow \mathfrak{R} \\ \mathfrak{h} \circ \tilde{\mu} & : LT^*\tilde{G} \longrightarrow \mathfrak{R}\end{aligned}$$

pediremos que estos hamiltonianos sean *cuadráticos en los momentos*. Este requerimiento no es indispensable, por lo menos en principio, y el estudio de funciones Hamiltonianas que no sean de esta forma podría llevar a conclusiones interesantes. De todas maneras, esta clase de Hamiltonianos lleva a todos los modelos Lagrangianos duales (*modelos sigma*) tratados en la literatura (ver [13],[5],[8], [6] y referencias allí citadas), por ello detallaremos su descripción en los párrafos siguientes.

Observese que la condición de que el Hamiltoniano sea cuadrático en los momentos correspondientes a G y a \tilde{G} , con el fin de preservar el caracter "simétrico" de la dualidad, implica que \mathfrak{h} debe ser una función cuadrática en $\mathcal{O}_{(0,1)}$. Esto se puede ver en la expresión

$$\mathfrak{h} \circ \mu(g, \tilde{h}'\tilde{h}^{-1}) = \mathfrak{h}(g'g^{-1} + Ad_g\tilde{h}'\tilde{h}^{-1}) = \mathfrak{h}(\tilde{g}'\tilde{g}^{-1} + Ad_g h' h^{-1}) = \mathfrak{h} \circ \tilde{\mu}(\tilde{g}, h' h^{-1})$$

donde $\tilde{g}h = \tilde{g}h$. Entonces \mathfrak{h} debe ser cuadrática sobre la proyección sobre \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* en $\mathcal{O}_{(0,1)}$, y por lo tanto, en todo $\mathcal{O}_{(0,1)} \subset \mathfrak{d}$. Esto nos lleva a Hamiltonianos de la forma

$$H(l) = \mathfrak{h}(\Phi) = \langle \Phi, \mathbf{K}\Phi \rangle \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{K} : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{d}$ es un operador lineal.

Ahora procederemos a escribir la función Lagrangiana correspondiente en G (el proceso se puede seguir de manera análoga en \tilde{G}). Para eso, utilizaremos las ecuaciones de Hamilton para los campos vectoriales hamiltonianos de

$$\begin{aligned}H^G & = \mathfrak{h} \circ \mu \\ i_{X_{H^G}} \omega_0 & = dH^G\end{aligned}$$

donde el cotangente LT^*G se toma trivializado por izquierda, y para una curva integral $g(t)$ de X_{H^G} se tiene (ver (2.6))

$$g^{-1}\dot{g} = H_\lambda$$

donde $dH = \langle H_g, g^{-1}dg \rangle + \langle H_\lambda, d\lambda \rangle$ con $H_g \in \mathfrak{g}^*$ y $H_\lambda \in \mathfrak{g}$.

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}H^G & = \langle g'g^{-1} + Ad_g\lambda, \mathbf{K}(g'g^{-1} + Ad_g\lambda) \rangle \\ & = \frac{1}{2} \langle g^{-1}g', (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g g^{-1}g' \rangle + \langle g^{-1}g', (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g \lambda \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda, (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g \lambda \rangle\end{aligned} \quad (2.8)$$

entonces

$$g^{-1}\dot{g} = \rho_1 (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g g^{-1}g' + \rho_1 (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g \rho_2 \lambda \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{K}_g = Ad_{g^{-1}} \circ \mathbf{K} \circ Ad_g$ y \mathbf{K}^\dagger es el operador adjunto a \mathbf{K} correspondiente a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{d} . Nótese que el Hamiltoniano H^G , al estar en forma de *movimiento colectivo*, depende solo del operador $(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g$ que es *autoadjunto* respecto a esta forma bilineal.

Vemos que la *transformacion de Legendre* hacia el formalismo Lagrangiano será no singular *sii* el operador $\rho_1 (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g \rho_2$ es no singular $\forall g \in G$.

Y, si queremos que el Lagrangiano del modelo dual en \tilde{G} tambien exista y sea no singular, requeriremos, además, que $\rho_2 (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_{\tilde{g}} \rho_1$ sea no singular $\forall \tilde{g} \in \tilde{G}$.

Nota: En lo que sigue, requeriremos que la transformacion de Legendre sea no singular, y recuperaremos, como casos particulares de operadores K que satisfacen este requerimiento, los modelos sigma duales que se encuentran en la literatura (ver, por ej., [5][8][17]). En el caso general en el que no se pide esto, se podra proceder de manera análoga a como se procede en presencia de vínculos, llegando a modelos cuyo Lagrangiano es singular: modelos sobre espacios cociente[18][19], "gaugeados" [9]. Analizaremos estos casos en la sección siguiente.

En el caso en que el operador \mathbf{K} es no singular, y por lo tanto, invertible, se puede despejar el momento en función de la velocidad y , a través de la transformada de Legendre, encontrar la función Lagrangiana

$$\lambda(g^{-1}\dot{g}) = (\rho_1 (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g \rho_2)^{-1}(g^{-1}\dot{g} - \rho_1 (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g g^{-1}g')$$

$$L(g, \dot{g}) = \langle \lambda(g^{-1}\dot{g}), g^{-1}\dot{g} \rangle - H^G(g, \lambda(g^{-1}\dot{g}))$$

Recordemos que en nuestra notación, $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \int_{S^1} \langle \cdot, \cdot \rangle^\circ$.

La forma explícita del Lagrangiano, llamando $\mathbf{O}_g = (\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_g$ es

$$L(g, \dot{g}) = \frac{1}{2} \{ \langle (\rho_1 \mathbf{O}_g \rho_2)^{-1}(g^{-1}\dot{g} - \rho_1 \mathbf{O}_g g^{-1}g'), (g^{-1}\dot{g} - \rho_1 \mathbf{O}_g g^{-1}g') \rangle - \langle g^{-1}g', \rho_2 \mathbf{O}_g \rho_1 g^{-1}g' \rangle \} \quad (2.4)$$

Para una elección del operador \mathbf{K} arbitraria, este Lagrangiano no define un *modelo sigma* sobre G . En la sección siguiente, daremos casos particulares de este operador que llevan a Lagrangianos de modelos sigma duales conocidos ([13][17][8]).

Finalmente, mencionamos que en [58] se muestra que para las matrices \mathbf{K} que definen modelos sigma duales sobre G y \tilde{G} , usando la geometría de *cuerda abierta* $\Sigma = [0, \pi] \times \mathbb{R}$, estos lagrangianos definen sistemas Poisson-Lie simétricos⁵ con respecto a una acción \mathfrak{A}^R por derecha del grupo G que hace el diagrama conmutativo para $g_0 \in G$

$$\begin{array}{ccc} PD & \xrightarrow{\cdot g_0} & PD \\ \downarrow J & & \downarrow J \\ PT^*G & \xrightarrow{\mathfrak{A}^R g_0} & PT^*G \end{array}$$

donde PM es el espacio $C^\infty([0, \pi], M)$ para una variedad M . Nótese que esta acción, por construcción, está bien definida sobre el correspondiente subespacio admisible $S_R \subset PT^*G$.

El hecho de que el sistema sea P-L simétrico implica que hay una aplicación momento valuada en \tilde{G} ⁶ correspondiente a la acción Poisson \mathfrak{A}^R que, si imponemos las condiciones de contorno $\partial_\sigma g g^{-1}|_{0, \pi} = 0$ y $\partial_\sigma \tilde{h} \tilde{h}^{-1}|_0 = 0$, es

$$\begin{aligned} J^{\tilde{G}} &: S_R \subset PT^*G \longrightarrow \tilde{G} \\ &: (g, \tilde{h} \tilde{h}^{-1}) \longrightarrow \tilde{h}(\sigma = \pi) \end{aligned}$$

que es una cantidad conservada ya que el hamiltoniano, por estar escrito en forma colectiva, es invariante ante la multiplicación por derecha de elementos constantes de G .

⁵ ver la definición en [36], que es la versión "campista" de la idea dada en [2], y no confundir con la definición, no siempre equivalente, que lleva el mismo nombre y se dió en [5]

⁶ El lector notará la similitud de esta aplicación momento con las soluciones del modelo sigma-Poisson sobre el grupo Lie-Poisson G que describiremos en el capítulo siguiente.

Para el caso que veníamos trabajando, el de la geometría de cuerda cerrada $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$, esta simetría existe, pero su aplicación momento es trivial, es decir $J^{\tilde{G}} \equiv \tilde{e}$.

Nota: Esta acción de simetría L - P puede ser una consecuencia de la serie de equivalencias que se describen en [25]. Como consecuencia, en este caso en particular se tendríamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \{P, H, G\} & \\
 \text{Hol} \nearrow \searrow & & \searrow \nearrow \\
 (\Omega D, H \circ \Phi, D) & \longleftrightarrow & [D, \tilde{H}, G]
 \end{array}$$

donde Hol denota el mapeo de holonomía, (M, H, G) denota un G -sistema hamiltoniano; mientras que $[N, H, G]$ denota el G -sistema PL -hamiltoniano, y $\{P, H, G\}$ un sistema q -hamiltoniano (ver [25]).

Capítulo 3

Casos Particulares

En este capítulo analizaremos algunos casos particulares de la construcción hecha en el capítulo anterior y recuperaremos resultados conocidos sobre modelos T-duales desde nuestro esquema de trabajo.

Este enfoque nos permite caracterizar los subespacios dualizables admisibles dentro de los espacios de fases de los modelos duales y dar un camino explícito para construir las transformaciones canónicas de dualidad. Además, muestra un origen hamiltoniano común para los varios modelos duales de distintas características que se encuentran en la literatura.

3.1. Modelos sigma T-Duales

Construiremos los mapeos de dualidad correspondientes a dos modelos sigma en G y \tilde{G} , que se obtienen a partir de su contraparte Hamiltoniana de la manera que fue descrita en la sección anterior.

El Lagrangiano de un *modelo sigma* es de la forma

$$L_\sigma^G = \langle g^{-1}\partial_+g, E(g)g^{-1}\partial_-g \rangle \quad (3.0)$$

donde $\xi^\pm = t \pm x$ son las coordenadas del cono de luz en una superficie de Riemann Σ , y $E : G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ (ver por ej, [13][17][8]).

Consideremos un operador $\mathbf{K} = \frac{1}{4}\mathcal{E}$, donde \mathcal{E} cumple

- \mathcal{E} es autoadjunto
- $\mathcal{E}^2 = Id$
- $\rho_1\mathcal{E}_g\rho_2$ es no singular $\forall g \in G$

Para este tipo de operadores se tiene la siguiente equivalencia

Proposición: *Siendo \mathfrak{d} un espacio vectorial y \langle, \rangle una forma bilineal, no degenerada y simétrica, entonces existe un E con las propiedades enumeradas arriba sii \mathfrak{d} se descompone en subespacios ortogonales $\mathfrak{d} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$, y los proyectores correspondientes son $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm \mathcal{E})$.*

En este caso, el operador $\mathbf{K} = \frac{1}{4}\mathcal{E}$ define, al pasar del formalismo hamiltoniano al lagrangeano, un modelo sigma en G con

$$E(g) = (\rho_1 \mathcal{E}_g \rho_2)^{-1} (\rho_1 + \rho_1 \mathcal{E}_g \rho_1) \quad (3.0)$$

reproduciendo los modelos introducidos en [5],[17] y sus referencias.

En [17], se obtiene el modelo sigma en G a partir de un modelo tipo WZW en el doble D al que se le adiciona un hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2} \langle \Phi, \mathcal{E} \Phi \rangle$$

Esto no debe sorprendernos ya que, en nuestro esquema, partimos del mismo Hamiltoniano en la órbita $O_{(0,1)} \sim \Omega D$, que es el espacio de fases reducido del modelo WZW en D ([1],[20]).

Equivalentemente, estos modelos son los que se pueden construir a partir de una descomposición en subespacios ortogonales $\mathfrak{d} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$, como se hace en [8].

En esta referencia, para \mathfrak{g} una biálgebra de Lie *cuasitriangular factorizable*, se da una familia biparamétrica de operadores que llevan a descomposiciones ortogonales del algebra \mathfrak{d} o, equivalentemente, una familia biparametrica de operadores \mathcal{E} , contruidos en base a la *matriz* r correspondiente a la estructura de biálgebra en \mathfrak{g} .

Los modelos sigma correspondientes a esta familia incluyen al modelo sigma principal y su deformado y sus correspondientes duales, entre otros.

Las corrientes de Noether J^R (1-formas sobre Σ) correspondientes a la acción de G sobre sí mismo que se extraen del modelo sigma (3.1) con el operador (3.1) cumplen la condicion de "curvatura cero" con respecto al grupo \tilde{G}

$$dJ^R = \frac{1}{2} [J^R, J^R]_{\mathfrak{g}^*} \quad (3.0)$$

sobre las ecuaciones de movimiento (ver [17]). A esta propiedad de un Lagrangeano que define un modelo sigma en G se la denomina (right) \tilde{G} -Poisson-Lie symmetry en [5].

Caminando sobre el diagrama de la dualidad T

Ahora, reconstruiremos las transformaciones de dualidad a partir del diagrama (2.11). Supongamos que tenemos las coordenadas de los gráficos

$$\mathcal{E}_+ = \text{span}\{t + R(t, -); t \in \mathfrak{g}^*\}$$

$$\mathcal{E}_- = \text{span}\{t - R(-, t); t \in \mathfrak{g}^*\}$$

donde $R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, visto como matriz, es invertible. Denotaremos π_{\pm} las proyecciones sobre estos subespacios \mathcal{E}_{\pm} . Entonces, podemos escribir

$$S_G = \int_{\Sigma} (R + \Pi(g))^{-1} (\partial_+ g g^{-1}, \partial_- g g^{-1})$$

donde $\Pi(g): G \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es el cociclo que, al trasladarlo por derecha, define el bivector de Poisson correspondiente a la estructura de grupo Poisson-Lie de G ([5][8]).

Dado que el Hamiltoniano de este modelo está escrito en la forma de movimiento colectivo por construcción (ver (2.11))

$$H = h \circ \mu(g, \lambda)$$

entonces el sistema se mapea del *subespacio admisible* $S_R \subset LT^*G$ a $\mathcal{O}_{(0,1)} \subset L\mathfrak{d}^*$ a través de μ , donde la dinámica esta dada por la función h .

$$h(v) = \frac{1}{4} \langle v, (\pi_+ - \pi_-)v \rangle$$

(ver, por ej., [8]). Se puede ver que las ecuaciones de movimiento canónicas para $v = ll^{-1}$ son

$$\begin{aligned} \partial_t ll^{-1} &= (\pi_+ - \pi_-) \partial_x ll^{-1} \\ \pi_{\pm} \partial_{\mp} ll^{-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

que, en la forma de "curvatura cero" son

$$\partial_t v(x) = -(\pi_+ - \pi_-) \partial_x v(x) + [(\pi_+ - \pi_-)v(x), v(x)] \quad (3.0)$$

si definimos una conexión plana $V(x, t)$ sobre Σ

$$\begin{aligned} V(x, t) &= l^{-1} dl \quad , \quad l : \Sigma \longrightarrow D \\ V(x, t) &= v(x) dx - (\pi_+ - \pi_-)v(x) dt \end{aligned}$$

En el modelo en G , toman la forma

$$\pi_{\pm} (\partial_{\mp} g g^{-1} + Ad_g \partial_{\mp} \tilde{h} \tilde{h}^{-1}) = 0$$

$$\partial_- A_+(g) - \partial_+ A_-(g) - [A_+(g), A_-(g)] = 0$$

dados $A_+(g) = -((R + \Pi(g))^{-1})^t (g^{-1} \bar{\partial} g)$ y $A_-(g) = (R + \Pi(g))^{-1} (g^{-1} \partial g)$. Estas ecuaciones implican la condición de Poisson-Lie symmetry de las corrientes de Noether (3.1).

Cabe destacar que estas son las ecuaciones de movimiento para un *modelo WZW* sobre el grupo D ([17][20])

$$S_{wzw} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle \partial_t ll^{-1}, \partial_{\sigma} ll^{-1} \rangle + \frac{1}{12} \int_B \langle dll^{-1}, [dll^{-1}, dll^{-1}] \rangle - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle \partial_{\sigma} ll^{-1}, \mathcal{E} \partial_{\sigma} ll^{-1} \rangle$$

como habiamos comentado anteriormente.

En [5] y otros trabajos, se hace la aclaración de que la "cuerda en el grupo doble es cerrada", o sea, que hay un *vínculo o condición* que debe imponerse sobre el momento λ en LT^*G , para obtener dualidad

$$P \exp \int_{S^1} \lambda = \tilde{e}$$

esto es, que la holonomía del camino $\lambda(\sigma)$ en \mathfrak{g}^* con respecto al grupo \tilde{G} sea trivial.

Esta condición, que restringe el espacio de fases LT^*G , no es otra que la discutida en la sección anterior, al presentar el *diagrama de la dualidad-T* y los *subespacios admisibles* (2.10).

Utilizando \tilde{J} mediante la factorización $l = \tilde{g}h = g\tilde{h}$, el sistema se puede mapear finalmente a $LT^*\tilde{G} \overset{izg}{\sim} L\tilde{G} \times L\mathfrak{g}$, con coordenadas $(\tilde{g}, \tilde{\lambda})$. Así, la dinámica pasa de estar regida por $h \circ \Phi = h \circ \tilde{\mu} \circ \tilde{J}$ a estar gobernada por el hamiltoniano

$$H = h \circ \tilde{\mu}(\tilde{g}, \tilde{\lambda})$$

donde las ecuaciones de movimiento son las correspondientes al modelo sigma dual sobre \tilde{G} , análogas a las de G , derivadas del *modelo sigma dual*

$$S_{\tilde{G}} = \int_{\Sigma} (R^{-1} + \tilde{\Pi}(\tilde{g}))^{-1} (\partial_+ \tilde{g} \tilde{g}^{-1}, \partial_- \tilde{g} \tilde{g}^{-1})$$

y las soluciones sobre el *subespacio admisible* \tilde{S}_R en $LT^*\tilde{G}$, se obtienen a partir de las del modelo en G , a partir de la *transformación canónica de dualidad*, de la forma

$$\tilde{g} = \tilde{h}^g, \tilde{\lambda} = g^{\tilde{h}'} g^{\tilde{h}-1}$$

3.2. Modelos Hamiltonianos singulares: WZNW y sus duales

Como fue mencionado anteriormente, la dinámica hamiltoniana elegida en ΩD puede llevar a sistemas hamiltonianos singulares sobre G y \tilde{G} , que seguirán siendo duales por construcción. Entre la clase de sistemas hamiltonianos singulares sobre G y \tilde{G} , describiremos aquellos que llevan a sistemas tipo *WZNW* y sus duales, modelos tipo sigma-gaugeados. Estos modelos y sus duales fueron tratados en la literatura desde diversos enfoques [9], [36].

La siguiente derivación de estos modelos muestra que todos ellos corresponden al mismo esquema hamiltoniano cuya dinámica está dada por una clase de hamiltonianos cuadráticos singulares.

Si imponemos en $(\Omega D, \omega)$ una dinámica dada por el Hamiltoniano cuadrático (ver (2.11))

$$H^D = \langle \Phi, \mathbf{K}\Phi \rangle$$

siendo $\mathbf{K} : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{d}$ un operador lineal, sabemos, por lo discutido en la sección anterior, que en general dará lugar a dinámicas hamiltonianas singulares sobre LT^*G y $LT^*\tilde{G}$ que seguirán siendo duales.

El hecho de que sean singulares se origina en que la transformada de Legendre que no permite reemplazar unívocamente todas las velocidades en términos de los momentos.

Describiremos dos casos particulares de dinámicas singulares H^D recuperando resultados expuestos en la literatura.

Tomamos el operador $\mathbf{K} = \pi_+ - \pi_-$, como en los modelos sigma descriptos en la sección anterior, siendo π_{\pm} los proyectores sobre dos subespacios ortogonales \mathcal{E}_{\pm} que descomponen el álgebra $\mathfrak{d} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$. Ahora, esta descomposición está dada por

$$\mathcal{E}_+ = \text{span}\{t + E(\tilde{t}); t \in \mathfrak{g}, \tilde{t} \in \mathfrak{g}^*\}$$

$$\mathcal{E}_- = \text{span}\{t - E^T(\tilde{t}); t \in \mathfrak{g}, \tilde{t} \in \mathfrak{g}^*\}$$

con $E : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ singular. Si fuese no-singular, podríamos proceder como en la sección anterior llegando a dos modelos sigma no singulares duales en G y \tilde{G} .

El lagrangeano correspondiente al sistema hamiltoniano $(LT^*G, \omega_0, \langle \mu, (\pi_+ - \pi_-)\mu \rangle)$ es

$$L = \langle E_g(g^{-1}\partial_+g), g^{-1}\partial_-g \rangle$$

tomando $(g^{-1}\partial_+g)^\sim$ como elemento \mathfrak{g}^* identificado con \mathfrak{g} a través de $\tilde{\cdot}$ por la forma bilineal \langle, \rangle en el doble de \mathfrak{d} y con $E_g : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dado por las relaciones (ver los detalles en [9])

$$Ad_{g^{-1}}\mathcal{E}_+ = span\{t + E_g(\tilde{t}); t \in \mathfrak{g}, \tilde{t} \in \mathfrak{g}^*\}$$

$$Ad_{g^{-1}}\mathcal{E}_- = span\{t - E_g^T(\tilde{t}); t \in \mathfrak{g}, \tilde{t} \in \mathfrak{g}^*\}$$

En este caso con E singular, el modelo dual correspondiente al sistema hamiltoniano $(LT^*\tilde{G}, \omega_0, \langle \tilde{\mu}, (\pi_+ - \pi_-)\tilde{\mu} \rangle)$ está descrito por el lagrangeano singular

$$\tilde{L} = -\langle F_{\tilde{g}}(\lambda_+), \lambda_- \rangle + \langle \lambda_+, \tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g} \rangle + \langle \lambda_-, \tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g} \rangle \quad (3.2)$$

con $F_{\tilde{g}} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por

$$Ad_{\tilde{g}^{-1}}\mathcal{E}_+ = span\{t + F_{\tilde{g}}(\tilde{t}); t \in \mathfrak{g}, \tilde{t} \in \mathfrak{g}^*\}$$

$$Ad_{\tilde{g}^{-1}}\mathcal{E}_- = span\{t - F_{\tilde{g}}^T(\tilde{t}); t \in \mathfrak{g}, \tilde{t} \in \mathfrak{g}^*\}$$

$$F_{\tilde{e}} = E_e$$

y las corrientes $\lambda_{\pm} = h^{-1}\partial_{\pm}h$ dada la descomposición $l = \tilde{g}h = \tilde{g}\tilde{h}$ en el doble y cumplen sobre las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g} + F_{\tilde{g}}(\lambda_-) &= 0 \\ \tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g} - F_{\tilde{g}}^T(\lambda_+) &= 0 \\ \partial_-\lambda_+ - \partial_+\lambda_- + [\lambda_+, \lambda_-]^{\mathfrak{g}} &= 0 \end{aligned}$$

El hecho de que operador $F_{\tilde{g}}$ sea singular implica que algunas de estas corrientes sean variables cíclicas en el Lagrangiano, tornando singular al modelo sigma, y dando lugar a vínculos.

Este es un caso particular de los casos singulares mencionados anteriormente, en los que el operador $\rho_2(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\dagger)_{\tilde{g}}\rho_1$ definido a partir del hamiltoniano (2.5.1) que lleva a que la transformada de Legendre sea singular.

Primeramente, nos concentraremos en el caso en el que el álgebra doble \mathfrak{d} es la correspondiente a un álgebra simple real \mathfrak{g} . En este caso, veremos que, para una elección particular de la descomposición ortogonal $\mathfrak{d} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$, uno de los modelos sigma duales está relacionado con el modelo $WZNW$. Entonces, \mathfrak{g} es una biálgebra cuasitriangular factorizable dada por una matriz $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y \mathfrak{d} es la complexificación de \mathfrak{g} , tomada como un álgebra real (ver [38] [39] [37]). El álgebra \mathfrak{d} es isomorfa a $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ con $\mathfrak{g}_{1,2}$ copias del álgebra \mathfrak{g} y la forma bilineal simétrica, no degenerada, invariante dada por (ver capítulo 1)

$$\begin{aligned} \langle (X, Y), (A, B) \rangle &= \langle X, A \rangle - \langle Y, B \rangle \\ X, A &\in \mathfrak{g}_1 \quad Y, B \in \mathfrak{g}_2 \end{aligned}$$

Como ejemplo, podemos tomar $\mathfrak{g} = sl(2, R)$ definida por

$$\begin{aligned} [H, E_{\pm}] &= \pm 2E_{\pm} \\ [E_+, E_-] &= H \end{aligned}$$

\mathfrak{g}^* se identifica con el álgebra b correspondiente al subgrupo de Borel B de $D=SL(2, \mathbb{C})$. Tomando $\mathfrak{d} = sl(2, R) \oplus sl(2, R)$, tenemos que $sl(2, R)$ y b son están generados en $sl(2, R) \oplus sl(2, R)$ por

$$T_0 = \frac{1}{2}(H, H), T_+ = (E_+, E_+), T_- = (E_-, E_-)$$

y

$$T^0 = \frac{1}{2}(H, -H), T^+ = (0, -E_-), T^- = (E_+, 0)$$

respectivamente. Los subespacios \mathcal{E}_\pm los tomamos como las dos copias $sl(2, R)$ en $\mathfrak{d} = sl(2, R) \oplus sl(2, R)$, entonces las ecuaciones de movimiento en $D = SL(2, R) \times SL(2, R)$ son de la forma

$$\partial_\pm g_\mp = 0$$

con g_\pm en la primera (segunda) copia de $SL(2, R)$ en D . La solución general de estas ecuaciones (quirales) está dada por el producto directo $l = g_+(x^+) \times g_-(x^-)$. La factorización en el doble toma la forma $l = (b_+ \times b_-)(\varsigma \times \varsigma) = (\eta \times \eta)(c_+ \times c_-)$ con $(b_+ \times b_-) \equiv b, (c_+ \times c_-) \equiv c \in B$ y $(\varsigma, \varsigma), (\eta \times \eta) \in SL(2, R)_{diag} \sim SL(2, R)$.

Dado que los subespacios \mathcal{E}_\pm elegidos son invariantes con respecto a la acción adjunta del doble, el operador $E_g = E_e = F_{\tilde{g}} : \mathfrak{g}^* \sim b \longrightarrow \mathfrak{g}^* \sim b$ es constante sobre $SL(2, R)$ y B , y está dado por la matriz singular

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en la base introducida más arriba.

El correspondiente modelo sigma sobre B tiene el lagrangiano

$$L = \langle E(b^{-1}\partial_+ b), (b^{-1}\partial_- b)^\sim \rangle$$

y la acción se puede escribir como

$$S(b) = -4S_{WZW}(b_- b_+^{-1})$$

Dado que $b_- b_+^{-1}$ se puede ver como la descomposición de Gauss de un elemento u de $SL(2, R)$, se concluye que este modelo sobre B es equivalente al *modelo WZNW* sobre $SL(2, R)$.

El modelo sigma dual, sobre $SL(2, R)$ será singular y está caracterizado por el lagrangiano

$$\tilde{L} = -\langle E(\lambda_+^\sim), \lambda_- \rangle + \langle \lambda_+, J_- \rangle + \langle \lambda_-, J_+ \rangle$$

donde $J_\pm = \eta^{-1}\partial_\pm \eta$ y las corrientes λ_\pm se definen como en el caso general.

Estos son los resultados obtenidos en [9], relacionando el modelo *WZW* sobre $SL(2, R)$ con su dual, un modelo sigma singular sobre $SL(2, R)$. Estos se pueden generalizar a cualquier álgebra \mathfrak{g} simple real utilizando el esquema general descrito en el capítulo anterior dando como resultados pares de modelos sigma *WZW* y sus duales singulares.

3.3. El caso Abeliano. Intercambio "momentum-winding".

En el caso totalmente abeliano, es decir, con la biálgebra \mathfrak{g} trivial: $(\mathfrak{g}, [,] = 0, \delta = 0)$, las estructuras algebraicas toman la siguiente forma: $(\mathfrak{g}^*, [,] = 0, \delta = 0)$, $(\mathfrak{d}, [,] = 0, \delta = 0)$ y la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es simplemente el *pairing* entre \mathfrak{g} y su dual vectorial \mathfrak{g}^* .

Consideremos los grupos G y G^* abelianos y compactos, no necesariamente simplemente conexos, como es en la mayoría de los casos de interés. Puntualmente, tratamos con toros n -dimensionales $T^n = \overleftarrow{\underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_n}$ que incluyen, como caso particular, el caso más conocido $G = U(1)$.

El corchete de Poisson en $L\mathfrak{d}^{**}$ es del tipo extensión central pura

$$\{, \} \equiv -\Gamma$$

La dualidad entre los dos sistemas en G y G^* con coordenadas (ϕ^i, J_i) y (χ_i, \tilde{J}^i) , respectivamente, es una propiedad geométrica. En el caso $G = U_R(1)$ un círculo de radio R y $G^* = U_{1/R}(1)$, la transformación de dualidad tiene el efecto dinámico de intercambiar modos "winding" con modos de "momento", o bien, "coordenada" y "momento", arrojando como resultado la bien conocida *dualidad* $R \rightarrow 1/R$. Explicaremos con un poco más de detalle esta dualidad $R \rightarrow 1/R$, dándole un enfoque Hamiltoniano (ver [7]) y describiéndolo como un ejemplo de la teoría general presentada en la sección anterior.

Para ello, elijamos un modelo sobre $G = U_R(1)$ cuyo espacio de fases será $LT^*U_R(1)$ con su estructura simpléctica canónica. Tomamos un sistema de coordenadas local en $T^*U_R(1)$, (θ, π) donde θ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$ parametrizado con respecto a la longitud del círculo de radio R . Un lazo en $LT^*U_R(1)$ será denotado como $\gamma(\sigma) = (\theta(\sigma), \pi(\sigma))$.

Proponemos el Hamiltoniano

$$H(\gamma; \sigma) = \int_{S^1} d\sigma \left[\frac{1}{2R^2} \pi(\sigma)^2 + \frac{R^2}{2} \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 \right]$$

que describe el movimiento de una cuerda cerrada en una circunferencia de radio R (ver [29]). El campo vectorial Hamiltoniano tiene la forma

$$X_H(\gamma; \sigma) = \left(R^2 \left(\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} \right) \right) \partial_{\pi|_{\gamma}} + \left(\frac{1}{R^2} \pi(\sigma) \right) \partial_{\theta|_{\gamma}}$$

Identificamos $\tilde{G} = U_{1/R}(1)$ y el grupo doble $D = U_R(1) \times U_{1/R}(1)$.

Nota: Al tomar una magnitud como R , el radio de un círculo $U_R(1)$, su álgebra de Lie tiene naturalmente asociada la magnitud R , al ser identificada con los campos vectoriales generados por las derivadas $\frac{\partial}{\partial(R\sigma)}$, donde $\sigma \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto, el dual del álgebra de Lie, tendrá asociada una magnitud R^{-1} , tal que, al contraer un elemento y su dual, quede la magnitud unitaria $R.R^{-1} = 1$. Entonces, es natural identificar el grupo generado por el dual del álgebra de Lie como el grupo $U_{1/R}(1)$ de radio R^{-1} .

Se puede "caminar" por el diagrama (2.11), sobre mapeos Poisson, llegando a construir la *transformación canónica de dualidad* $\Psi : LT^*U_R(1) \rightarrow LT^*U_{1/R}(1)$ entre los dos sistemas hamiltonianos

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} LT^*U_R(1) \\ (\theta(\sigma), \pi(\sigma)) \end{array} & \xrightarrow{\mu} & \begin{array}{c} L(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^{**} \\ \left(\frac{d}{d\sigma} \theta(\sigma) \oplus \pi(\sigma) \right) \\ \downarrow \mathcal{O}_{(0,1)} \end{array} \\ & & \begin{array}{c} LT^*U_{\frac{1}{R}}(1) \\ \theta(\sigma) \times \int_0^\sigma d\zeta \pi(\zeta) \xrightarrow{\tilde{J}} \left(\tilde{\theta}(\sigma) = \int_0^\sigma d\zeta \pi(\zeta), \tilde{\pi}(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} X(\sigma) \right) \end{array} \end{array}$$

entonces,

$$\Psi(\gamma(\sigma)) = \tilde{\gamma}(\sigma) = \left(\int_0^\sigma d\zeta \pi(\zeta), \frac{d\theta}{d\sigma}(\sigma) \right)$$

Mediante Ψ el Hamiltoniano se mapea de $H(\gamma; \sigma)$ a un $\tilde{H}(\tilde{\gamma}; \sigma)$ sobre $LT^*U_{1/R}(1)$

$$\tilde{H}(\tilde{\gamma}; \sigma) = \int_{S^1} d\sigma \left[\frac{1}{2R^2} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\sigma} \right)^2 + \frac{R^2}{2} \tilde{\pi}(\sigma)^2 \right]$$

y ambos hamiltonianos están escritos en forma de movimiento colectivo con respecto a la funci3n hamiltoniana sobre $L\mathcal{D} \sim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

$$\mathfrak{H}(X, \xi) = \int_{S^1} d\sigma \left[\frac{1}{2R^2} \xi^2 + \frac{R^2}{2} X^2 \right]$$

La transformaci3n Ψ no está bien definida en todo el espacio de fases $LT^*U_R(1)$, sino s3lo cuando nos restringimos a unos subsistemas $L_R(m, n)$ que detallaremos en la siguiente proposici3n:

Proposici3n: *El subespacio admisible dentro de $LT^*U_R(1)$ se descompone $\cup_{n,m} L(n, m)$ y cada $L(n, m)$ es un subsistema hamiltoniano en sí mismo y la transformaci3n can3nica de dualidad puede tomar dominio en cada $L_R(n, m)$ y lo mapea a $L_{1/R}(m, n)$.*

Dem: Es claro que los elementos de $LD \sim L(U_R(1) \times U_{1/R}(1))$ se pueden clasificar segun sus la clase de homotopía en la que est3n, i.e., sus "winding numbers" (n, m) . Esto significa

$$L(n, m) = \{(\theta, \tilde{\theta}) \in L(U_R(1) \times U_{1/R}(1)) / : \deg \theta = n \text{ y } \deg \tilde{\theta} = m\}$$

Al ser D abeliano, la acci3n de un elemento $(\theta, \tilde{\theta})$ sobre un elemento (ρ, π) del cotangente $LT^*U_R(1)$ es

$$(\theta, \tilde{\theta}) \bullet (\rho, \pi) = (\theta\rho, \tilde{\theta}' + \pi)$$

Por lo tanto, de la expresi3n general (2.10), deducimos que el subespacio admisible queda descompuesto en

$$\left(\bigcup L(n, m) \right) \bullet (e, 0) = \bigcup \{(\theta, \pi) / : \deg \theta = n \text{ y } \int_{S^1} \pi = 2\pi m\} \sim \bigcup L(n, m)$$

Dada la forma del Hamiltoniano, cada $L(n, m)$ es invariante frente al flujo

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^{2\pi} d\zeta \pi(\zeta, t) &= \{H, P(t)\} = X_H P \\ &= \int_0^{2\pi} d\zeta R^2 \left(\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, vemos que cada $L_R(m, n)$ es un *subsistema Hamiltoniano* de $(LT^*U_R(1), \omega_0, H)$ y que Ψ es un *difeomorfismo simpl3ctico*, es decir, una *transformaci3n can3nica* de $L_R(m, n)$ a $L_{1/R}(n, m)$. Esta afirmaci3n es correcta dado que Ψ es invertible y $\Psi^* \tilde{H} = H$.

Finalmente, se puede ver que

$$\tilde{\omega}(\Psi_* X, \Psi_* Y) = \omega(X, Y)$$

para $X, Y \in T_\gamma L_R(m, n)$, utilizando que si

$$X(\sigma) = A(\sigma) \frac{d}{d\theta} + B(\sigma) \frac{d}{d\pi}$$

entonces,

$$\Psi_* X = \left(\int_0^\sigma d\zeta B(\zeta) \right) \frac{d}{d\theta} \Big|_{\Phi(\gamma)} + \left(\frac{d}{d\sigma} A(\sigma) \right) \frac{d}{d\pi} \Big|_{\Phi(\gamma)}$$

■.

Con esto reobtenemos, como caso particular, un resultado conocido y largamente discutido en la literatura (ver [7]).

De esta proposición, se desprenden naturalmente *condiciones de cuantización*, ya que, para poder mapear el sistema en $U_R(1)$ a $U_{1/R}(1)$, se debe cumplir que, dados inicialmente $\gamma = (\theta, \pi)$ en $T^*U_R(1)$, su imagen a través del mapeo μ este en la órbita $\mathcal{O}_{(0,1)}$. Esta condición, mediante la proposición anterior, implica

$$\text{deg } \theta = m \wedge \int_{S^1} d\sigma \pi(\sigma) = 2\pi n$$

caracterizando a $L(n, m)$ como el dominio de la transformación canónica.

Ahora, como la cantidad $P = \int_0^\sigma d\zeta \pi(\zeta)$ es el momento canónico total de la cuerda, el hecho de que tome los valores $2\pi m$, se puede ver como una discretización de sus valores, análoga a la que sufre el momento de una partícula cuántica en una caja. En otros términos, los subespacios $L_R(m, n)$ son los correctos en el momento de cuantizar el sistema de una cuerda moviéndose con condiciones de contorno periódicas.

Para completar este análisis, es importante destacar que este caso de dualidad abeliana nos muestra que la no trivialidad topológica (como la del espacio $U_R(1)$) implica que se pierde globalidad en las transformaciones de dualidad, es decir, que uno debe restringirse a ciertos subespacios en los cuales están bien definidas estas transformaciones. La imposibilidad de extender el mapeo Ψ a todo el espacio $LT^*U_R(1)$ radica en que el grupo imagen $U_{1/R}(1)$ es homotópicamente no trivial, con lo cual, no cualquier función $\pi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ define un elemento $\tilde{\theta} \in LU_{1/R}(1)$ a través de

$$\tilde{\theta} = \int_0^\sigma d\zeta \pi(\zeta)$$

Dado que $\tilde{\theta} : S^1 \rightarrow U_{1/R}(1)$, debe satisfacer

$$\tilde{\theta}(2\pi) - \tilde{\theta}(0) = 2\pi m \left[\frac{1}{R} \right] \quad m \in Z$$

o sea,

$$\int_0^{2\pi} d\zeta \pi(\zeta) = 2\pi m \left[\frac{1}{R} \right]$$

De este hecho, se pueden entender las restricciones a los subespacios $L_R(m, n)$ en base a nuestra descripción general.

3.4. El caso semiabeliano o dualidad-T "no Abelian"

Este es el caso que corresponde a tomar la biálgebra \mathfrak{g} semi-trivial, es decir, $(\mathfrak{g}, [,], \delta = 0)$. Ahora, las estructuras son $(\mathfrak{g}^*, [,] = 0, \delta)$ y el doble $(\mathfrak{d}, [,], \delta)$ se identifica como álgebra de Lie con el producto semidirecto $\mathfrak{g} \triangleright \mathfrak{g}^*$ ([11]) de las álgebras $(\mathfrak{g}, [,]) y (\mathfrak{g}^*, [,] = 0)$, donde \mathfrak{g} actúa a través de la representación coadjunta sobre \mathfrak{g}^* .

Generalmente, se toma el grupo G como un grupo compacto simple y se identifica \tilde{G} con el álgebra dual \mathfrak{g}^* tomada como grupo aditivo abeliano. A esta dualidad se la llamó dualidad-T no abeliana [49], por su contraste con la dualidad-T basada en grupos $U(1)$. El grupo doble es, en este caso, el producto semidirecto $D = G \triangleright \mathfrak{g}^*$ con G actuando mediante la representación coadjunta.

Identificaremos $\mathfrak{g} \sim T_e G$ mediante traslaciones por izquierda y $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{g}^*$ a través de la forma bilineal, no degenerada, invariante y definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{g} .

Ahora, recuperaremos la transformación de dualidad conocida (ver por ejemplo [7]) dentro de nuestro esquema general basado en el diagrama (2.11)

$$\begin{array}{ccc}
{}^{LT^*G} & & L(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)^{\wedge **} \\
(\varphi(\sigma), \underline{\lambda}(\sigma)) & \xrightarrow{\mu} & (\varphi' \varphi^{-1} \oplus {}^G Ad_{\varphi}^* \lambda, 1) \\
& & \Phi^{-1} \downarrow \mathcal{O}_{(0,1)} \\
& & \Omega D = \Omega(G \triangleright \mathfrak{g}^*) \\
(\varphi, 0) \cdot (e, \vartheta) = (\varphi, \vartheta) & = (e, Ad_{\varphi}^* \vartheta) \cdot (\varphi, 0) & \xrightarrow{\bar{j}} (\underline{\psi} = Ad_{\varphi}^* \vartheta, \pi = \varphi' \varphi^{-1})
\end{array}$$

en donde $\vartheta : S^1 \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es tal que

$$\partial_{\sigma} \vartheta = \lambda \tag{3.-13}$$

Esta ecuación para ϑ se obtiene al pedir que el elemento proyectado por μ al álgebra $L(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)^{\wedge **}$, se encuentre en la órbita coadjunta $Ad_{LD}^* \hat{\wedge}(0, 1)$, o sea, que exista un elemento (φ, ϑ) en $\Omega D = \Omega(G \triangleright \mathfrak{g}^*)$ tal que

$$Ad_{(\varphi, \vartheta)}^* \hat{\wedge}(0, 1) = (\varphi' \varphi^{-1} \oplus {}^G Ad_{\varphi^{-1}}^* \lambda)$$

y, usamos la definición de [12] (ver, también [10]) del producto en el grupo $G \triangleright \mathfrak{g}^*$,

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab, \beta + Ad_b^* \alpha)$$

para evaluar

$$\begin{aligned}
Ad_{(\varphi, \vartheta)}^* \hat{\wedge}(0, 1) &= (R_{(\varphi, \vartheta)^{-1}})_*(\varphi, \vartheta)' \\
&= (\varphi' \varphi^{-1}, Ad_{\varphi}^* \vartheta')
\end{aligned}$$

llegando a (3.4).

Finalmente, las transformaciones de dualidad están dadas por

$$\begin{aligned}
\underline{\psi} &= Ad_{\varphi}^* \vartheta \implies (\partial_{\sigma} - ad_{\varphi' \varphi^{-1}}^*) \underline{\psi} = (Ad_{\varphi}^* \lambda) \\
\pi &= \varphi' \varphi^{-1}
\end{aligned} \tag{3.-15}$$

Como en el caso Abelian, se ve que la transformación no está bien definida en todo el espacio, sino que estará bien definida en un buen dominio para $(\partial_{\sigma} - ad_{\varphi' \varphi^{-1}}^*)^{-1}$. Y vemos, como en el caso Abelian, que el origen de esta restricción en nuestro esquema general, tiene origen en el requisito de que la imagen del dominio correcto a través del mapeo μ esté en la órbita coadjunta $\mathcal{O}_{(0,1)}$.

Esto nos permite traducir el problema de caracterizar el dominio de la *transformación canonica de dualidad*, Ψ , discutido en [7], en un problema de caracterización de la órbita coadjunta de extensión central pura y de los *subespacios admisibles*. Este problema es más simple dado que tenemos un método general (2.10) para definir estos subespacios.

El subespacio admisible en LT^*G es, según nuestras consideraciones generales,

$$LD \cdot (e, 0) \sim (LG, \Omega \mathfrak{g}^*)$$

y en $LT^*\mathfrak{g}^*$

$$LD \cdot (0, 0) \sim (L\mathfrak{g}^*, \Omega G)$$

lo que está en concordancia con lo obtenido en [7] y, además, muestra explícitamente cómo son los subespacios en los que está bien definida la dualidad.

Por otro lado, el subespacio admisible en LT^*G , se puede obtener como el *espacio pre-reducido* correspondiente a la acción por derecha de G sobre LT^*G

$$S_R = \mu^{R^{-1}}(0) \quad (3.-15)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu^R &: LT^*G \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ &: (g, \lambda) \longrightarrow - \int_{S^1} \lambda \end{aligned}$$

es la aplicación momento correspondiente a la *acción simpléctica* por derecha

$$\begin{aligned} LT^*G \times G &\longrightarrow LT^*G \\ (g, \lambda) \cdot g_0 &\longrightarrow (gg_0, Ad_{g_0}^* \lambda) \end{aligned}$$

que se desprende del diagrama

$$\begin{array}{ccc} LD \times D & \longrightarrow & LD \\ \downarrow J \times id & & \downarrow J \\ LT^*G \times D & \longrightarrow & LT^*G \end{array}$$

donde la acción $LD \times D$ es la multiplicación punto a punto en D y consideramos solo $G \subset D$. Esta acción deja invariante la aplicación momento μ y, por lo tanto, $H = \mathfrak{h} \circ \mu$. Además, el espacio reducido coincide con la órbita del grupo ΩD a través del elemento $(e, 0)$ (ver esta discusión en términos generales en [21]).

Explícitamente, $(g, \lambda) \in S_R$ sii $g \in LG$ y $\lambda = \alpha'$ con $\alpha \in L\mathfrak{g}^*$, esto es, sii $(g, \lambda) \in \mu^{R^{-1}}(0)$, como fue notado en [7].

Nota: *Notese que esta caracterización del subespacio admisible no se puede generalizar al caso en el que el grupo \tilde{G} es no abeliano, ya que en ese caso, la acción por derecha de G sobre LT^*G no deja invariante a la aplicación momento μ . Esto es, puntualmente, que la acción adjunta Ad de $G \subset D$ sobre $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{d}$ no coincide con la acción coadjunta de G . Este es el caso de $LT^*\mathfrak{g}^*$, en donde el subespacio admisible no coincide con $\tilde{\mu}^{R^{-1}}(0)$, siendo $\tilde{\mu}^R(\psi, \pi) = - \int_{S^1} \pi$ la aplicación momento correspondiente a la acción aditiva de \mathfrak{g}^* .*

Nótese que las transformaciones (3.-15) coinciden con las que se obtienen derivándolas de una funcional generatriz Γ

$$\Gamma(\tilde{\Omega}(\varphi_* \partial_\sigma), \psi) = - \int_{S^1} \langle \psi(\sigma), \tilde{\Omega}(\varphi_* \partial_\sigma) \rangle$$

siendo $\tilde{\Omega}$ (Ω) la 1-forma de Maurer-Cartan invariante por derecha (izquierda) sobre G , identificando (seguimos el procedimiento *standard* de cálculo de transformaciones canónicas a través de una funcional

generatriz):

$$\begin{aligned}\pi &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} \\ \langle \lambda, \Omega \rangle &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}\end{aligned}$$

de donde se obtiene,

$$\begin{aligned}\pi &= \varphi'\varphi^{-1} \\ \langle \lambda, \Omega \rangle &= \left\langle Ad_{\varphi^{-1}}^*(d_\sigma - ad_{\varphi'\varphi^{-1}})\psi, \Omega \right\rangle\end{aligned}$$

y despejando ψ en funcion de λ obtenemos la transformación antes calculada. En este esquema, también vemos que dada la simetría de la funcional generatriz

$$\Gamma(\varphi \cdot g_0, \psi) = \Gamma(\varphi, \psi)$$

el dominio de las transformaciones de dualidad estará bien definido en LT^*G a menos de la acción por derecha de G , con lo cual se llega a (3.4), y si elegimos una *fijación de calibre* (ver sección anterior), entonces el dominio de la transformación de dualidad sera el *espacio reducido* $\mu^{R^{-1}}(0)/G$.

Nota: *El hecho de que las transformaciones canónicas de dualidad extraídas a partir del diagrama (2.11) se puedan extraer de una funcional generatriz, es un hecho general que encuadra en una teoría de modelos sigma duales descritas en [13] y que discutiremos y ampliaremos en el capítulo siguiente cuando discutamos las transformaciones de dualidad entre modelos sigma sobre variedades arbitrarias.*

Finalmente, reconstruimos las transformaciones inversas que, en el caso totalmente abeliano, denotamos Ψ^{-1} . Para eso, seguimos el diagrama de derecha a izquierda

$$(\pi \oplus \underline{\psi}' - ad_{\pi}^* \underline{\psi}) = (Ad_{(e, \underline{\psi})}^{G \triangleright \mathfrak{g}^*} (\pi, 0) \oplus \underline{\psi}', 1) \xleftarrow{\bar{\mu}} (\underline{\psi}, \pi)$$

$$\Phi^{-1} \downarrow \mathcal{O}_{(0,1)}$$

$$(\varphi = E(\pi), \lambda = \theta') \xleftarrow{J} (E(\pi), 0)(e, \theta) = (E(\pi), \theta)$$

donde $\theta : S^1 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ cumple que

$$Ad_{\varphi}^* \theta' = \underline{\psi}' - ad_{\pi}^* \underline{\psi} \quad (3.23)$$

y $E(\pi) : S^1 \longrightarrow G$ cumple

$$E(\pi)'E(\pi)^{-1} = \pi$$

entonces,

$$\varphi = E(\pi) \quad (3.23)$$

y

$$\lambda = \theta' = Ad_{\varphi^{-1}}^*(\underline{\psi}' - ad_{\pi}^* \underline{\psi})$$

con lo cual obtenemos las transformaciones correspondientes a Ψ^{-1} descrito anteriormente en términos de la funcional generatriz Γ y del camino inverso en el diagrama.

Se pueden obtener otras funcionales generatrices, directamente reemplazando Ω por $\tilde{\Omega}$, y éstas también darán transformaciones canónicas de dualidad. En términos del diagrama (2.11), esto es equivalente a tomar la forma symplectica en ΩD invariante por derecha, en lugar de invariante por izquierda, y como consecuencia el mapeo que será Poisson estará dado por J^R (ver (2.5)) y tomará imagen en la trivialización por derecha de LT^*G (análogo para \tilde{G}).

En el caso de tomar Ω en la funcional generatriz, es decir

$$\Gamma(\Omega(\varphi_* \partial_\sigma), \psi) = - \int_{S^1} \langle \psi(\sigma), \Omega(\varphi_* \partial_\sigma) \rangle$$

entonces

$$\begin{aligned} Ad_{\varphi^{-1}}^* \lambda^R &= \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} = \langle (d_\sigma + ad_{\Omega(\varphi_* \partial_\sigma)}) \psi, \Omega(\bullet) \rangle \\ \pi &= - \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = \langle \Omega(\varphi_* \partial_\sigma), \bullet \rangle \end{aligned}$$

y, equivalentemente, en el diagrama, tomando LT^*G trivializado por derecha

$$\begin{array}{ccc} & LT^*G & \\ (\varphi(\sigma), \lambda^R(\sigma)) & \xrightarrow{\mu^R} & (\varphi^{-1} \varphi' \oplus Ad_{\varphi^{-1}}^* \lambda^R, 1) \\ & & L(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)^{\wedge **} \end{array}$$

$$(\Phi^R)^{-1} \downarrow \mathcal{O}_{(0,1)}$$

$$\begin{array}{ccc} & \Omega D = \Omega(G \triangleright \mathfrak{g}^*) & \\ (\varphi, 0) \cdot (e, \vartheta) = (\varphi, \vartheta) & \xrightarrow{j^R} & (\underline{\psi} = \vartheta, \pi = \varphi^{-1} \varphi') \\ & & LT^* \mathfrak{g}^* \end{array}$$

donde ϑ es tal que,

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \varphi', Ad_{\varphi^{-1}}^* \lambda) &= Ad_{(\varphi, \vartheta)}^* \hat{(0, 1)} = (L_{(\varphi, \vartheta)^{-1}})_* (\varphi, \vartheta)' \\ &= (\varphi^{-1} \varphi', Ad_{\varphi^{-1}}^* ad_{\varphi', \varphi^{-1}}^* Ad_\varphi^* \vartheta + \vartheta') \end{aligned}$$

entonces, las transformaciones canónicas de dualidad vienen dadas por

$$\begin{aligned} (d_\sigma + ad_{\varphi^{-1} \varphi'}^*) \vartheta &= (d_\sigma + ad_{\varphi^{-1} \varphi'}^*) \underline{\psi} = Ad_{\varphi^{-1}}^* \lambda^R \\ \pi &= \varphi^{-1} \varphi' \end{aligned}$$

Capítulo 4

Generalizaciones y discusión

”En última instancia no se tienen vivencias más que de sí mismo”

F. Nietzsche

En este capítulo, daremos algunas generalizaciones de los esquemas presentados en las secciones anteriores. En un principio, trataremos de extraer de nuestra presentación de la dualidad-T cuáles son las estructuras geométricas esenciales que dan lugar a dualidad. De esta manera, marcaremos distintos caminos de generalización hacia distintos escenarios que comparten estas características esenciales. De esta discusión surgirán, como casos particulares, algunas direcciones ya abordadas en la literatura y otras novedosas, que proponemos como objeto de estudio.

4.1. Estructuras esenciales de la dualidad

Comenzaremos por dar una noción de lo que requerimos al llamar a dos sistemas dinámicos *duales*, y luego daremos algunos criterios generales para decir cuándo dos sistemas lo serán. Luego, señalaremos algunos casos en los que determinadas estructuras geométricas son suficientes para admitir dualidad.

Definición: Diremos que dos sistemas dinámicos $(P, \{\cdot\}^P, H)$ y $(\tilde{P}, \{\cdot\}^{\tilde{P}}, \tilde{H})$ son *duales* si toda solución de uno define una solución en el otro.

Típicamente, nos referimos a la existencia de un par de mapeos $\varphi : P \rightarrow \tilde{P}$ y $\tilde{\varphi} : \tilde{P} \rightarrow P$ tales que si $x(t)$ es una curva integral del campo vectorial Hamiltoniano asociado a H en P entonces $\varphi(x(t))$ es una curva integral del campo vectorial Hamiltoniano asociado a \tilde{H} en \tilde{P} y viceversa.

Esta noción de dualidad, está asociada a la noción de dos *descripciones equivalentes* de un mismo *problema físico*, ya que el conocimiento de una solución de un sistema lleva al conocimiento de la solución del otro. Aunque vale la pena notar, que es más débil que el requerimiento usual de que las ecuaciones de movimiento sean equivalentes, en donde **todas** las soluciones de un sistema se obtienen de a partir de las del otro y viceversa. Estos casos diremos que la **dualidad es completa**.

En particular, podemos requerir que los mapeos φ y $\tilde{\varphi}$ sean *aplicaciones Poisson*, con lo cual, sabemos que mapearán campos Hamiltonianos de P en \tilde{P} y de \tilde{P} en P , respectivamente.

La siguiente definición es mas restricta, pero ofrece un marco más rico para analizar la dualidad.

Definición: Diremos que P y \tilde{P} son duales con respecto a \mathcal{O} si existen dos suryecciones¹ Poisson π y $\tilde{\pi}$ tales que se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & & \tilde{P} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & \mathcal{O} & \end{array} \quad (4.0)$$

siendo \mathcal{O} una variedad simpléctica.

En este caso, podemos plantear los sistemas $(P, \{\}^P, \mathfrak{H} \circ \pi)$ y $(\tilde{P}, \{\}^{\tilde{P}}, \mathfrak{H} \circ \tilde{\pi})$, los cuales serán duales por construcción, dada una función hamiltoniana \mathfrak{H} en \mathcal{O} . Esta construcción de la dinámica, tomada de la idea del *movimiento colectivo* ([21]), nos asegura que el campo hamiltoniano en P , asociado a $\mathfrak{H} \circ \pi$ se mapea en el campo hamiltoniano asociado a \mathfrak{H} en \mathcal{O} . Entonces, dada una solución en P , esta se mapea a una solución en \mathcal{O} y se podrá levantar a una solución en \tilde{P} a través de $\tilde{\pi}$.

La dualidad será **completa** en los casos en los que existan subsistemas hamiltonianos S_R y \tilde{S}_R de $(P, \{\}^P, \mathfrak{H} \circ \pi)$ y $(\tilde{P}, \{\}^{\tilde{P}}, \mathfrak{H} \circ \tilde{\pi})$, respectivamente, tales que las restricciones de π y $\tilde{\pi}$ definan fibrados con secciones globales.

Llamaremos, en ese caso, a S_R y \tilde{S}_R **subespacios completamente dualizables admisibles**. En el caso de la dualidad-T, estos subespacios fueron llamados en las secciones anteriores *subespacios dualizables admisibles*.

Esta idea es suficientemente general para abarcar una gran cantidad de casos. Comenzaremos por dar candidatos para generar este tipo de diagramas.

- En primer lugar, mencionaremos el diagrama (2.11) que nos permite hacer la generalización siguiente

$$\begin{array}{ccc} P & & \tilde{P} \\ \mu \searrow & & \swarrow \tilde{\mu} \\ & \mathcal{O} & \end{array} \quad (4.0)$$

en donde P y \tilde{P} son variedades simplécticas sobre las que actúa un grupo de Lie G , con aplicaciones momento equivariantes (y, por lo tanto, Poisson) μ y $\tilde{\mu}$, respectivamente. En este caso, \mathcal{O} es una órbita coadjunta en el dual del álgebra de Lie \mathfrak{g}^* , con la estructura simpléctica de Kirillov-Kostant. Se puede decir que los sistemas son duales ya que existe una simetría común de G que permite la resolución de la dinámica, al escribir los hamiltonianos en forma de *movimiento colectivo*. Además, al estar escrito el hamiltoniano en P en forma colectiva, las soluciones serán del tipo $g(t) \cdot x$ (ver [21]). Ahora, como el hamiltoniano en \tilde{P} también está escrito en forma de movimiento colectivo $g(t) \cdot \tilde{x}$, será una solución en P . Los **subespacios completamente dualizables** están dados por $Z_{\mathcal{O}}$ y $\tilde{Z}_{\mathcal{O}}$, como se describe en el diagrama (2.11), en el capítulo anterior. Como ejemplo, presentamos el caso de la *dualidad-T de Poisson Lie* que, como analizamos en el capítulo precedente, se basa en el siguiente diagrama

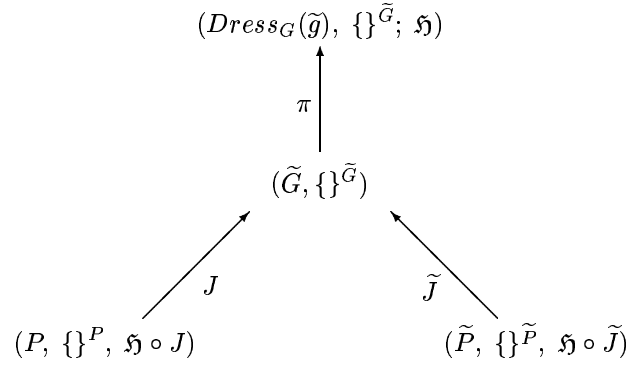
$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{O}_{(0,1)}, \{\}_{K-K}; \mathfrak{H}) & \\ \mu \nearrow & & \nwarrow \tilde{\mu} \\ (LT^*G; \omega_0; \mathfrak{H} \circ \mu) & & (LT^*\tilde{G}; \omega_0; \mathfrak{H} \circ \tilde{\mu}) \end{array}$$

¹Además, pediremos la foliación que definen los campos que anulan el pull-back $\pi^*\omega_{\mathcal{O}}$ en P sea *fibrante* ([21]). De esta manera, en la preimagen $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ tenemos una subvariedad simpléctica y podemos encontrar secciones que sean levantamientos de soluciones en \mathcal{O} .

Quizas haya otra condición, que el autor no encontró, menos restrictiva que permita seguir con los mismos razonamientos.

dada la acción de simetría de LD sobre LT^*G y $LT^*\tilde{G}$.

- Inspirados por este ejemplo, podemos construir otro conjunto de diagramas análogos pero basados en simetrías del tipo Lie-Poisson [2], i.e., consideramos la acción Poisson de un grupo Lie-Poisson sobre dos espacios Poisson P y \tilde{P} . En este esquema, las aplicaciones momento, J y \tilde{J} , toman valores en el grupo Lie-Poisson dual \tilde{G} y el rol de las órbitas coadjuntas, lo juegan las órbitas de la *dressing action* de G sobre \tilde{G} . Estas órbitas *dressing* son las hojas symplecticas del corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}^{\tilde{G}}$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama



donde π es la restricción a la órbita dressing. En este caso, también se puede afirmar que la dualidad está basada en una simetría común que permite resolver ambas dinámicas².

Nota: *Estas ideas podrían generalizarse basándonos en conceptos de simetría más generales (ver [24]). Es decir, que podemos construir diagramas análogos, en donde la acción de un grupo G cumple otros requisitos de compatibilidad con la estructura simpléctica en P y \tilde{P} ; y el vértice es reemplazado por el análogo a las órbitas coadjuntas en el caso de las simetrías usuales. El esquema más general de simetría, en el cual encuadran todos los hasta ahora mencionados (y otros equivalentes y no equivalentes [25]) es el basado en **pares de Manin**. Ahora, la aplicación momento correspondiente a una acción de simetría de un grupo G , correspondiente a un doble de Manin (G, D) , toma valores en D/G y el vértice del diagrama será ocupado por las órbitas de la acción (dressing) de G sobre D/G .*

Otra fuente de diagramas que lleven a sistemas duales se basa en los llamados *pares duales* [26]

²El autor no sabe si, como en el caso de las simetrías usuales, se puede afirmar que las soluciones en P se podrán escribir de la forma $g(t) \cdot x_0$ para $g(t)$ una parametrización de una solución sobre la órbita dressing $Dress_G(J(x_0))$. Intuitivamente, esta afirmación podría probarse cierta para grupos Lie-Poisson cuya estructura de Poisson es completa.

Definición: Se llama **par dual** a dos variedades Poisson P y \tilde{P} tales que existe una variedad simpléctica S y dos suryecciones y submersiones Poisson π y $\tilde{\pi}$ dando lugar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tilde{\pi} \\ & P & \tilde{P} \end{array}$$

y tal que las funciones levantadas a través de π de P a S Poisson-conmutan en S con las funciones levantadas a través de $\tilde{\pi}$ de \tilde{P} a S , y solo con ellas.

Los pares duales brindan un poderoso instrumento para encontrar las hojas simplécticas de las variedades Poisson P y \tilde{P} . Ya que, las hojas en P se obtienen partiendo de un punto en $\tilde{x} \in \tilde{P}$, tomando la preimágen $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x}) \in S$ y proyectando sobre P , $\pi(\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x}))$.

Entonces, si tenemos dos pares duales (P, \tilde{P}) y (Q, \tilde{Q}) tales que una de las hojas simplécticas en P (o una subvariedad simpléctica de la hoja) es simplectomorfa a otra hoja en Q , podemos **fusionar los pares duales** dando lugar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & S^Q & & S \\ & \tilde{\pi}^Q \swarrow & & \searrow \pi^Q & \pi \swarrow & & \searrow \tilde{\pi} \\ & \tilde{Q} & & Q & P & & \tilde{P} \\ & & & \downarrow & \downarrow & & \\ & & & H^Q & \rightleftharpoons & H^P & \end{array}$$

con lo cual tenemos que S y S^Q son **duales respecto a H^Q (y/o H^P)**, según la definición que dimos previamente. Este tipo de diagrama contiene a los introducidos anteriormente, los cuales estaban relacionados con acciones de simetría de un grupo G .

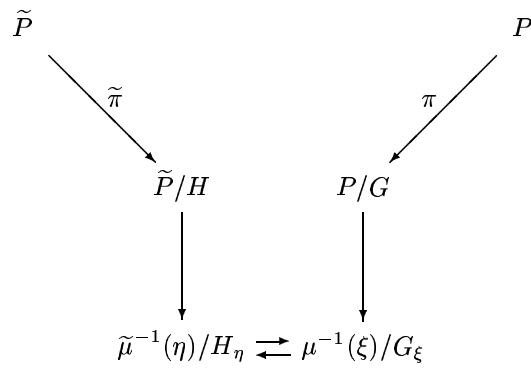
Por ejemplo, en el caso de un grupo G actuando libremente sobre una variedad simpléctica P , con aplicación momento equivariante μ , se tiene el par dual

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \pi \swarrow & & \searrow \mu \\ & P/G & \mathfrak{g}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu^{-1}(\xi)/G_\xi & & \mathcal{O}_\xi \end{array}$$

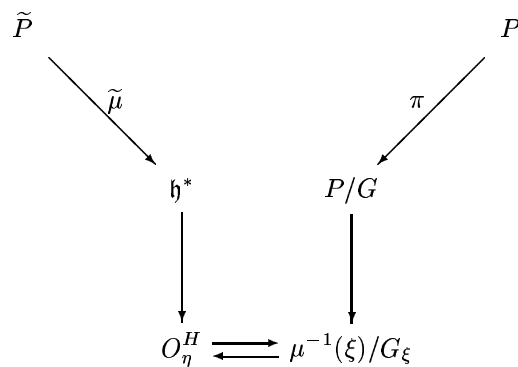
en donde π es la proyección canónica sobre las clases de G -órbitas en P , \mathcal{O}_ξ es la órbita coadjunta por el elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*$ (o sea, la hoja simpléctica por el elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*$ del corchete de Poisson de Kirillov-Kostant en \mathfrak{g}^*) y $\mu^{-1}(\xi)/G_\xi$ es el espacio reducido en P ([4]) asociado a $\xi \in \mathfrak{g}^*$, siendo G_ξ el estabilizador de ξ (o sea, la hoja simpléctica de la estructura de Poisson en P/G que se obtiene por medio de π a partir de la estructura simpléctica en P).

Si el grupo G actúa de manera análoga sobre otra variedad simpléctica \tilde{P} , entonces tendremos otro par con la misma estructura y podremos **fusionar los pares duales** dando como resultado un diagrama del tipo (4.1).

También, puede pasar que uno de los *espacios reducidos* de P sea simplectomorfo a algún espacio reducido en \tilde{P} , correspondiente a la acción de algún grupo H ; en este caso, se pueden **fusionar los pares duales** por los otros extremos, dando el diagrama



Otra posibilidad, es que un espacio reducido por la acción de G sobre P sea simplectomorfo a una órbita coadjunta de otro grupo H , con lo cual podríamos **fusionar los pares duales** $(P/G, \mathfrak{g}^*)$ y $(\tilde{P}/H, \mathfrak{h}^*)$ para alguna variedad simplectica \tilde{P} sobre la que actúe el grupo H , con aplicación momento $\tilde{\mu}$, dando el diagrama



En todos estos casos, los sistemas P y \tilde{P} son duales con respecto a alguna órbita y/o algún espacio reducido por la acción de algún grupo, una vez introducida una dinámica hamiltoniana apropiada, es decir, del tipo *colectiva*, como describimos al presentar los diagramas del tipo (4.1).

Cabe destacar que, en general, asociado a un sistema dinámico sobre P habrá, no solo un sistema dual, sino una **familia de sistemas duales**. Por ejemplo, en el caso del sistema dinámico $(P, \{\}, G, H \circ \mu)$ la familia de sistemas duales estará dada, en principio, por los sistemas $(\tilde{P}, \{\}^{\tilde{P}}, G, H \circ \tilde{\mu})$, dado que serán duales con respecto a alguna órbita coadjunta en \mathfrak{g}^* . En el caso de la dualidad-T de Poisson-Lie, con estas definiciones, además del sistema $(LT^*\tilde{G}, \mathfrak{H} \circ \tilde{\mu})$ dual a $(LT^*G, \mathfrak{H} \circ \mu)$, tenemos que $(\Omega D, \mathfrak{H})$ es dual a $(LT^*G, \mathfrak{H} \circ \mu)$ (y a $(LT^*\tilde{G}, \mathfrak{H} \circ \tilde{\mu})$).

También, se pueden generar diagramas de tipo (4.1) fusionando diagramas de reducción correspondientes a distintas teorías de simetría, como notamos anteriormente.

Finalmente, mencionaremos que, como se señala en [32], los pares duales tienen asociadas acciones de simetría de (en lugar de grupos de Lie) **grupoides de Lie**. Cuando el par dual está formado por dos grupos Lie-Poisson (G, \tilde{G}) , los grupoides son los mismos grupos G y \tilde{G} , este es el caso más simétrico, ya que las hojas simplécticas de un grupo con su estructura de Poisson-Lie se obtienen como órbitas de la acción (*dressing*) del otro. En el caso general, para un par dual (P, \tilde{P}) las hojas simplécticas se obtienen como órbitas de la acción de grupoides sobre cada una de las variedades. Entonces,

Conjetura: *La existencia de sistemas duales basados en la simetría de grupoides de Lie. Estos sistemas duales se construirían de manera análoga a la forma en la que se construyen los modelos duales basados en simetrías usuales, y serían su generalización.*

4.2. Dualidad entre modelos sobre espacios cocientes

En esta sección describiremos cómo se puede generalizar la dualidad-T de Poisson-Lie a modelos sobre espacios cocientes, basándonos en la discusión de la sección anterior y recuperando resultados obtenidos en la literatura [19],[18].

Para arribar a modelos sobre espacios cocientes, nos restringiremos a campos en ΩD tales que su imagen por Φ en el álgebra de Lie extendida $L\hat{\mathfrak{d}}$ (ver el diagrama (2.11)) tomen valores en $(F^\perp, 1)$, F^\perp siendo el ortogonal con respecto a la forma bilineal en \mathfrak{d} de una subálgebra isotrópica $F \subset \mathfrak{d}$. Notemos que, siendo F isotrópica, entonces $F \subset F^\perp$.

Esto es equivalente a imponer vínculos utilizando el álgebra de KM de corrientes que generan la simetría residual de LD sobre ΩD por izquierda (ver [18]). En [18], se considera el caso particular en el que $F = \mathcal{H}$ una subálgebra isotrópica de $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$ y los vínculos son $\pi^{\mathcal{H}}\Phi = 0$, que se pueden tomar para generar

simetrías de gauge mediante los métodos estandar (en este caso, como veremos, esa simetría será la acción por izquierda por elementos de el subgrupo H).

Denotamos π^{F^\perp} la proyección F^\perp en el álgebra \mathfrak{d} . Sobre el espacio $(\pi^{F^\perp}, id)(\Phi(\Omega D)) = (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)})$ existe una (única) forma pre-simpléctica ω^{F^\perp} tal que $(\pi^{F^\perp}, id)^* \omega^{F^\perp} = \omega_{K-K}$, siendo ω_{K-K} la estructura simpléctica de Kirillov-Kostant en la órbita $\mathcal{O}_{(0,1)}$. Las direcciones degeneradas de ω^{F^\perp} se identifican con los campos $(F, 1)$ con $F \in LF \cap \Omega D$. Entonces, tendremos una forma simpléctica ω^C bien definida (no degenerada) en el espacio cociente $LF \backslash (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)})$, donde el grupo LF actúa residualmente mediante la multiplicación por izquierda punto a punto en LD , siendo \mathcal{F} el subgrupo de D correspondiente al álgebra F .

Llegamos al siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} L\hat{\mathfrak{d}} \longrightarrow (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)}) \longrightarrow LF \backslash (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)}) \\ \uparrow \Phi \\ \Omega D \end{array}$$

Ahora, eligiendo un representante en $LF \backslash (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)})$, o, equivalentemente, dando una *fijación de gauge* correspondiente a la acción del grupo (de gauge) LF , podemos usar los mapeos J y \tilde{J} del diagrama (2.11) para proyectar sobre los *subespacios admisibles* en LT^*G y $LT^*\tilde{G}$. Hemos construido el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_{(0,1)} & \hookrightarrow & (L\hat{\mathfrak{d}}^*; \{ \}_K - K; H) \\ & \nearrow \mu & \uparrow \Phi & & \nwarrow \tilde{\mu} \\ (LT^*G; \omega_0; \mathfrak{H} \circ \mu) & & (L\hat{\mathfrak{d}}^*; \{ \}_K - K; H) & & (LT^*\tilde{G}; \omega_0; \mathfrak{H} \circ \tilde{\mu}) \\ & \searrow J & \downarrow \Phi & & \nearrow \tilde{J} \\ & & (\Omega D(G); L_i^* \omega_l \equiv \Gamma; \mathfrak{H} \circ \Phi) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & (LF \backslash (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)}), \omega^R, \mathfrak{H} \circ \Phi) & & \end{array}$$

(4.0)

de donde vemos que LT^*G y $LT^*\tilde{G}$ son **duales con respecto a** $LF \backslash (\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)})$. Ahora, es claro, que los subespacios admisibles sobre los que habrá una **dualidad completa** tendrán como elementos clases de equivalencia dados por la acción dressing por izquierda de LF

$$f \cdot g = g^f$$

dada la descomposición $fg = g^f \tilde{h}^f$. El Hamiltoniano \mathfrak{H} en $\mathcal{O}_{(0,1)}$ debe estar definido de manera de que sea *invariante de gauge* , es decir, que sea invariante ante la acción de LF y, por lo tanto, defina un buen

hamiltoniano en $L\mathcal{F}\backslash(\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)})$. En particular, tomaremos el siguiente hamiltoniano

$$\mathfrak{H}(X) = \int K(X)$$

donde K es una función cuadrática definida sobre F^\perp de la siguiente manera: sea \mathcal{E} un subespacio de \mathfrak{d} de dimensión igual a la dimensión de \mathfrak{g} , y sea \mathcal{E}^\perp su ortogonal, tal que $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp = F$ y que \mathcal{E} y \mathcal{E}^\perp sean invariantes ante la acción adjunta de F , entonces para un elemento $X \in F^\perp$ damos la descomposición (no única) $X = X_1 + X_2$ con $X_1 \in \mathcal{E}$ y $X_2 \in \mathcal{E}^\perp$ y definimos $K(X) = \langle X_1, X_1 \rangle - \langle X_2, X_2 \rangle = \langle X, (\pi^+ - \pi^-)X \rangle$, siendo π^\pm las proyecciones sobre \mathcal{E} y \mathcal{E}^\perp , respectivamente. $\mathfrak{H}(\Phi)$ es invariante ante la acción por izquierda de $L\mathcal{F}$ una vez restringido a $(\pi^{F^\perp}, id)(\mathcal{O}_{(0,1)})$ y entra dentro de la clase de hamiltonianos cuadráticos que introdujimos en el capítulo anterior, solamente que ahora es singular (no depende de todos los "momentos" en \mathfrak{d}).

Por lo tanto, este Hamiltoniano conlleva a una dinámica singular, dada la presencia de las simetrías de gauge, tipo modelo sigma al pasar al formalismo Lagrangiano (ver [19] y [18]). Los lagrangianos singulares se escriben de manera análoga a como fueron escritos los lagrangianos de los modelos sigma (3.1) estudiados en el capítulo anterior. En los subespacios reducidos sobre los cuales la dinámica no es singular, están definidos los modelos sigma cocientes de G y \tilde{G} correspondientes a la acción dressing del subgrupo \mathcal{F} .

Explícitamente, los Lagrangianos sobre G y \tilde{G} singulares son de la forma [19]

$$\begin{aligned} L &= (E + \Pi(g))^{-1}(\partial_+ g g^{-1}, \partial_- g g^{-1}) \\ \tilde{L} &= (E^{-1} + \tilde{\Pi}(g))^{-1}(\partial_+ \tilde{g} \tilde{g}^{-1}, \partial_- \tilde{g} \tilde{g}^{-1}) \end{aligned}$$

donde E es una forma bilineal sobre \mathfrak{g}^* que dá los gráficos de los subespacios \mathcal{E} y \mathcal{E}^\perp

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{Span}\{t + E(t, -) \mid t \in \mathfrak{g}^*\} \\ \mathcal{E}^\perp &= \text{Span}\{t - E(-, t) \mid t \in \mathfrak{g}^*\} \end{aligned}$$

En [19], esta construcción se lleva a cabo introduciendo simetrías de gauge sobre un modelo WZW en D , con un hamiltoniano invariante, y luego proyectando sobre LT^*G y $LT^*\tilde{G}$. Como notamos anteriormente, los resultados de [18], cuya descripción es más cercana a la de teorías con invariancia de gauge, se pueden obtener eligiendo subgrupos \mathcal{F} y otras dinámicas hamiltonianas particulares.

Nota: El lector notará la estrecha relación entre estas derivaciones y la teoría desarrollada en [33] sobre reducción hamiltoniana de teorías WZNW al imponer vínculos sobre el álgebra de corrientes. Esta relación se hace manifiesta al tomar un modelo WZNW sobre D , manteniendo la línea de pensamiento del capítulo anterior. Esta observación también deja entrever la relación entre este tipo de sistemas duales y los sistemas Toda.

4.3. Modelos duales con simetrías Lie-Poisson

Hasta ahora, hemos descrito sistemas dinámicos que son duales gracias a la presencia de una acción de simetría de un grupo de Lie que permite resolver las respectivas dinámicas. En todos los casos anteriores,

esta acción es una simetría hamiltoniana usual, es decir, que el grupo de Lie actúa mediante simplectomorfismos sobre el espacio de fases de los modelos. Pero, en principio, las ideas presentadas al comienzo de este capítulo pueden llevarse a otras nociones de simetría sobre los espacios de fases.

En particular, discutiremos la existencia de modelos cuya dualidad está basada en simetrías de Lie-Poisson. Un ejemplo de modelos duales con simetrías Lie-Poisson son los modelos sigma-Poisson basados en grupos Lie-Poisson [16] y sus equivalentes, modelos WZNW totalmente gaugeados [36].

Otro ejemplo en el que hay presentes simetrías tipo Lie-Poisson es en los modelos WZW quasitriangulares[28], y los modelos que surgen de su descomposición quirral. Este tipo de modelos basados en dobles de Drinfeld admitirían duales en el caso de imponer dinámicas del tipo *colectivas*.

En general, tendremos dos espacios de fases P y \tilde{P} sobre los que actúa un grupo Lie-Poisson G . Esta acción es Poisson y suponemos que admite aplicaciones momento equivariantes con respecto a la acción *drinking* (mapeos Poisson) $\mu^{P\tilde{P}} : P, \tilde{P} \longrightarrow \tilde{G}$, siendo \tilde{G} el grupo Lie Poisson dual a G ([3]). Entonces, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & & \tilde{P} \\ \mu^P \searrow & & \swarrow \mu^{\tilde{P}} \\ & \tilde{G} & \\ & \downarrow & \\ & DO_{\tilde{g}} & \end{array}$$

siendo $DO_{\tilde{g}}$ la órbita de la acción *drinking* de G sobre \tilde{G} pasando por un $\tilde{g} \in \tilde{G}$, que es una de las hojas simplécticas de la estructura de Poisson-Lie en \tilde{G} . Por lo tanto, P y \tilde{P} son **duales con respecto a $DO_{\tilde{g}}$** .

4.3.1. Modelos sigma-Poisson sobre grupos Lie-Pisson

Un ejemplo paradigmático de modelos duales cuya dualidad está asociada a simetrías Lie-Poisson está dado por dos modelos sigma-Poisson sobre un grupo Lie-Poisson y su dual. Seguiremos los resultados expuestos en [16], poniendo énfasis en su relación con la discusión general que venimos desarrollando sobre dualidad.

Otros sistemas que admiten simetrías Lie-Poisson pueden encontrarse en [36]. Dejamos conjeturada la posibilidad de encontrar modelos duales a aquellos en base a esas simetrías, siguiendo el esquema de esta sección.

Comenzaremos dando la definición general de un modelo sigma-Poisson (ver también [48]), que está dado por una teoría de campos topológica en 1+1 dimensiones, en donde los campos tienen dominio en una superficie de Riemann Σ y toman valores sobre una variedad Poisson $(M, \{\})$. Si la estructura de Poisson en M está dada por el bivector $\Gamma \in T^2(M)$

$$\{f, g\}(m) = \langle \Gamma_m, df \wedge dg \rangle$$

entonces, la acción para el modelo está dada en términos de los campos $X : \Sigma \longrightarrow M$ y 1-formas ψ sobre Σ con valores en el pull-back $X^*(T^*M)$. La funcional acción está dada por

$$S_{P\sigma} = \int_{\Sigma} \langle dX, \wedge \psi \rangle - \frac{1}{2} \langle \Gamma \circ X, \psi \wedge \psi \rangle$$

o, localmente,

$$S_{P\sigma} = \int_{\Sigma} dX^i \wedge A_i - \frac{1}{2} \Gamma^{ij}(X) A_i \wedge A_j$$

siendo $A_i = A_{i\mu} d\sigma^\mu$, con σ^μ coordenadas en Σ y los índices $i, j = 1 \dots \dim M$. Las ecuaciones de movimiento son de la forma

$$\begin{aligned} dX^i + \Gamma^{ij}(X) A_j &= 0 \\ dA_i + \frac{1}{2} \partial_i \Gamma^{jk}(X) A_j \wedge A_k &= 0 \end{aligned}$$

se puede ver [47] que la imagen de X yace sobre una de las hojas simplécticas de M .

Estos modelos presentan simetrías de gauge infinitesimales dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon X^i &= \epsilon_j \Gamma^{ji}(X) \\ \delta_\epsilon A_i &= d\epsilon_i + \partial_i \Gamma^{jk}(X) A_j \epsilon_k \end{aligned}$$

donde $\epsilon = \epsilon_i dX^i$ es una sección de $X^*(T^*M)$. Ante estas transformaciones, la acción transforma en un término de borde

$$\delta_\epsilon S_{P\sigma} = - \int_{\Sigma} d(dX^i \epsilon_i)$$

El espacio de parámetros ϵ , forman una (pseudo) álgebra de Lie de gauge sobre las soluciones

$$\begin{aligned} [\delta_\epsilon, \delta_{\epsilon'}] X^i &= \delta_{[\epsilon, \epsilon']^*} X^i \\ [\delta_\epsilon, \delta_{\epsilon'}] A^i &= \delta_{[\epsilon, \epsilon']^*} A^i + \epsilon_k \epsilon'_l \partial_i \Gamma^{kl} (dX^j + \Gamma^{js}(X) A_s) \end{aligned}$$

dado que la expresión entre paréntesis en el segundo término de la segunda ecuación es una de las ecuaciones de movimiento. La expresión $[\epsilon, \epsilon']^*$ denota la estructura de Lie sobre las 1-formas sobre la variedad de Poisson M ([2]).

La idea de los siguientes párrafos es especializarse en el caso en el que $M = G$, un grupo Lie-Poisson con su estructura de Poisson compatible con la multiplicación en el grupo. En este caso, el grupo de simetrías de gauge es el grupo Lie-Poisson dual \tilde{G} y actúa mediante *acciones dressing infinitesimales*[2]. Es más, veremos que para un dado Σ , las versiones hamiltonianas de dos modelos sigma-Poisson sobre G y su dual \tilde{G} llevan al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & & \tilde{P} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & D_0 & \end{array} \quad (4.10)$$

donde P y \tilde{P} son los espacios de fases correspondientes a los modelos sobre G y \tilde{G} , $D_0 = G\tilde{G} \cap \tilde{G}G \subset D$ es la celda simpléctica principal ([14]) en el doble de Drinfeld D asociado a G y \tilde{G} , y π y $\tilde{\pi}$ son mapeos simplécticos³.

Este diagrama nos dice que P y \tilde{P} son **duales con respecto** a D_0 y daremos la forma explícita en la que se pueden mapear soluciones de un modelo en el otro.

³No queda claro al autor la relación exacta entre los mapeos π y $\tilde{\pi}$ y las simetrías Lie-Poisson sobre los espacios de fase P y \tilde{P} .

Nota: Destacamos que estos modelos sigma-Poisson sobre un grupo Lie-Poisson está relacionado a un modelo WZW totalmente gaugeados sobre el grupo dual [36] y esta relación también podría ser tratada como una dualidad relacionada con simetrías Poisson-Lie en los respectivos espacios de fases.

Siguiendo [16], comenzamos con un grupo G complejo, simple, conexo y simplemente conexo. Denotamos tr la forma bilineal, invariante, no-degenerada en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , que establece un isomorfismo vectorial con el dual \mathfrak{g}^* . Tenemos, entonces, una matriz $r : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ antisimétrica lineal tal que

$$[X, Y]_r = \frac{1}{2}([X, rY] + [rX, Y])$$

define una segunda estructura de Lie $(\mathfrak{g}, [,]_r)$ isomorfa a $(\mathfrak{g}^*, [,]^*)$ dada por la estructura de biálgebra cuasitriangular factorizable en \mathfrak{g} [37][10]. Tomando $(\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{d}} \equiv ([,]_{\mathfrak{g}}, [,]_{\mathfrak{g}}))$ y $r_{\pm} = \frac{1}{2}(r \pm Id)$ definimos la inclusión del álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [,]_r)$ en $(\mathfrak{d}, [,]_{\mathfrak{d}})$ a través de $X \mapsto (r_+X, r_-X)$ y la inclusión del álgebra $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}})$ en $(\mathfrak{d}, [,]_{\mathfrak{d}})$ en forma diagonal $X \mapsto (X, X)$. La forma bilineal que hace de $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_r)$ un triple de Manin, es

$$Tr((X, Y), (A, B)) = tr(X, A) - tr(Y, B)$$

A nivel de grupos, $D = G \times G$ y sus subgrupos isotrópicos maximales son los correspondientes G_{diag} y G_r .

Las estructuras de Poisson sobre $G(\sim G_{diag})$ y $\tilde{G}(\sim G_r)$ contraídas con formas $\Lambda(X) = tr(dgg^{-1}X)$ y $\Lambda^r(X) = tr((dg_+g_+^{-1} - dg_-g_-^{-1})X)$ invariantes por derecha en puntos $g \in G$ y $(g_+, g_-) \in G_r$, respectivamente, son

$$\begin{aligned} \gamma_g(X, Y) &= \frac{1}{2}tr(XrY - XAd_g r Ad_g^{-1}Y) \\ \gamma_{(g_+, g_-)}^r(X, Y) &= \frac{1}{2}tr(X(Ad_{g_+} - Ad_{g_-})(r_- Ad_{g_+}^{-1} - r_+ Ad_{g_-}^{-1})Y) \end{aligned}$$

Entonces, las funcionales acción que definen los modelos sigma-Poisson sobre $G(\sim G_{diag})$ y $\tilde{G}(\sim G_r)$ son

$$\begin{aligned} S_{PL}^G &= \int_{\Sigma} tr(dgg^{-1} \wedge A) - \frac{1}{4}tr(A \wedge (r - Ad_g r Ad_g^{-1})A) \\ S_{PL}^{\tilde{G}} &= \int_{\Sigma} tr((dg_+g_+^{-1} - dg_-g_-^{-1}) \wedge A) + \frac{1}{2}tr(A \wedge (Ad_{g_+} - Ad_{g_-})(r_- Ad_{g_+}^{-1} - r_+ Ad_{g_-}^{-1})A) \end{aligned}$$

siendo $A \in \Lambda^1(\Sigma) \otimes \mathfrak{g}$.

Las transformaciones de gauge sobre el modelo en G están dadas por las acciones dressing de \tilde{G} (infinitesimales, en general, ya que no siempre los campos vectoriales dressing son completos) y viceversa. La pseudo-álgebra de Lie en el espacio de parámetros de transformaciones sobre G está dada por la estructura de Lie en \mathfrak{g}^* (análogo para \tilde{G} y \mathfrak{g}).

Las soluciones para las ecuaciones de movimiento del modelo en G sobre un abierto contractil $U \subset \Sigma$ están dadas por (h_+, h_-) y $(\tilde{h}_+, \tilde{h}_-) : U \rightarrow G_r$ con condiciones de contorno $h_{\pm}(\sigma_0) = \tilde{h}_{\pm}(\sigma_0) = e$ para algun $\sigma_0 \in U$, satisfaciendo la ecuación en D

$$(g(\sigma)\tilde{h}_+(\sigma), g(\sigma)\tilde{h}_-(\sigma)) = (h_+(\sigma)\hat{g}, h_-(\sigma)\hat{g})$$

siendo $\widehat{g} = g(\sigma_0)$ un valor constante de la solución $g : U \rightarrow G$. Esta ecuación explicita el hecho de que las soluciones $g(\sigma)$ yacen sobre las órbitas de la acción *dressing* de G_r sobre G , es decir, sobre las hojas simplécticas del corchete de Poisson-Lie en G ([3]).

Análogamente, tenemos las soluciones para el modelo en \tilde{G} dadas por (h, h) y $(\tilde{h}, \tilde{h}) : U \rightarrow G$, con $h(\sigma_0) = \tilde{h}(\sigma_0) = e$ tal que se satisface

$$(g_+(\sigma)\tilde{h}(\sigma), g_-(\sigma)\tilde{h}(\sigma)) = (h(\sigma)\widehat{g}_+, h(\sigma)\widehat{g}_-)$$

siendo $(\widehat{g}_+, \widehat{g}_-) = (g_+(\sigma_0), g_-(\sigma_0))$.

Ahora, elegimos $\Sigma = [0, \pi] \times \mathbb{R}$ para dar una descripción hamiltoniana de estos modelos. Imponemos las condiciones de borde sobre $\partial\Sigma$ libres para los campos g y g_\pm y para A , tal que se anule sobre campos tangentes al borde. Entonces h, \tilde{h}, h_\pm y \tilde{h}_\pm son constantes sobre los bordes, y están fijados por sus valores en $(0, t)$ y (π, t) para algún $t \in \mathbb{R}$.

La forma pre-simpléctica sobre el espacio de soluciones (g, A) para el modelo sobre G está dada por⁴

$$\omega = \int_C \text{tr}(\delta g g^{-1} \wedge \delta g g^{-1} A - \delta g g^{-1} \wedge A)$$

donde C es un camino que uno las dos componentes del borde de Σ (el valor de la forma no depende del camino elegido). Parametrizando las soluciones por los pares $(h_\pm(\sigma), \widehat{g})$ tal que $(h(\sigma)\widehat{g}_+, h(\sigma)\widehat{g}_-) \in D_0$ y tomando $\sigma_0 = (0, t_0)$, esto es, $h_\pm(0, t_0) = \tilde{h}_\pm(0, t_0) = e$, entonces se puede ver que

$$\omega = \frac{1}{2} \Omega(h_{\pi+}\widehat{g}, h_{\pi-}\widehat{g})$$

donde $h_{\pi\pm} = h_\pm(\pi, t_0) = h_\pm(\pi, t)$ son los valores en la componente (π, t) del borde y Ω es la estructura simpléctica en la celda D_0 ([14])

$$\Omega(h_+g, h_-g) = \text{tr}[d\tilde{g}\tilde{g}^{-1} \wedge (dh_+h_+^{-1} - dh_-h_-^{-1}) + g^{-1}dg \wedge (\tilde{h}_+^{-1}d\tilde{h}_+ - \tilde{h}_-^{-1}d\tilde{h}_-)]$$

dadas las dos factorizaciones $(h_+g, h_-g) = (\tilde{g}\tilde{h}_+, \tilde{g}\tilde{h}_-)$.

La forma ω es degenerada, y los campos que dan su núcleo son los campos correspondientes a transformaciones *dressing* infinitesimales de gauge que son la identidad sobre el borde $\partial\Sigma$. Reducimos el espacio de soluciones cocientando por estas transformaciones y obtenemos un espacio de fases reducido P , en el cual la forma ω es no degenerada.

El espacio P está dado por los pares $([(h_+, h_-)], \widehat{g})$, siendo $[(h_+, h_-)]$ la clase de homotopía de mapeos de $[0, \pi]$ a G_r que son la identidad en 0 y tienen un valor fijo en π y tal que $(h(x)\widehat{g}_+, h(x)\widehat{g}_-) \in D_0 \forall x \in [0, \pi]$.

La forma simpléctica en P es el pull-back de la forma simpléctica en D_0 a través del mapeo

$$\begin{aligned} \pi & : P \rightarrow D_0 \\ & : ([(h_+, h_-)], \widehat{g}) \mapsto (h_{\pi+}\widehat{g}, h_{\pi-}\widehat{g}) \end{aligned}$$

Se puede proceder de manera análoga con el modelo sobre \tilde{G} , llegando al espacio de fases reducido $(\tilde{P}, \tilde{\pi}^*(\Omega))$.

⁴Notese la relación entre esta estructura simpléctica y la estructura simpléctica canónica sobre el cotangente de G .

Las formas simplécticas sobre P y \tilde{P} coinciden identificando $h_\pi \longleftrightarrow \hat{g}^{-1}$ y $(\hat{g}_+, \hat{g}_-) \longleftrightarrow (h_{\pi_+}^{-1}, h_{\pi_-}^{-1})$, es decir, mapeando $(h_{\pi_+} \hat{g}, h_{\pi_-} \hat{g}) \longrightarrow (\hat{g}^{-1} h_{\pi_+}^{-1}, \hat{g}^{-1} h_{\pi_-}^{-1}) = (h_{\pi_+} \hat{g}_+, h_{\pi_-} \hat{g}_-)$ dando *transformaciones canónicas de dualidad*.

Notese que estas transformaciones no son únicas, sino que corresponden a una elección de gauge, dada la ambigüedad que existe en la factorización $(h_+ g, h_- g) = (\tilde{g}_+ h_+, \tilde{g}_- h_-)$ en D_0 . Esta ambigüedad está dada por la libertad de multiplicar por un elemento del grupo discreto $G_0 = G_{diag} \cap G_r$.

Nota: *En esta construcción [16] no se ha utilizado el concepto de simetría Lie-Poisson para llegar a los espacios de fases reducidos P y \tilde{P} . De todas maneras, el hecho de que las direcciones degeneradas de la estructura pre-simpléctica sobre el espacio de soluciones estén generadas por las acciones dressing, deja entrever la posibilidad de poder realizar una reducción en términos de aplicaciones momento J y \tilde{J} , valuadas en los grupos Lie-Poisson duales correspondientes a las acciones (Poisson) de simetrías de gauge (ver [2]). De esta manera, los mapeos π y $\tilde{\pi}$ y el diagrama (4.3.1) tendrían una interpretación en términos del esquema general de las dualidades basadas en simetrías Lie-Poisson, discutido más arriba. La celda D_0 jugaría un rol similar al de las órbitas coadjuntas en el caso de las dualidades basadas en simetrías hamiltonianas usuales.*

4.4. Dualidad entre modelos sigma

En esta sección, trataremos de responder la pregunta de cuándo un dado modelo sigma sobre una variedad M admite un modelo dual en una variedad \tilde{M} . Encaminaremos la búsqueda de la solución en base a la discusión de la primer sección de este capítulo y arribaremos a una descripción de este problema que fue desarrollada en [13].

Nos planteamos el problema de, dado dos modelos sigma bidimensionales, supongamoslos con la topología del cilindro, sobre dos variedades M y \tilde{M} , encontrar requerimientos geométricos que nos aseguren que los modelos serán **completamente duales**. Suponemos que tratamos con modelos no singulares (si no fuese así, nos podríamos restringir a un subsistema no singular), por lo tanto, en el formalismo Hamiltoniano los espacios de fases serán LT^*M y $LT^*\tilde{M}$ con sus estructuras simplécticas canónicas.

Para que halla una dualidad completa entre los modelos, deberá existir una transformación canónica de dualidad $F: LT^*M \longrightarrow LT^*\tilde{M}$, es decir, un simplectomorfismo.

Teniendo en cuenta esto y la discusiones previas sobre requerimientos esenciales de dualidad, postulamos la existencia del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \pi^M \swarrow & & \searrow \pi^{\tilde{M}} \\ M & & \tilde{M} \end{array}$$

donde P es una variedad simpléctica y $\pi^M, \pi^{\tilde{M}}$ son proyecciones tales que las fibras son difeomorfas a cubrimientos de \tilde{M} y M respectivamente. Se llama a P una *bifibración*. Asumiendo la existencia de este

diagrama, podemos generar un segundo diagrama que nos explicitará cómo obtener las transformaciones de dualidad entre los modelos sigma

$$\begin{array}{ccc}
 & LP & \\
 \mu^M \swarrow & & \searrow \mu^{\widetilde{M}} \\
 LT^*M & & LT^*\widetilde{M}
 \end{array} \quad (4-16)$$

donde μ^M y $\mu^{\widetilde{M}}$ son funciones de LP a LT^*M y $LT^*\widetilde{M}$ definidas localmente a partir de una funcional generatriz de transformaciones canónicas que se obtiene de la estructura simpléctica en P como detallaremos a continuación.

Notemos que en este caso general, no tenemos acciones de simetría que nos permitan identificar los subespacios dentro de los cotangentes en los cuales poder definir mapeos inversos de LT^*M y $LT^*\widetilde{M}$ a LP . Por lo tanto, deberemos imponer otras condiciones sobre las geometrías de M , \widetilde{M} y P , para poder afirmar que LT^*M y $LT^*\widetilde{M}$ son (localmente) **duales con respecto a LP** (es decir, para saber cómo invertir las flechas del diagrama (4.4) llegando a un diagrama tipo (4.1)).

Supongamos que β es la estructura simpléctica sobre P . Localmente, $\beta = d\alpha$ para una 1-forma localmente definida en P . Definimos la funcional generatriz

$$F[x, \tilde{x}] = \int \alpha$$

donde x y \tilde{x} son coordenadas locales en $P \stackrel{loc}{\simeq} M \times \widetilde{M}$. Si v es un campo vectorial con soporte compacto a lo largo de $(x(\sigma), \tilde{x}(\sigma))$ en P , entonces

$$\delta_v F = \int i_v \beta$$

y, siguiendo esta idea, definiremos las transformaciones de dualidad entre LT^*M y $LT^*\widetilde{M}$ en base a β , es decir, si localmente

$$\beta = -\frac{1}{2}l_{ij} dx^i \wedge dx^j + m_{ij} d\tilde{x}^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\tilde{l}_{ij} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^j$$

entonces, en coordenadas locales (x, π) y $(\tilde{x}, \tilde{\pi})$ en LT^*M y $LT^*\widetilde{M}$, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
 \pi_i(\sigma) &= m_{ji} \frac{d\tilde{x}^j}{d\sigma} + l_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \\
 \tilde{\pi}_i(\sigma) &= m_{ij} \frac{dx^j}{d\sigma} + \tilde{l}_{ij} \frac{d\tilde{x}^j}{d\sigma}
 \end{aligned}$$

Para que estas transformaciones sean invertibles, la matriz m debe ser localmente invertible. Esto se puede expresar en términos de la estructura simpléctica, i.e., pedimos que β sea *compatible con la bifibración* (ver [13]). En estas condiciones, tenemos bien definidas los mapeos del diagrama (4.4) que por construcción son simplécticos y, localmente, la transformación de dualidad $f : LT^*M \rightarrow LT^*\widetilde{M}$, que se factoriza (localmente) dando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & LP & \\
 \mu^{M-1} \nearrow & & \searrow \mu^{\widetilde{M}} \\
 LT^*M & \xrightarrow{f} & LT^*\widetilde{M}
 \end{array}$$

Ahora, siguiendo las ideas presentadas al principio de este capítulo, podemos decir que LT^*M y $LT^*\widetilde{M}$ son **localmente duales con respecto a LP** . En principio, es cada problema particular, estas descripciones locales pueden ser superpuestas tomando distintos parches en P y dando origen a una descripción global.

En el caso de la dualidad T de Poisson Lie, $M = G$, $\widetilde{M} = \widetilde{G}$ y $P = D_+$, el doble de Heisenberg [14] con su estructura simpléctica ω^+ que define la funcional genratriz de las transformaciones de dualidad que dimos en el capítulo anterior para los modelos sigma (ver, por ejemplo [5] [13]).

Nos falta definir una dinámica que respete la dualidad, como fue notado al comienzo de este capítulo. Siguiendo las ideas de [13], expresaremos estas condiciones dinámicas en términos de la información geométrica que define los modelos sigma.

Supongamos que M (y \widetilde{M}) son variedades riemánianas y el modelo sigma no lineal correspondiente sobre M está definido por (M, g, B) (ver el capítulo anterior), donde g es la métrica y B es una 2-forma sobre M . En su versión hamiltoniana, el sistema está descrito por (LT^*M, ω_0, H) , siendo la densidad hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}g(\pi - B(\frac{dx}{d\sigma}), \pi - B(\frac{dx}{d\sigma})) + \frac{1}{2}g(\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dx}{d\sigma})$$

y la densidad de momento es

$$P = \pi \cdot \frac{dx}{d\sigma}$$

Nota: Se pueden considerar modelos sigma más generales, su estructura simpléctica está caracterizada en términos de conexiones riemánianas en [34].

Buscando las condiciones bajo las cuales la transformación canónica mapee los hamiltonianos y las densidades de momento de un sistema en su dual, llegamos a una **dualidad completa**, que es claramente más fuerte que la **dualidad**, a secas, el que era satisfecho por hamiltonianos escritos en *forma colectiva*. Esta última idea, en el contexto de los modelos sigma, es más cercana al concepto de *pseudodualidad* (ver [35]).

En este contexto hamiltoniano, las transformaciones de dualidad que hemos introducido, en co-bases ortonormales locales en M y \widetilde{M} , están dadas por transformaciones lineales entre $(\frac{dx}{d\sigma}, \pi - B(\frac{dx}{d\sigma}))$ y $(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\sigma}}, \tilde{\pi} - \widetilde{B}(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\sigma}}))$ y se puede ver que, para que estas transformaciones preserven la densidad hamiltoniana, deben estar en el grupo $O(2n)$, siendo $\dim M = \dim \widetilde{M} = n$ [13]. Por derivarse de una estructura simpléctica compatible con la bifibración, esta transformación también preserva la densidad de momento. Finalmente, las transformaciones lineales deberán pertenecer a $O(2n) \cap O_Q(n, n)$, siendo $O_Q(n, n)$ el grupo de matrices $2n \times 2n$, isomorfo a $O(n, n)$, que preserva la forma cuadrática

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix}$$

Explícitamente, las transformaciones son de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} - \widetilde{B}(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\sigma}}) + \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\sigma}} &= T_+[(\pi - B(\frac{dx}{d\sigma}) + \frac{dx}{d\sigma}] \\ \tilde{\pi} - \widetilde{B}(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\sigma}}) - \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\sigma}} &= -T_-[(\pi - B(\frac{dx}{d\sigma}) - \frac{dx}{d\sigma}] \end{aligned}$$

donde $T_{\pm} \in O(n)$ definen la estructura simpléctica β y deben satisfacer $T_-^{-1}T_+ = (Id + n)^{-1}(id - n)$, siendo $n = l - B$ (recordar la definición en coordenadas locales de β).

Estas condiciones sobre las transformaciones de dualidad se pueden resumir en la condición geométrica de que las variedades M y \widetilde{M} admitan *conexiones planas ortogonales* [13].

Esta caracterización geométrica que da condiciones suficientes de dualizabilidad sobre dos modelos sigma engloba a la dualidad-T de Poisson-Lie entre los modelos sigma descritos en los capítulos anteriores y es, por lo tanto, una generalización de aquella.

4.5. Nuevas dualidades

4.5.1. Dualidad basada en productos bicruzados de álgebras de Lie

Teniendo en cuenta las ideas introducidas en la primer sección de este capítulo, pondremos en evidencia la existencia de modelos duales basados en álgebras de Lie que se descomponen en productos bicruzados o extensiones "twilled" ([30]) recuperando resultados expuestos en [8] y sugiriendo nuevos modelos duales posibles.

La idea básica es reemplazar el álgebra doble de Drinfeld (ver capítulo anterior) sobre la que se basa la dualidad-T de Poisson-Lie por un álgebra bicruzada que es la extensión "twilled" de dos álgebras de Lie \mathfrak{g} y \mathfrak{m}

Definición:[30] *dadas \mathfrak{g} y \mathfrak{m} , el espacio vectorial $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{m} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ se llama una extensión twilled si existen dos representaciones de cada álgebra en la otra A y B , tales que existe una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{m}$ dada por*

$$\begin{aligned} [(x, \xi), (y, \eta)] &= ([x, y] + B_\xi(y) - B_\eta(x), [\xi, \eta] + A_x(\eta) - A_y(\xi)) \\ x, y &\in \mathfrak{g} \quad \xi, \eta \in \mathfrak{m} \end{aligned}$$

Vemos que el álgebra doble de Drinfeld, caracterizada por un triple de Manin, es una extensión twilled de las biálgebras de Lie \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* , tomando en \mathfrak{g}^* la estructura de Lie que surge de la estructura de biálgebra en \mathfrak{g} .

Primero, mencionaremos la construcción introducida en [8]. Supongamos que tenemos $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{m}$ un producto bicruzado de las álgebras de Lie \mathfrak{g} y \mathfrak{m} , tal que existe una forma bilineal \langle, \rangle , simétrica, invariante y no degenerada en \mathfrak{d} . También, suponemos que $\mathfrak{d} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ da una descomposición ortogonal tal que las proyecciones π^\pm correspondientes definan un operador $(\pi^+ - \pi^-)$ autoadjunto con respecto a la forma bilineal.

Estamos ahora en una situación análoga a la que describimos en el caso de la dualidad-T para un doble de Drinfeld en el capítulo anterior. Tomando, como en aquel caso, la extensión central del álgebra $L\mathfrak{d}$, por ejemplo, considerando un modelo WZW en el grupo D correspondiente a \mathfrak{d} , tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} (L\hat{\mathfrak{d}}^*, \{\}_{K-K}) \\ \downarrow \\ O_{(0,1)}^{K-K} \xrightarrow{\Phi} (\Omega D, \omega = \int \langle (l^{-1}dl)', l^{-1}dl \rangle) \end{array}$$

y dada la factorización (local, en general) $l = gm$, con $g \in G$ y $m \in M$, podemos fijar la dinámica en ΩD , dada por el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \langle \Phi, (\pi^+ - \pi^-) \Phi \rangle \\ &= \langle l'l^{-1}, (\pi^+ - \pi^-) l'l^{-1} \rangle \end{aligned}$$

que describe simultaneamente dos sistemas dinámicos sobre G y M . Las ecuaciones de movimiento en D son

$$\partial_t l l^{-1} = (\pi^+ - \pi^-) l'l^{-1}$$

y, asumiendo que $Ad_g \mathcal{E}^\pm$ tiene coordenadas gráficas E_g y T_g (ver [8]), entonces las ecuaciones de movimiento en G son

$$(T_g(g^{-1}g_+))_- - (E_g(g^{-1}g_-))_+ = [E_g(g^{-1}g_-), T_g(g^{-1}g_+)]$$

y en M son análogas usando la factorización $l = \overline{mg} = gm$.

Esta construcción puramente dinámica, sugiere una generalización caracterizada geoméricamente, basada en las ideas que introdujimos al comienzo de este capítulo y que esquematizaremos a continuación.

Dada la estructura algebraica de \mathfrak{d} , podemos (al menos localmente) definir una acción de D sobre los subgrupos G y M . Denotamos P^G y P^M los espacios de fases (variedades simplécticas) de dos sistemas dinámicos sobre G y M . Los espacios de fases pueden ser, en principio, los espacios de lazos de los fibrados cotangentes como en el caso de la dualidad T usual o como en la generalización que acabamos de describir, el espacio de las funciones de $\mathbb{R} \times S^1 \rightarrow G, M, D$.

Supongamos que la acción puede llevarse a los espacios de fases $P^{G,M}$, de manera tal que generen una acción simetría con respecto al álgebra extendida $L\hat{\mathfrak{d}}$ (vease, por ejemplo, la expresión (2.7)), entonces, tendremos el diagrama

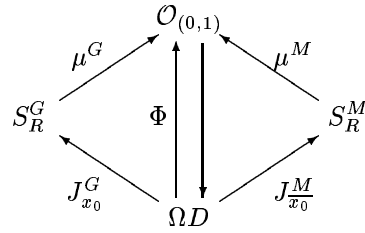
$$\begin{array}{ccc} P^G & & P^M \\ \mu^G \searrow & & \swarrow \mu^M \\ & (L\hat{\mathfrak{d}}^*, \{\}_K - K) & \\ & \downarrow & \\ & O_{(0,1)}^{K-K} \xrightarrow{\Phi} (\Omega D, \omega = \int \langle (l^{-1}dl)', l^{-1}dl \rangle) & \end{array}$$

siendo $\mu^{G,M}$ las aplicaciones momento (equivariantes) correspondientes. De esta manera, vemos que $P^{G,M}$ son **duales con respecto** a ΩD , ya que las flechas en el diagrama son aplicaciones Poisson. La dinámica, como en el caso que describimos al principio, escrita en *forma colectiva* terminará de definir los sistemas dinámicos duales.

Los *subespacios dualizables admisibles* en P^G , en los cuales la dualidad es **completa**, serán de la forma $S_R^G = LD \cdot x_0$, donde $x_0 \in P^G$ es tal que $\mu^G(x) = (0, 1)$. En P^M se definen de manera análoga en base a la acción de LD sobre P^M . Definiendo

$$\begin{aligned} J_{x_0, \overline{x_0}}^{G,M} &: \Omega D \longrightarrow S_R^{G,M} \subset P^{G,M} \\ &: l \longrightarrow l \cdot x_0 \end{aligned}$$

tendremos un diagrama que indica las *transformaciones canónicas de dualidad*, generalizando el diagrama (2.11) para la dualidad-T de Poisson Lie, dado por



4.5.2. Dualidad e integrabilidad

Entre los sistemas integrables, una clase muy importante es aquella formada por los sistemas que admiten pares de Lax generalizados basados en matrices r [37][38][39] (y pares de Lax generalizados, ver [31]). Entre estos sistemas integrables, se cuentan los sistemas Toda[40], los sistemas semiclásicos correspondientes a grupos cuánticos [39] y sistemas relacionados con espacios simétricos [31].

Daremos una idea de cómo construir nuevos sistemas duales a partir de éstos, siguiendo las ideas presentadas en este capítulo e introduciendo nuevas interesantes propuestas dignas de ser investigadas en el futuro.

Los sistemas integrables usuales basados en matrices r presentan, en general, como espacio de fases un álgebra de Lie \mathfrak{g} y una estructura de Poisson $\{\}^r$ dada por un elemento $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que satisface la ecuación (modificada) de Yang-Baxter Clásica [38][10]. El hecho de satisfacer esta ecuación se puede ver de forma equivalente a que r defina una estructura de biálgebra tipo coborde en \mathfrak{g} .

Es sabido que estos sistemas, entre los que se cuentan los sistemas Toda, por ejemplo, admiten simetrías del tipo Lie-Poisson con respecto al grupo Lie-Poisson G generado por \mathfrak{g} [36] [41].

Entonces, dado lo discutido en la este capítulo, la búsqueda de espacios que admitan esta simetría, dotándolos con una diámica apropiada, daría una familia de modelos duales a $(\mathfrak{g}, \{\}^r)$.

Por otro lado, la estrecha relación entre estos sistemas integrables y teorías de campos exactamente solubles (conformes) con el mismo tipo de simetrías como los WZW[33], los sigma Poisson [16], teorías Yang-Mills tipo BF vistas como modelos sigma Poisson [48] , sugiere la existencia de **dualidades** entre estas teorías, en principio, muy distintas.

Estas dualidades, también pueden estar relacionadas con la idea de acciones de simetría de grupoides en relación a los sistemas Toda [43][48] y los sigma Poisson [16], como conjeturamos al comienzo de este capítulo. También, trabajos como [43] sugieren relaciones entre dualidades asociadas a este tipo de sistemas pero basadas en distintos tipos de simetrías.

En un contexto más general [31], se puede hablar de matrices r generalizadas, que conducen a sistemas integrables de manera análoga a las matrices r usuales. En este caso, así como las matrices r usuales están asociadas a estructuras de biálgebras de Lie y triples de Manin, las matrices r generalizadas estan asociadas a estructuras de Lie en productos bicruzados y extensiones twilled.

Estas matrices r generalizadas satisfacen las llamadas ecuaciones de Yang-Baxter generalizadas. Algunas soluciones de estas ecuaciones están relacionadas con conexiones sobre espacios simétricos y la descomposición de Iwasawa del espacio de sus transformaciones afines [31].

Basándonos en lo que venimos desarrollando en este capítulo, es de esperar encontrar dualidades entre sistemas basados en espacios simétricos, construyéndolas a partir de las matrices r generalizadas y de las estructuras twilled que definen.

En particular, se espera recuperar el tipo de dualidades descritas en [35], [59] y [17] como casos particulares.

Capítulo 5

Conclusiones

"Las conclusiones de la pasión son las únicas dignas de fe", Kierkegaard.

Hemos descrito la dualidad-T de Poisson-Lie desde el formalismo hamiltoniano. Esta descripción fue hecha en términos geométricos, y permitió observar la existencia de acciones de simetría de un mismo grupo, el loop group del doble de Drinfeld centralmente extendido, sobre los espacios de fases correspondientes a los modelos T-duales.

Las transformaciones canónicas de dualidad fueron obtenidas en términos de las aplicaciones momento que generan estas simetrías y mapeos Poisson que vinculan la órbita coadjunta de extensión central pura con subsistemas hamiltonianos dentro de los espacios de fases, a los que llamamos subespacios dualizables admisibles. Estos espacios y las flechas, simbolizando los mapeos Poisson correspondientes, fueron sintetizados en un diagrama a partir del cual se pueden leer las transformaciones de dualidad.

A su vez, esta descripción nos permitió notar que las funciones hamiltonianas que dan las dinámicas en los espacios de fases de los modelos duales deben estar escritas en forma de movimiento colectivo con respecto a las aplicaciones momento correspondientes y a una función hamiltoniana arbitraria sobre la órbita. Esto permite construir una familia de modelos duales sobre grupos Lie-Poisson duales, cada par parametrizado por el hamiltoniano impuesto sobre la órbita.

Elecciones particulares de esta dinámica permitieron reconstruir los modelos sigma duales conocidos, así como también, las transformaciones de dualidad conocidas. También, caracterizamos los subespacios dualizables admisibles en estos casos particulares, recuperando sistemáticamente resultados conocidos para la dualidad-T abeliana y semiabeliana.

Esta descripción de la dualidad-T, permitió identificar elementos geométricos que son esenciales para generar sistemas dinámicos duales, en el sentido de que es posible obtener una solución de un modelo a partir de una del otro. Abstrayéndonos de las características particulares de la dualidad basada en grupos Lie-Poisson, propusimos caminos para generalizarla e indicamos criterios generales para la construcción de los modelos duales correspondientes.

Dentro de este análisis general, estudiamos algunas dualidades expuestas en la literatura como generalizaciones de la dualidad-T, señalando la presencia de los elementos geométricos esenciales que habíamos singularizado.

Otras generalizaciones, que no están presentes en la literatura, fueron propuestas como posibles futuras direcciones de estudio para obtener y caracterizar nuevas clases de modelos duales.

Bibliografía

- [1] Harnad J. "Constrained Hamiltonian systems on Lie Groups, Moment Map Reductions and Central Extensions", Can. J. Phys. 72, 375-388 (1994)
- [2] H.-J. Lu "Momentum Mappings and Reduction of Poisson Actions", Symplectic geometry, grupoids, and integrable systems (Berkley, CA, 1989), 209-226, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 20 Springer, New York, 1991
- [3] J.-H. Lu, A. Weinstein "Poisson-Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions" J. Diff. Geom. 31(1990), 501-526
- [4] J. Marsden, A. Weinstein, "Reduction of symplectic manifolds with symmetry", Rep. Math. Phys. 5 (1974) 121-130
- [5] C. Klimcik, P. Severa, "Poisson-Lie T-duality and loop groups of Drinfeld doubles", hep-th/9512040; C. Klimcik, P. Severa, "Dual non-Abelian duality and the Drinfeld double", hep-th/9502122; C. Klimcik, "Poisson-Lie T-duality", hep-th/9509095
- [6] A. Stern, "Hamiltonian approach to Poisson Lie T-duality", hep-th/9811256
- [7] O. Alvarez, C.-H. Liu, "Target-space duality between simple compact Lie groups and Lie Algebras under the hamiltonian formalism: I. Remnants of duality at the classical level", hep-th/9503226
- [8] S. Majid, E.J. Beggs, "Poisson-Lie T-duality for quasitriangular Lie bialgebras", math.QA/9906040
- [9] A. Yu. Alekseev, C. Klimcik, A.A. Tseytlin, "Quantum Poisson-Lie T-duality and WZNW model", hep-th/9509123
- [10] H. Montani, "From Hamiltonian systems to Lie bialgebras", Instituto Balseiro, notas en evolución.
- [11] Bourbaki, N. (1972) *Groupes et Algebres de Lie*, Hermann, Paris
- [12] Marmo, Michor, Grabowski, Alekseevsky, "Poisson structures on the cotangent bundle of a Lie group or a principle bundle and their reduction", J. Math. Physics 35 (1994), 4909-4928.
- [13] O. Alvarez, "Target space duality I: General theory", hep-th/0003177; O. Alvarez, "Target space duality II: Applications", hep-th/0003178
- [14] A. Yu. Alekseev, A. Z. Malkin, "Symplectic structures associated to Lie-Poisson groups", hep-th/9303038

- [15] D. Alekseevsky, J. Grabowski, G. Marmo, P.W. Michor, "Poisson structures on double Lie groups", math.DG/9801028
- [16] I. Calvo, F. Falceto, D. Garcia-Alvarez, "Topological Poisson Sigma models on Poisson-Lie groups", hep-th/0307178 v1
- [17] C. Klimcik "Yang-Baxter σ -models and dS/AdS T-duality", hep-th/0210095
- [18] A. Stern, "T-duality for coset models", hep-th/9903170
- [19] C. Klimcik, P. Severa, "Dressing cosets", hep-th/9602162
- [20] W. Bai-Ling, "Symplectic approach of Wess-Zumino-Witten model and gauge field theories", dg-ha/9504001
- [21] V. Guillemin, S. Sternberg, "Symplectic techniques in physics", Cambridge University Press
- [22] A. Pressley, G. Segal, "Loop groups", Clarendon Press-Oxford
- [23] M. Zucalli, "Extensiones de álgebras de Lie en el marco de la geometría simpléctica", Tesis de doctorado, diciembre de 1997, UNLP
- [24] A. Alekseev, Y. Kosmann-Schwarzbach, "Manin pairs and moment maps", math.DG/9909176
- [25] A. Alekseev, A. Malkin, E. Meinrenken, "Lie group valued moment maps", dg-ga/9707021
- [26] A. Weinstein, "The local structure of Poisson manifolds", J. Diff. Geometry 18 (1983), 523-557; A. Weinstein, A. C. da Silva; "Geometric models for Non-commutative algebras", University of California, Berkeley AMS, 1999
- [27] E. Urdapilleta, "La tercera edad, el Amor y Yo"
- [28] C. Klimcik, "Quasitriangular WZW model", hep-th/0103118
- [29] J. Juknevich, "Teoría de cuerdas en orientifolds y en puntos de Gepner", tesis de maestría 2003, Instituto Balseiro; A. Tanasijczuk "Modelos de Gepner heteróticos en 4 y 6 dimensiones", tesis de maestría 2003, Instituto Balseiro
- [30] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, "Poisson-Lie groups and complete integrability I. Drinfeld bigebras, dual extensions and their canonical representations", Ann. Inst. Henri Poincaré-Physique théorique, vol 49, nro. 4, 1988, 433-460
- [31] M. Bordemann, "Generalized Lax Pairs, the modified classical Yang-Baxter equation, and affine geometry of Lie groups", Comm. Math. Phys. 135, 201-216 (1990)
- [32] A. Weinstein, "The geometry of momentum", math.SG/0208108
- [33] L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P.Ruelle, I. Tsutsui, A. Wipf; "On Hamiltonian reductions of the Wess-Zumino-Novikov-Witten theories", Phys. Rep. Vol 222, Numb. 1, (dec. 1992)
- [34] O. Mokhov, "Nonlinear sigma models and symplectic geometry on loop spaces of (pseudo)Riemannian manifolds", hep-th/9301048; "Symplectic and Poisson geometry on Loop spaces of manifolds and nonlinear equations", hep-th/9503076

- [35] O. Alvarez, "Pseudoduality in sigma models", hep-th/0204011; O. Alvarez, "Target space pseudoduality between dual symmetric spaces", hep-th/0004120
- [36] A. Yu. Alekseev, I.T. Todorov, "Quadratic brackets from symplectic forms", arXiv(1993); A. Yu. Alekseev, P. Schaller, T. Strobl, "The topological G/G WZW model in the generalized momentum representation", hep-th/9505012
- [37] M.A. Semenov-Tian-Shansky, "Classical r -matrices, ax equations, Poisson Lie groups and dressing transformations", preprint; "Dressing transformations and Poisson Group actions", Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 1237-1260
- [38] N. Reshetikhin, "Poisson Lie groups and Lie bialgebras", preprint. Lect. 2, 2000, Bariloche; N. Reshetikhin, A. A. Voronov, A. Weinstein, "Semiquantum geometry", q-alg/9606007
- [39] V. Chari, A. Pressley, "Quantum groups", Cambridge University Press
- [40] I. Tsutsui, L. Feher, "Global aspects of the WZNW reduction to Toda theories", hep-th/9408065; G.E. Arutyunov, "Construction of trigonometric Toda r -matrices via Hamiltonian reduction of the cotangent bundle over loop groups", hep-th/9510163; L. Feher, "Dynamical r -matrices and Poisson-Lie symmetries in the chiral WZNW model", hep-th/0212006
- [41] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov, "Poisson-Lie groups and classical W -algebras" Int. Jour. Mod. Phys. A, vol. 7, No. 5(1992) 853-876
- [42] A.S. Cattaneo, G. Felder, "Poisson sigma models and symplectic groupoids", math.SG/0003023
- [43] J.Balog, L.Feher, L.Palla, "On the chiral WZNW phase space, exchange r -matrices and Poisson-Lie groupoids", hep-th/9912173
- [44] V.I. Arnold, "Mathematical methods of classical mechanics", Springer-Verlag; J. Marsden, R. Abraham, "Foundations of mechanics", The Benjamin/Cummings Publishing Company; R. Berndt, "An introduction to symplectic geometry", American Mathematical Society; J.M. Souriau, "Structure des systemes dynamiques", Paris, Dunod, 1970
- [45] J.A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, "Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics", Cambridge monographs on mathematical physics
- [46] M.A. Semenov-Tian-Shansky, "What is a classical r -matrix?", Funct. Anal. Appl. 17 (4) (1983), 259-272
- [47] Bojowald, M., Strobl, T.: Classical solutions for Poisson Sigma Models on a Riemann surface. arXiv:hep-th/0306217
- [48] P. Schaller, T. Strobl, Poisson- σ models: A generalization of 2d Gravity-Yang-Mills systems, arXiv:hep-th/9411163
- [49] E. Alvarez, L.Alvarez-Gaume, J.L.F. Barbon, Y. Lozano, Nucl. Phys. B415 (1994) 72; E. Alvarez, L.Alvarez-Gaume, Y. Lozano Nucl. Phys. B424 (1994) 155; Y. Lozano, Phys. Lett. B355 (1995) 165

- [50] V.L. Golo, *Nonlinear regimes in spin dynamics of superfluid ^3He* , Lett. Math. Phys. 5 (1981) 155-159.
- [51] J.A. Leggett, *A teoretical description of the new phases of liquid ^3He* , Rev. Mod. Phys. Vol 47, Nro. 2, (1975)
- [52] Kobayashi, Nomizu, "*Foundations of differential geometry-Vol. 1*", Tracts in Mathematics, John Wiley & Sons
- [53] J. Harnad, B.A. Kupershmidt, "*Symplectic geometries on $T^*\tilde{G}$, hamiltonian group actions and integrable systems*", hep-th/9210095
- [54] A. Giveon, M.Porrati, E. Revinovici, "*Target space duality in string theory*", Phys. Rept. 244 (1994) 77-202
- [55] K. Sfetsos, "*Canonical equivalence of non-isometric sigma-models and Poisson-Lie T-duality*", Nucl. Phys. B, 517:549-566, 1998; "*Poisson Lie T-duality beyond the classical level and the renormalization group*" Phys. Lett. B, 434:365-375, 1998
- [56] V.G. Drinfeld "*Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*", Sov. Math. Dokl., 27:68, 1983
- [57] A. Alekseev, E. Meinrenken, C. Woodward, "*A fixed point formula for loop group actions*", math.SG/0005046
- [58] C. Klimcik, P.Severa, "*T-duality and the moment map*", hep-th/9610198
- [59] E. A. Ivanov, "*Duality in $d=2$ sigma models of chiral field with anomaly*", Theor. Math. Phys. 71 (1987) 474-484
- [60] S. Lang, "*Differential manifolds*", Addison-Wesley series in mathematics