

PROYECTO INTEGRADOR
CARRERA DE INGENIERÍA NUCLEAR

MODELADO DE COMPONENTES DE UN REACTOR NUCLEAR UTILIZANDO MATLAB-SIMULINK

PABLO MARTÍN GAGLIARDI

Director:
Ing. Andrés Etchepareborda

Instituto Balseiro
Centro Atómico Bariloche
Universidad Nacional de Cuyo

Junio 2005

Dedicado a mis viejos

Resumen

La finalidad de este trabajo es la confección de componentes de biblioteca para la simulación de distintas partes de un reactor nuclear. Puntualmente los componentes que se han modelado son dos: un tanque que en su interior contiene agua líquida y vapor en estado de saturación, y una sección de cañería en cuyo interior puede circular agua en estado líquido, vapor, o ambos en un flujo bifásico.

El trabajo muestra las ecuaciones utilizadas y de qué manera se ha encarado la implementación, la cual se ha realizado en el entorno de programación Matlab-Simulink. El paso de tiempo de los modelos es discreto y fijo.

En el caso del tanque se plantea un equilibrio termodinámico entre ambas fases en todo momento, y no contempla el caso de que exista sólo una de ellas.

En el caso de la sección de cañería se plantea flujo homogéneo cuando existen dos fases, es decir que se lo trata como si fuera un fluido en una sola fase, pero con las propiedades promedio del líquido y el vapor. Además considera pérdidas de carga por fricción distribuída y concentrada, y diferencias de altura entre la entrada y la salida del flujo.

A fin de conectar los diferentes componentes de librería, cada uno de ellos recibe una determinada información de otros componentes, y devuelve un cierto estado de sus variables internas.

Abstract

The primary objective of this work is the development of library components for the simulation of different parts of nuclear reactors. Specifically, two components have been modelled: a tank in which there is water and saturated steam, and a pipe section through which it may flow liquid water, steam or both in two-phase flow.

This work shows the equations that have been used and the way in which they have been implemented, which have been carried out in the MATLAB-Simulink programming environment. The time step for the models is discrete and fixed.

For the tank case a thermo-dynamic equilibrium between phases is considered at all times, and does not contemplate the situation in which one of them do not exist.

As for the pipe section, if both phases exists, a homogeneous flow is considered, that is to say that is treated as if it was a one-phase flow, but with properties averaged between steam's and liquid's. Furthermore, it's considered distributed and concentrated friction for head-loss, as well as a height difference between inlet and outlet.

In order to connect the different library components, each of them receives a determined information from the other components, and gives back a certain state of its internal variables.

Índice

Índice	v
Modelo de tanque con agua en saturación	1
Ecuaciones constitutivas	1
Implementación	4
Evaluación del modelo	4
Modelo de sección de cañería	7
Ecuaciones constitutivas	7
Conservación de la masa	8
Conservación del momento	8
Conservación de la energía	8
Factores de fricción	9
Implementación	9
Implementación para agua líquida	10
Implementación para dos fases	13
Transición entre una implementación y otra	14
Análisis de estabilidad	15
Evaluación del modelo	17
Modelo de tanque y de cañería en conjunto	22
Bibliografía	27
Conclusiones	28
Tabulado de funciones	29
Diagramación del Proyecto Integrador	34
Aprendizaje MATLAB-SIMULINK	34
Familiarización con métodos existentes	34
Búsqueda bibliográfica tanque	34
Llenado de tablas tanque	35
Confección programa tanque	35
Pruebas y correcciones tanque	35
Búsqueda bibliográfica cañería	35
Llenado de tablas cañería	35
Confección programa cañería	35
Pruebas y correcciones cañería	35
Redacción del informe	35
Evaluación Económica	36
Agradecimientos	38

CAPÍTULO I

Modelo de tanque con agua en saturación

Este tipo de tanque contiene exclusivamente agua líquida y vapor de agua en equilibrio termodinámico. A la vez entra y sale agua a través de 7 bocas en el tanque. El modelo supone que este equilibrio se establece instantáneamente, sin transitorios. En ningún momento el tanque contendrá una sola fase, es decir, agua subenfriada o vapor sobresaturado. Este componente recibe como información los caudales entrantes y salientes al mismo, junto con su entalpía, mientras que devuelve la presión en cada una de sus bocas de entrada/salida y la entalpía de saturación a la presión del tanque. En la Fig. 1 se muestra un diagrama del mismo. No se ha tenido en cuenta la energía cinética que trae el agua y se pierde en el tanque, transformándose en energía interna del mismo, debido a que lo consideramos un término despreciable frente a los demás.

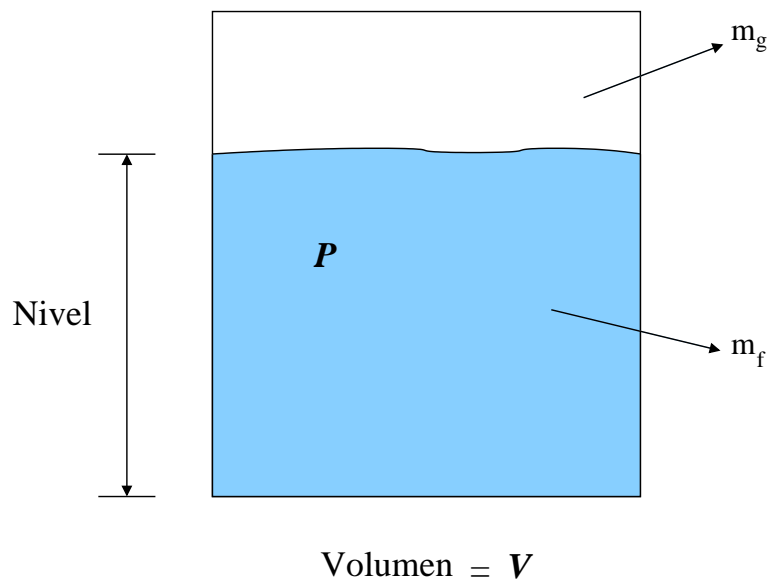


Figura 1. Tanque en saturación.

Ecuaciones constitutivas

Denominamos M a la masa total (líquido + vapor) y V al volumen (constante) del tanque. Siendo ρ_f la densidad del líquido y ρ_g la densidad del vapor, m_f la masa del agua líquida y m_g la masa del vapor, encontramos que, a partir de:

$$V = \frac{m_f}{\rho_f} + \frac{m_g}{\rho_g} \quad (1)$$

$$M = m_f + m_g \quad (2)$$

Resulta:

$$m_f = \frac{M - \rho_g \cdot V}{1 - \frac{\rho_g}{\rho_f}} \quad (3)$$

$$m_g = \frac{\rho_f \cdot V - M}{\frac{\rho_f}{\rho_g} - 1} \quad (4)$$

La energía contenida en el tanque es:

$$E = e_f \cdot m_f + e_g \cdot m_g \quad (5)$$

La escribiremos de la siguiente manera por conveniencia:

$$E = \left(e_f + \frac{p}{\rho_f} \right) \cdot m_f + \left(e_g + \frac{p}{\rho_g} \right) \cdot m_g - p \cdot \left(\frac{m_f}{\rho_f} + \frac{m_g}{\rho_g} \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (7) \\ E = h_f \cdot m_f + h_g \cdot m_g - p \cdot V \end{aligned} \quad (8)$$

Utilizando (1) y (2) obtenemos:

$$V - \frac{M}{\rho_f} = \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right) m_g$$

Y si además utilizamos la relación $H = h_f \cdot m_f + h_g \cdot m_g$:

$$H - h_f \cdot M = (h_g - h_f) \cdot m_g$$

Despejamos m_g de estas dos últimas ecuaciones e igualamos:

$$\frac{H - h_f \cdot M}{h_g - h_f} = \frac{V - \frac{M}{\rho_f}}{\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f}}$$

Operando obtenemos:

$$H = \frac{h_g - h_f}{\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f}} \cdot V + \frac{h_f \cdot \rho_f - h_g \cdot \rho_g}{\rho_f - \rho_g} \cdot M \quad (9)$$

Llamamos:

$$f_1 = \frac{h_g - h_f}{\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f}} \quad (10)$$

$$f_2 = \frac{h_f \cdot \rho_f - h_g \cdot \rho_g}{\rho_f - \rho_g} = h_g - \frac{f_1}{\rho_g} \quad (11)$$

(12)

Y llegamos a:

$$H = f_1 \cdot V + f_2 \cdot M \quad (13)$$

Notemos que las propiedades del agua dependen de p y de T , pero estas dos no son independientes entre sí trabajando en saturación, entonces podemos poner todas las propiedades en función de sólo una de ellas, y en nuestro caso será p . Ergo f_1 y f_2 dependen sólo de p , y si derivamos respecto al tiempo, tenemos:

$$\dot{H} = \left(\frac{df_1}{dp} \cdot V + \frac{df_2}{dp} \cdot M \right) \cdot \frac{dp}{dt} + f_2 \cdot \dot{M} \quad (14)$$

La conservación de la masa establece:

$$\dot{M} = W_{in} - W_{out} \quad (15)$$

donde:

W_{in} : caudal másico entrante $\left[\frac{kg}{s} \right]$

W_{out} : caudal másico saliente $\left[\frac{kg}{s} \right]$

La variación de la energía la obtenemos derivando (8) e insertando (14):

$$\dot{E} = \dot{H} - \frac{dp}{dt} \cdot V = \left(\frac{df_1}{dp} \cdot V + \frac{df_2}{dp} \cdot M \right) \cdot \frac{dp}{dt} + f_2 \cdot \dot{M} - \frac{dp}{dt} \cdot V$$

Sabemos que el aumento de energía está dado por $h_{in} \cdot W_{in} - h_{out} \cdot W_{out} + Q$, de manera que:

$$\left(\frac{df_1}{dp} \cdot V + \frac{df_2}{dp} \cdot M \right) \cdot \frac{dp}{dt} + f_2 \cdot \dot{M} - \frac{dp}{dt} \cdot V = h_{in} \cdot W_{in} - h_{out} \cdot W_{out} + Q$$

h_{in} : entalpía específica del agua entrante $\left[\frac{J}{kg} \right]$

h_{out} : entalpía específica del agua saliente $\left[\frac{J}{kg} \right]$

Q : calor entrante en el tanque

Despejando:

$$\frac{dp}{dt} = \left[\left(\frac{df_1}{dp} - 1 \right) \cdot V + \frac{df_2}{dp} \cdot M \right]^{-1} \cdot \left(h_{in} \cdot W_{in} - h_{out} \cdot W_{out} + Q - f_2 \cdot \dot{M} \right) \quad (16)$$

Este valor de $\frac{dp}{dt}$ nos permite conocer la evolución de la presión en el tanque; esta presión junto con la masa M describen completamente al sistema.

En síntesis, en las ecuaciones (4), (15) y (16) se basa principalmente la implementación. Recordar que nos basamos en todo momento en un caso de equilibrio termodinámico, es decir, que la velocidad de transferencia de masa de una fase a otra tiende a infinito.

Implementación

Puesto que trabajamos con intervalos de tiempo discretos, utilizaremos el supraíndice k para denotar el tiempo actual, y $k+1$ para el intervalo siguiente.

Habiendo actualizado todas las variables al tiempo k , leemos de las entradas los caudales (W), las entalpías (h), y el calor entrante (Q), que serán consideradas del intervalo $k+1$; considerando:

$$\dot{M} = W_{in}^{k+1} - W_{out}^{k+1}$$

Calculamos, a partir de (16):

$$\frac{dp^{k+1}}{dt} = \left[\left(\frac{df_1^k}{dp} - 1 \right) \cdot V + \frac{df_2^k}{dp} \cdot M^k \right]^{-1} \cdot \left(h_{in}^{k+1} \cdot W_{in}^{k+1} - h_{out}^{k+1} \cdot W_{out}^{k+1} + Q^{k+1} - f_2 \cdot \dot{M} \right)$$

Este último es utilizado para calcular la presión en el paso siguiente según:

$$p^{k+1} = p^k + \frac{dp^{k+1}}{dt} \cdot Ts$$

La masa total se obtiene de la fórmula:

$$M = \dot{M} \cdot Ts = (W_{in}^{k+1} - W_{out}^{k+1}) \cdot Ts$$

Y ahora con p y M calculamos la entalpía, el nivel de agua, y cualquier condición en ese instante.

Evaluación del modelo

Es momento de corroborar el funcionamiento del modelo, sometiéndolo a una serie de pruebas correspondientes a distintas situaciones en las que el tanque se puede encontrar, y acerca de las cuales tenemos una idea de cuál debe ser la evolución de las variables del mismo.

Mostraremos un caso en el que un tanque cuyo volumen es $10m^3$, con una masa inicial de agua (líquido y vapor) de $8000kg$ y una presión de $10^5 Pa$ (aproximadamente una atmósfera), recibe agua a través de una de las entradas, cuya entalpía específica es de $1, 5 \cdot 10^6 J/kg$, e ingresa con un caudal que depende de la presión en el tanque, a saber:

$$W = 0,03 \cdot \sqrt{P_{high} - p} \left[\frac{kg}{s} \right]$$

Donde:

P_{high} : $2 \cdot 10^5$ Pa
 p : presión en el tanque

La evolución de las variables del tanque se muestra en la Fig. 2. Observamos que a medida que la presión del tanque aumenta el caudal entrante es cada vez menor, hasta que la masa de agua del mismo llega a un punto estacionario, cuando $p = P_{high}$. La temperatura y la energía acumulada en el tanque inicialmente aumentan, hasta que alcanzan el punto estacionario recién mencionado. Se ha hecho un balance entre la energía y la masa entregada y las condiciones del tanque, y corroboramos que todos estos resultados coinciden con lo esperado.

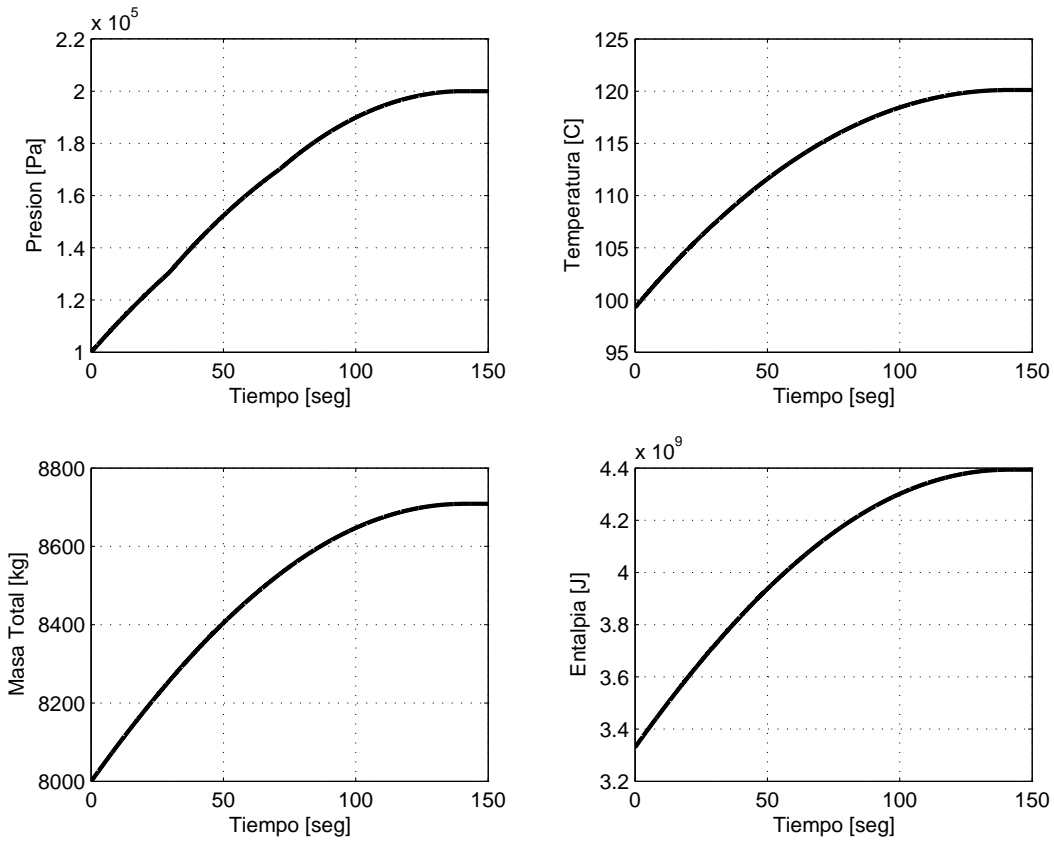


Figura 2. Evolución de las variables del tanque a lo largo del tiempo. Test 1.

La expresión utilizada del caudal dependiente de la presión es arbitraria, y no considera ningún tipo de cálculo de fricción, ni la densidad del líquido entrante; simplemente conseguimos que el caudal disminuya al aumentar la presión, hasta alcanzar un determinado valor en que el caudal es cero.

Otra prueba fue realizada a fin de asegurarnos del buen funcionamiento del modelo. Con las mismas dimensiones del tanque que en el caso anterior, estando ubicada la boca de entrada a 7 metros de altura sobre la base. El caudal de agua tiene ahora la forma:

$$W = 0,08 \cdot \sqrt{|P_{high} - p|} \cdot \text{sign}(P_{high} - p) \left[\frac{kg}{s} \right]$$

Tanto P_{high} como las condiciones iniciales son las mismas que en el caso precedente. El caudal será entrante si $P_{high} > p$ (W positivo), y será saliente si $P_{high} < p$ (W negativo). Aquí tampoco se utiliza ningún tipo de cálculo de fricción para llegar a esta fórmula. La única diferencia con el caso anterior radica en que existe un calor entrante al tanque de 10^6 [Watt]. En la Fig. 3 se muestra la evolución del sistema. Inicialmente la presión aumenta; hasta alcanzar P_{high} existe un caudal de agua entrante, mientras que a partir de entonces (aproximadamente a los 46 segundos) el caudal de agua es saliente (observar la curva de la Masa Total). La temperatura inicialmente aumenta junto con la presión, debido al ingreso de agua con alta entalpía específica (se encuentra en dos fases); incluso sigue aumentando una vez que el caudal de agua es saliente del tanque. A los 250 segundos, aproximadamente, el nivel de agua (que está bajando) alcanza la boca de entrada/salida; esto significa que a partir de allí lo que saldrá no es agua líquida sino vapor. Es entonces que la presión en el tanque baja rápidamente (en 10 segundos alcanza P_{high} nuevamente), así como también la temperatura. Finalmente, luego de los 260 segundos, con la presión y la temperatura estabilizadas, la masa continúa disminuyendo, como así también la entalpía total (consecuencia de la disminución de la masa).

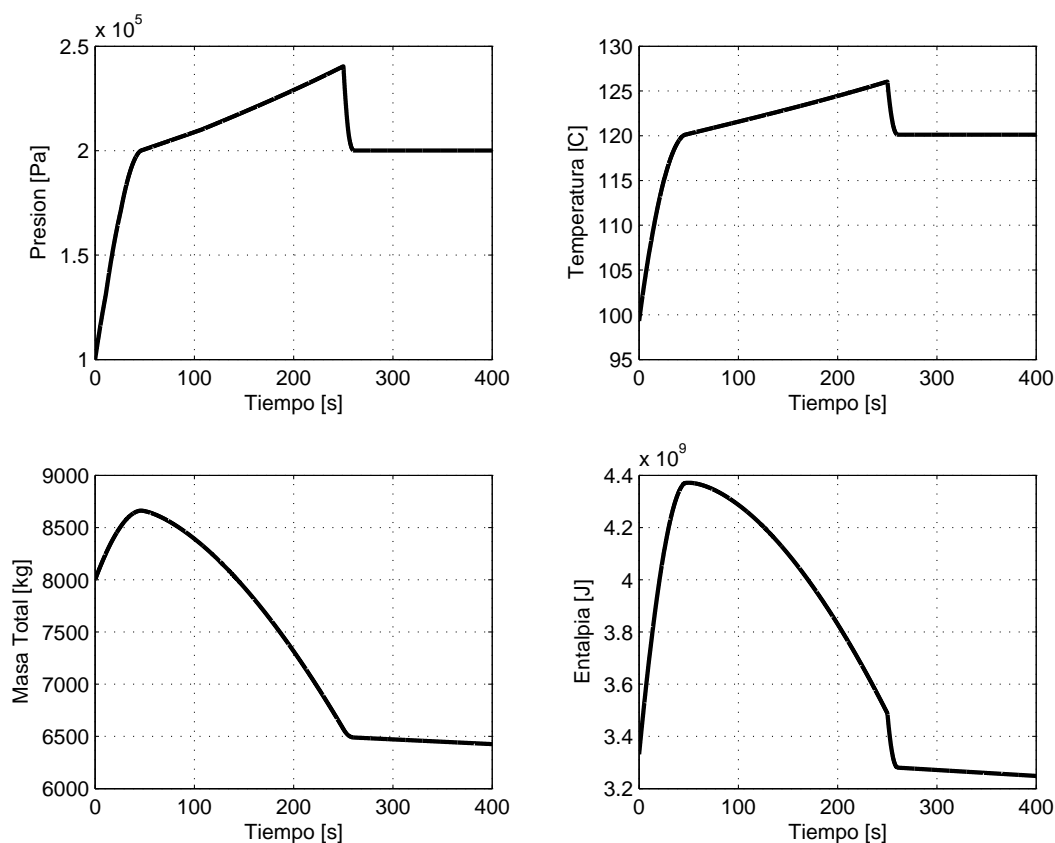


Figura 3. Evolución de las variables del tanque a lo largo del tiempo. Test 2.

CAPÍTULO II

Modelo de sección de cañería

Lo denominaremos indistintamente sección de cañería o simplemente caño, y está compuesto por un conducto de área constante, que a partir de las ecuaciones de masa, momento y energía calcula el caudal de fluido circulante a partir de las condiciones de presión en sus extremos; contempla la fricción concentrada o distribuida que pueda existir, y en el caso de que haya una diferencia de áreas entre éste y otro componente, la interfaz será abrupta; no se considerarán cambios graduales de sección.

La sección de cañería recibe como dato la presión en cada uno de sus extremos y la entalpía de entrada, y devuelve como resultado los caudales másicos y la entalpía de salida.

El agua circulante puede estar en una o dos fases (agua + vapor) y se utiliza un modelo de flujo homogéneo, con propiedades promediadas de ambas fases [Wallis]. En consecuencia, se utilizaron todas las relaciones válidas para flujo en simple fase, y en caso de existir dos fases, se consideraron propiedades específicas para vapor y líquido saturado, interpoladas linealmente mediante el título.

Ecuaciones constitutivas

A pesar de que en el modelo el paso de tiempo es discreto, al mostrar las ecuaciones la variable temporal será continua. Recién en la siguiente sección se mostrarán las variables como discretas.

Comenzaremos mencionando las variables con las que trabajaremos:

A	: área del caño
L	: longitud del caño
W	: caudal másico
μ	: viscosidad
ρ	: densidad del fluido
ν	: volumen específico
x	: título del vapor
h	: entalpía específica del fluido
V	: velocidad del fluido

Subíndices:

in	: correspondiente al fluido entrante
out	: correspondiente al fluido saliente
f	: correspondiente a la fase líquida
g	: correspondiente a la fase vapor

Cuando nos referimos a las variables sin subíndices, estamos hablando de las propiedades medias del fluido dentro del conducto. Son válidas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} V_{out} &= \frac{W_{out}}{A_{out} \cdot \rho_{out}} & V_{in} &= \frac{W_{in}}{A_{in} \cdot \rho_{in}} \\ V &= \frac{W_{in} + W_{out}}{2 \cdot A \cdot \rho} & \nu &= x \cdot \nu_g + (1 - x) \cdot \nu_f \\ \mu &= \frac{x}{\mu_g} + \frac{(1-x)}{\mu_f} & x &= \frac{h - h_f}{h_g - h_f} \end{aligned}$$

Dadas las diferentes propiedades del agua, ya sea que estemos trabajando en una sola fase o en dos, se han utilizado dos implementaciones distintas del modelo, pasando de una a otra según sea el caso. Las ecuaciones constitutivas, comunes a ambos, son las siguientes [White]:

Conservación de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} \cdot A \cdot L = W_{in} - W_{out} \quad (17)$$

Conservación del momento

$$\begin{aligned} A \cdot L \cdot \frac{d(V \cdot \rho)}{dt} + W_{out} \cdot V_{out} - W_{in} \cdot V_{in} + (p_{out} - p_{in}) \cdot A + \rho \cdot g \cdot A \cdot (z_{out} - z_{in}) \\ = (\Delta P_{pump} - \Delta P_f) \cdot A \end{aligned}$$

Donde ΔP_f contempla fricción distribuida y concentrada:

$$\Delta P_f = \underbrace{\frac{f \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L}{2D}}_{Distribuida} + \underbrace{\frac{K_c \cdot \rho \cdot V^2}{2}}_{Concentrada} \quad (18)$$

Y $\Delta P_{pump} = \rho \cdot \Delta H_{pump}$, puesto que en una bomba la curva H versus $V \cdot A$ es independiente de la densidad si la viscosidad se mantiene constante.

Consideremos ahora que aproximadamente:

$$V \simeq \frac{W_{in} + W_{out}}{2 \cdot \rho \cdot A}$$

A partir de aquí, utilizando $V_{out} = \frac{W_{out}}{A_{out} \cdot \rho_{out}}$ y $V_{in} = \frac{W_{in}}{A_{in} \cdot \rho_{in}}$, y dividiendo por A , la ecuación (17) queda finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{d(W_{in} + W_{out})}{dt} + \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{W_{out}^2}{A_{out} \cdot \rho_{out}} - \frac{W_{in}^2}{A_{in} \cdot \rho_{in}} \right) + \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) \\ = p_{in} - p_{out} + \Delta P_{pump} - \Delta P_f \end{aligned}$$

Conservación de la energía

$$\begin{aligned} \left(h_{out} + \frac{V_{out}^2}{2} + g \cdot z_{out} \right) \cdot W_{out} - \left(h_{in} + \frac{V_{in}^2}{2} + g \cdot z_{in} \right) \cdot W_{in} + A \cdot L \cdot \frac{d\left(\rho \cdot h - p + \frac{\rho \cdot V^2}{2}\right)}{dt} \\ = Q + \Delta P_{pump} \cdot V \cdot A \end{aligned}$$

No se ha considerado la disipación de energía por viscosidad, (que incluiría al término ΔP_f) pues consideramos que no escapa calor al ambiente sino que queda en el fluido, además de ser un término de importancia menor en la ecuación.

Factores de fricción

Fricción distribuída: la ecuación (18) contiene el coeficiente de fricción f , que depende solamente del número de Reynolds (Re_D) y de la rugosidad relativa de las paredes del conducto ($\frac{\epsilon}{D}$), cumpliendo la relación [White]:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log\left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re_D \cdot \sqrt{f}}\right)$$

en caso de que el flujo sea turbulento; mientras que, si es laminar,:

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Expresamos al número de Reynolds: $Re_D = \frac{W \cdot D}{\mu \cdot A}$, y recordamos que se considera flujo turbulento si $Re_D > 4000$, laminar si $Re_D < 2290$, y de transición si se encuentra entre estos dos valores, aproximadamente.

Fricción concentrada: puede deberse a codos, expansiones, contracciones y otras características geométricas del conducto. Se utiliza el coeficiente K_c de la ecuación (18). Como los cambios de área entre conductos son bruscos, utilizamos las siguientes relaciones:

$$\text{Contracción: } K_c = 0,42 \cdot \left(1 - \frac{A}{A_{in}}\right) \quad A < A_{in}$$

$$\text{Expansión: } K_c = \left(1 - \frac{A_{in}}{A}\right)^2 \quad A > A_{in}$$

Nota: Este K_c se utiliza en la ecuación (18) con la densidad y la velocidad del caño más angosto, de manera que si es una contracción serán los valores aguas abajo de la misma, mientras que si es una expansión serán los valores aguas arriba.

Implementación

Se utiliza un modelo de parámetros concentrados (ver Fig. 4), en el cual tenemos un coeficiente de fricción K_{fi} a la entrada, otro K_{fo} a la salida, y un volumen de control en el centro, a presión p , entalpía específica h y densidad ρ . El coeficiente K_{fi} contempla la pérdida de carga por fricción distribuída en la primera mitad del caño, la pérdida de carga por fricción concentrada, y el término de aceleración por cambio de área. El coeficiente K_{fo} contempla la pérdida de carga por fricción distribuída en la segunda mitad del caño.

Se considera como área de salida A_{out} al área del conducto A , y como área de entrada A_{in} la del componente inmediatamente anterior; ver Fig. 5. Como antes mencionamos, se han confeccionado dos implementaciones del modelo, una a utilizarse cuando el agua se encuentra en estado líquido, y otra para cuando se encuentra en dos fases. La razón de esto es la diferencia en las propiedades del agua entre los distintos casos. Una de las características de los líquidos es que son poco compresibles, y en lo que respecta a este trabajo, significa que si la presión cambia de un instante a otro, la densidad del fluido permanecerá prácticamente invariable, y este hecho se tiene en cuenta en la formulación de las ecuaciones. En dos fases la influencia de la presión sobre la densidad es importante, y se hace necesario trabajar con otro planteo del problema. En ambos casos se considera que no existe ninguna fuerza impulsora tal como una bomba, con lo que el término ΔP_{pump} es igual a cero, y se omitirá de aquí en adelante.

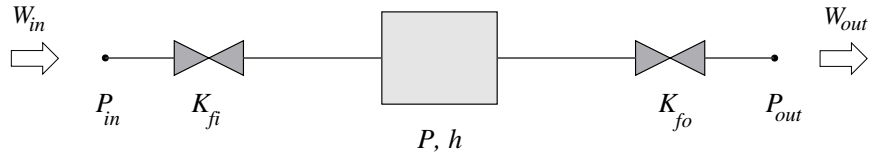


Figura 4. Modelo utilizado.

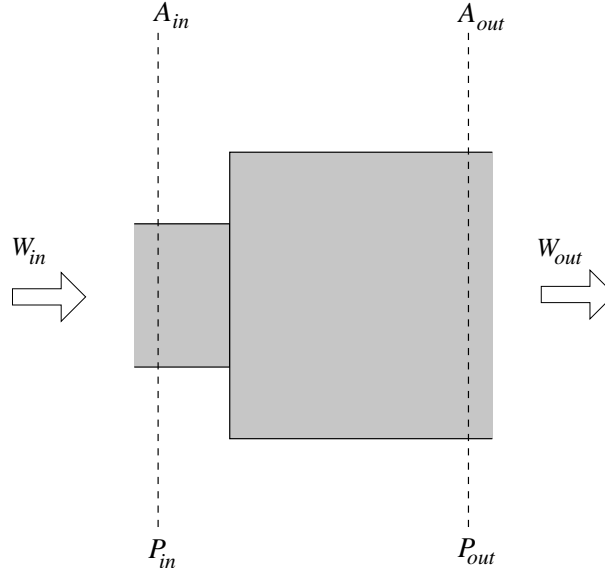


Figura 5. Sección de cañería. Áreas y presiones.

Implementación para agua líquida

A partir de la ecuación (18), y dejando de lado los términos de energía cinética (los que contienen V^2) y los de diferencias de altura (z_{out} y z_{in}), obtenemos la siguiente expresión:

$$A \cdot L \cdot \frac{d(\rho \cdot h - p)}{dt} = h_{in} \cdot W_{in} - h_{out} \cdot W_{out} + Q$$

Que bien podemos expresarla:

$$A \cdot L \cdot \left(\frac{d\rho}{dt} \cdot h + \frac{dh}{dt} \cdot \rho - \frac{dp}{dt} \right) = h_{in} \cdot W_{in} - h_{out} \cdot W_{out} + Q$$

Y utilizando (17), al tiempo que despreciamos $\frac{dp}{dt}$ frente a los demás términos:

$$A \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{dh}{dt} + (W_{in} - W_{out}) \cdot h = h_{in} \cdot W_{in} - h_{out} \cdot W_{out} + Q$$

Que operando queda:

$$A \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{dh}{dt} = (h_{in} - h) \cdot W_{in} + (h - h_{out}) \cdot W_{out} + Q \quad (19)$$

Esto en forma discreta, bajo un esquema Backward Euler, con las variables de estado actualizadas al instante k , y la entalpía de entrada del instante siguiente ($k + 1$), lo expresamos:

$$\frac{h^{k+1} - h^k}{Ts} = \frac{1}{A \cdot L \cdot \rho} \cdot \left[(h_{in}^{k+1} - h^k) \cdot W_{in}^k + (h^k - h_{out}^k) \cdot W_{out}^k + Q^k \right] \quad (20)$$

Donde Ts es el paso de tiempo que utilizamos en el modelo. De aquí se despeja inmediatamente h^{k+1} , con la cual calculamos la densidad.

Vale la pena aclarar que se considera como entalpía de salida a la media del caño (h), y lo mismo vale para la densidad y cualquier otra propiedad del agua. En estas ecuaciones suponemos a los caudales positivos, es decir que por ejemplo W_{out} efectivamente es saliente; en cambio en la implementación estos pueden tomar valores negativos, y en tal caso W_{out} sería entrante, y la entalpía saliente sería h_{in} en lugar de h_{out} .

Pasamos entonces a la ecuación de momento (18), expresada:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{dW_{in}}{dt} + \frac{W_{in}^2}{A \cdot \rho} \cdot \left(\frac{1}{A_{out}} - \frac{1}{A_{in}} \right) + 0,5 \cdot \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) &= p_{in} - p - \Delta P_{fi} \\ \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{dW_{out}}{dt} + 0,5 \cdot \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) &= p - p_{out} - \Delta P_{fo} \end{aligned} \quad (21)$$

Si las sumamos podemos expresar, ahora en forma discreta, una vez más bajo un esquema Backward Euler:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{(W_{in}^{k+1} + W_{out}^{k+1} - W_{in}^k - W_{out}^k)}{Ts} + \frac{W_{in}^{k2}}{A \cdot \rho} \cdot \left(\frac{1}{A_{out}} - \frac{1}{A_{in}} \right) + \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) \\ = p_{in}^{k+1} - p_{out}^{k+1} - \Delta P_f \end{aligned}$$

La razón por la cual utilizamos solamente W_{in} en el término de aceleración y no W_{out} es que la aproximación $W_{in} \simeq W_{out} = W$, que podemos realizar gracias a que los cambios en la densidad son muy pequeños en estado líquido, nos permite utilizar cualquiera de los dos. Nótese que también aproximamos $\rho_{in} \simeq \rho_{out} = \rho$. Definiremos ahora:

$$K_{fia} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{A_{out}} - \frac{1}{A_{in}} \right)$$

Expresemos el término $\Delta P_f = \Delta P_{fi} + \Delta P_{fo}$ en función de los caudales, basados nuevamente en $W_{in} \simeq W_{out} = W$.

Fricción distribuída:

$$\Delta P_{fd} = \frac{f \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L}{2D} = \frac{f \cdot \rho \cdot L}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{W}{\rho \cdot A} \right)^2 = \frac{f \cdot L}{2 \cdot D \cdot \rho \cdot A^2} \cdot W^2$$

Hagamos:

$$\Delta P_{fd} = \frac{K_{fid} \cdot W_{in}^2}{\rho} + \frac{K_{fod} \cdot W_{out}^2}{\rho}$$

No es difícil demostrar que los coeficientes K_{fd} son iguales entre sí, valiendo:

$$K_{fid} = K_{fod} = \frac{f \cdot L}{4 \cdot D \cdot A^2}$$

Fricción concentrada:

$$\frac{K_c \cdot \rho \cdot V^2}{2} = \frac{K_c \cdot \rho}{2} \cdot \left(\frac{W}{\rho \cdot A} \right)^2 = \frac{K_c}{2 \cdot \rho \cdot A^2} \cdot W^2$$

Esta pérdida de carga concentrada la suponemos en la región de entrada, donde se encuentra el cambio de sección, siendo A el área del caño actual si es una contracción ($A < A_{in}$), y reemplazándola por el área del componente anterior (A_{in}) si es una expansión ($A > A_{in}$).

Definimos entonces el coeficiente:

$$K_{fc} = \frac{K_c}{2 \cdot A^2}$$

Para expresar la pérdida de carga por fricción concentrada:

$$\Delta P_{fc} = \frac{K_{fc} \cdot W_{in}^2}{\rho}$$

Ahora la ecuación (21) puede ser expresada:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{(W_{in}^{k+1} + W_{out}^{k+1} - W_{in}^k - W_{out}^k)}{T_s} + \frac{K_{fia}}{\rho} \cdot W_{in}^{k2} + \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) \\ = p_{in}^{k+1} - p_{out}^{k+1} - \frac{(K_{fid} + K_{fc})}{\rho} \cdot W_{in}^{k2} - \frac{K_{fod}}{\rho} \cdot W_{out}^{k2} \end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{(W_{in}^{k+1} + W_{out}^{k+1} - W_{in}^k - W_{out}^k)}{T_s} + \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) \\ = p_{in}^{k+1} - p_{out}^{k+1} - \frac{(K_{fid} + K_{fc} + K_{fia})}{\rho} \cdot W_{in}^{k2} - \frac{K_{fod}}{\rho} \cdot W_{out}^{k2} \end{aligned}$$

Queda entonces llamar $K_{fi} = K_{fid} + K_{fc} + K_{fia}$; $K_{fo} = K_{fod}$ para finalmente expresar:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{(W_{in}^{k+1} + W_{out}^{k+1} - W_{in}^k - W_{out}^k)}{T_s} + \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) \\ = p_{in}^{k+1} - p_{out}^{k+1} - \frac{K_{fi}}{\rho} \cdot W_{in}^{k2} - \frac{K_{fo}}{\rho} \cdot W_{out}^{k2} \end{aligned}$$

Por otra parte, la conservación de la masa:

$$\frac{\rho^{k+1} - \rho^k}{T_s} \cdot A \cdot L = W_{in}^{k+1} - W_{out}^{k+1}$$

nos brinda, junto con (21), las dos ecuaciones necesarias para encontrar ambos caudales en el instante $k + 1$, a través de un sistema de 2×2 . Nótese que como valor de ρ^{k+1} se ha utilizado aquél calculado a partir de h^{k+1} y p^k ; lo ideal sería haberlo hecho con p^{k+1} , porque las demás variables se calculan en dicho paso de tiempo, pero sabemos que será una muy buena aproximación, a raíz, nuevamente, de la incompresibilidad del líquido.

Queda ahora simplemente calcular la presión media del caño, para lo cual utilizamos:

$$p = p_{in} - \frac{K_{fi}}{\rho} \cdot W_{in}^2 - \frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{W_{in}^{k+1} - W_{in}^k}{T_s}$$

Nota: Indistintamente podríamos haber escogido W_{out} y p_{out} para el cálculo de p .

Implementación para dos fases

Como el modelo es el mismo que para el caso de una fase, las ecuaciones utilizadas son las que vimos en aquél, sólo cambiará la forma de despejar los términos.

Comenzamos aplicando la ecuación de energía tal como se describe en (20). Una vez hallado h^{k+1} se actualiza la densidad y se procede al cálculo de los caudales, a partir de la ecuación de momento, utilizándola para ambos conductos, tal como en (21), sólo que en forma discreta:

$$\frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{W_{in}^{k+1} - W_{in}^k}{T_s} + 0,5 \cdot \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) = p_{in}^{k+1} - p^k - \frac{K_{fi}}{\rho_{in}} \cdot W_{in}^{k2} \quad (22)$$

$$\frac{L}{2 \cdot A} \cdot \frac{W_{out}^{k+1} - W_{out}^k}{T_s} + 0,5 \cdot \rho \cdot g \cdot (z_{out} - z_{in}) = p^k - p_{out}^{k+1} - \frac{K_{fo}}{\rho} \cdot W_{out}^{k2} \quad (23)$$

Los coeficientes tienen la misma forma que en el caso de una sola fase:

$$K_{fi} = \frac{f \cdot L}{4 \cdot D \cdot A^2} + \frac{K_c}{2 \cdot A^2} + \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{A_{out}} - \frac{1}{A_{in}} \right)$$

$$K_{fo} = \frac{f \cdot L}{4 \cdot D \cdot A^2}$$

Para calcular la presión expresaremos la conservación de la masa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{W_{in} - W_{out}}{A \cdot L} \quad (24)$$

Y despejamos:

$$\frac{dp}{dt} = \left[\frac{(W_{in} - W_{out})}{A \cdot L} - \frac{\partial \rho}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} \right] \cdot \frac{1}{\partial \rho / \partial p}$$

Al término $\frac{\partial \rho}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$ lo conocemos, pues calculamos $\rho(h^{k+1}, p^k)$ (llamémoslo ρ^*) y teníamos $\rho^k = \rho(h^k, p^k)$, con lo que, en forma discreta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} \simeq \frac{\rho^* - \rho^k}{T_s}$$

Finalmente:

$$\frac{p^{k+1} - p^k}{Ts} = \left[\frac{(W_{in}^{k+1} - W_{out}^{k+1})}{A \cdot L} + \frac{\rho^k - \rho^*}{Ts} \right] \cdot \frac{1}{\partial\rho/\partial p} \quad (25)$$

De esta última ecuación, ya con los valores de W_{in}^{k+1} y W_{out}^{k+1} , obtenemos de forma inmediata p^{k+1} .

Transición entre una implementación y otra

Como antes mencionamos, el grado de compresibilidad del fluido es la característica que determinará el buen funcionamiento de uno u otro modelo. El indicador de tal propiedad es el término $\partial\rho/\partial p$, que cuanto mayor es, más compresible es el fluido. En el caso de la implementación para dos fases, basta con observar la ecuación (25), donde el término $\partial\rho/\partial p$ está dividiendo; si éste es lo suficientemente grande, los cambios de presión a través del tiempo serán leves y el modelo evolucionará suavemente, cosa que queremos.

El modelo de una fase, en cambio, se basa en la premisa de que, entre el cálculo de los caudales y el cálculo de la presión, la densidad mantuvo un valor prácticamente constante, con lo cual su validez está ligada a que $\partial\rho/\partial p$ permanezca lo suficientemente pequeño.

En la Fig. 6 puede verse, a entalpía constante, la evolución de la densidad en función de la presión, para un caso en que la entalpía específica es $h = 490 \text{ k J/k g}$. A presiones mayores a 1.8 atm el agua se encuentra en estado líquido, mientras que a presiones menores se encuentra en dos fases. Es notable cómo la pendiente de esta curva es abrupta en las cercanías de la transición de dos fases a una fase. Es en esta región donde la validez del modelo de dos fases es mayor, mientras que en la zona líquida ($p > 0.18$ en Fig. 6), donde la curva es casi una constante, lo es la del otro modelo.

El grado de compresibilidad $\partial\rho/\partial p$ cambia, al pasar de la región de dos fases a la región de una, en algo así como 5 o 6 órdenes de magnitud, con lo cual parece certero utilizar la magnitud de esta variable para definir la transición de modelo, y es así como se ha implementado.

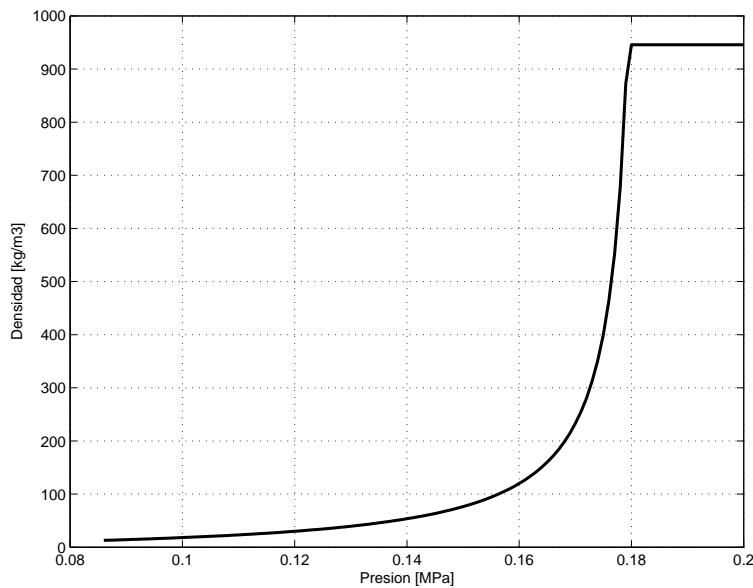


Figura 6. Densidad en función de la presión.

Análisis de estabilidad

Este sistema tiene como variables de estado la entalpía h , la presión p , y los caudales W_{in} y W_{out} , mientras que las entradas externas del mismo son las presiones en los extremos p_{in} y p_{out} , la entalpía de entrada h_{in} y el calor Q . Definiendo un vector columna $\vec{x} = (h; p; W_{in}; W_{out})$, y otro $\vec{u} = (p_{in}; p_{out}; h_{in}; Q)$, y si podemos expresar:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u})$$

Definimos:

$$\begin{aligned}\vec{\delta x} &= \vec{x} - \vec{x}_0 \\ \vec{\delta u} &= \vec{u} - \vec{u}_0\end{aligned}$$

Donde \vec{x}_0 y \vec{u}_0 surgen de un estado de equilibrio, y $\vec{\delta x}$ y $\vec{\delta u}$ son perturbaciones lo suficientemente pequeñas. Cumpliendo todas estas condiciones, se puede escribir:

$$M \cdot \dot{\vec{\delta x}} = A \cdot \vec{\delta x} + B \cdot \vec{\delta u} \quad (26)$$

Donde $\dot{\vec{\delta x}}$ es un vector columna que contiene las derivadas temporales de la perturbación $\vec{\delta x}$, y M , A y B son matrices, en este caso de 4×4 . Para verificar la estabilidad del sistema analizaremos los autovalores de la matriz $M^{-1} \cdot A$, que nos informarán si el sistema es asintóticamente estable; esto es, que cualquier perturbación de alguna de sus variables de estado lleva, a tiempos lo suficientemente grandes, al estado del sistema a su posición de equilibrio \vec{x}_0 .

Se parte entonces de las ecuaciones (19), (24), y las dos (23), estas últimas en su forma continua, no discreta. Utilizaremos como notación:

$$\begin{aligned}\dot{h} &= \frac{dh}{dt} & \dot{p} &= \frac{dp}{dt} \\ \dot{W}_{in} &= \frac{dW_{in}}{dt} & \dot{W}_{out} &= \frac{dW_{out}}{dt}\end{aligned}$$

En (19) hacemos $(h - h_{out}) \cdot W_{out} = 0$, puesto que la entalpía de salida h_{out} es igual a la entalpía media h . Perturbaremos las variables de estado y las entradas externas a fin de analizar cómo cambia la derivada del sistema; queda algo de la forma:

$$\delta \dot{h} = \frac{1}{A \cdot L \cdot \rho} \cdot [(h_{in} - h)_0 \cdot \delta W_{in} + (\delta h_{in} - \delta h) \cdot W_{in0} + \delta Q]$$

Con (24) queda:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_0 \cdot \delta \dot{h} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \cdot \delta \dot{p} = \frac{\delta W_{in} - \delta W_{out}}{A \cdot L}$$

Y así con (23), en donde hemos hecho $z_{out} = z_{in}$ para simplificar las ecuaciones:

$$\frac{L}{2 \cdot A} \cdot \delta \dot{W}_{in} = \delta p_{in} - \delta p - \left(\frac{2 \cdot K_{fi} \cdot W_{in}}{\rho_{in}} \right)_0 \cdot \delta W_{in} - \left(\frac{\partial(K_{fi} \cdot \nu_{in})}{\partial h_{in}} \right) \cdot \delta h_{in} + \frac{\partial(K_{fi} \cdot \nu_{in})}{\partial p_{in}} \cdot \delta p_{in}$$

$$\frac{L}{2 \cdot A} \cdot \delta \dot{W}_{out} = \delta p - \delta p_{out} - \left(\frac{2 \cdot K_{fo} \cdot W_{out}}{\rho} \right)_0 \cdot \delta W_{out} - \left(\frac{\partial(K_{fo} \cdot \nu)}{\partial h} \right) \cdot \delta h + \frac{\partial(K_{fo} \cdot \nu)}{\partial p} \cdot \delta p \cdot W_{out0}^2$$

Los subíndices '0' significan que los términos corresponden al estado de equilibrio inicial; de aquí en más los omitiremos. Llegamos entonces a que las matrices y los vectores son de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial h} & \frac{\partial \rho}{\partial p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2 \cdot A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2 \cdot A} \end{pmatrix} \quad \vec{\delta x} = \begin{pmatrix} \delta \dot{h} \\ \delta \dot{p} \\ \delta \dot{W}_{in} \\ \delta \dot{W}_{out} \end{pmatrix} \quad \vec{\delta x} = \begin{pmatrix} \delta h \\ \delta p \\ \delta W_{in} \\ \delta W_{out} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-W_{in}}{A \cdot L \cdot \rho} & 0 & \frac{h_{in} - h}{A \cdot L \cdot \rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A \cdot L} & -\frac{1}{A \cdot L} \\ 0 & -1 & -\frac{2 \cdot K_{fi} \cdot W_{in}}{\rho_{in}} & 0 \\ -\frac{\partial(K_{fo} \cdot \nu)}{\partial h} \cdot W_{out}^2 & 1 - \frac{\partial(K_{fo} \cdot \nu)}{\partial p} \cdot W_{out}^2 & 0 & -\frac{2 \cdot K_{fo} \cdot W_{out}}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{W_{in}}{A \cdot L \cdot \rho} & \frac{1}{A \cdot L \cdot \rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{\partial(K_{fi} \cdot \nu_{in})}{\partial p_{in}} \cdot W_{in}^2 & 0 & -\frac{\partial(K_{fi} \cdot \nu_{in})}{\partial h_{in}} \cdot W_{in}^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\delta u} = \begin{pmatrix} \delta p_{in} \\ \delta p_{out} \\ \delta h_{in} \\ \delta Q \end{pmatrix}$$

Una vez que tenemos M y A podemos analizar si el sistema es estable bajo un tiempo de muestreo T_s determinado. Como trabajamos con un esquema Backward Euler, la ecuación (26) discreta quedaría:

$$M \cdot \frac{(\vec{\delta x}^{k+1} - \vec{\delta x}^k)}{T_s} = A \cdot \vec{\delta x}^k + B \cdot \vec{\delta u}^k$$

Sin considerar el último término, y despejando, llegamos a:

$$\vec{\delta x}^{k+1} - \vec{\delta x}^k = T_s \cdot M^{-1} \cdot A \cdot \vec{\delta x}^k$$

$$\vec{\delta x}^{k+1} = (I + T_s \cdot M^{-1} \cdot A) \cdot \vec{\delta x}^k$$

Donde I es la matriz identidad. Pedimos ahora que los autovalores de $(I + T_s \cdot M^{-1} \cdot A)$ tengan un módulo menor que 1 para asegurar la estabilidad, y notamos que la matriz

depende de Ts , de manera que cuanto más pequeño sea este, más se aproximan el sistema continuo y el discreto.

Nota: Si estuviéramos trabajando con un sistema continuo deberíamos estudiar los autovalores de $M^{-1} \cdot A$ para definir la estabilidad del mismo.

Al aplicar estos criterios que acabamos de explicar, nos encontramos con los siguientes hechos:

- Cuando el agua se encontraba en estado líquido, necesitábamos que Ts sea muy pequeño (del orden de 10^{-5}) para que el sistema sea estable.
- Cuando el título de vapor era muy bajo era cuando más estable se encontraba el sistema, ya que funcionaba incluso para Ts del orden de la unidad.
- A medida que aumentaba el título necesitábamos menores Ts para lograr la estabilidad, si bien no llegaban a valores tan pequeños como en el caso líquido.

No es casualidad que las zonas de mayor estabilidad coincidan con las de mayores $\frac{\partial \rho}{\partial p}$, pues como antes dijimos es entonces cuando mejor se comporta la implementación para dos fases. Sus autovalores continuos no tienen constantes de tiempo tan rápidas, y con Backward Euler se puede resolver el sistema de ecuaciones completo para valores de Ts razonables para un componente de biblioteca.

En cambio en una fase los autovalores continuos son muy rápidos, con lo que se necesitan valores de Ts prohibitivamente pequeños para aplicar Backward Euler y que el sistema sea estable. Esto motivó la implementación del esquema de una fase, que prácticamente descarta al término $\partial \rho / \partial p$ por ser demasiado chico, y hace que la densidad dependa explícitamente sólo de la entalpía ($\rho = \rho(h)$), si bien depende también de la presión en forma implícita.

Evaluación del modelo

Una vez completo el modelo debemos probarlo en diferentes situaciones, e incluso compararlo con resultados que sabemos correctos, a fin de asegurar el buen funcionamiento del mismo. Se ha confeccionado entonces un modelo continuo que a partir de herramientas de *MATLAB* para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, resuelve el conjunto completo de ecuaciones del caño, y contra el cual comparamos el actual modelo discreto.

Los siguientes tests fueron realizados para corroborar que nuestro modelo discreto responda a las distintas exigencias. La longitud de la sección de cañería era $L = 30m$, el area $A = 0.1m^2$, al igual que el area de entrada, y una rugosidad relativa $\epsilon/D = 0.001$. El tiempo de muestreo utilizado fue $Ts = 0.05s$. Partíamos del estado estacionario, con una presión de 0.11 MPa a la entrada y 0.1 MPa a la salida.

- Test 1. Con un caudal de estado estacionario de aproximadamente 340 kg/s, en $t=0$ aplicamos un escalón de presión a la entrada de 0.01 MPa. El agua entra en estado líquido a unos $97^{\circ}C$, y sale en el mismo estado. La entalpía se mantiene constante.

- Test 2. El agua entra en estado líquido, pero existe un calor entrante $Q = 6000k W$ que hace que salga con un título de 0.0246. El caudal másico inicial es de 77.5 kg/s , y se aplica ahora un escalón negativo de presión de entrada, llevándola de los originales 0.11 MPa hasta 0.108 MPa .
- Test 3. En todo el recorrido del caño el agua se encuentra en dos fases, con título de 0.017 al ingresar y de 0.0192 al salir. El aumento de título se debe simplemente a la disminución de la presión a medida que se avanza en el caño. El caudal inicial del estado estacionario era de 63.5 kg/s , y se aplica como perturbación un escalón de presión a la entrada de 0.01 MPa .
- Test 4. Idem Test 3, pero existe un area de entrada A_{in} que es un 50% más grande que el area A del caño, lo cual genera una mayor caída de presión en la zona de entrada, con respecto a la de salida, frente al caso anterior. Esto se ve reflejado en una presión menor en la zona central del caño, y en una disminución del caudal másico en un $17,5\%$, aproximadamente, respecto del Test 3.

Todos estos Tests respondieron en forma satisfactoria a lo esperado, en concordancia con el modelo continuo, y a continuación detallamos aquel que nos pareció los más ilustrativo.

Test 2: Al bajar la presión de entrada, disminuye el caudal másico que estaba removiendo el calor entrante (ver Fig. 7), con lo que la entalpía aumenta (ver Fig. 8), y lleva a que la densidad baje (ver Fig. 9). Mientras está bajando la densidad el caudal de salida es mayor que el de entrada, y luego se alcanza un estado de equilibrio donde se nota que los caudales se igualan.

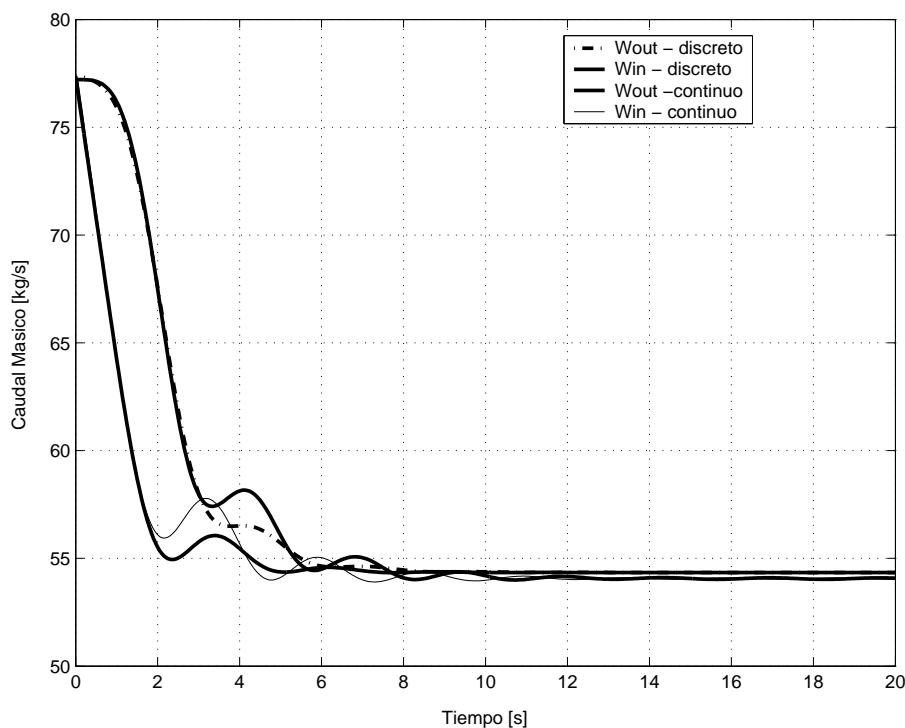


Figura 7. Evolución de los caudales. Test 2.

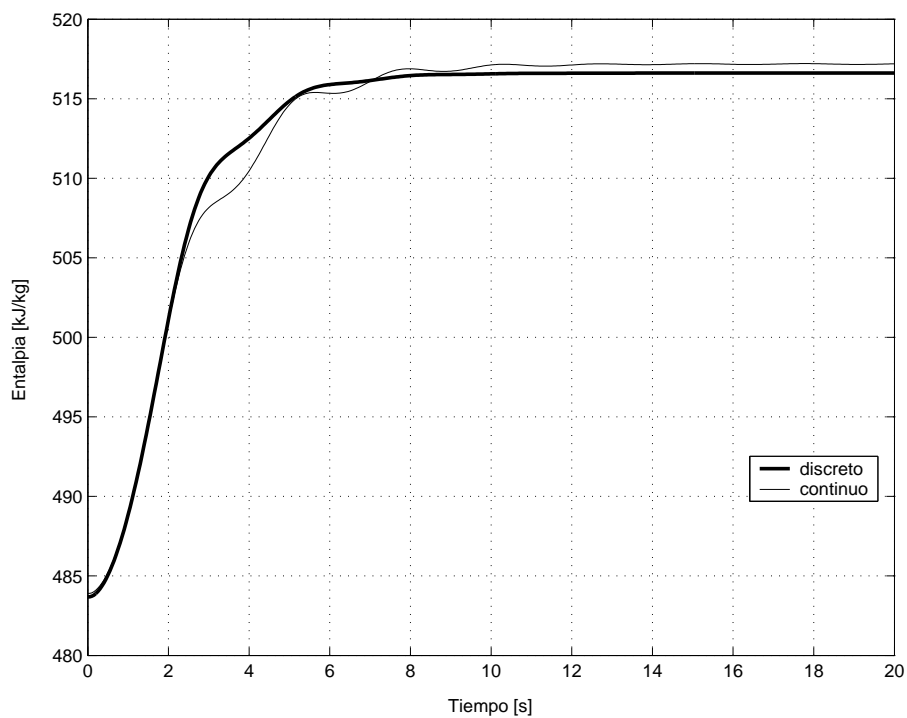


Figura 8. Evolución de la entalpía. Test 2.

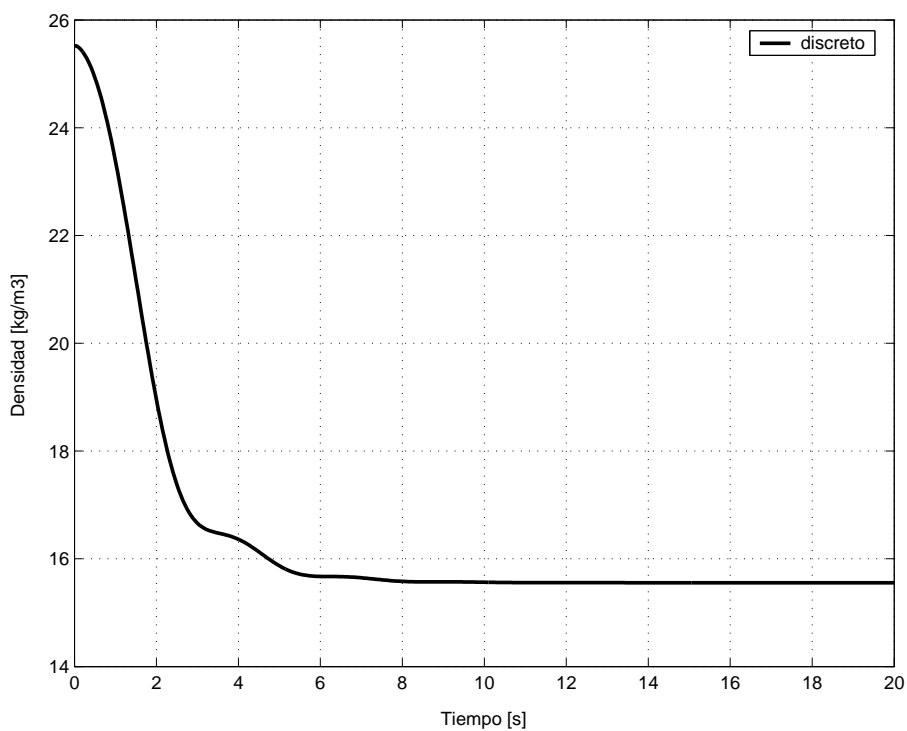


Figura 9. Evolución de la densidad. Test 2.

Se realizó un Test más, que no pudo verificarse con el modelo continuo, debido probablemente a que la transición de dos fases a una fase líquida presenta una discontinuidad

en $\partial\rho/\partial p$, y al estar este calculado en forma numérica impide la convergencia de los algoritmos de integración utilizados. Nuestro modelo discreto sí arrojó resultados, pero al no estar validados y con evoluciones bruscas en las variables de estado creemos necesario realizar mayores pruebas para analizar la validez de los modelos en estas condiciones operativas.

- Test 5. El agua entra en estado líquido, a unos 101.9°C , cerca de la saturación a la presión de entrada (102.3°C), y sale con un título cercano a $7.76 \cdot 10^{-4}$. Se aplica como perturbación un escalón de presión a la entrada de 0.01 MPa ; la entalpía se mantiene constante a lo largo de todo el proceso. El caudal del estado estacionario inicial es de 270 kg/s .

Resultados: El aumento de presión que generamos en la entrada del caño aumenta la presión media, lo cual lleva a una disminución del título del agua, con el consiguiente incremento en la densidad (ver Fig. 10); esto último lleva a que el caudal de entrada sea mayor que el de salida (ver Fig. 11) y por consiguiente la caída de presión (ver Fig. 12). Esta situación persiste hasta que el agua deja de tener dos fases para pasar a un flujo monofásico; entonces se igualan los caudales y las pérdidas de presión, y si observamos el gráfico de la presión veremos que ahora es exactamente el promedio entre la de entrada (0.12 MPa) y la de salida (0.1 MPa). Este resultado, si bien es el esperado en el sentido de que cuando se pasa de dos fases a una se cambia de implementación, remarcamos que no es fiable considerarlo acorde a la realidad, debido a los repentinos cambios de presión y caudal que pueden observarse en los gráficos. Queda entonces solamente por decir que escapa del alcance de nuestro modelo discreto, dejando a futuras implementaciones la cuestión de cómo resolverlo.

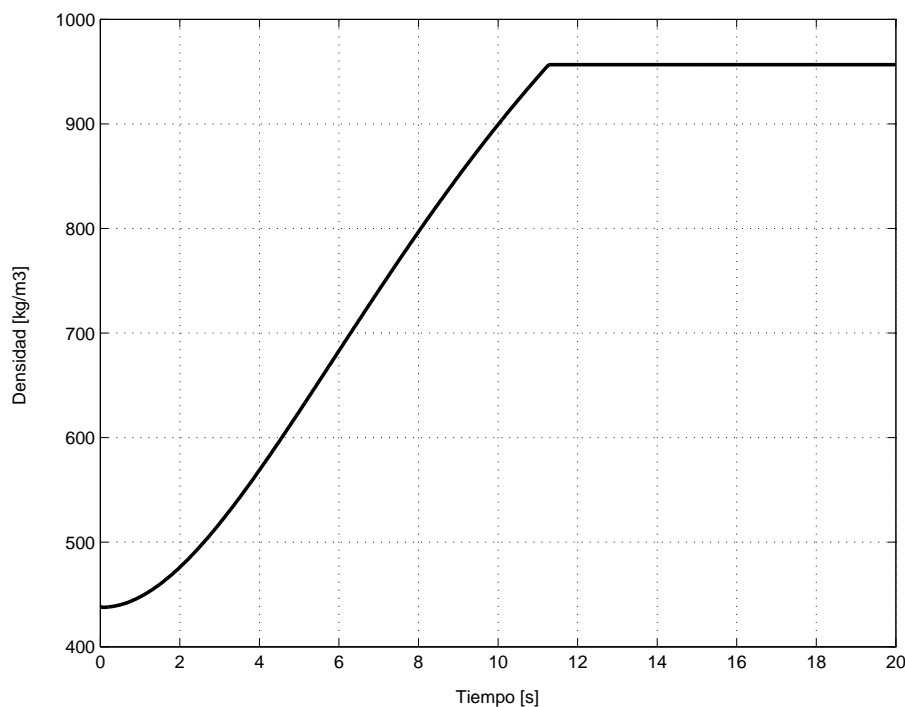


Figura 10. Evolución de la densidad. Test 5.

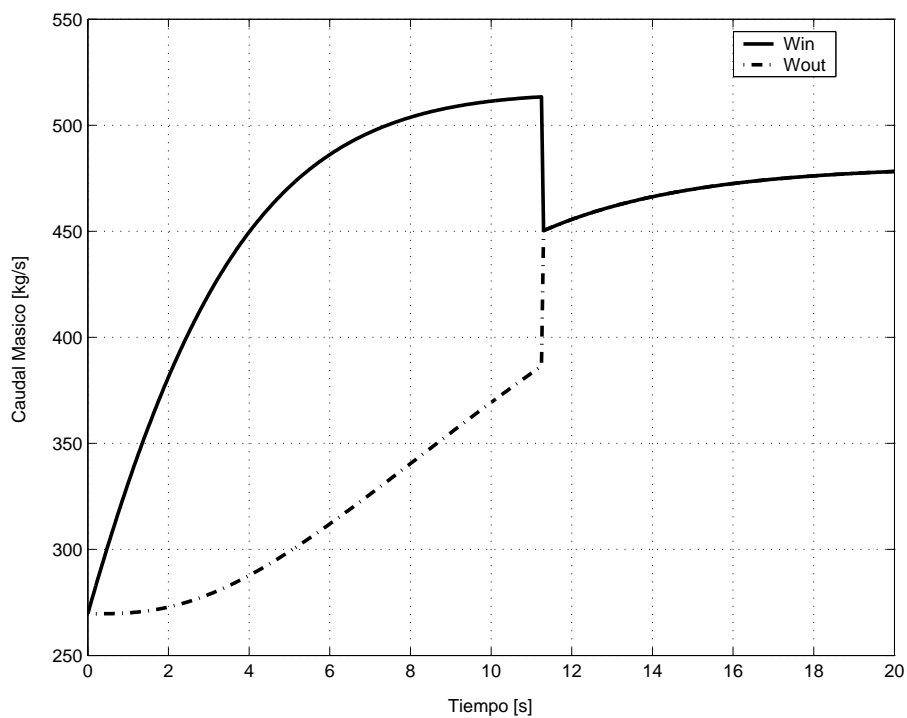


Figura 11. Evolución de los caudales. Test 5.

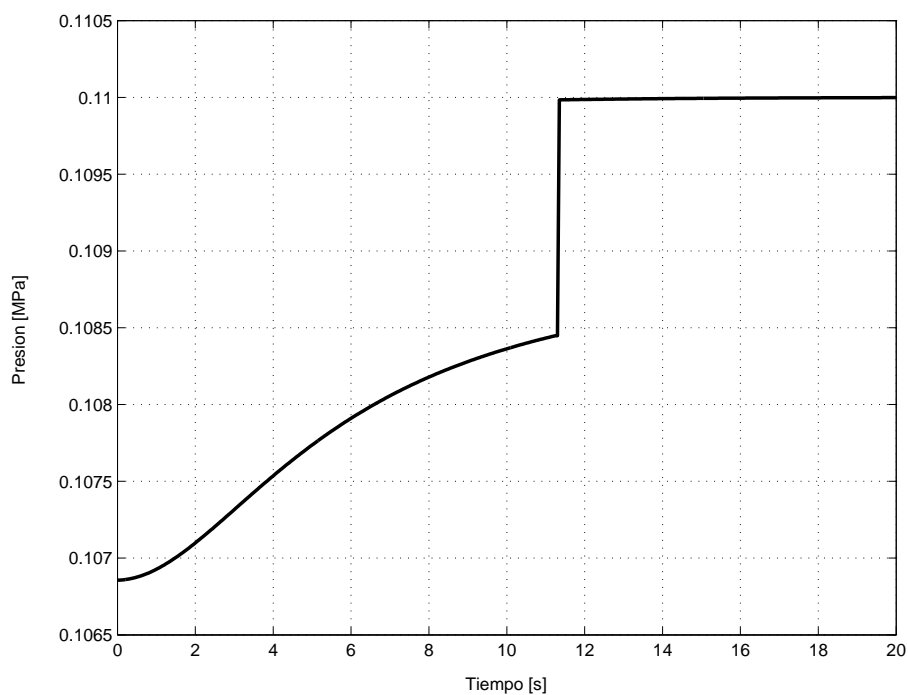


Figura 12. Evolución de la presión. Test 5.

CAPÍTULO III

Modelo de tanque y de cañería en conjunto

Una vez probados los dos componentes de librería, los hemos interconectado para observar su comportamiento. Se han tomado entonces dos tanques con agua en saturación; el primero de ellos con un volumen de $100m^3$ y una masa de agua de $10000kg$, a una presión de $0.15 MPa$, y el segundo con un volumen de $500m^3$, $50000kg$ de masa de agua y $0.1 MPa$ de presión. Se los ha conectado por intermedio de una sección de cañería de $20m$ de longitud y $0.05m^2$ de area, con una rugosidad relativa $\epsilon/D = 0.001$. A la misma entra vapor de agua del primer tanque (al que llamaremos Tanque 1), y dado que su presión es mayor que la del otro (el Tanque 2) el sentido de circulación será desde el Tanque 1 hacia el Tanque 2.

En la Fig. 13 vemos cómo evoluciona el caudal a través del tiempo, disminuyendo conforme lo hace la diferencia de presiones entre tanques. Los caudales a la salida y a la entrada del caño son iguales, denotando que no hay importantes cambios en la densidad del vapor dentro del mismo. En la Fig. 14 se muestran las presiones, que se van acercando entre sí hasta que finalmente se igualan, y por último las temperaturas, en la Fig. 15, describen la misma curva que las presiones, como cabía de esperar, puesto que son las temperaturas de saturación a la presión de cada tanque.

El desplazamiento de masa desde un tanque al otro fue de solamente $200kg$, contra los 10000 o 50000 que había en cada tanque, de manera que los niveles de líquido apenas cambiaron. Este fue denominado Test 1.

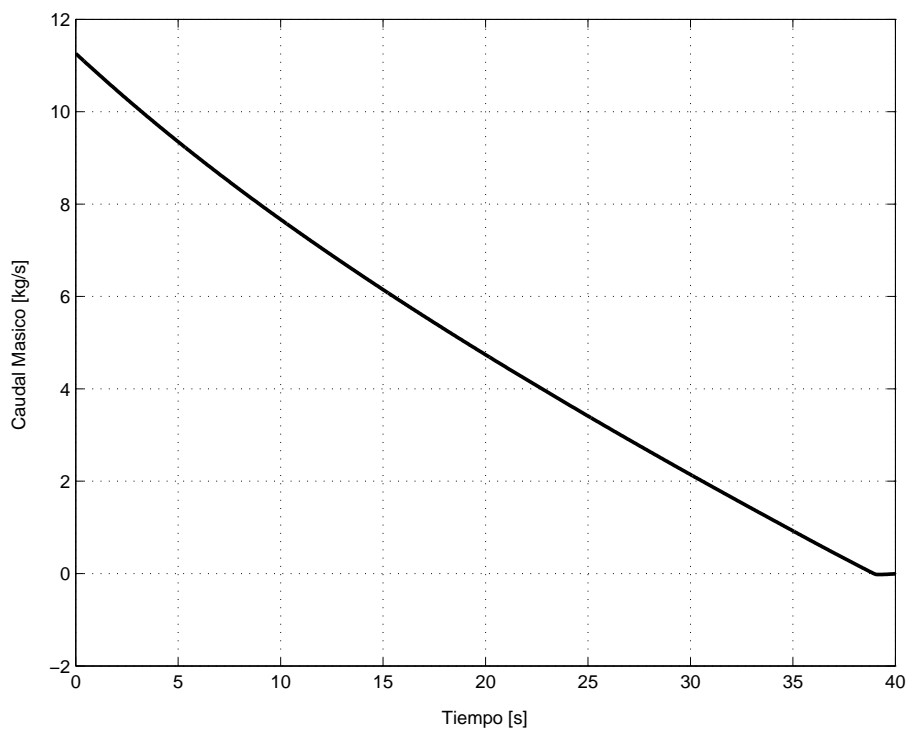


Figura 13. Evolución de los caudales. Tanques conectados, Test 1.

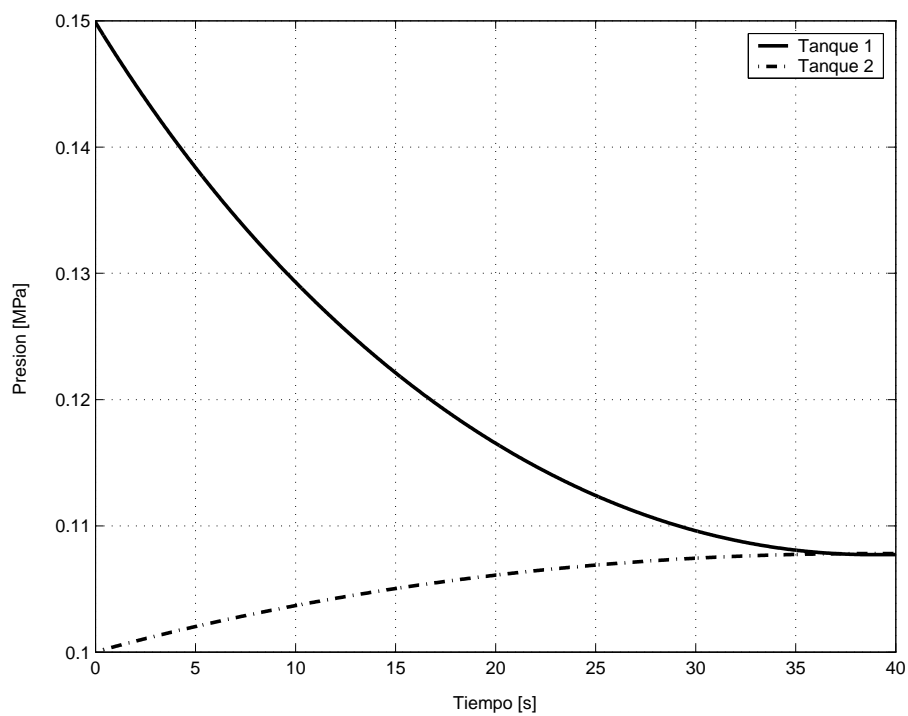


Figura 14. Evolución de la presiones. Tanques conectados, Test 1.

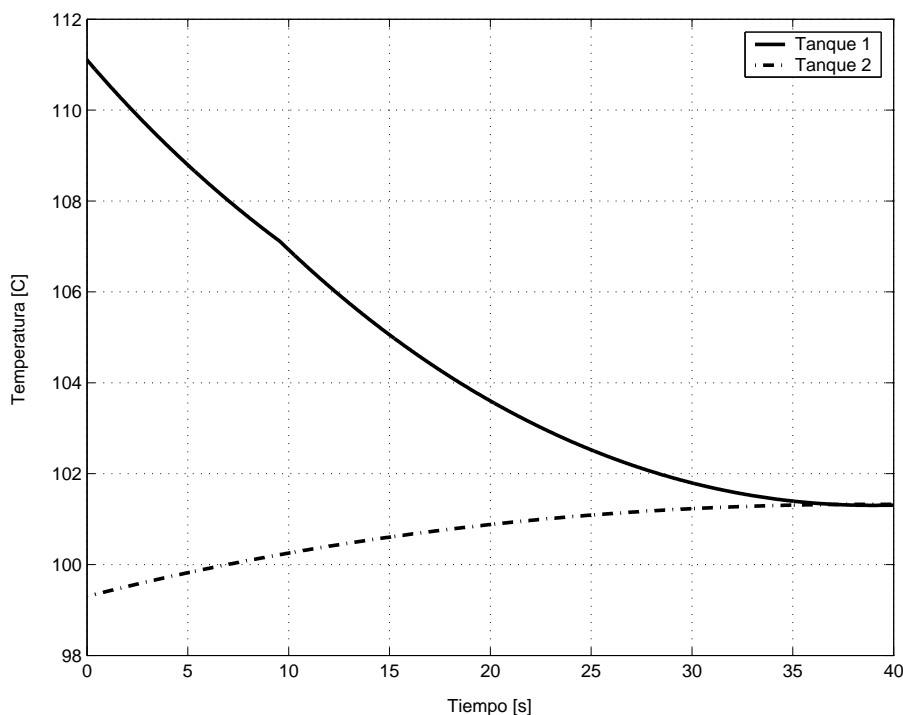


Figura 15. Evolución de las temperaturas. Tanques conectados, Test 1.

Finalmente realizamos una segunda prueba, Test 2, con las mismas condiciones que el Test 1, pero la sola excepción de que en lugar de circular vapor entre los tanques, la entrada del caño se conecta a la zona del Tanque 1 que contiene líquido en saturación. Al llegar al Tanque 2 tiene un título de aproximadamente 0.0031. Vemos los resultados en las Figs. 16, 17 y 18. Notemos las diferencias con el caso anterior: el caudal másico de agua circulando por el caño es mucho mayor que si circulara vapor puro; esto es común que ocurra, debido a la mayor densidad del líquido (aunque esté en dos fases, hay mucha agua líquida). Consecuencia de esta gran cantidad de agua saliendo del Tanque 1 es que la masa contenida en el mismo descendió a un 10% de la cantidad original, en el mismo lapso de tiempo que en el Test anterior apenas si bajó. En contraste con toda esta masa perdida por el Tanque 1 en ese período de tiempo, la presión apenas descendió un 2,7% aproximadamente, mientras que en el Test 1 llegó a igualarse a la del Tanque 2, bajando más de un 30% en el mismo lapso.

Estos Tests muestran la conveniencia de despresurizar un tanque liberando vapor, en contraste con la liberación de agua, que lo que hace es perder masa en lugar de perder presión.

Las características del Tanque 2 no fueron graficadas puesto que no eran relevantes en

esta comparación.

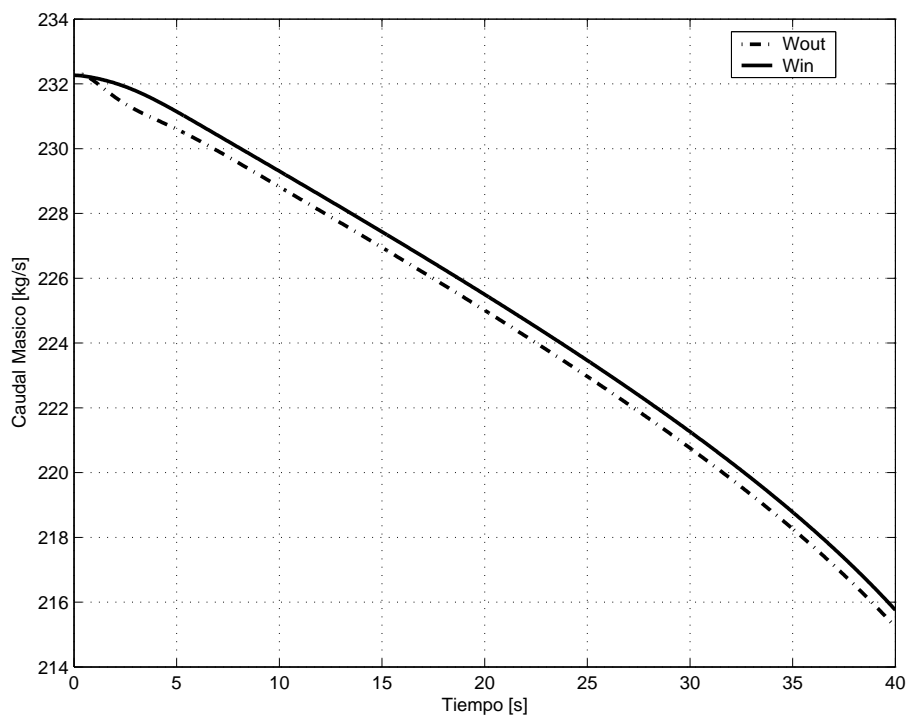


Figura 16. Evolución de los caudales. Tanques conectados, Test 2.

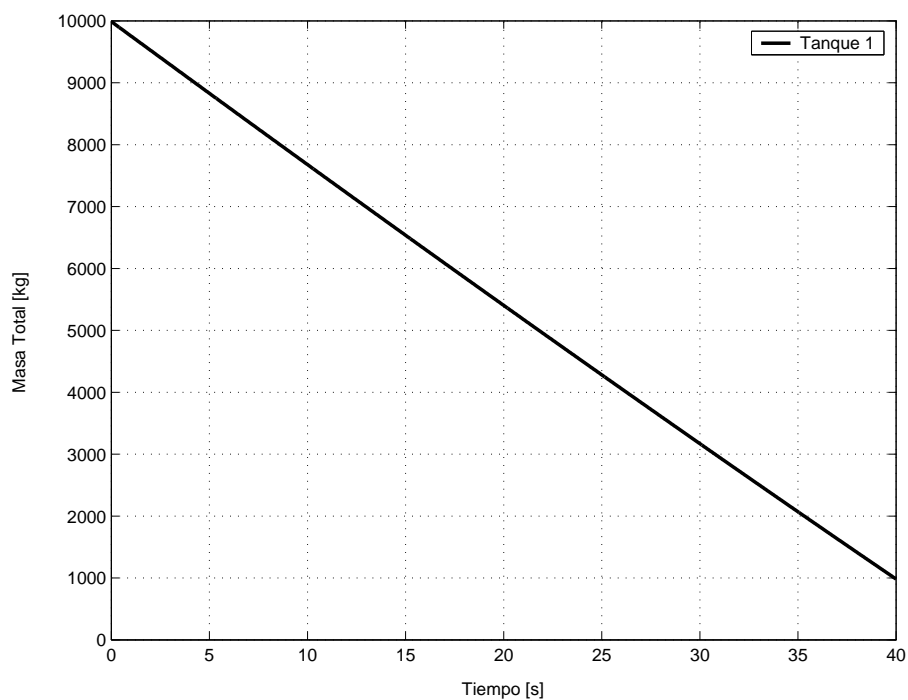


Figura 17. Evolución de la masa total. Tanques conectados, Test 2.

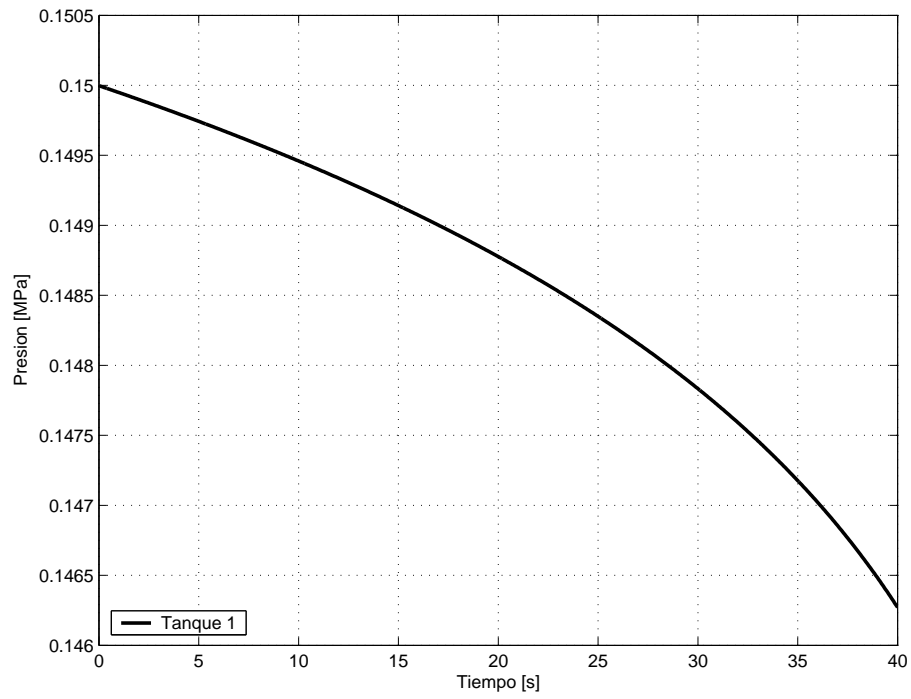


Figura 18. Evolución de la presión. Tanques conectados, Test 2.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- [White] Frank M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1979.
- [Wallis] G.B.Wallis, *One-Dimensional Two Phase Flow*, McGraw-Hill, 1969.
- [GH] Garland & Hand, *Simple Functions for the Fast Approximation of Light Water Thermodynamic Properties*, Nuclear Engineering and Design 113, 1989.

CAPÍTULO IV

Conclusiones

Se ha avanzado en el estudio del modelado de sistemas que contienen agua en una y dos fases, en particular los dos componentes que se han tratado en este trabajo, uno de ellos muy relacionado con la fenomenología de flujos bifásicos.

Se han probado diferentes formas de encarar la resolución de las ecuaciones de la sección de cañería, algunas con un alcance muy limitado, otras con buenos resultados para una amplia gama de situaciones. El tanque en saturación responde bien frente a todos los casos para los cuales ha sido implementado.

De todas formas queda aún trabajo por hacer, en el sentido de completar los modelos para conseguir una respuesta adecuada ante condiciones más generales. No pueden entonces darse por finalizadas las librerías, sino que algunos detalles se dejan para trabajos posteriores, como ser que el tanque en saturación trabaje con líquido subenfriado o vapor sobresaturado, y que la sección de cañería pase suavemente de un flujo bifásico a una fase cuando las condiciones así lo impongan.

APÉNDICE

Tabulado de funciones

A fin de conocer los valores que toman las propiedades del agua tales como densidad y viscosidad en función de la presión y/o la entalpía, pueden utilizarse tablas a tal efecto; incluso en el caso que necesitábamos el factor de fricción f en función del número de Reynolds se ha recurrido a una tabla.

Es particularmente sencillo programar en MATLAB una búsqueda de algún valor en una de estas tablas, para lo cual realiza una interpolación, que en nuestro caso será lineal.

Supongamos entonces que tenemos la variable f en función de Re ; buscamos los valores de Re tal que f quede bien representada, a la vez de no tomar muchos puntos innecesarios que hagan más lenta la búsqueda.

El criterio que hemos utilizado para encontrar los puntos donde tabular a f es el siguiente:

- Dadas dos abscisas, min y max , y los respectivos valores de la función f en estos puntos: f_{max} y f_{min} , procedemos a un cálculo del área debajo de la recta que une estos dos últimos puntos (ver Fig. 19), y la llamaremos A_1 .
- A continuación, en el punto de abscisa medio $(min + max)/2$ se obtiene $f_{med} = f((min + max)/2)$, y se calcula el área debajo de la línea que une f_{med} y f_{min} , y por otra parte el área debajo de la línea que une f_{max} y f_{med} ; las denominamos A_2 y A_3 , respectivamente.
- Definiendo $error = |A_1 - (A_2 + A_3)|$, y sabiendo que este está directamente relacionado con la diferencia máxima de valor entre la función real y la interpolada (no lo demostraremos a fin de no extender demasiado este apéndice), podemos estimar qué tan bien estamos aproximando a la función f . La Fig. 19 muestra el área $error$ de la que estamos hablando.

La función que realiza todos estos pasos y devuelve el resultado de $error$ cuando se le envían el puntero a la función f y los límites de integración, la denominamos int_error , y más adelante veremos dónde la utilizamos.

Implementamos entonces en lenguaje C++ un programa que a partir de un completo conjunto de puntos (Re , f) devuelve unos pocos valores con los cuales se puede tabular f con la precisión que necesitamos. Este programa se compone básicamente de un objeto *Function* al cual se le pasa un puntero a la función a tabular junto con los límites de las abscisas (Re), y devuelve por pantalla los valores buscados.

Antes de continuar, haremos una breve referencia de lo que es una lista. Cuando hablemos de listas nos estaremos refiriendo a una secuencia de datos consecutivos, en los que cada uno de estos contiene el valor de interés más la dirección del dato siguiente.

Con un puntero al primer dato tenemos acceso a toda la lista, que puede aumentar o disminuir a conveniencia. Un diagrama de lo que estamos hablando lo encontramos en la Fig. 20, y damos toda esta explicación puesto que en este apéndice se hace referencia a tales listas.

Ahora iremos mostrando la implementación del programa como si se tratara de diferentes capas, comenzando con el *main()* (en C, estructura principal) para continuar con las funciones internas.

- *main()* lee el archivo donde están todos los puntos (Re, f), que deberían ser muchos para una buena descripción de la función. Los carga en una lista de valores a la cual hará referencia el objeto *Function*.
- Ahora se indica a *Function* que comience la búsqueda de los valores de la tabla.

Lo que ejecuta *Function* una vez que tiene todos los datos que necesita es una función *search*; cuyo esquema puede verse en la Fig. 21, y se describe someramente a continuación:

- Se divide inicialmente el intervalo total donde se considerará a la función f ; no importa cuántas divisiones se hagan, no influirán en el resultado.
- Se cargan los valores de esta división en una lista, denominada 'max_list'. De esta lista posteriormente se agregarán o quitarán valores a conveniencia.
- Básicamente *search* va tomando valores de 'max_list' y los envía a otra función $f2$. Esta última requiere dos valores de abscisa, entre los cuales intentará encontrar el punto donde tabular la función; ambos se los envía *search*; uno de ellos sale de la lista 'max_list' (se lo denominará 'máximo'), y el otro lo devuelve la misma función $f2$ luego de la última búsqueda, y se lo llamará 'mínimo'.
- La función $f2$ utiliza 'int_error' para determinar qué tan buena es una aproximación lineal en el intervalo en cuestión. El valor de 'error' no sólo tiene que ser menor a un límite superior, sino que también le ponemos una cota inferior, de tal manera de no colocar puntos de más en la tabla.
- En la Fig. 22 se muestra un diagrama de flujo de la función $f2$, que pondrá en otra lista 'list' los valores de abscisa encontrados para la tabulación de f ; luego devuelve un valor que *search* utilizará como mínimo de la siguiente búsqueda.
- No detallaremos la implementación de la función $f3$ interna a $f2$ ya que es muy similar a esta última y no queremos extendernos demasiado.

Para finalizar mostramos uno de los resultados del uso de esta función. En la figura 23 vemos al factor de fricción en función del Número de Reynolds. Originalmente teníamos aproximadamente 800 puntos entre $\log(Re) = 4$ y $\log(Re) = 12$; una vez aplicado este método se ajustó con una tabla de 13 componentes, y un error en cada punto menor o

igual al 1%. Obsérvese que el gráfico va entre 4 y 6, no entre 4 y 12; esto es para que se vean mejor las dos curvas.

Se corrobora así el funcionamiento de este método.

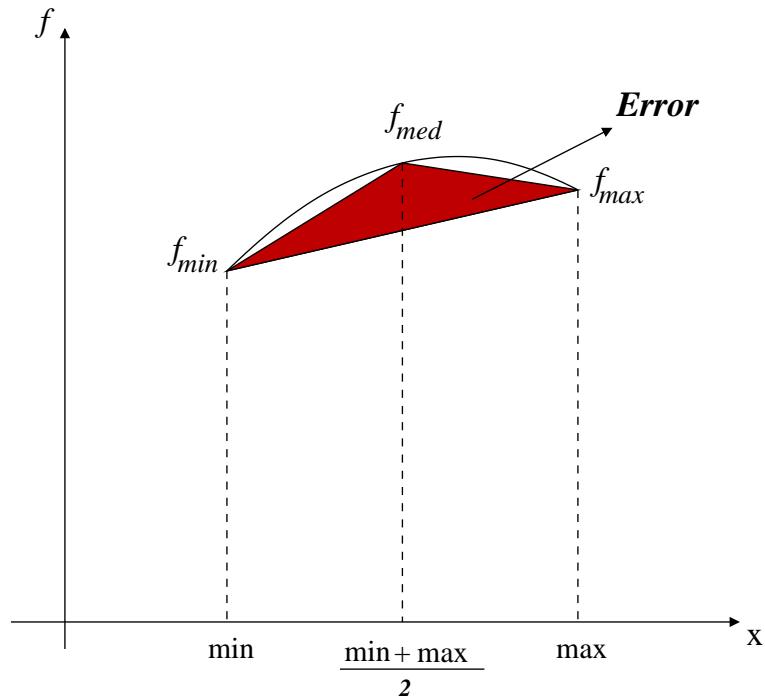


Figura 19. Así se calcula el *error*.

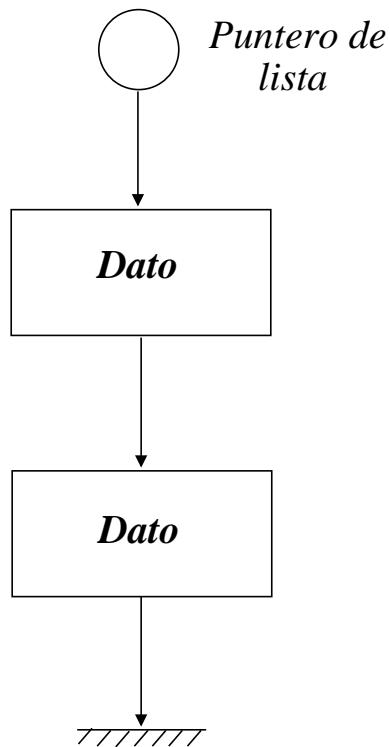


Figura 20. Diagrama de una lista.

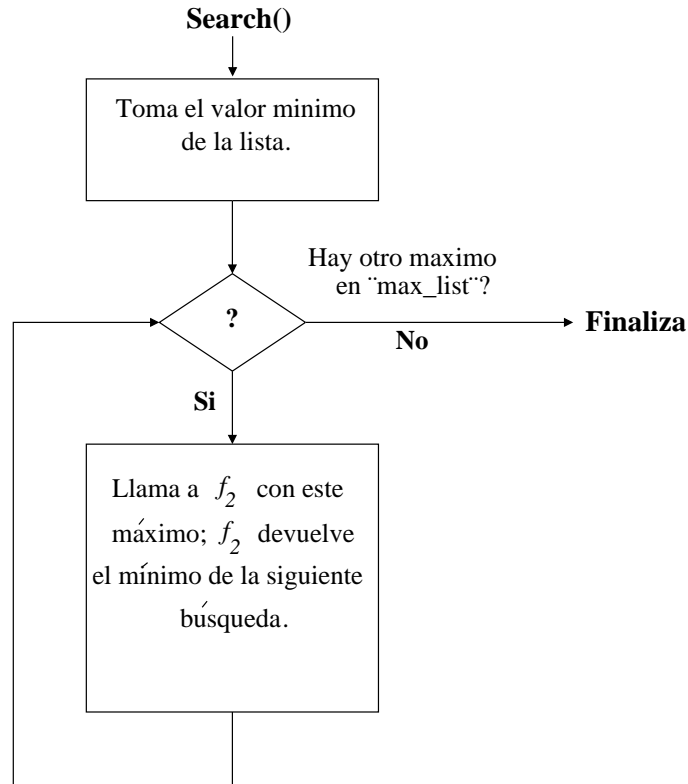


Figura 21. Esquema de la función *search*.

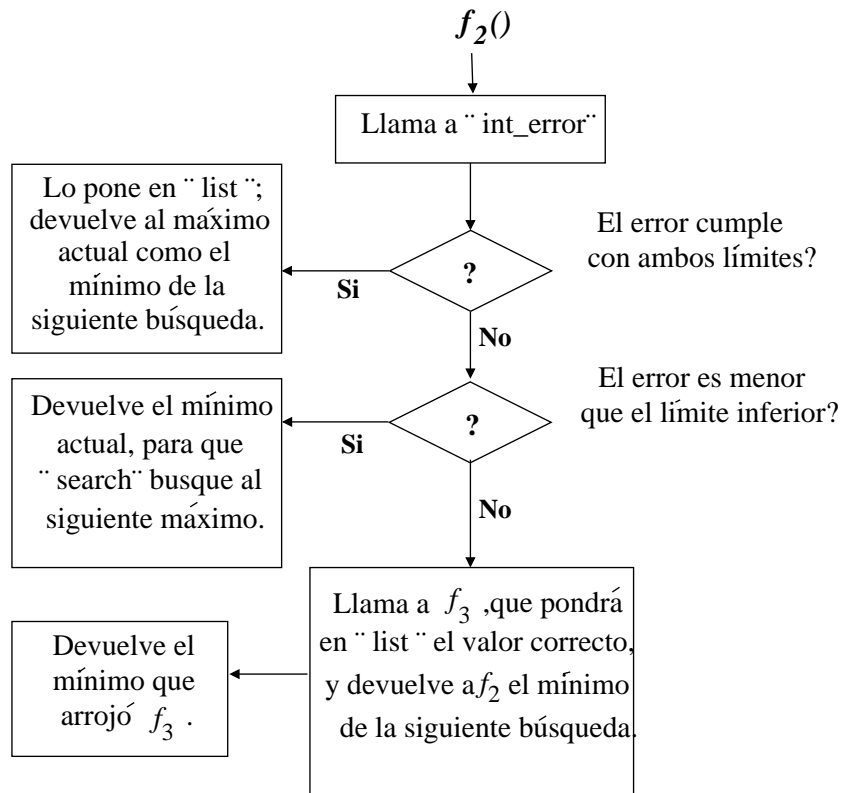


Figura 22. Esquema de la función *f2*.

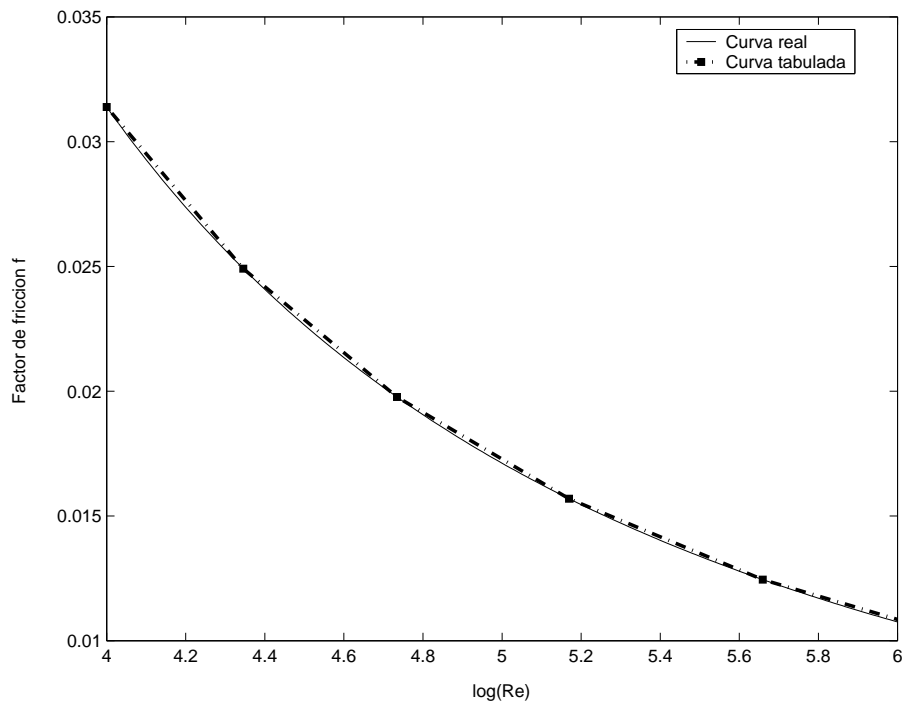


Figura 23. Comparación entre la función continua y la tabulada.

Diagramación del Proyecto Integrador

El desarrollo de componentes de biblioteca para la simulación de distintas partes de un reactor nuclear se realizó en 11 etapas, a saber:

- Aprendizaje MATLAB-SIMULINK
- Familiarización con métodos existentes
- Búsqueda bibliográfica tanque
- Llenado de tablas tanque
- Confección programa tanque
- Pruebas y correcciones tanque
- Búsqueda bibliográfica cañería
- Llenado de tablas cañería
- Confección programa cañería
- Pruebas y correcciones cañería
- Redacción del informe

A continuación hacemos una breve explicación de cada una de estas:

Aprendizaje MATLAB-SIMULINK

Fue necesario como primer paso interiorizarse en el lenguaje de programación que posteriormente utilizaríamos en la implementación de las librerías. La duración de esta etapa se aproxima a los cuatro meses, período en el que también se realizó, en paralelo, la etapa siguiente.

Familiarización con métodos existentes

Puesto que ya había muchos componentes creados en MATLAB-SIMULINK, algunos de los cuales directamente relacionados con nuestro trabajo futuro, se procedió a conocerlos y estudiarlos, así adquiriendo uso en el manejo de tales herramientas. La duración de esta etapa es aproximadamente la misma que la anterior, unos cuatro meses.

Búsqueda bibliográfica tanque

A fin de confeccionar un tanque de agua en saturación, comenzamos buscando bibliografía al respecto, que brindaría la necesaria base para nuestro ulterior trabajo. Duración: unos tres días.

Llenado de tablas tanque

Diversas propiedades del agua son indispensables para el funcionamiento de la librería del tanque, con lo cual tuvimos que dedicarnos a la búsqueda de datos acerca de tales propiedades, y cargar un conjunto de tablas acorde a los requerimientos del programa. Duración: unos siete días.

Confección programa tanque

El programa propiamente dicho; definir las entradas y las salidas, los puntos de funcionamiento normal, qué condiciones tiene que cumplir, y todos los detalles de implementación. Se ha dedicado a esta etapa aproximadamente una semana y media.

Pruebas y correcciones tanque

Una vez que creemos que el programa está listo, debemos probarlo una y otra vez hasta que finalmente verificamos que pasó todas las pruebas a las que fue sometido. Siempre aparecen detalles no resueltos que hay que pulir en esta etapa. Duración estimada: seis días.

Búsqueda bibliográfica cañería

Una vez que se ha cumplido con la última etapa del tanque, pasamos a hacer un segundo componente de librería, una sección de cañería. Comenzamos investigando la bibliografía recomendada, profundizamos un poco en ella, y sólo entonces estamos en condiciones de pasar a la etapa siguiente. Se toma para esto un tiempo de unos cuatro días.

Llenado de tablas cañería

Una vez más antes de simular nada debemos conseguir suficiente información acerca de las propiedades del agua en el rango en el cual trabajaremos. Necesitábamos más cosas que en el caso del tanque, por lo que no fue suficiente con los datos con los que ya contábamos. Duración: doce días.

Confección programa cañería

Corazón del programa; se encaró primero en una dirección, posteriormente se vió que no llevaba a buenos resultados y se optó por otro método más sencillo y estable. Un poco más adelante tuvo que hacerse otra implementación, pues con una sola no bastaba para abarcar los casos de flujos en una y dos fases.

Pruebas y correcciones cañería

Se verificó su funcionamiento para diferentes situaciones, se corrigieron detalles de implementación y finalmente se lo conectó con el modelo del tanque para certificar que anduvieran en conjunto los modelos. Duración aproximada: unos 12 días.

Redacción del informe

Etapa final, a la cual se le ha dedicado unos ocho días, considerando que se tuvieron que cambiar varias cosas en el informe al cambiar las implementaciones.

Evaluación Económica

En la misma se contemplan las horas que fueron mencionadas en la diagramación anterior, como costo del becario que está haciendo el trabajo; se contemplan las horas dedicadas por el director y otras personas que aportaron sus conocimientos al proyecto; la amortización de los equipos utilizados, sobre todo computadoras, y el gasto que significa al CAB mantener una oficina, calefaccionada y limpia.

Puesto que en este trabajo los avances realizados son muy difíciles de cuantificar, vamos a suponer que no hubo ganancias económicas al término del proyecto. La utilidad de lo realizado deberá contemplarse en el marco de los futuros usos que puedan tener estos modelos terminados.

		Becario [\$]	Cuerpo de Apoyo [\$]	Amortización Equipos [\$]	Gastos CAB [\$]	Costo Total [\$]	Costo Corregido a Junio '05
Agosto	04	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	431.43
Septiembre	04	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	426.44
Octubre	04	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	421.50
Noviembre	04	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	416.62
Diciembre	04	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	411.79
Febrero	05	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	402.31
Marzo	05	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	397.65
Abril	05	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	393.05
Mayo	05	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	388.50
Junio	05	150.00	84.00	50.00	100.00	384.00	384.00
Totales		1500.00	840.00	500.00	1000.00	3840.00	4073.30
		Tasa de Descuento Anual:		0.15	Mensual:		1.01

Figura 24. Evaluación económica.

	Agosto 04	Septiembre 04	Octubre 04	Noviembre 04	Diciembre 04	Febrero 05	Marzo 05	Abril 05	Mayo 05	Junio 05
Aprendizaje MATLAB-SIMULINK	■	■	■	■	■					
Familiarización con métodos existentes	■	■	■	■	■					
Búsqueda bibliográfica tanque						■				
Llenado de tablas tanque						■	■			
Confeción programa tanque							■			
Pruebas y correcciones tanque							■	■		
Búsqueda bibliográfica cañería								■		
Llenado de tablas cañería								■	■	
Confeción programa cañería								■	■	■
Pruebas y correcciones cañería								■	■	■
Redacción del informe										■

Figura 25. Diagrama de tareas realizadas durante el proyecto integrador.

AGRADECIMIENTOS

A mi director Andrés Etchepareborda, por la paciencia.

A mis compañeros, que en todo momento me ofrecieron ayuda, y confiaron en que podía hacer este trabajo. Especialmente a Juan Matías García e Ignacio Márquez, que como NO confiaron en mí, me dieron una mano enorme.

A mi novia Mariela, por bancarme en toda esta travesía.

A mis padres Carlos y Nélica, por criarme y malcriarme como corresponde.

A mis amigos que están lejos, cuyo recuerdo siempre está ahí para arrancarme una sonrisa.

Y a los amigos que están cerca, que terminan de hacer de todo esto una experiencia increíble.