

TESIS MAESTRÍA EN FÍSICA

DUALIDADES EN EL EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO

Yasuo Oda

Dr. Gonzalo Torroba
Director

Dra. Karen Hallberg
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Pablo Cornaglia - Dra. Marina Huerta - Dr. Fernando Lombardo

Diciembre de 2017

Partículas y Campos.

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis abuelos Jorge y Mary,
a mi hermano Ken,
a mi viejo Senya, a mis suegros Gra y Juan y
a mi compañera Agui.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Índice de figuras	v
Resumen	vii
1. Introducción y motivación	1
2. Efecto Hall	6
2.1. Estudio Semi-Clásico	6
2.2. Estudio Cuántico.	7
2.2.1. Caso general.	7
2.2.2. Electrones independientes	8
2.3. Efecto Hall Cuántico Fraccionario (FQHE) e interacciones	9
2.4. Transformaciones de Chern-Simons	9
2.5. Campo Medio	11
2.5.1. Fracciones de llenado con denominadores pares	12
2.6. Descripción dual	12
2.6.1. HLR	12
2.6.2. Son	13
3. Supersimetría	16
3.1. Introducción	16
3.2. Superespacio y supercampos	17
3.2.1. Álgebra supersimétrica	18
3.2.2. Supermultiplete	19
3.2.3. Superespacio	19
3.2.4. Supercampo	20
3.2.5. Acción supersimétrica	23
3.3. Teorema de no renormalización	26
3.4. SUSY extendida	27

3.4.1. N=2	27
4. Dualidad Mirror Symmetry	28
4.1. Teoría A	29
4.1.1. Contenido de Campos de la teoría A	29
4.1.2. Simetrías de la teoría A	29
4.2. Teoría B	31
4.2.1. Contenido de Campos de la teoría B	31
4.2.2. Simetrías de la teoría B	32
4.3. Moduli space	33
4.4. Mirror Symmetry	34
4.5. Deformando Mirror Symmetry	36
4.5.1. Campos externos	37
4.5.2. Teoría quirál A	37
4.5.3. Teoría quirál B	38
5. Rescatando a Son: QHE = CF	41
5.1. Teoría A: Obteniendo el Efecto Hall	41
5.2. Teoría B: Fermiones compuestos	42
6. Entropía de entrelazamiento	46
6.1. Definición de entropía y estimación	46
6.2. Teoría A: Efecto Hall Cuántico	49
6.2.1. Reducción al problema unidimensional	49
6.2.2. Simetrías	50
6.2.3. Reducción dimensional e interacciones	51
6.2.4. Condiciones de contorno periódicas	53
6.2.5. Simetría electrón-hueco	55
6.2.6. Interacciones de Coulomb	56
6.3. Teoría B: Fermiones compuestos	57
6.3.1. En el continuo	58
6.3.2. Modelo en la red	58
6.4. Entropía de entrelazamiento	60
7. Métodos Numéricos	62
7.1. Teoría A	62
7.1.1. Diagonalización Exacta	62
7.1.2. DMRG	63
7.1.3. Matrix Product Operator	66
7.1.4. Entropías en la teoría A	69

7.2. Teoría B	72
7.2.1. Entropías en la teoría B	73
7.3. Comparación entre resultados de ambas teorías	74
8. Conclusiones	76
A. Variables de Grassman	79
Bibliografía	82
Agradecimientos	86

Índice de figuras

1.1. La captura de dos cuantos de flujo transforma cada electrón en un CF (fermión compuesto) que experimenta un campo magnético reducido. (Adaptado de ref. [2].)	2
1.2. Comparación entre efecto Hall cuántico y fraccionario, paneles superior e inferior respectivamente. La curva azul (arriba) es la resistividad Hall con los <i>plateaus</i> cuánticos. Las curvas rojas son resistividad longitudinal ordinaria con pozos, señalados por su fracción de llenado ν , para cada <i>plateau</i> . Las fracciones de llenado con $\nu = n/(2n + 1)$ corresponden a CF con fracciones de llenado $\nu^* = n$. Las dos curvas rojas, a pesar de sus distintas fracciones de llenado, son sorprendentemente similares. (Adaptado de ref. [2].)	3
4.1. Diagrama a un lazo que da lugar a la corrección del propagador del σ por los ψ_{\pm}	35
4.2. Diagrama a un lazo que da lugar a la corrección del propagador del σ por los u_{\pm}	35
5.1. Diagrama a un lazo que da lugar a la corrección al propagar del u_- por $ u_- ^6$	44
6.1. Sección cilíndrica donde mediremos la entropía de entrelazamiento. Como se explica en el texto, medimos la correlación de los estados contenidos en la banda o cinta, con los del resto del cilindro.	60
6.2. Sección de un toroide donde mediremos la entropía de entrelazamiento. Como se explica en el texto, medimos la correlación de los estados contenidos en la banda o cinta, con los del resto del toro.	61
7.1. Universo o superbloque formado por el sistema más el entorno. (Adaptado de ref. [34])	64

7.2. Barridos (<i>sweep</i>). El algoritmo de sistema finito. El diagrama muestra los progresivos crecimientos y reducciones. El comienzo del barrido puede ser el final del algoritmo de sistema infinito o el final de un paso del sistema finito. (Adaptado de ref. [35])	66
7.3. Curva de entropía para $N = 20$ y $L_y = 18$. En rojo se presenta el ajuste logarítmico según $a \log(x) + b$. Se obtuvo $a = 0,25 \pm 0,02$, $b = -0,01$	70
7.4. Coeficientes $C(L_y, N)$ para $N = 24$ en función de L_y . En rojo se presenta el ajuste lineal según $a x + b$. Se obtuvieron valores de $a = 0,11 \pm 0,02$, $b = -0,1 \pm 0,1$. El criterio de las barras de error se definió de acuerdo a la diferencia en la pendiente al elegir el conjunto de puntos mostrado o uno adyacente para hacer el ajuste logarítmico.	71
7.5. Gráficas de entropía $S(r)$ para el sistema abierto. Incluso para 100 sitios hay gran dispersión.	73
7.6. Gráficas de entropía $S(r)$ para el sistema periódico. En rojo se ve el ajuste logarítmico para los primeros sitios.	74
7.7. Se presenta el ajuste lineal $a x + b$ de los coeficientes del logaritmo $C(L_y)$ vs L_y . Se ve que hay buena correspondencia, con $a = 0,013 \pm 0,001$, $b = 0,1 \pm 0,03$	74

Resumen

En este trabajo tratamos el tema de dualidades en el Efecto Hall Cuántico, los electrones en dos dimensiones con un campo magnético.

Comenzamos por dar una motivación de la materia, de por qué es interesante, y de su interpretación como fenómeno colectivo. Seguimos con una rápida descripción de las formas clásicas y cuánticas de estudiar el problema, haciendo hincapié de por qué esta última perspectiva es particularmente compleja. Haremos hincapié primero en la versión sin interacciones, para ganar algo de intuición sobre cómo son los estados cuánticos del sistema y los niveles de energía. Luego prendemos las interacciones y mostramos por qué un estudio detallado no puede hacerse mediante el método de perturbaciones.

Describimos entonces una forma distinta, no perturbativa, de entender al sistema interactuante: las dualidades. Si podemos probar que el sistema complejo, fuertemente interactuante y altamente correlacionado, es dual a un sistema bien conocido y quizás incluso sencillo, hemos ganado mucho respecto a la visión perturbativa.

En esta línea mencionamos el trabajo pionero de Halperin, Lee y Read, quienes introducen el concepto de fermión compuesto como una cuasipartícula dual a los electrones en un campo magnético. Más recientemente Dam Son propone una nueva dualidad, destacando la importancia de la fracción de llenado $\nu = 1/2$ y motivado por una aparente carencia de simetría de la teoría HLR, donde el fermión compuesto es en realidad un fermión de Dirac relativista. El trabajo de Son dio origen a una red de dualidades que se estudian con técnicas de teorías de campos, y que son nuestro objeto de estudio. En particular, estudiamos una reciente dualidad supersimétrica conocida como *mirror symmetry* y algunos de sus derivados.

A continuación damos un resumen de una herramienta que será fundamental en el resto del trabajo: la supersimetría. Introducimos los conceptos básicos de supercampo y superespacio, junto con las supercargas y los multipletes. En particular nos interesa describir supermultipletes de $N = 4$ en 2+1 dimensiones.

Luego pasamos a exponer en detalle la dualidad *mirror symmetry*. Esta dualidad rela-

ciona dos teorías supersimétricas, que llamaremos teoría A y teoría B. Más tarde las identificaremos con el QHE y los fermiones compuestos. La dualidad se aprovecha de propiedades útiles de la supersimetría para calcular correcciones cuánticas de forma tanto perturbativa como no perturbativa. Deformaremos luego la dualidad rompiendo supersimetrías, con el objetivo de encontrar teorías realistas y con la esperanza de obtener física interesante en el límite de bajas energías. Logramos probar, de hecho, una dualidad interesante que proponemos es la dualidad de Son.

Profundizamos en el estudio de la dualidad complementando con cálculos numéricos que nos permiten encontrar observables que de otra forma serían inaccesibles analíticamente. En particular nos interesa la llamada entropía de entrelazamiento, y de cómo es capaz de detectar la existencia de fermiones en una superficie de Fermi a través del fenómeno conocido como violación logarítmica de la ley de área. Buscamos numéricamente, entonces, la violación logarítmica de ambos lados de la dualidad, y tratamos de relacionar ambas visiones mediante la conjetura de que la fórmula de Widom es válida incluso en presencia de interacciones.

Para ello recurrimos a dos métodos numéricos, primero a la diagonalización exacta, y luego al DMRG. El último ha demostrado ampliamente ser uno de los más efectivos a la hora de atacar problemas en una dimensión espacial con correlaciones grandes. Para poder valernos de él aplicamos una reducción dimensional sobre el problema 2D del Efecto Hall al ponerlo en un cilindro.

Una vez obtenidos los resultados buscados, tratamos de rescatar la mayor información posible filtrando efectos de tamaño finito. Si bien concluir resultados cuantitativos resulta difícil, vemos claramente la violación logarítmica y la dependencia con la extensividad del cilindro, lo cual nos hace concluir la existencia de una superficie de Fermi. También encontramos que la entropía resulta ser una cantidad robusta que depende poco de variaciones en el potencial aplicado, lo cual también es consistente con la conjetura de Widom. Por lo tanto, creemos que es una medida interesante que merece mucha más atención como herramienta en dualidades y promete ser la fuente de nuevos trabajos.

Palabras clave:

Capítulo 1

Introducción y motivación

“Not only God knows, I know, and by the end of the semester, you will know.”

— Sidney Coleman.

Cuando se plantea el problema de electrones confinados a dos dimensiones, inmediatamente surge la idea de qué pasaría si se le aplica un campo electromagnético y cómo esto modifica su dinámica. En particular, interesa estudiar qué sucede al aplicar un campo magnético uniforme transversal al plano que contiene los electrones. Este fenómeno, conocido como Efecto Hall, se caracteriza clásicamente por las trayectorias que describen los electrones: se convierten en órbitas circulares, llamadas órbitas de ciclotrón. Al estudiar el Efecto Hall desde la Mecánica Cuántica (QHE, de las siglas en inglés *Quantum Hall Effect*), el principio de exclusión de Pauli empieza a jugar un papel significativo. En particular, en el caso de que se aplique un fuerte campo magnético a temperaturas suficientemente bajas, este sistema muestra propiedades inesperadas que son imposibles de explicar si se consideran a los electrones como un sistema débilmente interactuante.

En la teoría de la materia condensada no es común el descubrimiento de nuevas partículas elementales. Aún así, en el área es bien sabido que un sistema de muchas partículas fuertemente interactuantes se puede reorganizar mediante la descripción de complicados objetos colectivos débilmente interactuantes. En general, estos nuevos objetos se comportan como si fueran partículas en pleno derecho, con propiedades bien definidas como el espín, la carga eléctrica, la masa, etc. Estas nuevas partículas pasan a tener realidad física y se pueden pensar como los componentes reales del sistema, como es el caso de los fonones, magnones, cuasipartículas en líquidos de Fermi, etc.

¿Cuáles son, entonces, las nuevas partículas del sistema que nos interesa? Sucede que

podemos pensar a los electrones como si estos absorbieran parte del campo magnético externo (en un proceso conocido como *flux attachment*, ver figura 1.1). Este proceso da lugar a nuevas partículas que llamaremos “fermiones compuestos” (CF, de las siglas en inglés *Composite Fermions*), y que presentan un número de propiedades interesantes que han sido estudiadas y medidas en los últimos años, como el mar de Fermi, las órbitas ciclotrónicas, niveles de Landau y oscilaciones de Shubnikov-de Haas [1].

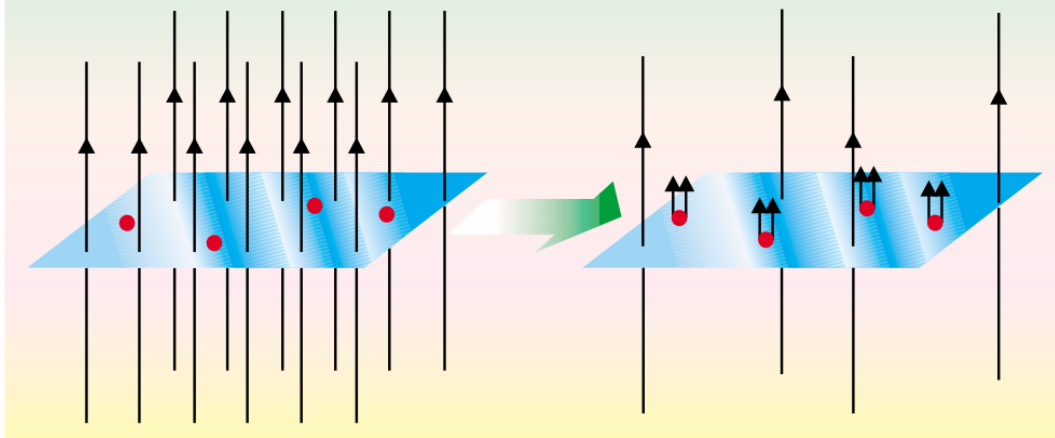


Figura 1.1: La captura de dos cuantos de flujo transforma cada electrón en un CF (fermión compuesto) que experimenta un campo magnético reducido. (Adaptado de ref. [2].)

El punto crucial en el cual los CF se distinguen de los electrones corrientes, es que experimentan un campo magnético efectivo B^* que es drásticamente distinto del campo magnético externo B aplicado sobre los electrones. Tiene sentido introducir una cantidad conocida como fracción de llenado, denominada comúnmente como ν , y que está asociada con la cantidad de electrones que ocupan los niveles de Landau (i.e. los niveles de energía). En algunos casos particulares (con fracciones de llenado ν menores que 1) los experimentos favorecen la visión de fermiones compuestos sujetos a un campo magnético B^* , en lugar de electrones sujetos a un campo B . La evidencia experimental más convincente de la existencia de CF viene de graficar la magneto-resistencia para campos grandes en función del campo magnético reducido B^* . La figura 1.2 muestra su similitud con la magneto-resistencia de los electrones a campos B chicos (donde interactúan débilmente).

Una importante aplicación aparece en el estado metálico correspondiente al caso semi-lleno ($\nu = 1/2$). Si los CF existen en ese caso, se puede ver que no experimentarían campo alguno ($B^* = 0$), dejando un gas de fermiones libres. Esto sugiere la existencia de una superficie de Fermi de CF.

Por otro lado, se puede diagonalizar numéricamente el Hamiltoniano del problema para un caso de tamaño finito. La principal predicción de la teoría de fermiones compuestos es que la física de bajas energías de electrones fuertemente interactuantes en un campo

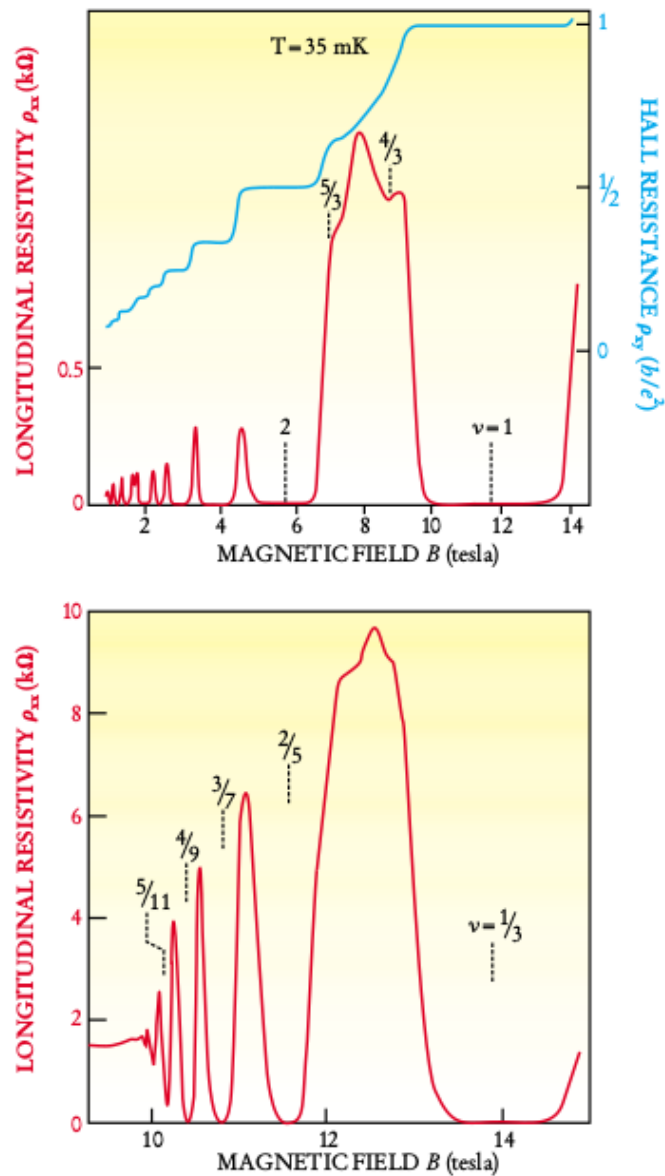


Figura 1.2: Comparación entre efecto Hall cuántico y fraccionario, paneles superior e inferior respectivamente. La curva azul (arriba) es la resistividad Hall con los *plateaus* cuánticos. Las curvas rojas son resistividad longitudinal ordinaria con pozos, señalados por su fracción de llenado ν , para cada *plateau*. Las fracciones de llenado con $\nu = n/(2n + 1)$ corresponden a CF con fracciones de llenado $\nu^* = n$. Las dos curvas rojas, a pesar de sus distintas fracciones de llenado, son sorprendentemente similares. (Adaptado de ref. [2].)

magnético B se parece a la de CF casi independientes y en un campo magnético residual B^* . Esta predicción ha sido extensamente confirmada por simulaciones computacionales que establecen una correspondencia uno a uno entre los números cuánticos de baja energía de los dos sistemas.

Aunque los CF se comportan como fermiones ordinarios, hay que destacar que se trata de una partícula inusual. Se trata en realidad, de un fenómeno colectivo, una entidad de muchos cuerpos. Más aún, es una partícula puramente cuántica, no existe en un mundo clásico.

La idea de *flux attachment* y fermiones compuestos explica muchas de las propiedades del Efecto Hall Cuántico Fraccionario (FQHE, del inglés *Fractional QHE*) de manera intuitiva. Sin embargo, es una transformación unitaria no adiabática, y por lo tanto no queda claro que produzca una teoría físicamente equivalente —es decir, una descripción dual. Hasta recientemente, no había una prueba de este tipo de dualidades. La situación cambió con el trabajo de Son [3], que propuso una modificación del *flux attachment* para el caso semilleno ($\nu = 1/2$): en su propuesta, las partículas compuestas son fermiones de Dirac relativistas, que interactúan con un campo de *gauge* emergente. Al contrario de lo que sucede con el *flux attachment* no relativista, en esta propuesta la simetría electrón-hueco del $\nu = 1/2$ se realiza naturalmente.

La posibilidad de que una teoría de campos relativistas emerja en el FQHE ha dado lugar a una actividad intensa en la frontera entre física de altas energías y materia condensada, y el presente trabajo se enmarca en este contexto. Por un lado, se sugirieron varias dualidades nuevas en teoría de campos, generalizando el *flux attachment* de Son [4–7]. En otra dirección independiente, se observó en [8] que, ciertas dualidades establecidas rigurosamente utilizando supersimetría, pueden aplicarse al QHE para derivar nuevas descripciones. Finalmente, en [9] se mostró cómo, el *flux attachment* de Son y sus dualidades relacionadas se derivan efectivamente de teorías de campos supersimétricas.

El objetivo general del presente trabajo es utilizar los resultados analíticos anteriores, combinados con técnicas numéricas para investigar propiedades dinámicas del FQHE. Asimismo, la dualidad se utilizará para entender mejor los sistemas electrónicos fuertemente correlacionados que aparecen por *flux attachment*. Esto es de interés actual, ya que dichas teorías, conocidas como *non-Fermi liquids* (no-líquidos de Fermi), aparecen como modelos de superconductividad de altas temperaturas. Se explorará entonces la utilidad de mapear el FQHE a sistemas fuertemente correlacionados a densidad finita.

Más específicamente, en esta tesis abordaremos los aspectos teóricos del FQHE con $\nu = 1/2$, y llevaremos a cabo análisis numéricos utilizando dos métodos complementarios: diagonalización exacta y el DMRG (del inglés *Density Matrix Renormalization Group*). Con estas técnicas, se analizará la llamada entropía de entrelazamiento, que como luego desarrollaremos en detalle es una de las medidas capaces de detectar la presencia de fermiones compuestos.

A continuación se presenta la estructura de este trabajo.

En el capítulo 2 se describe el Efecto Hall, primero desde un punto de vista semiclásico. Luego se hace un tratamiento cuántico, considerando por separado el caso de electrones independientes y agregando interacciones. Se discute la utilidad de la transformación

de Chern-Simons para estudiar el FQHE, junto con un análisis de campo medio. Se estudia la descripción de fermiones compuestos y la simetría electrón-hueco, y cómo esto lleva a proponer dualidades entre FQHE y teorías de campos relativistas (Son).

En el capítulo 3 se presenta un resumen conciso de la Supersimetría, esperando que sea de utilidad para los lectores que no están familiarizados con la técnica. Esto es importante, debido a que gran parte del trabajo que sigue se basa fuertemente en resultados de teorías de campos supersimétricas.

En el capítulo 4 desarrollamos en detalle la dualidad conocida como *mirror symmetry*, que relaciona dos teorías supersimétricas conocidas como teoría A y teoría B. Luego se describe cuáles son las técnicas involucradas en la demostración de la dualidad. En la segunda mitad del capítulo deformaremos la dualidad en la búsqueda de deshacernos de las supersimetrías y así obtener teorías realistas.

En el capítulo 5 derivamos una dualidad nueva. Continuamos deformando *mirror symmetry* mediante la incorporación de un campo magnético, de modo de obtener el Efecto Hall Cuántico como una teoría de bajas energías de la teoría A. Siguiendo a la dualidad, estudiaremos cómo es este efecto en la teoría B, y veremos cómo es posible obtener una descripción de fermiones compuestos.

En el capítulo 6 definimos la entropía de entrelazamiento y cómo es posible utilizarla para encontrar medidas de la dualidad. A continuación describimos cuáles son las formas de estudiar las teorías A y B, de modo de poder calcular numéricamente sus entropías. Para la teoría A, mostramos cómo es posible reducir el problema a 1 dimensión espacial, lo cual será de utilidad para los estudios numéricos. Para la teoría B, que es fuertemente interactuante, conjeturamos que la entropía no depende de estas interacciones debido a la presencia de una superficie de Fermi y mostramos cómo es posible llevar a cabo el cálculo.

Finalmente, en el capítulo 7 se describen los métodos numéricos utilizados para calcular las entropías de entrelazamiento. En particular, utilizamos dos métodos numéricos (diagonalización exacta y DMRG) para estudiar el FQHE con fracción de llenado $\nu = 1/2$. Se presentan además los resultados de entropía obtenidos por estos medios.

Capítulo 2

Efecto Hall

“The creator of the universe works in mysterious ways. But he uses a base ten counting system and likes round numbers.”

— Scott Adams.

En este capítulo se presenta un estudio desde distintos enfoques del Efecto Hall, junto con buena parte de la notación necesaria para el resto del trabajo. Se trata de un sistema aparentemente simple: un conjunto de electrones moviéndose en un plano, en presencia de un campo magnético perpendicular al plano. Supondremos que el campo magnético es suficientemente fuerte tal que el espín de los electrones está completamente polarizado, con lo cual trataremos a los electrones como fermiones sin espín. En general, en lo que sigue se considerarán unidades tales que $\hbar, c, e = 1$.

2.1. Estudio Semi-Clásico

El primer punto a destacar es que, aunque consideramos a los electrones como partículas puntuales, ocupan un espacio finito. A partir de las ecuaciones de Newton, igualando la fuerza centrípeta con la fuerza de Lorentz originada por la presencia del campo magnético constante, se puede ver que:

$$evB = mv^2/r \tag{2.1}$$

lo que quiere decir que el radio no es constante, en particular aumenta con la energía del electrón. Aplicando cuantización semi-clásica:

$$eBr^2 = mvr \sim h = 2\pi \quad (2.2)$$

(en unidades de $\hbar = 1$), con lo cual vemos que el área ocupada por electrón es del orden de:

$$\pi r^2 \sim 2\pi^2/eB \quad (2.3)$$

De acuerdo al principio de exclusión de Pauli, cada electrón ocupará su propia área $2\pi^2/eB \sim \pi r^2$. Dada el área total del sistema A , definimos N_e como la cantidad de electrones necesarios para poder llenar todo el espacio, de modo que:

$$N_e \pi r^2 \sim N_e (2\pi^2/eB) \sim A \quad (2.4)$$

Es importante destacar en esta relación que, dado que en este sistema el espín no juega ningún papel, N_e es la máxima cantidad de electrones con igual energía que se pueden introducir en el plano.

2.2. Estudio Cuántico.

2.2.1. Caso general.

En el caso general consideramos un gas bidimensional de electrones en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección perpendicular $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}} = \nabla \times \mathbf{A}$. Suponemos que el campo es suficientemente fuerte como para que estén completamente polarizados y así despreciar los grados de libertad de espín. Además consideraremos una interacción electrón-electrón, que escribimos en general $V(\mathbf{r})$, que en principio podrá ser Coulomb $V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{\epsilon r}$. Además resultará interesante considerar otros potenciales para entender aspectos dinámicos de las dualidades a explorar. Entonces el Hamiltoniano es:

$$H_e = \sum_j \frac{[\mathbf{p}_j + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_j)]^2}{2m} + \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.5)$$

Consideremos por lo pronto que no prendemos ningún potencial, y estudiemos primero el caso de los electrones no interactuantes.

2.2.2. Electrones independientes

Si $V = 0$, tenemos que el Hamiltoniano se puede separar en la suma de electrones independientes que es fácilmente diagonalizable.

La ecuación de Schrödinger elemental está dada por la ecuación (2.5):

$$-\frac{1}{2m} [(\partial_x - ieA_x)^2 + (\partial_y - ieA_y)^2] \psi = E\psi \quad (2.6)$$

El espectro de auto-energías es:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) eB/m, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Al conjunto degenerado de autoestados con energía E_n se le llama n -ésimo nivel de Landau, y cada uno tiene una gran degeneración de $BAe/2\pi$ (estamos considerando un campo magnético grande, y un área macroscópica), que viene de la cantidad de círculos con la que podemos llenar el espacio.

Se define entonces la “fracción de llenado” ν como el cociente entre el número de electrones y el número de estados en un nivel de Landau:

$$\nu = \frac{N_e}{(eBA/2\pi)} = \frac{2\pi n_e}{eB} \quad (2.8)$$

donde n_e es la densidad de electrones. Además, tenemos que la inversa de la fracción de llenado $\nu^{-1} = \frac{(BA/N_e)}{2\pi}$ es la cantidad de flujo por partícula, en unidades del flujo fundamental (puesto que en estas unidades el cuanto de flujo es $\phi_0 = hc/e = 2\pi$). Notemos que también se puede escribir $\nu = \frac{\phi_0 n_e}{B} = 2\pi n_e l_B^2$, donde n_e es la densidad de electrones y $l_B = \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi B}}$ es la longitud magnética natural.

Cuando una cantidad entera de niveles de Landau se encuentran completos, aparece una discontinuidad en el potencial químico, lo que da lugar a la interpretación del conjunto de electrones como un fluido incompresible. Es decir, si hay n electrones llenando un nivel de Landau, agregar el $n + 1$ cuesta una energía $eB/2m$ mayor a la del n . Otra forma de pensar esto es que hay un *gap* de energía entre el estado fundamental y el primer excitado para el sistema con un número entero de niveles de Landau llenos.

2.3. Efecto Hall Cuántico Fraccionario (FQHE) e interacciones

Para el caso de muchos electrones con fracciones de llenado no enteras (fraccionarias), hay una degeneración enorme para los estados asociados a un nivel de Landau. Por ejemplo en el primer nivel, una fracción de llenado $\nu = \frac{1}{2}$ con N electrones da lugar a $2N$ estados degenerados, con lo que hay $(2N)/(N!)^2$ formas de distribuir los electrones. Cuando agregamos interacciones, es de esperar que algunas de estas formas de acomodar los electrones sean energéticamente más favorables que otras. Pero para tratar este problema tenemos que entender estas interacciones inter-electrónicas junto con la energía cinética de los niveles de Landau.

Estudiando los dos términos de la ecuación (2.5), y teniendo en cuenta que el término cinético es fácilmente diagonalizable, podemos pensar en tratar el término de interacción como algún tipo de perturbación. Sin embargo, las reglas de teoría de perturbaciones en el caso degenerado requieren de diagonalizar cada subespacio degenerado. En el caso de llenado fraccionario, la degeneración es tan grande que esto es casi tan imposible como resolver el problema completo. Por otro lado, el término de interacción, tratado por separado, resulta en un cristal de Wigner, que es muy diferente de la física del FQHE. Vemos entonces que la competencia entre el término cinético y el término de interacción juega un papel crucial. La teoría de perturbaciones tradicional queda entonces descartada como método de estudio para este problema.

Mucho de lo que se ha hecho hasta ahora para entender el FQHE viene de estudiar las propiedades de las funciones de onda de prueba. Más recientemente, las teorías de campos de Chern-Simons han aportado un mayor entendimiento, a la vez que proveen de un punto de partida para el tratamiento perturbativo de este problema.

2.4. Transformaciones de Chern-Simons

El enfoque de Chern-Simons se aplica mediante una transformación de fase en la función de onda de muchos electrones. Si $\Psi_e(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ es la función de onda que es solución de la ecuación de Schrödinger, definimos la nueva función de onda transformada

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \left[\prod_{i < j} e^{-i\tilde{\phi}\theta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \right] \Psi_e(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (2.9)$$

donde $\tilde{\phi} = 2n$ es un entero par, y $\theta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ es el ángulo formado por el vector $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y el eje \hat{x} .

Se puede ver que, si Ψ_e es solución de la ecuación de Schrödinger $H_e \Psi_e = E \Psi_e$, entonces Φ es solución de la ecuación $H \Phi = E \Phi$, donde

$$H = \sum_j \frac{[\mathbf{p}_j + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) - \frac{e}{c} \mathbf{a}(\mathbf{r}_j)]^2}{2m} + \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.10)$$

es el Hamiltoniano transformado y \mathbf{a} es el vector potencial de Chern Simons

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = i \nabla_i \left[\log \left(\prod_j e^{-i \tilde{\phi} \theta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \right) \right] = \frac{\tilde{\phi} \phi_0}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (2.11)$$

Como \mathbf{a} es un gradiente, tenemos que $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j, \quad j = 1, \dots, N$, con \mathbf{r}_j las posiciones de los electrones. Así, podemos pensar a esta transformación como a una transformación de gauge, y a \mathbf{a} como a un potencial de gauge. Debido a que la función $\theta(\mathbf{r})$ es multivaluada (está definida a menos de un múltiplo entero de 2π), la transformación de gauge es singular, y tenemos una singularidad $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \tilde{\phi} \phi_0 \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$. Entonces, el campo magnético de Chern-Simons $b(\mathbf{r})$ asociado al vector potencial \mathbf{a} es:

$$b(\mathbf{r}) = \epsilon_{ij} \partial_i \mathbf{a}_j(\mathbf{r}) = \tilde{\phi} \phi_0 n(\mathbf{r}) = 2\pi \tilde{\phi} n(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

donde $n(\mathbf{r}) = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ es la densidad de partículas local.

Notemos que la transformación (2.9) es una transformación de fase que no modifica el módulo de la función de onda, con lo cual las densidades electrónicas original y transformadas son iguales:

$$\begin{aligned} n_e(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 \dots \int d\mathbf{r}_N |\Psi_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \\ &= \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 \dots \int d\mathbf{r}_N |\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

También es fácil ver que si la función de onda original Ψ_e obedece una estadística fermiónica en el sentido de que es antisimétrica ante el intercambio de dos partículas, entonces Φ también es antisimétrica y también representa una función de onda fermiónica. Cabe destacar que si $\tilde{\phi}$ no fuera un entero par, entonces la función de onda resultante no sería antisimétrica, obteniendo una función de onda que representa partículas no fermiónicas, como bosónicas para $\tilde{\phi}$ impar o aniónica para valores no enteros.

A las partículas que asociamos con estas funciones de onda las llamamos “fermiones compuestos” (CF, del inglés *Composite Fermions*).

La interpretación de este procedimiento (mediante el cual surgen los CF) es conocida como *flux attachment*, y consiste en que el electrón captura $\tilde{\phi} = 2n$ cuantos de flujo de campo magnético, dejando un campo magnético residual.

Si bien el problema ahora parece más complicado, puesto que pasamos de electrones en un campo magnético fuerte con interacciones tipo Coulomb a fermiones transformados en un campo magnético fuerte interactuando vía Coulomb y el campo de gauge de Chern-Simons, esta transformación es muy útil porque como veremos, el problema resultará tratable.

2.5. Campo Medio

El estudio más simple que podemos hacer de los CF es a través la aproximación de campo medio, en donde la densidad se supone uniforme y los cuantos de flujo de Chern-Simons acoplados a los fermiones se diluyen en un campo magnético uniforme de magnitud

$$\langle b \rangle = n_e \tilde{\phi} \phi_0 = 2\pi n_e \tilde{\phi} \quad (2.14)$$

con n_e la densidad promedio, y $\tilde{\phi} = 2n$ el número (par) de cuantos de flujo acoplados a cada fermión. Eligiendo el flujo de Chern Simons en la dirección opuesta al campo magnético externo aplicado, según la ecuación (2.10) este campo $\langle b \rangle$ cancela parte del campo magnético B dejando un campo (medio) residual, visto por los fermiones transformados como

$$\Delta B = B - \langle b \rangle = B - 2\pi n_e \tilde{\phi} \quad (2.15)$$

¿Qué hemos ganado entonces? El punto crucial es que el estado fundamental del problema de muchos cuerpos con fracción de llenado $\nu < 1$ era altamente degenerado ($BA/2\pi$), con todos los electrones en el menor nivel de Landau y exactamente igual energía. Ahora, la degeneración de los niveles de Landau ocupados por los fermiones compuestos es mucho menor ($B^*A/2\pi$), con más niveles de Landau ocupados. La reducción en degeneración sugiere de hecho tratar a los CF como independientes. En este sentido, cuando $B^* = 0$ los CF llenan un mar de Fermi, y forman niveles de Landau de CF cuando no. Es más, en la aproximación de campo medio (despreciando las

fluctuaciones de densidad, i.e. densidad uniforme), el Hamiltoniano es aproximado por

$$H_{\text{campo-medio}} = \sum_j \frac{[\mathbf{p}_j + \frac{\epsilon}{c} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)]^2}{2m} \quad (2.16)$$

donde $\Delta \mathbf{A}$ es el vector potencial asociado con el campo medio ΔB . El término de la interacción de Coulomb desaparece en la descripción semiclásica de campo medio puesto que se supone la densidad completamente uniforme, y sólo contribuye con una constante (aunque infinita). Así, el Hamiltoniano $H_{\text{campo-medio}}$ describe fermiones libres en un campo magnético uniforme.

2.5.1. Fracciones de llenado con denominadores pares

Para algunas fracciones de llenado particulares, el campo magnético aplicado es cancelado exactamente por el flujo de Chern-Simons (en campo medio, i.e. $\Delta B = B - \langle b \rangle = 0$). Esta cancelación ocurre cuando

$$\nu = \frac{n_e \phi_0}{B} = \frac{1}{\bar{\phi}} = \frac{1}{2n} \quad (2.17)$$

Entonces, para fracciones de llenado con denominadores pares, podemos describir (en campo medio) el estado fundamental del sistema de los CF como fermiones en campo magnético cero. Esto quiere decir que es un mar de Fermi con $k_F = \sqrt{4\pi n_e} = \frac{1}{l_B \sqrt{n}}$. Este resultado quiere decir que podemos aplicar un campo magnético externo intenso pero terminar con un sistema efectivo que se comporta, de alguna manera, como si no existiera campo magnético.

De cualquier modo, aunque da un puntapié para comenzar a entender la física de los CF, hace falta ir más allá. Por ejemplo, ya que el sistema está descrito por un campo magnético efectivo nulo, la predicción es que la conductividad Hall del sistema es cero (lo que no ocurre para sistemas con fuertes campos magnéticos).

2.6. Descripción dual

2.6.1. HLR

En un importante trabajo del año 1993, Bertrand Halperin, Patrick Lee, y Nicholas Read (HLR, [10]) describieron distintas propiedades de la superficie de Fermi de los CF

que sobreviven al considerar las fluctuaciones más allá de la teoría de campo medio. Para ello trabajan con el caso de fracción de llenado $\nu = 1/2$ ($n = 1$ en (2.17), también conocido como *semilleno*), dentro de las aproximaciones de Hartree y RPA (del inglés *Random Phase Approximation*, Aproximación de Fase Aleatoria). Por ejemplo, predicen que el estado fundamental de los CF es un líquido de Fermi, pudiendo explicar los resultados experimentales de propagación de ondas acústicas. También, cerca del semilleno, los CF deberían ver un pequeño campo magnético residual, donde aparecen órbitas semiclásicas (con radios de ciclotrón órdenes de magnitud mayores que cualquier escala de longitud electrónica apropiadas para esos campos magnéticos) que han sido observadas experimentalmente.

A pesar de los grandes éxitos de la teoría, hay una simetría que surge inmediatamente para el FQHE en el caso semilleno ($\nu = 1/2$) que es la simetría electrón-hueco (en inglés, *particle-hole symmetry*), y que no queda explícita en el paradigma de los CF. La simetría viene de que todos los electrones quedan recluidos al menor nivel de Landau (LLL, del inglés *Lowest Landau Level*), y de considerar el límite donde los electrones no tienen excitaciones que les permitan promoverse a otros niveles de Landau de mayor energía (*gap* $AB/2\pi$ grande). Los CF son construidos acoplando flujos de campo magnético a los electrones antes de proyectarlos al LLL, lo que ya de por sí implica una asimetría ($2n$ flujos para los electrones, cero para los huecos).

Una posibilidad lógica es que la simetría de electrón-hueco se rompe espontáneamente y que la teoría de HLR describe sólo uno de los dos estados fundamentales del caso semilleno, que se convierte en degenerado cuando no hay mezclas entre niveles de Landau. Aún así, hay evidencias para considerar que la simetría electrón-hueco se mantiene. Un experimento reciente resultó en que el momento de Fermi está determinado por la densidad de electrones para $\nu < 1/2$, y de huecos para $\nu > 1/2$ [3]. Una interpretación de este experimento es que el caso límite de $\nu = 1/2$ admite dos descripciones alternativas pero equivalentes en términos de electrones y de huecos. Esto quiere decir que el estado fundamental de llenado $\nu = 1/2$ coincide con su conjugado electrón-hueco.

Motivadas por estas rupturas de simetría, recientemente han aparecido teorías que buscan dualidades entre teorías de campos relativistas y el FQHE, lo que como se mencionó en la Introducción ha dado lugar a una actividad intensa en la frontera entre física de altas energías y materia condensada.

2.6.2. Son

En el 2015 Dam Thanh Son [3] propuso una teoría simétrica ante el intercambio electrón-hueco del estado fundamental (tipo líquido de Fermi) del nivel de Landau

semilleno.

Se trata de una teoría efectiva, construida para respetar todas las simetrías discretas (C, P, T, CP, CT, PT), y satisfacer las series de Jain (series de plateaus para $\nu = 1/2, 1/4$, etc.). Al igual que en HLR, el grado de libertad elemental es un fermión. Sin embargo, difiere en algunos aspectos:

- El fermión es, por naturaleza, un fermión de Dirac (en lugar de un fermión no relativista).
- Es su propia partícula conjugada ante electrón-hueco.
- El fermión no tiene interacciones de Chern-Simons (C-S no es consistente con la simetría electrón-hueco).

Son propone adivinar la forma de la teoría de bajas energías. Entonces, pidiendo a la teoría que:

- Sea invariante ante CP y PT .
- Para neutralidad de carga y campo magnético no nulo, el estado fundamental sea un líquido de Fermi.
- La teoría explique las series de Jain.

proponen la siguiente acción:

$$S_{eff} = \int d^3x \left(i\bar{\psi}(\partial_\mu + 2ia_\mu)\psi + \frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu a_\lambda \right) - \frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^2 \quad (2.18)$$

Aquí, ψ es el campo de Dirac que describe la cuasipartícula fermiónica, a_μ es el campo de gauge emergente y ... representa otros términos, incluyendo un posible término cinético de Maxwell para a_μ y términos de interacciones. La cuasipartícula ψ (que Son llama *Dirac Composite Fermion*) tiene números cuánticos distintos de los del electrón: carga eléctrica neutra y tiene carga respecto al campo de gauge emergente a_μ .

De este modo, se propone una dualidad entre el LLL con $\nu = 1/2$ y la teoría (2.18). Uno de los aspectos más importantes de la dualidad es cómo se mapean las simetrías globales. En este caso, los electrones en el LLL tienen una simetría $U(1)$ asociada a su carga electromagnética. Esto implica la existencia de una corriente conservada, con componentes

$$J_\mu = (\Psi^\dagger\Psi, \Psi^\dagger\vec{\sigma}\Psi). \quad (2.19)$$

La componente temporal es la densidad de carga, mientras que las componentes espaciales están dadas por la corriente electrónica. Esta corriente se acopla minimalmente

al campo electromagnético, es decir, a través de un término $J_\mu A^\mu$ en el Lagrangiano. En la descripción dual, también hay una carga global $U(1)$ conservada, pero es más sutil. En efecto, dado un campo de gauge a_μ en 2+1 dimensiones, es posible construirse la corriente

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho, \quad (2.20)$$

que es conservada, $\partial_\mu J^\mu = 0$ debido a la antisimetría de $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. La dualidad mapea la corriente electromagnética a esta corriente conservada J_μ en la teoría de fermiones compuestos. En la teoría dual, habrá nuevamente un acoplamiento minimal al campo electromagnético, $J_\mu A^\mu$, y éste es el origen del segundo término en (2.18).

La física de esta nueva corriente conservada en la teoría dual tiene implicancias físicas importantes. Para entenderlas mejor, hay que determinar qué objetos están cargados frente a esta corriente. La respuesta es que la teoría dual admite soluciones clásicas no triviales, llamadas vórtices, alrededor de los cuales el campo de gauge a_μ tiene un *winding* no trivial (esto es análogo a los vórtices en hidrodinámica). En efecto, si calculamos la carga conservada y usamos el teorema de Stokes, obtenemos

$$Q = \int d^2x J_0 = \int d^2x \epsilon_{ij} \partial_i a_j = \oint d\vec{l} \vec{a} \quad (2.21)$$

que no es otra cosa que la vorticidad o número de winding del potencial de gauge \vec{a} . Ya que la dualidad mapea la carga eléctrica a esta carga *topológica*, deducimos que los electrones del LLL se mapean a vórtices de la teoría de composite fermions, ya que estas son las fluctuaciones cargadas frente a $U(1)$.

Varias propiedades que serán relevantes en el resto del trabajo se deducen de esta correspondencia entre corrientes conservadas, y cómo se acoplan al campo electromagnético. Por ejemplo, un campo magnético externo (como el necesario para producir los niveles de Landau), se mapea, a través de esta correspondencia, a una fuente para la densidad de fermiones compuestos, es decir, un potencial químico para dichos fermiones. Esto puede verse explícitamente del acoplamiento $\epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu a^\rho$ que, integrado por partes y evaluado para un campo magnético $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$ da como resultado un término de fuente Ba_0 . Un cálculo similar muestra que una densidad de electrones se mapea a impurezas magnéticas en la teoría compuesta.

En el capítulo que sigue describimos la herramienta de Supersimetría, necesaria para entender el trabajo de la dualidad del resto del trabajo, y que utilizaremos para formalizar lo expresado en la presente sección.

Capítulo 3

Supersimetría

“The time you enjoy wasting is not wasted time.”

— Bertrand Russell.

En esta sección se presentará una breve introducción a la supersimetría, que servirá de base para los tratamientos de dualidades en Teorías de Campos de los siguientes capítulos. Antes de SUSY, se pensaba que las dualidades eran una cualidad especial de los sistemas de mecánica estadística en el plano, es decir teorías de campos en 1+1D. Resulta luego un tema de gran interés, puesto que gracias a ella se han descubierto dualidades muy interesantes en más de 1+1D ¹[11].

Es importante mencionar que el tratamiento de este capítulo será de SUSY en 3+1 dimensiones. Si bien nuestro interés está puesto en teorías que viven en 2+1D, es posible obtener teorías supersimétricas en 2+1D a partir de teorías en 3+1D por reducción dimensional.

El objetivo de esta sección es que sirva de introducción para los lectores del área de Materia Condensada que no estén familiarizados con la supersimetría. De ninguna manera se intenta que sea una revisión completa. Se pueden encontrar excelentes tratamientos en [12–15].

3.1. Introducción

Todas las simetrías conocidas experimentalmente relacionan bosones con bosones por un lado, y fermiones con fermiones por el otro. Pero teóricamente podemos plantearnos

¹Como la dualidad S, partícula/vórtice, etc.

una simetría que relacione bosones con fermiones: *supersimetría*.

Si bien ya han pasado más de 30 años desde que la supersimetría fue concebida, al día de hoy no se han encontrado evidencias experimentales. De hecho, todas las teorías supersimétricas conocidas mapean fermiones conocidos a bosones desconocidos y viceversa. Existe toda una formulación que intenta explicar esta ausencia de los llamados *supercompañeros*, pero la idea de esta sección no es más que servir de motivación.

A pesar de la falta de evidencia experimental, las teorías de campos supersimétricas mantienen su atractivo. Esto se debe principalmente a que la supersimetría provee una de las soluciones más atractivas al “problema de la jerarquía”, que básicamente es resuelto por la cancelación de diagramas de Feynman. Es más, esta propiedad de cancelación ha sido formalizada en un teorema conocido como teorema de no-renormalización [16], y es una de las que más nos interesan aquí porque permite llevar a cabo cálculos de correcciones cuánticas de forma no perturbativa. En la misma línea, las teorías supersimétricas son mejores comportadas en el ultravioleta que las no-supersimétricas. Finalmente, aunque totalmente ortogonal a este trabajo, la supersimetría parece ser un ingrediente esencial para las teorías de *supercuerdas*.

En la década de 1960 surgió el interés por simetrías que extiendan el grupo de Poincaré. Esto motivó a Coleman y Mandula a probar un teorema que establece que la única simetría de la matriz de scattering que incluye a las simetrías de Poincaré es el producto de las simetrías de Poincaré con un grupo de simetrías internas [17]. Más tarde, Golfand y Likhtman lograron extender el álgebra de Poincaré a un “álgebra de Lie graduada”, donde aparecen simetrías no triviales entre bosones y fermiones.

En Materia Condensada, la supersimetría se ha utilizado como técnica en una variedad de problemas, y ha encontrado sus primeras aplicaciones en modelos de campos aleatorios, polímeros lineales (y ramificados) y localización. En general se trata de situaciones donde aparece una simetría entre bosones y fermiones a partir de introducir en el cálculo variables fermiónicas (de Grassman), y no donde ambas variables sean campos fundamentales de la teoría. También es interesante considerar SUSY en Materia Condensada cuando se pueden derivar propiedades interesantes de sistemas no supersimétricos, a partir de romper la simetría bosón-fermión de una teoría supersimétrica, como es el caso del presente trabajo.

3.2. Superespacio y supercampos

Como se mencionó en la sección anterior, es posible encontrar simetrías que relacionen bosones y fermiones mediante la introducción de campos fermiónicos en el cálculo. En

estos casos, la simetría surge de manera más bien particular a la hora de resolver el problema.

Podríamos preguntarnos cuál es, si es que existe, el método general para construir teorías supersimétricas. Lo primero a tener en cuenta es que necesitamos el mismo número de grados de libertad fermiónicos que bosónicos. Existe en efecto un método más general y elegante, aunque de considerable abstracción, conocido como el formalismo del superespacio [18, 19].

3.2.1. Álgebra supersimétrica

En analogía al grupo de Poincaré, donde denotamos \mathbf{P} al generador de la transformación de traslación que nos lleva de un punto \mathbf{x} a $\mathbf{x}+\mathbf{a}$, denotamos Q_α al generador de la supersimetría que nos lleva del campo φ a ψ_α ², conocido como supercarga.

En caso de ser necesario, el lector puede recurrir al libro de Bailin-Love [12], el cual presenta un excelente resumen sobre notación de índices punto y no punto en espinores de Weyl.

Puede verse que la supercarga Q_α transforma como un espinor de Weyl, es decir $[J^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta$, donde $J^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Lorentz. Denotamos $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ al conjugado de Q_α , y vale $[J^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}$. Análogamente $[P^\mu, Q_\alpha] = 0$, lo cual es consistente con la propuesta de que Q_α es independiente de las coordenadas espacio-tiempo.

Para escribir las relaciones de anticonmutación entre las cargas $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}$ argumentamos por el método de “¿qué más puede ser?”, siguiendo el razonamiento de A. Zee [20]. El lado derecho debe tener índices α y $\dot{\beta}$, y el único objeto que cumple con esto es σ_μ . Además del lado izquierdo no hay ningún índice de Lorentz μ , con lo cual debe estar contraído con el único cuadvivector involucrado que es P_μ , con lo cual:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu, \quad (3.1)$$

donde el factor 2 fija la normalización de las cargas Q .

²A lo largo de todo el trabajo, φ y ϕ harán referencia a bosones, mientras que ψ a fermiones.

3.2.2. Supermultiplete

Al igual que con otros grupos de simetrías, también es posible llevar a cabo un estudio de las representaciones del álgebra de modo de construir multipletes (conocidos como supermultipletes). Una descripción clara y concisa de cómo es la construcción de los supermultipletes se puede encontrar en los libros de Bailin-Love [12] y Terning [13]. En total analogía con lo que ocurre con los operadores escalera S^+ , S^- para la proyección del espín al sumar dos espines $\frac{1}{2}$, el concepto principal radica en que los $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}$ actúan como operadores de creación y destrucción, modificando el espín total de los estados de una partícula en saltos discretos de $\frac{1}{2}$. De esta manera, aplicar un Q, \bar{Q} sobre un estado bosónico da lugar a un estado fermiónico y viceversa. Usualmente se nota de manera conceptual

$$Q|\text{boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle,$$

$$Q|\text{fermion}\rangle = |\text{boson}\rangle.$$

Los supermultipletes pueden construirse a partir de un estado base de spin s (o helicidad λ , en el caso no masivo) que es aniquilado por todos los Q , e ir aplicando sucesivamente distintos \bar{Q} para aumentar el espín en $s + \frac{1}{2}, s + 1, \dots$. Es importante notar que en el caso masivo, por ejemplo, pasando al sistema de referencia del centro de masa $p^\mu = (m, \vec{0})$ la relación de anticonmutación (3.1) asume la forma sencilla de

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2m\delta_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (3.2)$$

Esto quiere decir que dentro de un mismo supermultiplete, todos los estados van a tener la misma masa. Este mismo resultado aparecerá en el formalismo de supercampos, que se describe a continuación.

3.2.3. Superespacio

Siguiendo la línea del comienzo de la sección sobre los generadores de transformaciones, podemos tomar (3.1) para motivar la idea de que una combinación de una transformación supersimétrica Q por su conjugado \bar{Q} da lugar al generador de traslaciones $P_\mu = i(\partial/\partial x^\mu)$. Tratamos ahora de usar la intuición de que la acción de Q_α puede interpretarse como una especie de traslación en un espacio abstracto de coordenadas de Grassman θ^α para encontrar la acción de los generadores sobre lo que a continuación definiremos como *superespacio*.

Salam y Strathdee ampliaron las coordenadas usuales (bosónicas) del espacio-tiempo de 4 dimensiones con coordenadas de Grassman (fermiónicas), e inventaron así la noción

de superespacio con coordenadas que llamamos $\{x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\}$.

En analogía a la expresión para los cuádrimomentos, escribimos que Q_α y $\bar{Q}_{\dot{\beta}}$ son representados por algo así como $\partial/\partial\theta^\alpha$ y $\partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}$. Pero esto da lugar a un anticonmutador $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0$ (en lugar de (3.1)), con lo que querríamos agregar un término al cual aplicarle $\partial/\partial\theta$ de como resultado el lado derecho de la relación de anticonmutación. Proponemos, con la ayuda de conocer el resultado, $\theta\sigma^\mu\partial_\mu$. En efecto, puede verse que si definimos las supercargas como

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (3.3)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\beta}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\partial_\mu, \quad (3.4)$$

satisfacemos todas las relaciones de conmutación y anticonmutación anteriores. Esto da lugar a la representación de las supercargas sobre el espacio de supercampos.

3.2.4. Supercampo

Un supercampo es una función de todas las coordenadas $\Phi(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}})$, de modo que una transformación infinitesimal de supersimetría con parámetros de Grassman $\xi, \bar{\xi}$ es

$$\Phi \rightarrow \Phi' = (1 + i\xi^\alpha Q_\alpha + i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})\Phi. \quad (3.5)$$

Esto puede verse de tratar al supercampo como un operador y aplicar la transformación (de nuevo resulta instructivo la analogía con el grupo de Lorentz)

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp(-i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}))\Phi \exp(i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})) \quad (3.6)$$

Expandiendo en los parámetros infinitesimales ξ obtenemos $\exp(-i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})) \sim (1 - i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}))$. Finalmente, definiendo la notación de la acción de los operadores Q sobre el espacio de supercampos como $\delta\Phi = i[\Phi, \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}] = i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi$, que es la expresión (3.5).

Recordemos ahora que dos variables de Grassman anticonmutan, es decir $g_1g_2 = -g_2g_1$ para $g_2 \neq g_1$ y $g^2 = 0$ (ver Apéndice A). Como θ tiene dos componentes (θ_1, θ_2) sólo podemos formar hasta dos potencias $\theta\theta := \theta^\alpha\theta_\alpha = \theta^1\theta^2 - \theta^2\theta^1$. Lo mismo se cumple para las variables $\bar{\theta}$.

Si Φ es un supercampo escalar, podemos expandir en potencias de $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ con un número finito de términos:

$$\begin{aligned} \Phi(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}) &= \varphi(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) \\ &+ (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\rho(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde los nuevos símbolos introducidos son los coeficientes de la expansión, de carácter fermiónico o bosónico (dependiendo de la cantidad de $\theta, \bar{\theta}$ a los que acompañen).

Pero trabajar con esta condición únicamente es demasiado general, con lo cual nos gustaría tener alguna clasificación de los supercampos.

Supercampos quirales

En particular, podemos definir los siguientes objetos:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (3.8)$$

$$\bar{D}_{\dot{\beta}} = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\beta}}} + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\partial_\mu \right]. \quad (3.9)$$

Estos D, \bar{D} (conocidos como derivadas supercovariantes) anticonmutan con Q, \bar{Q} (son algo así como las combinaciones ortogonales) y esto significa que si imponemos sobre el campo Φ la condición $\bar{D}_{\dot{\beta}}\Phi = 0$, entonces el campo transformado Φ' también satisface esta condición.

Este tipo de supercampo (tales que $\bar{D}_{\dot{\beta}}\Phi = 0$) es tan importante que tiene su propio nombre: se los conoce como supercampos **quirales**. En analogía con la condición de holomorfía en variable compleja, donde una función $f(x, y)$ se dice holomorfa si $(\partial/\partial\bar{z})f(x, y) = 0$, $\bar{z} = x - iy$ y podemos concluir que $f(x, y) = f(z), z = x + iy$, podemos construir la variable $y^\mu \equiv (x^\mu + i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. Vemos que

$$\bar{D}_{\dot{\beta}}y^\mu = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\beta}}} + i\theta^\beta(\sigma^\nu)_{\beta\dot{\beta}}\partial_\nu \right]y^\mu = -\left[-i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \right] = 0. \quad (3.10)$$

Esto implica que Φ sólo va a depender de $x^\mu, \bar{\theta}$ en la combinación y^μ . Tenemos entonces que un supercampo $\Phi(y, \theta)$ que depende sólo de las variables y, θ es un supercampo quiral.

Si expandimos el supercampo quiral Φ en serie de potencias de θ dejando y fijo, la serie se trunca rápidamente dejando

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y), \quad (3.11)$$

donde $\varphi(y), \psi(y), F(y)$ son coeficientes de la expansión. Pero notando que $i\theta\sigma\bar{\theta}$ es un desplazamiento bosónico (dos θ , tiene que poder sumarse a x^μ), si expandimos nuevamente alrededor de x tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(y, \theta) &= \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) \\ &+ i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + \sqrt{2}\theta i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\psi(x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vemos que un supercampo quiral contiene un fermión de Weyl ψ y dos campos escalares complejos φ y F . Es decir, cuatro grados de libertad fermiónicos y cuatro bosónicos, como esperábamos.

Supercampos vectoriales

Ahora consideremos imponer otra condición sobre los supercampos distinta del quiral pero quizás más familiar. Llamamos a un supercampo $V(x, \theta, \bar{\theta})$ un supercampo vectorial si cumple $V = V^\dagger$. Por esto mismo también se los conoce como supercampos reales.

El supercampo vectorial más general tiene 8 componentes independientes. Es decir, que se puede escribir en el superespacio en términos de 8 campos de distinta naturaleza (fermiones o bosones). Se puede ver [12] que es posible definir transformaciones de gauge sobre los supercampos vectoriales, de modo de deshacernos de algunas de las componentes del supercampo V . En particular, una muy útil elección de gauge es conocida como el gauge de Wess-Zumino, y permite simplificar la expresión considerablemente (de modo tal que las componentes conocidas como $C = \chi = M = N = 0$ se anulan). Por lo tanto la expresión del supercampo vectorial en el gauge de WZ adopta una forma mucho más sencilla solamente en términos de 3 campos V_μ, λ, D

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x) \quad (3.13)$$

Recordemos ahora que un campo escalar complejo ϕ no supersimétrico acoplado a un campo de gauge A_μ a través de una derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ transforma de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \exp[iq\alpha(x)]\phi(x), \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x), \end{aligned} \quad (3.14)$$

ante un $U(1)$ local con carga q y parámetro α local.

En analogía a esta estructura generalizamos estas transformaciones para los supercam-

pos quiral Φ y vectorial V con parámetro Λ

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\rightarrow \exp [iq\Lambda(x)] \Phi(x), \\ V &\rightarrow V - \frac{i}{2}(\Lambda - \Lambda^\dagger),\end{aligned}\tag{3.15}$$

donde la cantidad que queda invariante por estas transformaciones, en lugar de $|D_\mu\phi|^2$, ahora es

$$\Phi^\dagger \exp(2qV) \Phi.\tag{3.16}$$

Nuevamente en analogía a la teorías de gauge no supersimétricas, la conexión $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ en las teorías de gauge definimos

$$W_\alpha := -\frac{1}{4}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})\mathcal{D}_\alpha V\tag{3.17}$$

que es quiral e invariante antes transformaciones de gauge. Aquí el índice α identifica una de las componentes espinoriales, los $\bar{\mathcal{D}}$ tienen índices fermiónicos contraídos.

Para obtener las componentes en campos de w_α volvemos a la variables $y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Esto aporta algunas simplificaciones que dan lugar a la expresión en componentes

$$W_\alpha(y, \theta) = \lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) + (\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(y).\tag{3.18}$$

3.2.5. Acción supersimétrica

El objetivo detrás del despliegue de formalismo y definiciones de las secciones previas apuntaba a la construcción de una acción con una propiedad especial: que sea invariante ante transformaciones de supersimetría. Para hacer esto en detalle es necesario saber cómo transforman cada uno de los campos componentes de los supercampos ante transformaciones de supersimetría (3.5). Pero el cálculo es largo y no muy instructivo, puede verse en la bibliografía. En cambio es posible obtener información interesante a partir de análisis dimensional (recordemos $\hbar, c = 1$). Estudiemos el caso particular del campo quiral.

Sabemos que P_μ tiene dimensiones de masa $[P_\mu] = 1$, con lo cual usando las relaciones de anticonmutación (3.1) vemos que $[Q] = [\bar{Q}] = \frac{1}{2}$ y $[\theta] = [\bar{\theta}] = -\frac{1}{2}$. Si tomamos $[\varphi] = 1$ como es usual en 3+1D (en general $(D-2)/2$), (3.12) nos dice que $[\psi] = \frac{3}{2}$ como esperábamos (en general $(D-1)/2$) y $[F] = 2$ (o $D/2$). Si nos concentramos en el campo desconocido F y quisiéramos construir un término cinético en la acción propondríamos

algo del estilo $F^{\dagger n} D^m F^p$. Pero incluso para $m = 0$, vemos que el término de menor dimensión que podemos construir es con $n = p = 1$, i.e. $F^\dagger F$, y tiene dimensión 4 (los otros tienen dimensión incluso mayor). Es decir, no podemos construir un término cinético para el campo F , de otra manera no sería renormalizable, lo máximo a lo que podemos aspirar es a incluir el término $F^\dagger F$.

Al carecer de términos superiores al cuadrático, el campo F puede integrarse funcionalmente imponiendo su ecuación de movimiento. A este tipo de campos se los conoce como campos auxiliares.

También por argumentos dimensionales podemos encontrar la variación δF ante una transformación de supersimetría. La variación debe ser lineal en $\xi, \bar{\xi}$ que tienen $[\xi] = [\bar{\xi}] = -\frac{1}{2}$, y tenemos $[\delta F] = [F] = 2$, con lo cual lo que acompaña al parámetro ξ debe tener dimensión $\frac{5}{2}$. Puede verse rápidamente que la única combinación con dimensión $\frac{5}{2}$ es $\partial_\mu \psi^\alpha$. El índice μ debe estar contraído y por invariancia de Lorentz sólo puede estarlo con $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}$. Esto resuelve el problema de contraer los índices fermiónicos, y con estos ingredientes sólo podemos formar (a menos de una constante)

$$\delta F \sim \partial_\mu \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \quad (3.19)$$

De igual manera se pueden encontrar las otras variaciones $\delta \sim \xi \psi$ y $\delta \psi \sim \xi F + \partial_\mu \varphi \sigma^\mu \bar{\xi}$. Lo interesante de la variación δF es que es una derivada total (una divergencia).

Si denotamos como “término F de $[\Phi]$ ”, o $[\Phi]_F$, al coeficiente que acompaña al término $\theta\theta$ en (3.12), tenemos que (si nos permitimos despreciar términos de frontera) $\int d^4x [\Phi]_F$ es invariante ante supersimetría, como se puede apreciar del hecho de que $\delta([\Phi]_F)$ sea una divergencia total.

Observamos que $\bar{D}_{\dot{\beta}} \Phi = 0$ implica que $\bar{D}_{\dot{\beta}} \Phi^2 = 0$, y entonces tenemos una receta para construir términos que dan lugar a una acción supersimétrica: multiplicamos un supercampo quiral consigo mismo Φ^2, Φ^3, \dots y tomamos su término F . En efecto, puede verse también a través del cálculo de su variación explícita que

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{1}{3} g \Phi^3 + \dots \right]_F \quad (3.20)$$

es invariante ante supersimetría. Por ejemplo, el término cuadrático es $[\Phi^2]_F = (2F\varphi - \psi\psi)$, donde se generó una masa para el fermión de Weyl.

Para generar un término cinético como $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha$ necesitamos introducir $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ en la ecuación, pero este tipo de elementos no aparecen en (3.12) (sólo aparece ψ). Proponemos un término $\Phi^\dagger \Phi$, que resulta ser un supercampo vectorial, y en donde efectivamente

aparecerá el término buscado. Análogamente al análisis de los párrafos anteriores para el caso del campo quiral puede concluirse que la variación del llamado término D , el acompañado por $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$, que denotamos $(\delta([\Phi]_D))$, de un supercampo vectorial (ver eq. (3.13)) es una divergencia total, i.e. $\delta([\Phi]_D) = \partial_\mu(\dots)$. Por consiguiente, el término de la acción $\int d^4x[\Phi^\dagger\Phi]_D$ es invariante ante supersimetría. Aunque la motivación para estudiar $\bar{\psi}_\alpha$ era obtener el término cinético del fermión de Weyl, notemos que se generan los términos cinéticos de tanto bosones $\int d^4x\partial\varphi^\dagger\partial\varphi$ y fermiones $\int d^4x\partial\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi$, como también el término cuadrático del campo auxiliar $\int d^4xF^\dagger F$.

En definitiva, podemos escribir la acción resumida de acuerdo al desarrollo de los últimos párrafos como

$$S = \int d^4x \left([\Phi^\dagger\Phi]_D - ([W(\Phi)]_F + h.c.) \right) \quad (3.21)$$

donde $W(\Phi)$ se conoce como *superpotencial*.

Acción como integral en el superespacio

Utilizando propiedades de integrales de variables de Grassman (ver Apéndice A),

$$\int d^2\theta(\theta\theta) = 1, \quad \int d^4\theta(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1. \quad (3.22)$$

y todos los otros argumentos sobre esas variables de integración se anulan. Vemos que de alguna forma las integrales en las variables de Grassman “seleccionan” las componentes de los campos que acompañan a la cantidad adecuada de $\theta, \bar{\theta}$, puesto que cancelan todas las demás. Recordando que el término F es el acompañado por $\theta\theta$ y que D es el acompañado por $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$, podemos escribir de forma más elegante la acción como una integral en todas las componentes del superespacio:

$$S = \int d^4x \left(\int d^4\theta(\Phi^\dagger\Phi) - \int d^2\theta(W(\Phi) + h.c.) \right) \quad (3.23)$$

Y finalmente queremos una teoría invariante de gauge. Eso lo logramos en (3.16). Al igual que en la electrodinámica agregamos el término $(F_{\mu\nu})^2$, a la acción supersimétrica debemos agregarle un término $W_\alpha W^\alpha$ para tener en cuenta la dinámica del campo de gauge. Como se mencionó anteriormente, el objeto W_α (3.18) es invariante de gauge y un supercampo quiral, con lo cual queremos quedarnos con el término F (i.e. integral en $d^2\theta$). Olvidemos por ahora en la ecuación anterior al superpotencial genérico $W(\Phi)$, e incluyamos el término que da la dinámica del campo de gauge, obteniendo finalmente

$$S = \int d^4x \left(\int d^4\theta [\Phi^\dagger \exp(2qV) \Phi] - \int d^2\theta [W_\alpha W^\alpha + h.c.], \right) \quad (3.24)$$

que describe una teoría supersimétrica invariante de gauge. Se puede escribir la segunda integral sobre θ como una integral sobre todo el superespacio agregando deltas en $\bar{\theta}$ al término W_α^2 y extendiendo la integral (i.e. $\delta(\theta)W_\alpha^2$), pero es usual notarlo de la manera (3.24).

Estas teorías son importantes porque son la base de las dualidades que se describirán en el siguiente capítulo. Pero antes de continuar es necesario mencionar unas cuestiones técnicas que luego serán de utilidad. La primera de ellas es el teorema de no renormalización.

3.3. Teorema de no renormalización

La no renormalización del superpotencial es uno de los resultados más importantes de las teorías de campos supersimétricas. Una descripción detallada del teorema implicaría una demostración junto con un desarrollo general del formalismo de supercampos y superpotenciales, y no fue la idea de las secciones anteriores dar tal desarrollo. Más bien la intención aquí es dar un sabor de cuál es la filosofía detrás del teorema. Una descripción completa y concisa de superpotenciales puede encontrarse en el apunte de Fernando Quevedo [21], junto con una demostración del teorema.

El teorema de no-renormalización se deriva de la observación de que en teoría de perturbaciones, cualquier corrección a la acción efectiva que sea local en $\theta, \bar{\theta}$ se puede escribir como una integral $\int d^4\theta$ sin factores de deltas $\delta(\theta)$. Por lo tanto, el superpotencial $W(\Phi)$ no se ve renormalizado directamente, sólo a través de la renormalización del supercampo. Es decir, cualquier renormalización sobre las masas y constantes de acoplamiento en los campos se debe a renormalización de la función de onda (supercampo).

La idea detrás del teorema es la cancelación de diagramas de Feynman. La gran simetría que provee la supersimetría permite estas cancelaciones, en particular a partir de la equivalencia entre constantes de acoplamiento. Un ejemplo de estos cálculos y cancelaciones para un superpotencial del tipo $W(\Phi) = m\Phi^2 + \lambda\Phi^3$ puede verse en [12].

3.4. SUSY extendida

Hasta ahora se presentó el caso de una sola supersimetría, lo que se conoce como $\mathcal{N} = 1$ ³. Como se vio en las secciones anteriores, las acciones con $\mathcal{N} = 1$ supersimetrías se pueden escribir como casos particulares de acciones no-supersimétricas. En el mismo sentido, las acciones para supersimetrías extendidas con $\mathcal{N} > 1$ son casos particulares de acciones supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$. Las supersimetrías extras agregadas van a imponer nuevas restricciones a estas funciones y por lo tanto las nuevas acciones serán más rígidas. En resumen, a mayor número de supersimetrías, existen más restricciones para construir una acción.

3.4.1. N=2

Supongamos que imponemos las ecuaciones de movimiento para los campos auxiliares de los supercampos quiral y vectorial estudiados en las secciones anteriores. Eso nos deja con cuatro tipos de campos componentes distintos, dos por cada supercampo: $V_\mu, \lambda, \varphi, \psi$. A estos se los conoce como el campo vectorial, el gaugino, el campo escalar y el fermión de Weyl respectivamente.

Partimos ahora de un campo vectorial, para $\mathcal{N} = 1$, las supercargas $Q_\alpha^V, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^V$ relacionan los campos dentro de un mismo supermultiplete, es decir V_μ con λ . En un campo quiral pasa lo análogo, y las supercargas $Q_\beta^K, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^K$ relacionan φ con ψ .

Si ahora construimos una teoría que contenga a estos cuatro tipos de campos, vamos a tener dos tipos de simetrías distintos, los relacionados a los Q^V del supermultiplete vectorial, y los relacionados a \bar{Q}^K del supermultiplete quiral. El hecho de que haya dos tipos de supersimetrías distintos se identifica con la notación $\mathcal{N} = 2$, y como es de esperar, restringe aún más el tipo de interacciones que puede aparecer entre los campos de los distintos multipletes.

De la misma manera podemos considerar teorías que tengan dos tipos distintos de supercampos quirales, cuyas componentes se pueden escribir como $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ (en relación a la notación del supercampo quiral). A este tipo de teorías se las entiende como derivadas de un supercampo conocido como *hipermultiplete*.

En conjunto, los dos tipos de supercampos de $\mathcal{N} = 2$ descritos anteriormente serán los grados de libertad fundamentales de las teorías estudiadas en el capítulo siguiente.

³Es decir, un sólo grupo de generadores $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$

Capítulo 4

Dualidad Mirror Symmetry

“As the Beatles said, quantum fields forever!”

— Anthony Zee.

En el presente capítulo trataremos la dualidad conocida como *Mirror Symmetry* en 2+1D dimensiones. Se trata de una dualidad supersimétrica con $\mathcal{N} = 4$ que relaciona dos teorías que vamos a llamar Teoría A y Teoría B. Describiremos ambas teorías en detalle a continuación, en términos del contenido de los supercampos en cada teoría y de los términos que aparecen en la acción. Luego pasaremos a describir la dualidad sin enunciar la demostración, aunque dando una idea de las técnicas involucradas. A pesar del gran número de supersimetrías, partiremos de esta dualidad y realizaremos dos deformaciones que romperán SUSY (*chiral* y *B-field*). Mostraremos entonces cuáles son las manipulaciones necesarias para obtener una dualidad para el *Lowest Landau Level* del Efecto Hall Cuántico Fraccionario, este último de gran relevancia para Materia Condensada.

Como se mencionó al comienzo del capítulo anterior, es posible obtener una teoría supersimétrica de 2+1D a partir de reducir dimensionalmente una teoría de 3+1D. Puede verse entonces que, con la adecuada reducción dimensional, $\mathcal{N} = 4$ SUSY en 2+1D (el caso que nos compete) tiene el mismo contenido de campos que $\mathcal{N} = 2$ SUSY en 3+1D. Podemos entonces usar los resultados de la sección anterior, con la traducción adecuada del contenido.

4.1. Teoría A

4.1.1. Contenido de Campos de la teoría A

La Teoría A, también conocida a veces como la teoría magnética, es la que identificaremos con los electrones del Efecto Hall Cuántico. Es una teoría de un hipermultiplete libre \mathcal{Q} con supersimetría $\mathcal{N} = 4$ (8 supercargas).

En notación de $\mathcal{N} = 2$, el hipermultiplete consta de dos supermultipletes quirales $\mathcal{Q} = (\Phi_+, \Phi_-)$. Cada supermultiplete contiene unos campos escalares complejos y fermiones de Dirac 3D. Para referirnos a la eq. (3.12), usaremos la notación Ψ_{\pm} (en lugar de ψ) para los fermiones, y ahora denotaremos a los campos escalares complejos como v_{\pm} (en lugar de φ). Notamos a esto $\Phi_{\pm} = (v_{\pm}, \Psi_{\pm})$. El enunciado de que el hipermultiplete es libre quiere decir que la función de partición de la teoría A es

$$Z^{(A)} = \int D\mathcal{Q} e^{i \int d^3x \mathcal{L}_A(\mathcal{Q})} \quad (4.1)$$

donde la densidad lagrangiana se escribe como

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{Q}) = \int d^4\theta (\Phi_+^\dagger \Phi_+ + \Phi_-^\dagger \Phi_-). \quad (4.2)$$

Puede verse con algo de trabajo que tomando Φ^\dagger de (3.12), multiplicando con Φ y quedándonos con los términos proporcionales a $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ obtenemos el lagrangiano de campos bosónicos y fermiónicos libres

$$\mathcal{L}_A = \sum_{\pm} \left(|\partial v_{\pm}|^2 + i \bar{\Psi}_{\pm} \not{\partial} \Psi_{\pm} \right), \quad (4.3)$$

donde $\bar{\Psi}_{\pm} = \Psi^\dagger \gamma^0$. Usaremos signatura $(+ - -)$ y matrices gamma

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2. \quad (4.4)$$

4.1.2. Simetrías de la teoría A

El lagrangiano (4.3) tiene una simetría $U(1)$ global que llamaremos $U(1)_J$, frente a la cual Φ_+ tiene carga +1 y Φ_- tiene carga -1, e identificaremos con el electromagnetismo en 3+1 dimensiones (pronto agregaremos un campo externo magnético). La corriente

de Noether que se obtiene de esta simetría es la habitual ¹

$$J_\mu = \sum_{\pm} q_{\pm} \left(\bar{\Psi}_{\pm} \gamma_{\mu} \Psi_{\pm} + i v_{\pm} \partial_{\mu} v_{\pm}^* + h.c. \right), \quad (4.5)$$

con $q_{\pm} = \pm 1$.

Además, la teoría tiene simetrías no abelianas $SU(2)$, conocidas como R-simetrías y que denotamos $SU(2)_L \times SU(2)_N$, ante las cuales los pares (v_+, v_-^*) y (Ψ_+, Ψ_-^*) transforman como las representaciones (2,1) y (1,2) respectivamente. Por ejemplo, es fácil ver que una transformación de $SU(2)_L$ sobre los bosones que intercambie las componentes y no modifique los fermiones

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_-^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_+ \\ v_-^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_-^* \\ v_+ \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

deja invariante el lagrangiano (4.3).

Es importante notar que las R-simetrías no conmutan con SUSY porque $SU(2)_N$ y $SU(2)_L$ actúan separadamente en bosones y fermiones. En general, distintas componentes del supercampo transforman de distinta manera frente a las simetrías R.

El contenido de campos y simetrías se puede resumir en la siguiente tabla:

	$SU(2)_L$	$SU(2)_N$	$U(1)_J$
(v_+, v_-^*)	2	1	1
(Ψ_+, Ψ_-^*)	1	2	1

Para concluir la descripción de la Teoría A, notamos que ambos grupos $SU(2)_{L,N}$ contienen subgrupos $U(1)_{L,N}$, y a su vez la combinación de estos subgrupos forman un subgrupo de la simetría global. El subgrupo es $U(1)_L \times U(1)_N \times U(1)_J$ y se conoce como subgrupo de Cartan ². Será útil luego considerar la combinación particular de estas simetrías menores $U(1)_A \equiv U(1)_N - U(1)_L$ de modo que la combinación conmuta con SUSY, y $U(1)_R \equiv U(1)_L$. Las asignaciones de carga para los campos ante $U(1)_R \times U(1)_A \times U(1)_J$ es

	$U(1)_R$	$U(1)_A$	$U(1)_J$
v_+	1	-1	1
v_-	1	-1	-1
Ψ_+	0	-1	1
Ψ_-	0	-1	-1

¹Siguiendo el procedimiento de Noether, hacemos local el parámetro de la transformación infinitesimal y encontramos la variación del lagrangiano.

²Idea: es el subgrupo que obtenemos de quedarnos con el generador σ_3 .

4.2. Teoría B

4.2.1. Contenido de Campos de la teoría B

La Teoría B es $\mathcal{N} = 4$ SUSY QED3 con un hipermultiplete cargado \mathcal{U} . El multiplete vectorial \mathcal{V} de $\mathcal{N} = 4$ contiene un multiplete vectorial $V = (a_\mu, \sigma, \lambda)$ ³ de $\mathcal{N} = 2$ y un multiplete quiral neutro $\Phi = (\phi, \psi_\phi)$ de $\mathcal{N} = 2$. Es decir, $\mathcal{V} = (V, \Phi)$. Aquí σ es un campo escalar real, ϕ un campo escalar complejo, λ y ψ_ϕ son fermiones de Dirac de dos componentes. El hipermultiplete cargado de $\mathcal{N} = 4$ contiene dos multipletes quirales $U_\pm = (u_\pm, \psi_\pm)$ con carga opuesta ante el campo a_μ . Por completitud, podemos escribir $\mathcal{U} = (U_+, U_-)$.

Escribimos la función de partición de la Teoría B

$$Z^{(B)} = \int D\mathcal{U}D\mathcal{V} e^{\mathcal{L}_B(\mathcal{U}, \mathcal{V})}, \quad (4.7)$$

donde el lagrangiano \mathcal{L}_B es la suma de los lagrangianos de los supercampos \mathcal{U} y \mathcal{V}

$$\mathcal{L}_B(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{L}^V(\mathcal{V}) + \mathcal{L}^H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \quad (4.8)$$

donde el supraíndice H indica el lagrangiano del hipermultiplete, y el supraíndice V indica el lagrangiano del multiplete vectorial. En términos de los supercampos de $\mathcal{N} = 2$, los lagrangianos son

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^H(\mathcal{V}) &= \int d^4\theta \left(U_+^\dagger e^{2V} U_+ + U_-^\dagger e^{-2V} U_- \right) + \int d^2\theta i\sqrt{2}\Phi U_+ U_- + h.c., \\ \mathcal{L}^V(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \frac{1}{4g^2} \int d^2\theta W_\alpha^2 + h.c. + \frac{1}{g^2} \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Finalmente podemos escribir los lagrangianos en términos de los campos fundamentales, una vez que integramos en las coordenadas de Grassman del supercampo. El lagrangiano de hipermultiplete para un supercampo cargado queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \int d^4\theta \left(U_+^\dagger e^{2V} U_+ + U_-^\dagger e^{-2V} U_- \right) + \int d^2\theta i\sqrt{2}\Phi U_+ U_- + h.c. \\ &= |D_{\pm a} u_\pm|^2 + i\bar{\psi}_\pm \not{D}_{\pm a} \psi_\pm - (\sigma^2 + |\phi|^2)(|u_+|^2 + |u_-|^2) \\ &\quad - D(|u_+|^2 - |u_-|^2) + F u_+ u_- - \sigma(\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) - \phi \psi_+ \psi_- \\ &\quad - i\psi_\phi(u_+ \psi_- + u_- \psi_+) - i\lambda(u_+^\dagger \psi_+ - u_-^\dagger \psi_-) + h.c. \end{aligned} \quad (4.10)$$

³Aquí el campo σ apareció de la reducción dimensional en la dirección z , y es reminiscente de la componente a_3 en 3+1D.

Y el lagrangiano del multiplete vectorial es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^V(\mathcal{V}) &= \frac{1}{4g^2} \int d^2\theta W_\alpha^2 + \text{h.c.} + \frac{1}{g^2} \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi \\ &= \frac{1}{g^2} \left(-\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial\sigma)^2 + |\partial\phi|^2 + \bar{\lambda} i \not{\partial} \lambda + \bar{\psi}_\phi i \not{\partial} \psi_\phi + \frac{1}{2} D^2 + |F|^2 \right),\end{aligned}\quad (4.11)$$

y como ya se mencionó, el lagrangiano de la teoría B será la suma de estos dos términos. *Mirror Symmetry* establece que las funciones de partición de las teorías A y B son iguales:

$$Z^{(A)} = Z^{(B)}, \quad (4.12)$$

y de hecho esto sigue siendo válido ante la incorporación de ciertos campos externos compatibles con las simetrías. Esto será tratado en más detalle en las secciones siguientes, pero de forma cualitativa se puede representar de la siguiente manera

$$Z^{(A)}[\hat{X}, \hat{Y}, \dots] = Z^{(B)}[\hat{X}, \hat{Y}, \dots], \quad (4.13)$$

donde X, Y, \dots son supercampos que se acoplan a las corrientes conservadas por las simetrías, y el sombrero $\hat{}$ hace referencia a que son campos externos cuya dinámica no es tenida en cuenta.

4.2.2. Simetrías de la teoría B

Cambiamos de variables a_μ a lo que llamaremos el fotón dual γ de la siguiente manera

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \gamma, \quad (4.14)$$

y vemos que el término cinético del campo de gauge $\frac{1}{4}(f_{\mu\nu})^2$ se transforma en el término cinético de un bosón sin masa $\frac{1}{2}(\partial_\rho \gamma)^2$. Podemos ver fácilmente que la corriente

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu a^\rho = \frac{1}{4\pi} \partial_\mu \gamma, \quad (4.15)$$

es conservada (simplemente aplicando $\partial^\mu J_\mu$ en la primera igualdad), y cuyas leyes de conservación son equivalentes a las identidades de Bianchi para el campo de gauge. Aparece entonces una simetría global que llamaremos $U(1)_J$, y cuya acción puede entenderse como $\gamma \rightarrow \gamma + \text{const.}$ Todos los otros campos en el multiplete son neutros frente a esta simetría. El nombre $U(1)_J$ se eligió explícitamente porque luego, con la dualidad, identificaremos esta simetría con la $U(1)_J$ de la teoría A. Es interesante notar

que esto resulta en una medición del número de vórtices, o de flujo magnético.

Además las simetrías $SU(2)_L \times SU(2)_R$ actúan como (3,1) en el triplete de escalares (σ, ϕ) (recordemos que σ es real y ϕ es complejo), (λ, ψ_ϕ) están en la bifundamental, y (u_+, u_-) y (ψ_+, ψ_-) transforman como (1,2) y (2,1) respectivamente. Un resumen de esto se puede ver en la siguiente tabla

	$SU(2)_L$	$SU(2)_R$	$U(1)_J$
$e^{2\pi i \gamma / g^2}$	1	1	1
(σ, ϕ)	3	1	0
(λ, ψ_ϕ)	2	2	0
(u_+, u_-)	1	2	0
(ψ_+, ψ_-)	2	1	0

Al igual que en el caso de la teoría A 4.1.2, nuevamente nos vamos a quedar con el subgrupo de Cartan. Las cargas de los campos ante la simetría global $U(1)_R \times U(1)_A \times U(1)_J$ y simetría de gauge $U(1)_a$ ⁴ están dadas en la siguiente tabla:

	$U(1)_R$	$U(1)_A$	$U(1)_J$	$U(1)_a$
u_+	0	1	0	1
u_-	0	1	0	-1
ψ_+	-1	1	0	1
ψ_-	-1	1	0	-1
$e^{2\pi i \gamma / g^2}$	0	0	1	0
σ	0	0	0	0
ϕ	2	-2	0	0
λ	1	0	0	0
ψ_ϕ	1	-2	0	0

Ahora que tenemos enumeradas y clasificadas todas las simetrías y el contenido de campos de ambas teorías, estamos en condiciones de empezar a hacer manipulaciones sobre ellas. Una vez establecida la dualidad, también sabemos cómo se mapean manipulaciones como prender un campo magnético, densidad finita, etc. en ambos lados de la dualidad. Pasemos a describir algunas características de la dualidad.

4.3. Moduli space

Uno de los factores más interesantes (y como veremos luego, útiles) de estos modelos es que presentan lo que se conoce como *moduli space*. Aparecen cuando los potenciales

⁴Esta simetría $U(1)_a$ es análoga a la que llamamos $U(1)_J$ en la teoría A, i.e. tiene el mismo efecto sobre los campos.

involucrados presentan las llamadas *flat directions*, es decir direcciones planas. Esto ocurre cuando un mínimo del potencial no es únicamente un punto del espacio de fases sino un conjunto de puntos (en general puede ser una recta, un plano, etc.).

Estudiando los lagrangianos (4.3) y (4.8) a nivel clásico, i.e. sus ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, encontramos que la teoría A los v_{\pm} tienen valores de expectación arbitrarios. En la teoría B ocurre algo similar para los campos σ, ϕ, γ , donde pueden adquirir valores de expectación arbitrarios. Esto último recibe el nombre de *Coulomb branch*, debido a que esta propiedad permite que todos los otros campos adquieran masa, mientras que esos bosones no (en relación a la interacción de Coulomb dada por un bosón no masivo).

Es importante notar que la cantidad de *flat directions* en ambas teorías es la misma.

4.4. Mirror Symmetry

Kapustin y Strassler probaron en [22] que, en el límite de bajas energías $E \ll g^2$, la teoría B es dual al modelo de un hipermultiplete libre dado por la teoría A. La teoría A aparece como una descripción de bajas energías de la teoría B a lo largo de la *Coulomb branch* del *moduli space*. La ventaja de la supersimetría radica en el teorema de no-renormalización: la teoría efectiva es exacta a un lazo, tanto perturbativamente como no perturbativamente, y esto es lo que permite probar la dualidad.

Una derivación explícita de la teoría A a partir de la teoría B puede encontrarse en [23]. Lejos del origen de $\sigma, \phi = 0$ en la *Coulomb branch*, integramos los componentes masivos de la teoría B para obtener un modelo sigma no lineal para (σ, ϕ, γ) . Debido al teorema de no renormalización (3.3), y la ausencia de efectos no perturbativos para SQED $U(1)$. Este modelo es exacto a un lazo. La teoría A se puede obtener tomando el límite de bajas energías del modelo sigma no lineal a lo largo de la *Coulomb branch* de la teoría B. Esto da lugar al siguiente mapeo entre los bosones de ambas teorías

$$v_i \equiv \begin{pmatrix} v_+ \\ v_-^* \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{|\vec{\phi}|}{2\pi}} e^{2\pi i \gamma / g^2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi} = |\vec{\phi}| (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi), \quad (4.16)$$

y entre los fermiones

$$\Psi_a \equiv \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_-^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_{ai} v_i}{2\pi \sum_i |v_i|^2}, \quad \lambda_{ai} = \begin{pmatrix} -\lambda & -\psi_{\phi} \\ -\psi_{\phi}^* & \lambda^* \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Es interesante remarcar que aunque originalmente se derivó como una dualidad infra-

roja, es posible extender la correspondencia a toda escala de energías. A continuación daremos una idea a modo de motivación de cómo se obtienen las relaciones (4.16) y (4.17) en el límite de bajas energías.

Como se mencionó, la idea es integrar los campos que se vuelven masivos al elegir un valor de expectación distinto de cero para los bosones $\langle\sigma\rangle, \langle\phi\rangle \neq 0$. Primero integramos los campos auxiliares, obteniendo

$$\frac{1}{g^2}F^\dagger + u_+u_- = 0, \quad \frac{1}{g^2}F + u_+^*u_-^* = 0, \quad \frac{1}{g^2}D + u_+^*u_-^* = 0. \quad (4.18)$$

De estas ecuaciones y del hecho de que en un vacío supersimétrico $F = D = 0$ ⁵ vemos que $u_+ = u_- = 0$ sobre las ecuaciones de movimiento.

Estudiando el campo σ cerca del vacío $\langle\sigma\rangle \neq 0$ expandimos $\sigma = \langle\sigma\rangle + \sigma'$ vemos que los ψ_\pm, u_\pm adquieren una masa $\langle\sigma\rangle$ y los integramos. Esto da lugar a una corrección al propagador del bosón σ a un lazo, de acuerdo a los siguientes diagramas

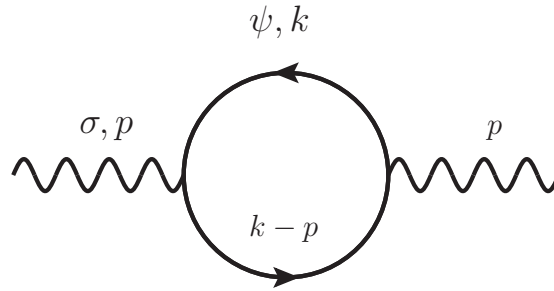


Figura 4.1: Diagrama a un lazo que da lugar a la corrección del propagador del σ por los ψ_\pm .

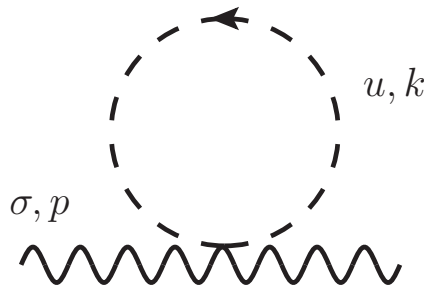


Figura 4.2: Diagrama a un lazo que da lugar a la corrección del propagador del σ por los u_\pm .

La contribución del diagrama 4.1, que denotamos $\Pi^{(1)}(p^2)$, es el que depende de los momentos externos. El diagrama 4.2, que llamamos $\Pi^{(2)}$, va a dar una contribución a la masa de σ' . Aparecen en la acción entonces nuevos términos, originados a partir de resumir las correcciones dadas por estos diagramas. En particular, modificando el

⁵Se puede reemplazar las ecuaciones de movimiento para F, F^\dagger, D en el potencial y ver explícitamente que el vacío es $u_\pm = 0$.

término cinético del $\sigma(p)$ en el espacio de momentos (identificamos $\sigma' \rightarrow \sigma$):

$$S = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g^2} p^2 + \Pi^{(1)}(p^2) + \Pi^{(2)} \right) \sigma(p) \sigma(-p) + \dots, \quad (4.19)$$

donde sólo nos interesa la parte de $\Pi^{(1)}(p^2)$ que es proporcional a p^2 . Se puede ver por análisis dimensional que este término es

$$\Pi^{(1)}(p^2) \propto \int_k \frac{1}{ik + \sigma} \frac{1}{i(k - p) + \sigma} \sim \frac{p^2}{\sigma}. \quad (4.20)$$

Entonces el término cinético del σ en la acción queda

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{\sigma} \right) (\partial\sigma)^2 \xrightarrow{E \ll g^2} \frac{1}{2\sigma} (\partial\sigma)^2 = (\partial\varphi)^2, \quad (4.21)$$

donde se tomó el límite de bajas energías $E \ll g^2$ y se introdujo el campo $\varphi = \sigma^{1/2}$. Lo interesante de este campo φ es que en el límite de bajas energías es libre, y da lugar a uno de los grados de libertad bosónicos de la teoría A, los que llamamos v_{\pm} . Con argumentos análogos puede estudiarse ϕ y encontrar sus compañeros duales en la teoría A (4.16). Puesto que ambas teorías son supersimétricas, por supersimetría pueden encontrarse las relaciones para los fermiones.

En la sección siguiente derivaremos a partir de *mirror symmetry* una dualidad supersimétrica de $\mathcal{N} = 2$ a través de acoplar la teoría con fuentes externas. Esta dualidad se conoce como *chiral mirror symmetry*, y relaciona un supercampo quiral libre en $\mathcal{N} = 2$ con $\mathcal{N} = 2$ SUSY QED3 con un único campo quiral.

4.5. Deformando Mirror Symmetry

En esta sección daremos el primer paso para disminuir el número de supersimetrías y así acercarnos a sistemas realistas no supersimétricos. Trataremos una dualidad supersimétrica que se deriva de *mirror symmetry*, que relaciona las teorías de un supercampo quiral libre en $\mathcal{N} = 2$ con $\mathcal{N} = 2$ SUSY QED3 con un único supercampo quiral. Esto se logra prendiendo unas fuentes externas que llamaremos $\hat{\sigma}_J$ y $\hat{\sigma}_A$, con los subíndices en relación a las simetrías $U(1)$ tratadas en las secciones de simetrías del capítulo. Seguiremos principalmente el razonamiento de [9]. El objetivo en ambos lados de la dualidad será obtener teorías efectivas de bajas energías.

4.5.1. Campos externos

Antes de comenzar, comentamos un poco en la idea de cómo introducir campos externos en la teoría, y cómo se mapean en la dualidad. Este análisis es independiente del hecho de que las teorías sean supersimétricas. Veamos por ejemplo las simetrías $U(1)_J$.

En ambas teorías conocemos explícitamente la simetría $U(1)_J$ y sus corrientes conservadas J_μ de las expresiones (4.5),(4.15). Un punto importante en esto es que las corrientes, al ser conservadas, protegen a los operadores de correcciones cuánticas. Es decir, no se renormalizan.

Acoplar el mismo campo externo \hat{A}_μ a las corrientes conservadas J^μ de ambas teorías, entonces, tiene que preservar la dualidad

$$Z^{(A)} = Z^{(B)} \Rightarrow Z^{(A)}[\hat{A}_\mu] = Z^{(B)}[\hat{A}_\mu]. \quad (4.22)$$

Es decir, hacemos una deformación explícita en las funciones de partición, obteniendo una dualidad más rica en contenido.

Lo mismo puede aplicarse para $U(1)_A$, o cualquier simetría cuyas corrientes conservadas conocemos. Y de la misma manera en que podemos prender campos de gauge externos y obtener una dualidad, en las teorías supersimétricas podemos prender a los compañeros del multiplete, por ejemplo $\hat{\sigma}$, que se acoplarán al compañero escalar de la corriente J_μ .

4.5.2. Teoría quiral A

En la teoría A vamos a usar las simetrías $U(1)_J$ y $U(1)_A$ de 4.1.2 que son simetrías no R, es decir que conmutan con la supersimetría. El objetivo es hacer transformaciones que no rompan todas las supersimetrías del sistema, y además tener un método sistemático para aplicar las deformaciones. La forma de incorporar campos externos consistentes con estas simetrías $U(1)$ es de acuerdo a las cargas establecidas en la sección 4.2.2. Siguiendo la fórmula (4.10), sólo hay que reemplazar los supercampos $U_\pm \rightarrow \Phi_\pm$, que son los del multiplete quiral \mathcal{U} , y elegir las componentes del hipermultiplete vectorial $\mathcal{V} = (V, \Phi)$ de modo que coincidan con las componentes que queremos introducir. Vamos a incorporar campos $\hat{\sigma}_J, \hat{\sigma}_A$, que pertenecen a los multipletes vectoriales \hat{V}_J, \hat{V}_A ⁶. A su vez, fijamos todas las otras componentes de esos supermultipletes a cero, es decir las componentes de multipletes quirales de $\mathcal{N} = 2$ son $\hat{\Phi}_{J,A} = 0$ y el resto de las componentes en campos del multiplete $\hat{V}_{J,A}$ de $\mathcal{N} = 2$ son $\hat{A}_{J,A}^\mu, \hat{\lambda}_{J,A}, \hat{D}_{J,A} = 0$. El

⁶Recordemos que las componentes del multiplete vectorial son $V = (A_\mu, \sigma, \lambda, D)$.

lagrangiano $\int d^4\theta (\Phi_+^\dagger \Phi_+ + \Phi_-^\dagger \Phi_-)$ de la teoría A se convierte en

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{Q}, \mathcal{V}_A, \mathcal{V}_J) = \int d^4\theta (\Phi_+^\dagger e^{2(\hat{V}_J - \hat{V}_A)} \Phi_+ + \Phi_-^\dagger e^{-2(\hat{V}_J + \hat{V}_A)} \Phi_-) \quad (4.23)$$

siguiendo las indicaciones de la tabla de cargas. Siguiendo la descomposición en componentes de (4.10), quedan masivos todos los campos de la teoría

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(\mathcal{Q}, \mathcal{V}_A, \mathcal{V}_J) = & |\partial v_\pm|^2 + i\bar{\Psi}_\pm \not{\partial} \Psi_\pm - (\hat{\sigma}_J - \hat{\sigma}_A)^2 |v_+|^2 - (\hat{\sigma}_J + \hat{\sigma}_A)^2 |v_-|^2 \\ & - (\hat{\sigma}_J - \hat{\sigma}_A) \bar{\Psi}_+ \Psi_+ + (\hat{\sigma}_J + \hat{\sigma}_A) \bar{\Psi}_- \Psi_- + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.24)$$

A continuación hacemos una elección particular de los $\hat{\sigma}$. Notemos que debido a la diferencia de cargas frente a los distintos $U(1)$, los $\hat{\sigma}_{J,A}$ aparecen en las combinaciones simétrica y antisimétrica. Si elegimos los campos externos de modo que $\hat{\sigma}_J, \hat{\sigma}_A = \hat{m}/2$, anulamos los coeficientes $(\hat{\sigma}_J - \hat{\sigma}_A) = 0$ que aparecen en frente de los términos cuadráticos $|v_+|^2, |\Psi_+|^2$, con lo cual esos campos siguen siendo no masivos. Luego tomamos el coeficiente externo mucho mayor que las energías del sistema $\hat{m} \gg E$, ahora los campos v_-, Ψ_- no van a jugar ningún papel en la física de bajas energías debido a que se volvieron masivos, entonces los integramos. Como la acción es cuadrática en estos campos se pueden integrar explícitamente.

Luego de estas manipulaciones que deforman *mirror symmetry* en $\mathcal{N} = 4$, llegamos a la dualidad quiral en $\mathcal{N} = 2$ que relaciona al supercampo quiral libre $V_+ = (v_+, \Psi_+)$:

$$\mathcal{L}_A^{\text{eff}} = |\partial v_+|^2 + i\bar{\Psi}_+ \not{\partial} \Psi_+, \quad (4.25)$$

con un supercampo cargado quiral $U_- = (u_-, \psi_-)$ con simetría de gauge $U(1)_{\frac{1}{2}}$

$$\mathcal{L}_B^{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi} \text{ada} + |D_{-a} u_-|^2 + i\bar{\psi}_- \not{D}_{-a} \psi_- - 16\pi^2 |u_-|^6 - 8\pi \bar{\psi}_- \psi_- |u_-|^2. \quad (4.26)$$

Veamos ahora cómo obtener la teoría efectiva B (4.26).

4.5.3. Teoría quiral B

En la teoría B, si bien se introducen los mismos campos externos $\hat{\sigma}_A, \hat{\sigma}_J$, el procedimiento es más complicado. La teoría B, interactuante, es fuertemente correlacionada y hay que estudiar los acoplamientos con cuidado (ahora la teoría ya tiene un campo σ dinámico). El efecto de introducir un nuevo hipermultiplete externo está fijado por simetrías y es la aparición de un término BF, que recordando la (4.10) nos da el

lagrangiano

$$\bar{\mathcal{L}}_B(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{V}_J) = \mathcal{L}^V(\mathcal{V}) + \mathcal{L}^H(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \hat{\mathcal{V}}_A) - \mathcal{L}_{BF}^{\mathcal{N}=4}(\mathcal{V}, \hat{\mathcal{V}}_J). \quad (4.27)$$

El lagrangiano SUSY $\mathcal{L}_{BF}^{\mathcal{N}=4}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ da lugar a los términos BF no supersimétricos conocidos, que en la notación contienen a $\frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu^1\partial_\nu A_\rho^2$, donde A_μ^k es el campo vectorial perteneciente al hipermultiplete $\mathcal{V}_k = (V_k, \Phi_k)$ de $\mathcal{N} = 4$. Contiene otro tipo de términos, pero sólo nos interesa prender campos externos $\hat{\sigma}$, y estos sólo aparecen en la forma $\mathcal{L}_{BF}^{\mathcal{N}=4}(\hat{\mathcal{V}}_1, \hat{\mathcal{V}}_2) \supset \frac{1}{2\pi}(\hat{D}^1\hat{\sigma}^2 + \hat{D}^2\hat{\sigma}^1)$. Además de este aparece el acomplamiento para el hipermultiplete que es análogo a como se vio en el caso de la teoría A, con la salvedad de que ahora tenemos un hipermultiplete dinámico \mathcal{V} . Efectivamente, la teoría A original se puede escribir como $\mathcal{L}_A(\mathcal{Q}) = \mathcal{L}^H(\mathcal{Q}, \mathcal{V} = 0)$. En la teoría B la corriente $U(1)_J$ no se acopla a los campos como lo hace la corriente de $U(1)_A$ debido a que es de origen topológico, es decir no puede derivarse mediante el procedimiento de Noether a través de transformaciones infinitesimales (como sí es posible para $U(1)_A$). Al igual que en el cálculo anterior, la interacción del campo externo $\hat{\sigma}_A$ con este término va a dar lugar a escalares masivos u_\pm con masas $m_\pm^2 = (\sigma \pm \hat{\sigma}_A)^2$ (suponiendo que $\sigma \pm \hat{\sigma}_A \neq 0$) y pueden ser integrados de la teoría de bajas energías. Esto da lugar a términos de interacción nuevos entre el campo auxiliar D y los términos $\sigma \pm \hat{\sigma}_A$, mientras que de la interacción BF obtenemos $\frac{1}{2\pi}D\hat{\sigma}_J$, con lo cual el potencial efectivo queda

$$V_{eff} = -\frac{1}{2g_{eff}}D^2 + \frac{1}{2\pi}D\hat{\sigma}_J - \frac{1}{4\pi}D(|\hat{\sigma}_A + \sigma| - |\hat{\sigma}_A - \sigma|). \quad (4.28)$$

El primer término contiene la renormalización a un lazo del acomplamiento de gauge. El segundo término viene de BF y el último es producido cuando se integran los escalares u_\pm . Un vacío supersimétrico impone $D = 0$, y usando la ecuación de movimiento para D obtenemos

$$\frac{1}{2}(|\hat{\sigma}_A + \sigma| - |\hat{\sigma}_A - \sigma|) - \hat{\sigma}_J = 0. \quad (4.29)$$

Para una elección de campos externos particular $\sigma_A = \sigma_J > 0$, se logra satisfacer la ecuación de movimiento con $\langle \sigma \rangle = |\hat{\sigma}_A|$. Con esto encontramos que en realidad la masa m_\pm^2 se anula en uno de los dos casos, y U_- es no masivo mientras que U_+ se hace masivo. De la tabla de simetrías en 4.2.2 vemos que el multiplete quiral Φ tiene carga -2 ante $U(1)_A$, con lo cual recibe una masa igual $-2\hat{\sigma}_A$.

Para construir la teoría efectiva para los restantes modos no masivos, redefinimos el origen de σ alrededor de $\hat{\sigma}_A$. Definimos la cantidad $\tilde{\sigma}$ como

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma}_A, \quad (4.30)$$

que va a ser ahora el campo dinámico.

Como U_+ y Φ son masivos a nivel árbol, se puede integrar, y la teoría resultante es una teoría de gauge quirral en $\mathcal{N} = 2$. Integrar el supercampo U_+ tiene dos efectos. El primero es la renormalización a un lazo del acoplamiento de gauge

$$\frac{1}{g_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{8\pi|\tilde{\sigma} + 2\hat{\sigma}_A|}. \quad (4.31)$$

Ahora la escala de $\hat{\sigma}_A$ sirve como escala de energía, puesto que $\hat{\sigma}_A/g^2 \gg 1$ implica que $g_{\text{eff}}^2 \sim \hat{\sigma}_A$. El segundo efecto es la generación del término de Chern-Simons $\mathcal{N} = 2$ con nivel $1/2$. Este término de Chern-Simons con $\mathcal{N} = 2$ se puede descomponer en un término de Chern-Simons en nivel $k = 1/2$ para el campo de gauge dinámico a^μ , otro término similar al proveniente de BF y un término de masa proporcional a $-g_{\text{eff}}^2$ para el gaugino λ .

Integrando D y λ a nivel clásico, en el origen de $\tilde{\sigma} = 0$ obtenemos la teoría efectiva para B (4.26)

$$\mathcal{L}_B^{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi} ada + |D_{-a}u_-|^2 + i\bar{\psi}_- \not{D}_{-a} \psi_- - 16\pi^2 |u_-|^6 - 8\pi \bar{\psi}_- \psi_- |u_-|^2. \quad (4.32)$$

Con esto se completa la dualidad quirral en $\mathcal{N} = 2$, que relaciona un supercampo quirral libre, con SQED3 con interacciones de Chern-Simons. A continuación veremos cómo deformando estas teorías podemos reobtener la dualidad propuesta por Son en [3].

Capítulo 5

Rescatando a Son: QHE = CF

“God does Arithmetic.”

— Carl Friederich Gauss.

Como se mencionó al comienzo del capítulo 4, esperábamos ser capaces de obtener el Efecto Hall Cuántico a partir de la teoría A. Originalmente, la teoría A con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías tenía dos fermiones de Dirac y dos escalares complejos. A partir de deformaciones en la dualidad *mirror symmetry* conseguimos remover de la teoría grados de libertad fermiónicos y bosónicos, pero conservando SUSY $\mathcal{N} = 2$.

El siguiente paso en las deformaciones consiste en aplicar un campo magnético externo, para luego integrar los grados de libertad masivos de la teoría de bajas energías. Es importante destacar que si bien la motivación es obtener la propuesta de Son, la dualidad obtenida es hasta donde sabemos nueva, y esperamos que dé lugar a nuevas propuestas interesantes.

5.1. Teoría A: Obteniendo el Efecto Hall

Sin detenernos en la elección de gauge, acoplamos minimalmente los términos de la acción con un vector \hat{A}_μ ¹ externo, tal que $\epsilon_{zij}\partial_i\hat{A}_j = B$, el campo magnético que queremos aplicar. En la acción supersimétrica $\mathcal{N} = 2$, el vector \hat{A}_μ va a ser una componente de un supercampo vectorial \hat{A} , que se acopla a los supercampos quirales V_+ como se vio en (3.16) $\int_\theta V_+^\dagger \exp(2q\hat{A})V_+$, de modo de lograr invariancia de gauge. Pero sabemos que el Efecto Hall no es supersimétrico, así que no será un problema romper explícitamente la supersimetría agregando un supercampo vectorial que sólo contenga la componente

¹Como es costumbre a esta altura, el sobrero indica campo externo.

V_μ , es decir $\hat{A} = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu$. El efecto de esto sobre las componentes es acoplar minimalmente de la manera usual, sin agregar ningún campo extra, de modo que el lagrangiano queda

$$\mathcal{L}_A^{\text{eff}}(\hat{A}_\mu) = |D_A v_+|^2 + i\bar{\Psi}_+ \not{D}_A \Psi_+. \quad (5.1)$$

La teoría A efectiva consiste de un fermión y un bosón no interactuantes en un campo magnético. Conocemos la solución a este problema desde el capítulo 1: niveles de Landau! Esto quiere decir que las energías van a estar discretizadas, y lo hacen de la siguiente manera ²

$$E_{\text{fermion}}^{(n)} = \pm\sqrt{2nB}, \quad E_{\text{boson}}^{(n)} = \pm\sqrt{(2n+1)B}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.2)$$

Lo notable es que $E_{\text{boson}}^{(n)} \geq \sqrt{B}$, mientras que $E_{\text{fermion}}^{(n)} \geq 0$. Entonces, en el límite de energías bajas y campo magnético grande (léase $E \lll B$), la física de bajas energías va a estar completamente dominada por los fermiones. Sin rastros de los bosones originalmente requeridos por supersimetría. Finalmente el lagrangiano efectivo de bajas energías no supersimétrico para los fermiones de Dirac en 2+1D en un campo magnético queda

$$\mathcal{L}_A^{\text{eff}} = i\bar{\Psi}_+ \gamma_\mu (\partial^\mu + iA^\mu) \Psi_+, \quad \epsilon_{zij} \partial_i \hat{A}_j = B, \quad (5.3)$$

es decir, el Efecto Hall.

5.2. Teoría B: Fermiones compuestos

La dualidad quiral nos deja la teoría B con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías, efectiva para bajas energías

$$\mathcal{L}_B^{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi} ada + |D_{-a} u_-|^2 + i\bar{\psi}_- \not{D}_{-a} \psi_- - 16\pi^2 |u_-|^6 - 8\pi \bar{\psi}_- \psi_- |u_-|^2. \quad (5.4)$$

Lo que debemos hacer a continuación es entender cuál es el efecto dual sobre esta teoría, al agregar un campo magnético en la teoría A. Luego buscaremos deshacernos del bosón u_- integrándolo para quedarnos sólo con los grados de libertad fermiónicos.

El campo magnético consiste en un campo vectorial \hat{A}_μ , que podemos pensar como perteneciente a un multiplete vectorial externo de $\mathcal{N} = 2$, $\hat{V} = (\hat{A}_\mu, (\hat{\sigma}, \hat{\lambda}, \hat{D}) = 0)$. Sabemos entonces cómo se acopla al hipermultiplete: mediante un término $\mathcal{N} = 2$ BF.

²Notar que para el fermión, el espectro es distinto del caso no relativista por un factor $B^{1/2}$. Ambas expresiones pueden derivarse de aplicar la ecuación de movimiento y resolver la ecuación diferencial.

Escribimos esta contribución como

$$\mathcal{L}_{BF}^{\mathcal{N}=2}(a, \hat{A}) = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu \hat{A}_\rho = \frac{1}{2\pi} a d\hat{A} = \frac{1}{2\pi} a_0 \hat{B}. \quad (5.5)$$

Ahora es posible ver que prender un campo magnético en la teoría efectiva A equivale a poner a los fermiones ψ_- en una superficie de Fermi. Para esto vamos a utilizar algunos argumentos dimensionales.

Por supersimetría, los términos de interacción no tienen ningún parámetro de acoplamiento, por lo que deben tener dimensión de masa 3. Usaremos que no hay ruptura espontánea de simetría para el escalar, y así integrarlo a nivel de las ecuaciones de movimiento. Integramos entonces u_- , y sus interacciones van a dar lugar a términos marginalmente irrelevantes. No los escribimos. Veremos también del potencial que tiene que tener valor de expectación $\langle u_- \rangle = 0$ (pues es $V_{\text{ef}}^u \sim |u|^2 + |u|^6$, el mínimo está en el $|u| = 0$). El lagrangiano efectivo de B queda

$$\mathcal{L}_B^{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi} a da + i\bar{\psi}_- \not{D}_{-a} \psi_- + \frac{1}{2\pi} a_0 \hat{B}. \quad (5.6)$$

La ecuación de movimiento para a_0 es (las contribuciones del término de Chern-Simons se anulan)

$$\bar{\psi}_- \gamma_0 \psi_- - \frac{\hat{B}}{2\pi} = 0 \Rightarrow \langle \psi_-^\dagger \psi_- \rangle = \frac{\hat{B}}{2\pi}, \quad (5.7)$$

es decir que imponemos una densidad de carga fija $\hat{B}/2\pi$. O equivalentemente, que ponemos a los fermiones en una superficie de Fermi.

Para terminar con el análisis, revisemos nuestra suposición de que es posible integrar el escalar u_- imponiendo su ecuación de movimiento. Para esto, revisemos primero la contribución del término de interacción con los fermiones $\bar{\psi}\psi|u|^2$. Consideremos primero un fermión libre en una superficie de Fermi. El lagrangiano es

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + \mu_F \gamma^0)\psi. \quad (5.8)$$

En partículas y antipartículas respectivamente, se requiere que $p_0 = -\mu_F \pm |\vec{p}|$. Para construir una teoría de bajas energías para las excitaciones cerca de la superficie de Fermi, escribimos la ecuación de movimiento

$$\left(1 \pm \gamma^0 \frac{\gamma^i p_i}{|\vec{p}|}\right) \psi(p) = P_\pm(p) \psi(p) = 0. \quad (5.9)$$

Definimos el proyector $P(p)$ sobre el espacio de soluciones. Construimos entonces a partir de un espinor genérico ξ , una solución a la ecuación aplicando el proyector

$\psi = P(p)\chi$ (nos deshacemos del signo eligiendo el +, es análogo en el otro caso). Observando que $P^\dagger(p) = P(p)$, tenemos que el término de interacción entre fermiones y bosones en (5.4) es

$$\bar{\psi}\psi |u|^2 = (\chi^\dagger P(p)^\dagger)\gamma^0(P(p)\chi) |u|^2. \quad (5.10)$$

Analizando en detalle, vemos que

$$P(p)^\dagger\gamma^0P(p) = \left(1 + \gamma^0\frac{\gamma^i p_i}{|\vec{p}|}\right)\gamma^0\left(1 + \gamma^0\frac{\gamma^i p_i}{|\vec{p}|}\right) = 0. \quad (5.11)$$

Es decir, a bajas energías sobre la superficie de Fermi no hay contribución del término de interacción $\bar{\psi}\psi|u|^2$. Por otro lado, podemos considerar la contribución a la masa del término $|u|^6$. La primera corrección es a dos lazos, y viene dada por el diagrama

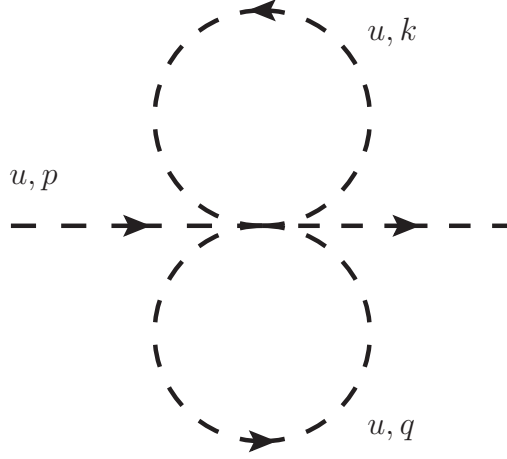


Figura 5.1: Diagrama a un lazo que da lugar a la corrección al propagador del u_- por $|u_-|^6$.

Pero este es un diagrama de autointeracción al propagador del campo escalar típico y sabemos que su contribución tiene que ser positiva. Entonces en esta aproximación sobre la superficie de Fermi, puede verse que las correcciones UV se cancelan por SUSY y quedan las contribuciones infrarrojas, que dan $m_u^2 \sim k_F^2 > 0$. Por esto, ni la interacción con el fermión ni la autointeracción dan lugar a una inestabilidad ni ruptura espontánea de simetría. Efectivamente, tenemos VEV $\langle u \rangle = 0$.

Cabe mencionar que en general aparecerán más interacciones entre bosones y fermiones, pero van a ser irrelevantes y van a estar suprimidos por potencias de $1/k_F$. Lo mismo vale para el término de Maxwell $(f_{\mu\nu})^2$ para a_μ , que nunca escribimos porque en presencia de un término de Chern-Simons, el último domina la física de distancias largas (energías chicas).

Concluimos entonces que los fermiones de Dirac en 2+1D de la teoría A en presencia

de un campo magnético a densidad nula, son duales a un líquido de Fermi de fermiones compuestos, neutrales ante el electromagnetismo, interactuando con un campo de gauge emergente. Esta es la propuesta de Son.

Vale la pena recordar entonces que en nuestra acción efectiva para la teoría B (los fermiones compuestos), domina la dinámica del campo de gauge el término de Chern-Simons. El lector atento puede haber notado que en [3], Son no incluye un término de Chern-Simons en su acción efectiva para los fermiones compuestos. Afortunadamente, podemos entender esta discrepancia a través del llamado *Debye screening*. Esto es, el diagrama usual de la autoenergía del fotón en QED a un lazo para a_μ da lugar a una masa para la componente a_0 . Es decir, dinámicamente $a_0 = 0$ y el término de Chern-Simons se hace irrelevante comparado con el término de masa. Es decir, las simetrías que propone Son para su teoría efectiva estarían presentes también en (5.6), pero de manera emergente, o sea que aparecen aproximadamente en el infrarrojo.

Resta entender cómo es el efecto dual de prender interacciones de Coulomb en la teoría A original, sobre la teoría B original (y luego interpretar las deformaciones sobre la interacción). Este efecto sobre la dualidad en $\mathcal{N} = 4$ puede verse con detalle en [8] pero, como se mostrará luego, conjeturamos que no será necesario conocer la interacción de Coulomb dual, ya que la EE estará dominada por los fermiones compuestos en su aproximación libre. Es interesante mencionar de todos modos que la dualidad mapea el acomplamiento tipo fuerte/débil, es decir que $e \rightarrow 1/e$. Esto puede usarse en la teoría dual para derivar resultados perturbativos controlados, donde en la teoría A teníamos interacciones fuertes. A continuación veremos por qué es interesante estudiar la entropía de entrelazamiento, y cómo podemos profundizar en la dualidad usando distintos métodos numéricos.

Capítulo 6

Entropía de entrelazamiento

“If you tell the truth you don’t have to remember anything.”
— Mark Twain.

En este capítulo veremos qué manipulaciones podemos hacer sobre ambas teorías buscando llevar a cabo estudios numéricos. El objetivo será calcular numéricamente la entropía de entrelazamiento, tanto para la teoría A como para la teoría B, y entender de qué manera se relacionan. Pero primero desarrollamos una discusión sobre la entropía de entrelazamiento.

La entropía es una cantidad interesante en muchas ramas de la física, encontrando su medio natural en la teoría de la información cuántica, pero también lo es para estudiar la dinámica de teorías de campos. Esta cantidad da medidas sobre la densidad de grados de libertad, y sus correlaciones [24]. Usaremos entonces la entropía de entrelazamiento para investigar propiedades de las teorías A y B, y contrastar con las predicciones de la dualidad. En este capítulo discutiremos aspectos básicos de la entropía de entrelazamiento (EE) en las teorías A y B, y posteriormente realizaremos cálculos numéricos para evaluarla a nivel no perturbativo.

6.1. Definición de entropía y estimación

Para definir la entropía de entrelazamiento, primero debemos partir el sistema en dos subsistemas (1 y 2). Definimos entonces la EE del subsistema 1 a partir de la matriz densidad reducida ρ_1

$$S_1 = -\text{Tr}(\rho_1 \log \rho_1), \quad \rho_1 = \text{Tr}_B(\rho_{12}). \quad (6.1)$$

En teorías de campos partimos de un estado puro, correspondiente al vacío, y la EE asociada a una región espacial V se obtiene con $S = -\text{Tr}\rho_V \log \rho_V$, donde $\rho_V = \text{tr}_{\bar{V}}\rho$ se obtiene trazando sobre el complemento \bar{V} .

Los sistemas locales usualmente satisfacen la llamada ley de áreas, es decir, la EE es proporcional a la frontera entre los dos subsistemas. Esta ley de área se interpreta como originada en el entrelazamiento de cortas distancias que ocurre en el borde de los subsistemas.

Hay casos interesantes en los que esta ley se viola: teorías conformes en una dimensión y superficies de Fermi en dimensión arbitraria [25]. Siguiendo la ley de áreas, en una dimensión espacial no deberíamos encontrar ninguna dependencia con el tipo de particiones de los subsistemas. Pero para las teorías mencionadas en una dimensión, aparece la llamada violación logarítmica y la dependencia es $S \sim \log R$ (donde R es el tamaño del subsistema).

Para superficies de Fermi, se conjeturó una fórmula para la violación logarítmica ¹ que ha sido verificada numéricamente, y en dimensión espacial arbitraria d es

$$S = \frac{R^{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\log R}{12} \int \int |n_x \cdot n_k| dA_x dA_k. \quad (6.2)$$

Las integrales se hacen sobre la frontera del espacio físico en el que vive la teoría (dA_x) y la superficie de Fermi (dA_k), y los $n_{x,k}$ representan los vectores normales unitarios a las superficies. Se considera que la región de entrelazamiento para esta fórmula de la entropía es una esfera.

La violación logarítmica en sistemas fermiónicos a densidad finita hace que el estudio de la EE en la dualidad del LLL sea no trivial e interesante. En efecto, la dualidad predice que el *half-filled Landau level* es dual a fermiones compuestos a densidad finita. Entonces, la entropía de entrelazamiento para fermiones en un campo magnético debe mostrar violaciones logarítmicas. Esto es muy inesperado. Por esto, en el resto de la tesis utilizaremos la EE como un observable físico para detectar la existencia de *composite fermions*, y de sus interacciones.

La evaluación de la EE en el *half-filled* LL en presencia de interacciones de Coulomb es altamente no trivial. Esto se debe a que, como se explicó en cap. 2, el sistema tiene una degeneración macroscópica, y que la energía cinética compite directamente con

¹En [26] se muestra que la fórmula es correcta en unos casos sencillos.

la interacción de Coulomb. No es posible entonces hacer perturbaciones en una carga eléctrica pequeña, ni en energía cinética pequeña. La única alternativa que aparece viable es obtener la dinámica del sistema con métodos numéricos. Para esto, compactificaremos el plano bidimensional en un cilindro, $y \sim y + L_y$, y expandiremos en modos de Fourier asociados a la dimensión compacta y . Esto dará lugar a un sistema efectivo unidimensional, que luego será estudiado usando diagonalización exacta y el DMRG. Compararemos estos resultados con lo que se espera para la entropía de entrelazado de fermiones compuestos que también viven en un espacio cilíndrico.

La intuición de esta fórmula viene de pensar a la superficie de Fermi como una suma de teorías de fermiones libres en 1+1 dimensiones, dividiendo a la superficie de Fermi en “parches”. Estas teorías viven efectivamente en 1+1 porque sólo les importa el momento transversal a la superficie de Fermi. Entonces, sumando sobre las contribuciones de todos los “parches” en 1+1 dimensiones que dan contribuciones $\log R$ a la entropía, se tiene que para una superficie esférica embebida en un espacio de d dimensiones, la entropía va como $S \sim R^{d-1} \log R$.

En particular, en 2 dimensiones espaciales como es el caso del FQHE, si no hubiera una dualidad, según la ley de área esperaríamos una entropía $S \sim R$. En su lugar, la propuesta de las dualidades con teorías de campos es que el grado de libertad fundamental es un fermión compuesto en una superficie de Fermi.

Para una región esférica, que es lo que (6.2) representa, esperamos $R \log R$, donde R es el radio de la esfera. Veamos ahora una franja de ancho r en un cilindro de radio L_y , con $L_y \gg r$. Debido a la reducción dimensional, obtenemos una suma de sistemas en 1+1D, cada uno ahora restringido a un intervalo de longitud r . Cada uno de estos sistemas entonces se espera contribuyan $\log r$. Esperamos, entonces, extensividad en L_y , es decir que sumando sobre todos los modos $S \sim L_y \log r$. De hecho, por todo lo anterior y por cuestiones dimensionales, proponemos la siguiente expresión para la entropía

$$S(R) \propto (L_y k_F) \log R, \quad (6.3)$$

donde el momento de Fermi k_F es la única cantidad natural del sistema de fermiones en la superficie de Fermi que da las unidades correctas para la entropía.

Entonces, si somos capaces de medir la entropía y detectar la violación a la ley de área (es decir que va como $S \sim \log R$), sería una forma de detectar indirectamente la superficie de Fermi.

A continuación describimos las manipulaciones necesarias para estudiar las teorías A y B numéricamente. El objetivo es obtener expresiones apropiadas para poder realizar los cálculos computacionales.

6.2. Teoría A: Efecto Hall Cuántico

En el caso de la teoría A la intención es recurrir al método DMRG, en el cual es particularmente claro e inmediato el cálculo de la entropía (más detalles en el capítulo 7). El DMRG es reconocido por su eficacia para resolver problemas unidimensionales, por lo cual buscaremos reducir de forma efectiva la dimensionalidad del sistema a 1+1D.

6.2.1. Reducción al problema unidimensional

A continuación se describe el problema del QHE en un cilindro. Se compactifica la coordenada y , que se toma periódica en L_y . Dado el Hamiltoniano electrónico en un campo magnético en el gauge de Landau $(A_x, A_y) = (0, Bx)$

$$H_{\text{cin}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla_x^2 + \left(\nabla_y - i \frac{x}{l_B^2} \right)^2 \right] \quad (6.4)$$

donde $l_B \equiv \sqrt{\hbar/(eB)}$ es la longitud magnética. Los orbitales en el LLL para este gauge son

$$\varphi_j(\mathbf{r}) = \frac{e^{i \frac{2\pi}{L_y} j y}}{\sqrt{L_y}} \frac{e^{-\frac{(x-X_j)^2}{2l_B^2}}}{\pi^{1/4} l_B^{1/2}} \quad (6.5)$$

donde $\mathbf{r} \equiv (x, y)$. Estas funciones de onda están etiquetadas por un entero j , y para cada j se trata de una onda plana en la dirección y con vector de onda $k_y = (2\pi/L_y)j$, y localizados en la dirección x alrededor de una posición $X_j \equiv l_B^2(2\pi/L_y)j$, con dispersión gaussiana.

Podemos ver entonces estos orbitales como si formaran una cadena 1D cuyos sitios están etiquetados por el índice $j \in \mathbb{Z}$. En el lenguaje de segunda cuantización, expandimos el operador $c(\mathbf{r})$ de destrucción de electrones en la posición \mathbf{r} en término de los operadores de destrucción c_j en los orbitales

$$c(\mathbf{r}) = \sum_j \varphi_j(\mathbf{r}) c_j \quad (6.6)$$

La relación inversa es $c_j = \int_{\mathbf{r}} \varphi_j^*(\mathbf{r}) c(\mathbf{r})$ (los φ_j son ortogonales entre sí).

A continuación proyectaremos sobre el LLL, y lo que obtenemos es que cualquier función de onda que esté en este nivel puede escribirse como combinación lineal de los φ_j .

Proyectamos para obtener un sistema unidimensional con operadores fermiónicos c_j , con la intención de utilizar la maquinaria existente para resolver cadenas de espines. Esta aproximación es válida para energías mucho menores que el *gap* $BA/2\pi$.

Notemos que estas funciones de onda pertenecen todas al LLL, es decir todas tienen la misma energía $E_{n=0} = \hbar w_c/2$, con frecuencia de ciclotrón $w_c = eB/m$, y por lo tanto

$$H\varphi_j = E\varphi_j = \frac{\hbar^2}{2m l_B^2} \varphi_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (6.7)$$

En lo que sigue restringimos a los estados al LLL, con lo cual el término cinético sólo contribuye un valor constante de energía frente a la contribución de las interacciones. Por esta razón no lo volveremos a escribir explícitamente en el hamiltoniano.

6.2.2. Simetrías

Conocer las simetrías del problema es de gran utilidad, tanto analítica como numéricamente. Ya sea para simplificar las iteraciones en un cálculo de computadora, o para restringir la aparición de posibles interacciones como sucede en teoría de campos.

En el cilindro, la energía cinética tiene las siguientes simetrías, que traducimos al lenguaje de segunda cuantización mediante transformaciones de los c_j .

- Traslación en y por una cantidad arbitraria Δy :

$$T_y[\Delta y] : c_j \rightarrow e^{i \frac{2\pi}{L_y} j \Delta y} c_j, \quad (6.8)$$

se convierte en una multiplicación por una fase dependiente de j y Δy . Un generador para esta simetría es $K_y \equiv \frac{2\pi}{L_y} \sum j n_j$, que es proporcional a la posición del “centro de masa” del sistema de electrones en una cadena 1D de orbitales.

- Traslación en x por una cantidad discreta $\Delta x = l_B^2(2\pi/L_y)$, acompañado de una transformación de gauge que respete las condiciones periódicas en la dirección y . Este intervalo es precisamente el espaciado entre dos orbitales vecinos. Esta simetría se convierte en una traslación en la cadena de orbitales 1D:

$$T_x[\Delta x = l_B^2(2\pi/L_y)] : c_j \rightarrow c_{j+1} \quad (6.9)$$

- La física en el sistema infinito 2D es invariante ante rotaciones espaciales. Cuando nos restringimos al cilindro, sólo queda una simetría en rotación de 180 grados,

que es lo mismo que $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$:

$$I : c_j \rightarrow c_{-j} \quad (6.10)$$

- Por último, H_{cin} es también invariante ante reflexiones especulares en el eje x , $(x, y) \rightarrow (x, -y)$, combinado con inversión temporal T para electrones sin espín. Esto equivale a la conjugación compleja, y la denotamos $M_x T$, que en lenguaje de orbitales se traduce como:

$$M_x T : c_j \rightarrow c_j, \quad i \rightarrow -i \quad (6.11)$$

Esta última simetría es de particular importancia, puesto que asegura que el Hamiltoniano, incluidas todas las interacciones, es real en esta base. Así, el DMRG puede utilizar sólo números reales, lo que simplifica considerablemente los cálculos numéricos.

6.2.3. Reducción dimensional e interacciones

Asumimos que todas las interacciones electrónicas respetan las simetrías anteriores. En particular interesa el potencial de Coulomb $V(r) = 1/r$, porque es el caso experimental relevante. También es interesante considerar otros potenciales, para acceder a dinámicas distintas del campo de gauge emergente².

Dada la periodicidad del cilindro en y , hay que colocar fuentes de potencial (imágenes) en las posiciones $y_m = mL_y, m \in \mathbb{Z}$. De este modo, el potencial queda:

$$V_\lambda(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{V}_\lambda(x, y - mL_y) \quad (6.12)$$

donde está explícita la simetría de traslación en y por L_y .

Nuevamente en el lenguaje de segunda cuantización, escribimos el potencial como

$$H_{\text{int.}} = \int d^2r \int d^2r' c^\dagger(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) V_\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}') c^\dagger(\mathbf{r}') c(\mathbf{r}') \quad (6.13)$$

donde $c(\mathbf{r})$ y $c^\dagger(\mathbf{r})$ son los operadores de creación y destrucción de electrones en la posición \mathbf{r} , respectivamente. Según la ecuación (6.6), podemos reescribir H_{int} en términos de los operadores de creación y destrucción en orbitales

²Esto es así porque la interacción $J_0(x)V(x-y)J_0(y)$ en la teoría A se mapea a la teoría B simplemente reemplazando $J_0 = \epsilon_{ij}\partial_i a_j$. Es decir, el $V(x-y)$ se mapea a cambiar el término cinético de la componente magnética del a_μ .

$$H_{\text{int.}} = \sum_{ijkl} c_i^\dagger c_j c_k^\dagger c_l \int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \varphi_i^\dagger(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}) V_\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi_k^\dagger(\mathbf{r}') \varphi_l(\mathbf{r}') \quad (6.14)$$

donde las sumas sobre i, j, k, l se hacen sobre todos los sitios de la red 1D.

También, teniendo en cuenta la periodicidad del potencial en y se puede escribir el potencial como su serie de Fourier (descartando la dependencia de λ en la notación de los coeficientes del potencial)

$$V_\lambda(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n(x) e^{i \frac{2\pi}{L_y} n y}. \quad (6.15)$$

Reemplazando en lo anterior las formas explícitas de φ_j según la ecuación (6.5), se pueden hacer explícitamente algunas de las integrales. Las integrales en las coordenadas y, y' dan deltas de conservación de momento en los índices i, j, k, l . El cambio de variables

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}^+, \mathbf{r}^- \equiv \mathbf{r} \pm \mathbf{r}' \quad (6.16)$$

deja la dependencia de la integral con el potencial explícitamente en una sola variable x^- .

Finalmente, mediante el cambio de índices en la sumatoria $m \rightarrow m + j + n$, obtenemos

$$H_{\text{int}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 0, m > 0} W_{mn} c_j^\dagger c_{j+n} c_{j+m+n} c_{j+m+2n}^\dagger + h.c. \quad (6.17)$$

Los coeficientes W_{mn} quedan escritos en términos del potencial \bar{V}_λ

$$W_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} X_n^2} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{1}{2}(x+X_{m+n})^2} \hat{V}_\lambda(x, n) \quad (6.18)$$

donde $X_n = l_B^2 (2\pi/L_y) n$ y $\hat{V}_\lambda(x, n)$ es la transformada de Fourier del potencial \bar{V}_λ

$$\hat{V}_\lambda(x, n) = \frac{1}{2\pi L_y} \int_{\mathbb{R}} dy e^{-i X_n y} \bar{V}_\lambda(x, y) \quad (6.19)$$

El Hamiltoniano obtenido en la ecuación (6.17) se puede resolver numéricamente, y para ello utilizamos una rutina de diagonalización exacta y el ya mencionado DMRG. La implementación de ambos métodos requiere como es lógico que el sistema sea finito, por lo cual debemos tener en cuenta las condiciones de borde. Si las condiciones son abiertas, con la expresión anterior es suficiente. Pero si las condiciones son periódicas,

hay más por decir.

6.2.4. Condiciones de contorno periódicas

Al considerar condiciones de contorno periódicas, estamos tomando el problema del cilindro analizado en la sección anterior y cambiando la geometría, transformándolo en un toro. En general, dados parámetros L_x, L_y que dan las dimensiones del sistema, lo obtenemos identificando $(x, y) \sim (x + nL_x, y + mL_y)$.

Funciones de onda

Partimos de las funciones de onda del cilindro,

$$\psi_j(x, y) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\ell_B L_y}} e^{i \frac{2\pi}{L_y} j y} e^{-\frac{(x-x_j)^2}{2\ell_B^2}}. \quad (6.20)$$

Vemos que estas funciones ya tienen la periodicidad correcta para la coordenada y , y para conseguir la periodicidad en x vamos a sumar sobre imágenes en la dirección x , obteniendo así las funciones de onda del toro. Para esto, debemos tener en cuenta que aparece un cambio adicional: cuando $x \rightarrow x + nL_x$, el campo magnético \vec{B} no puede cambiar, pero el potencial de gauge que da lugar a este campo sí lo hace

$$\vec{A} = \left(0, \frac{x}{\ell_B^2}\right) \rightarrow \left(0, \frac{x}{\ell_B^2}\right) + \vec{\nabla}(L_x n y / \ell_B^2). \quad (6.21)$$

En otras palabras, tenemos una transformación de gauge con parámetro $f = L_x n y / \ell_B^2$. Dado que los electrones tienen carga eléctrica de gauge, las funciones de onda tienen que transformarse también, y lo hacen según

$$\psi_j(x + nL_x, y) = e^{i n L_x y / \ell_B^2} \psi_j(x, y). \quad (6.22)$$

Por lo tanto, las funciones de onda correctas en el toro son:

$$\psi_j(x, y) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\ell_B L_y}} \sum_n e^{i \left(\frac{2\pi}{L_y} j + \frac{n L_x}{\ell_B^2} \right) y} e^{-\frac{1}{2\ell_B^2} \left(x - \frac{2\pi}{L_y} \ell_B^2 j - n L_x \right)^2}. \quad (6.23)$$

La suma sobre n implementa la periodización sobre x mediante la suma sobre imágenes, mientras que la fase $e^{i \frac{n L_x}{\ell_B^2} y}$ asegura la simetría (6.22).

Para que la función de onda esté bien definida, debe volver sobre sí misma al rodear el toro en la coordenada y (debido a que no hay transformación de gauge en esta dirección,

esta vez sin fase agregada), es decir

$$\psi_j(x + nL_x, y + mL_y) = \psi_j(x + nL_x, y). \quad (6.24)$$

Esto requiere que el número de flujos esté cuantizado, viendo la función de onda (6.23)

$$\frac{L_x L_y}{\ell_B^2} = 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}. \quad (6.25)$$

Podemos reescribir la exponencial compleja en las funciones de onda como

$$e^{i\frac{2\pi}{L_y}(j+nN)y}, \quad (6.26)$$

y la misma combinación aparece dentro de la gaussiana. Debido a la suma sobre n , concluimos que N da el número de sitios de la red, puesto que

$$\psi_{j+N}(x, y) = \psi_j(x, y) \quad j = 0, \dots, N - 1. \quad (6.27)$$

Término de interacción

Ahora que tenemos las funciones de onda del toro, puede hacerse una descomposición similar a la del cilindro con las funciones de onda correspondientes. Escribimos el Hamiltoniano del sistema original como

$$H = \sum_{jklm} W_{k-j, m-j} \delta_{k+m, j+l} c_j^\dagger c_k c_l^\dagger c_m = \sum_{jklm} V_{jklm} c_j^\dagger c_k c_l^\dagger c_m, \quad (6.28)$$

donde elegimos una ligera redefinición para los coeficientes W_{mn} respecto a (6.18), de modo que

$$W_{k-j, m-j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} L_y \ell_B} e^{-2\pi^2 \frac{\ell_B^2}{L_y^2} (k-j)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\ell_B^2} (x+X_{m-j})^2} \hat{V}_0 \left(x, \frac{2\pi}{L_y} (k-j) \right). \quad (6.29)$$

Luego de periodizar las funciones de onda obtenemos una expresión muy similar, donde los coeficientes del Hamiltoniano

$$V_{jklm} = \delta_{j+l, k+m}^{(N)} W_{k-j, m-j}^{(N)}, \quad (6.30)$$

se escriben en términos de unas cantidades periodizadas

$$W_{k-j, m-j}^{(N)} \equiv \sum_{\alpha\beta} W_{k-j-N\beta, m-j-N\alpha}, \quad (6.31)$$

$$\delta_{j+l, k+m}^{(N)} \equiv \sum_{\rho} \delta_{j+l, k+m+N\rho}, \quad (6.32)$$

que constituye la periodización del hamiltoniano original en el cilindro.

Simetría de traslación

Ahora el sistema tiene una simetría nueva, las traslaciones en x . Como el sistema ya era periódico en y (partíamos del cilindro), ahora el sistema tiene simetría ante traslaciones generales

$$\hat{T}(\vec{a})\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \vec{a}). \quad (6.33)$$

Debido al gauge que elegimos $\vec{A} = \hat{y}Bx$, tenemos traslaciones usuales en la dirección y , pero en la dirección x ocurre una transformación de gauge 6.22. Por lo tanto, podemos escribir los operadores de traslación como

$$\hat{T}(\vec{a} = (a_x, a_y)) = e^{a_y\partial_y + a_x(\partial_x + iy/\ell_B^2)}, \quad (6.34)$$

En direcciones ortogonales, tenemos que aunque son simetrías del sistema no conmutan entre sí

$$\hat{T}(a_x)\hat{T}(a_y) = \hat{T}(a_y)\hat{T}(a_x) e^{-ia_x a_y/\ell_B^2}. \quad (6.35)$$

6.2.5. Simetría electrón-hueco

Existe otra simetría del sistema que aún no fue mencionada en esta sección, pero que es tan importante que fue la motivación de Son [3] para escribir su trabajo *Is the Composite Fermion a Dirac Particle?* (que en parte nos motiva), y es la simetría **electrón-hueco**.

Dejando de lado la notación por un momento, recordemos que el problema que nos ocupa es el Efecto Hall Cuántico con el nivel de Landau más bajo (LLL) semilleno. En la sección 6.2.3 proyectamos sobre el nivel de Landau más bajo, pero en ningún momento impusimos la condición de que el mismo esté semilleno sobre el Hamiltoniano. Haremos esto usando la simetría electrón-hueco, puesto que sabemos que la única forma en que el sistema puede tener esta simetría es si tiene la mitad de sus estados ocupados,

y lo implementamos de la siguiente manera

$$H^{eh} = (H + H^C)/2. \quad (6.36)$$

Aquí, H^C representa el Hamiltoniano transformado, y definimos la transformación electrón hueco según $c_j \rightarrow (-1)^j c_j^\dagger$. Usando relaciones de anticonmutación de los operadores $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$, con un poco de álgebra obtenemos el Hamiltoniano simétrico ante la transformación de electrón-hueco en orden normal:

$$H^{eh} = - \sum_{jklm} W_{k-j, m-j} \delta_{k+m, j+l} c_j^\dagger c_l^\dagger c_k c_m + \sum_j (\mu_j - \epsilon_j) c_j^\dagger c_j, \quad (6.37)$$

donde los coeficientes μ_j, ϵ_j son

$$\epsilon_j = - \sum_l W_{l-j, 0}, \quad \mu_j = - \sum_l W_{0, l-j}. \quad (6.38)$$

De ahora en adelante trabajaremos con la suposición de que cualquier Hamiltoniano que escribamos es simétrico ante electrón-hueco, es decir como (6.37), incluso aunque no se escriban explícitamente los términos $c_j^\dagger c_j$.

6.2.6. Interacciones de Coulomb

Lo último que debemos mencionar para el estudio numérico de la teoría A es el potencial a utilizar, el cual dejamos indefinido en todo este desarrollo. Si bien a priori querríamos elegir el potencial de Coulomb, es interesante tener una forma de control sobre el potencial. Una propuesta natural es restringir el rango de interacción, y lo implementamos a través de otorgarle una masa M al fotón. Recurriendo a la expresión integral del propagador, escribimos el potencial:

$$V(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{ipx} \frac{1}{p^2 + M^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{2\pi|x|} \right)^{(d-2)/2} K_{\frac{d-2}{2}}(M|x|), \quad (6.39)$$

donde $K_\alpha(y)$ es la función modificada de Bessel de segunda especie.

La dimensión que nos interesa es $d = 3$ y evaluando esto en el plano $z = 0$, tenemos

$$V(r) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{2\pi r} \right)^{1/2} K_{1/2}(Mr). \quad (6.40)$$

Donde para $Mr \ll 1$, $V(r) \sim \frac{1}{4\pi r}$, y para $Mr \gg 1$, $V(r) \sim \frac{e^{-Mr}}{4\pi r}$, que son los comportamientos buscados.

Dado que $z = 0$, podemos integrar la variable p_z

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^2}}. \quad (6.41)$$

Finalmente, los coeficientes W_{mn} que son el corazón de la descomposición en operadores son

$$W_{k-j, m-j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi L_y \ell_B}} e^{-2\pi^2 \frac{\ell_B^2}{L_y^2} (k-j)^2} \int dx dy e^{-\frac{1}{2\ell_B^2} (x+X_{m-j})^2} e^{-i\frac{2\pi}{L_y} (k-j)y} V(x, y). \quad (6.42)$$

Y en términos de (6.41), es fácil hacer las integrales en y, p_y, x con lo que encontramos una expresión que calcularemos numéricamente

$$W_{k-j, m-j} = \frac{1}{2L_y} e^{-2\pi^2 \frac{\ell_B^2}{L_y^2} (k-j)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ipX_{m-j}} \frac{e^{-\ell_B^2 p^2/2}}{\sqrt{p^2 + (\frac{2\pi}{L_y} (k-j))^2 + M^2}}. \quad (6.43)$$

En conclusión, partiendo del Efecto Hall Cuántico proyectado al LLL encontramos expresiones útiles que luego podremos usar para resolver numéricamente la ecuación de Schrödinger y hallar el o los estados del nivel de energía fundamental. Con los estados del fundamental, construiremos la matriz densidad, y al diagonalizarla podremos utilizar sus autovalores para calcular las entropías de entrelazamiento según (6.1).

Veremos a continuación cómo es posible obtener un valor de entropía en la teoría B efectiva, es decir para los fermiones compuestos.

6.3. Teoría B: Fermiones compuestos

El objetivo es explorar la entropía de entrelazamiento producida por fermiones compuestos con un potencial químico en un cilindro. También consideraremos efectos de tamaño finito, buscando comparar con los resultados numéricos de la teoría A.

En particular, queremos entender la violación logarítmica a la ley de área asociada con una superficie de Fermi, en el caso de un espacio cilíndrico. Nos interesa estudiar la conjetura de Widom para la violación logarítmica, es decir que está fuertemente determinada por la superficie de Fermi libre, aún para *non-Fermi liquids* en presencia de interacciones [27–29].

En esta sección trabajaremos en la aproximación de fermiones compuestos libres para la teoría B, en la búsqueda por obtener su entropía de entrelazamiento.

6.3.1. En el continuo

Consideremos un fermión de Dirac libre en 2+1D a densidad finita,

$$S = \int dt d^2x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + \mu_F \gamma^0)\psi. \quad (6.44)$$

Trabajamos en signatura (+ - -), elegimos las matrices de Dirac tales que $\gamma^0 = \sigma^2$, $\gamma^1 = i\sigma^1$, $\gamma^2 = i\sigma^3$, y μ_F es el potencial químico.

Ahora ponemos el sistema en un cilindro en la dirección x^2 , i.e. compactificamos $x^2 \sim x^2 + L_y$. Imponiendo las condiciones de contorno periódicas en la dirección compactificada, el campo se descompone

$$\psi(x^1, x^2) = \sum_n e^{i\frac{2\pi}{L_y}nx^2} \psi_n(x^1). \quad (6.45)$$

Anticipando la aparición de quiralidad, denotamos al fermión de Dirac de dos componentes como

$$\psi_n(x^1) = \begin{pmatrix} (\psi_n^+)^* \\ \psi_n^- \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Si ahora reemplazamos en la acción, debido a la compactificación del cilindro obtenemos una suma de fermiones en 1+1D,

$$S = L_y \sum_n \int dt dx^1 \left[(\psi_n^+)^*(i(\partial_0 + \partial_1) - \mu_F)\psi_n^+ + (\psi_n^-)^*(i(\partial_0 - \partial_1) + \mu_F)\psi_n^- + \frac{2\pi n}{L_y}(\psi_n^+ \psi_n^- + (\psi_n^-)^*(\psi_n^+)^*) \right]. \quad (6.47)$$

Ahora se pone en evidencia la ventaja de la elección de matrices γ_μ . Los ψ_\pm representan las dos quiralidades de un fermión en 1+1D, y la reducción en la dirección x^2 además da lugar a una sucesión de “masas” $2\pi n/L_y$ que actúan como acoplamiento entre ambas quiralidades.

6.3.2. Modelo en la red

El siguiente paso es discretizar la teoría anterior, para poner el sistema en la red. Recordemos que una única variable fermiónica en una red 1D da lugar a dos modos fermiónicos en el continuo, debido a la propiedad de *fermion doubling* [30]. Dado que para un fermión de Dirac en general una masa acopla las quiralidades L y R, en la red esto va a corresponder a un término de densidad $V(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)$, con $V(x)$ una fuente con momento $2k_F$, es decir, $V(x) \sim \cos(2k_F x)$. Esto es requerido por la interacción

entre los modos L y R.

Proponemos entonces un modelo en la red

$$H = -\frac{i}{2} \sum_j (\psi_j^* \psi_{j+1} - \psi_{j+1}^* \psi_j) - \sum_j (\mu_F a + m a \cos(\pi j)) \psi_j^* \psi_j \quad (6.48)$$

donde $x = ja$, y a es el espaciado de red. Los términos de *hopping* vienen de discretizar el término cinético $\psi^\dagger \partial_1 \psi$.

Identifiquemos primero las dos quiralidades en ausencia de masa y potencial químico. El hamiltoniano se diagonaliza pasando al espacio de momentos, es decir con ondas planas $\psi_j(k) = e^{ijk a}$, que tienen energías definidas en la primera zona de Brillouin

$$E(k) = \sin(ka), \quad -\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}. \quad (6.49)$$

La superficie de Fermi con $E(k) = 0$ viene dada por los puntos $ka = 0, \pi$. Cerca de cada uno de estos puntos obtenemos modos no masivos,

$$E(k) \approx ka, \quad \text{para } ka \ll 1 \quad (6.50)$$

y

$$E(k) \approx -(k - \frac{\pi}{a})a, \quad \text{para } ka - \pi \ll 1, \quad (6.51)$$

donde los dos modos corresponden a los fermiones moviéndose en sentidos opuestos (L y R).

En particular, deducimos que $2k_F = \pi/a$; con lo cual el término de masa, que debería mezclar ambas quiralidades, corresponde a una fuente de densidad $V(x) = m \cos(\pi j)$. Esto explica el origen del último término en (6.48).

En analogía al procedimiento que llevamos a cabo para la teoría A, hagamos la red periódica identificando los sitios $\psi_{N+1} = \psi_1$. En este caso, el hamiltoniano se convierte en

$$H = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N (\psi_j^* \psi_{j+1} - \psi_{j+1}^* \psi_j) - \sum_{j=1}^N V_j \psi_j^* \psi_j - \frac{i}{2} (\psi_N^* \psi_1 - \psi_1^* \psi_N), \quad (6.52)$$

donde $V_j \equiv \mu_F a + m a \cos(\pi j)$. También, al igual que en la teoría A lo hacíamos para lograr el semilleno, tomamos N par de modo que $V_{j+N} = V_j$, y la fuente de $2k_F$ ya es periódica.

El último ingrediente que necesitaremos es la función de Green a tiempos iguales para

el fermión, que denotamos con la matriz C_{ij}^F

$$C_{ij}^F = \langle \psi_i(t) \psi_j^*(t) \rangle. \quad (6.53)$$

Recordemos que para un único modo fermiónico con energía E , $C^F = \Theta(-E)$, lo que equivale a decir que todos los modos con $E < 0$ están ocupando un mar de Fermi. En nuestro caso tenemos una matriz de $N \times N$

$$H = \psi_i^* M_{ij} \psi_j, \quad M_{ij} = -\frac{i}{2}(\delta_{i,j-1} - \delta_{i,j+1}) - V_j \delta_{ij}, \quad (6.54)$$

donde identificamos $j = N + 1$ con $j = 1$. Denotando a los autovalores de M por $E(k)$, y los autoestados normalizados por $\psi_j(k)$, obtenemos

$$C_{ij}^F = \sum_k \psi_j(k)^* \psi_i(k) \Theta(-E(k)). \quad (6.55)$$

6.4. Entropía de entrelazamiento

Para un sistema fermiónico, el correlador a tiempos iguales C_{ij}^F determina los autovalores de la matriz densidad. Restringiendo los índices (ij) a una región A , la entropía de entrelazamiento [24] se convierte en

$$S_A = -\text{Tr} [C^F \log C^F] - \text{Tr} [(1 - C^F) \log(1 - C^F)]. \quad (6.56)$$

Por lo tanto, una vez obtenidos los autovalores $E(k)$ de arriba, sólo necesitamos restringir C^F en (6.55) a la región A , diagonalizar la matriz restringida y utilizar los autovalores junto con la fórmula (6.56).

Vamos a considerar una región $i \in (0, r)$ en el cilindro, de modo que A corresponda a $x^1 \in (0, ra)$, $x^2 \in (0, L_y)$. Es decir, cintas en el cilindro o toro, de acuerdo a la periodicidad, como se ve en las figuras 6.1, 6.2.

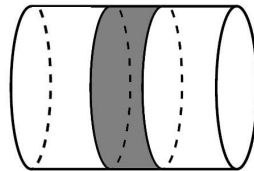


Figura 6.1: Sección cilíndrica donde mediremos la entropía de entrelazamiento. Como se explica en el texto, medimos la correlación de los estados contenidos en la banda o cinta, con los del resto del cilindro.

A continuación describiremos los métodos numéricos utilizados para obtener las en-

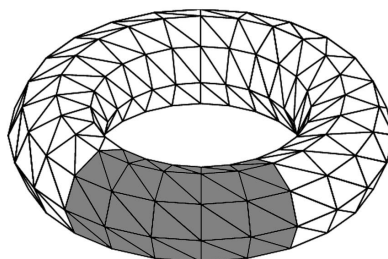


Figura 6.2: Sección de un toroide donde mediremos la entropía de entrelazamiento. Como se explica en el texto, medimos la correlación de los estados contenidos en la banda o cinta, con los del resto del toro.

tropías de entrelazamiento para la teoría A, junto con los resultados encontrados.

Capítulo 7

Métodos Numéricos

“I’m sorry, I just don’t think I could stay up that late.”

— Sidney Coleman, respondiendo una solicitud para cubrir una clase a las 8 am.

En esta sección se tratarán dos estudios numéricos distintos utilizados para analizar el problema del QHE. En particular interesa el estudio del método de DMRG (de las siglas en inglés de *Density Matrix Renormalization Group*). Una de las principales características de este método es que su eficacia en sistemas fuertemente correlacionados de una dimensión ha sido ampliamente corroborada [31]. Describiremos entonces ambos métodos, junto con las implementaciones particulares. En los resultados, primero contrastaremos entre sí las entropías obtenidas por los dos medios y luego mostraremos hasta dónde hemos podido llegar con el DMRG en el QHE (teoría A). Finalmente, con el objetivo de profundizar en la dualidad, mostramos cómo fue el cálculo de las entropías en la teoría B y comparamos con lo obtenido en la teoría A.

7.1. Teoría A

7.1.1. Diagonalización Exacta

Descripción del método

Conociendo la estructura del espacio de Hilbert con número constante de partículas, queremos un método eficiente para implementarlo en la computadora. Para eso recurrimos a una representación de los estados en términos de números enteros y operaciones

de bits [32].

Un ejemplo sencillo para entender esto es el de una partícula en una cadena finita (por ej. de largo $L = 4$). Los estados del espacio de Hilbert puede escribirse en términos de la base típica del espacio de Fock, donde los estados de la base son 0001, 0010, 0100 y 1000. Cada elemento de la base tiene cuatro números, que representan la probabilidad de encontrar a la partícula en uno de los cuatro sitios de la cadena. Además, a cada elemento de la base se le puede asociar un número entero en representación binaria (en este caso 1, 2, 4 y 8 respectivamente), lo que hace que guardar estos estados sea barato en términos de costos de memoria.

En el lenguaje de segunda cuantización, los operadores (y en particular el Hamiltoniano) pueden escribirse en términos de operadores de creación y destrucción. En el ejemplo de una partícula en una cadena finita, para representar un *hopping* a primeros vecinos (un término $tc_i^\dagger c_{i+1} + h.c.$ del Hamiltoniano) se opera lógicamente con un XOR entre el estado original y un conjunto de bits que tenga dos 1 juntos y el resto lleno con 0, es decir 0011, 0110, 1100, 1001 (representando *hopping* entre los sitios 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 respectivamente).

Para estudiar el problema del Hamiltoniano (6.17) se utilizó un programa escrito en C++ por Pablo Cornaglia (obtenido en conversación privada). El mismo permite ingresar los coeficientes W_{mn} (6.18) del Hamiltoniano ya escrito en términos de operadores de creación y destrucción. Una vez introducidos los coeficientes, se diagonaliza el Hamiltoniano mediante el método de Lanczos [32] y se encuentra el estado fundamental. Con el estado fundamental se calcula la matriz densidad, la cual diagonalizamos para calcular la entropía.

Además, es posible calcular funciones de correlación como la que se describe en la sección siguiente.

7.1.2. DMRG

Descripción del método

El DMRG (del inglés *Density Matrix Renormalization Group*) es un método numérico, desarrollado por S. White en 1992 [33], y que ha demostrado ser poderoso para obtener la física de bajas energías de sistemas cuánticos de muchos cuerpos con gran precisión. Por ejemplo para el caso de una cadena de espín-1 de Heisenberg se puede obtener el estado fundamental con una precisión de 10^{-10} [31].

La principal motivación del método viene del hecho de que, al estudiar sistemas finitos,

el crecimiento exponencial de los grados de libertad (del espacio de Hilbert) impone una limitación importante a los cálculos numéricos.

El DMRG permite un truncamiento sistemático del espacio de Hilbert, al conservar únicamente los estados más probables que describen una función de onda (por ej. el estado fundamental).

En este trabajo se tratará exclusivamente el caso 1D, con estados en representación espacial.

La idea básica consiste en comenzar a estudiar un problema reducido (por ej. en la cadena de espines, empezar con pocos sitios), y luego ir gradualmente ampliando el tamaño del sistema hasta que se llega al tamaño deseado.

Llamaremos sitios a los elementos de la cadena 1D. A los N sitios del sistema completo lo denotamos como *universo*, y lo dividiremos en dos partes: el *sistema* y el *entorno* (ver figura 7.1). Se construye entonces el Hamiltoniano del *universo*, y se obtiene el *estado buscado* $|\Psi_0\rangle$ (por ej. el fundamental), que tendrá componentes en el *sistema* y el *entorno*. Queremos obtener los estados más relevantes del *sistema*, los que tienen más peso en $|\Psi_0\rangle$. Para esto, el *entorno* es considerado como un baño estadístico. Para esto, en lugar de conservar los autoestados del Hamiltoniano, vamos a quedarnos con los autoestados de la matrix densidad.

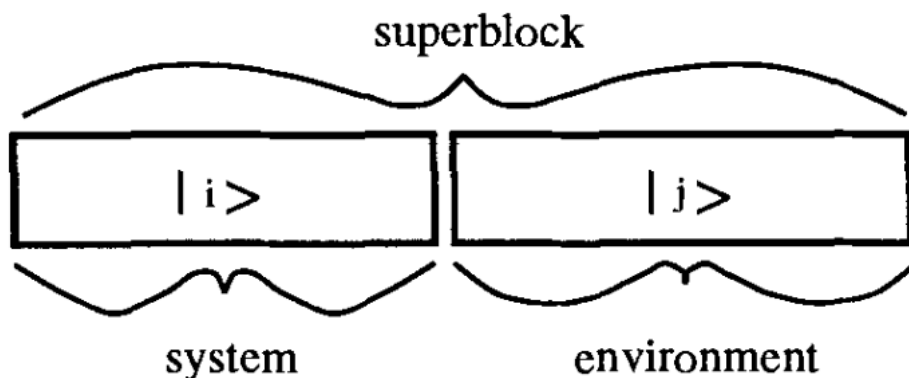


Figura 7.1: Universo o superbloque formado por el sistema más el entorno. (Adaptado de ref. [34])

Definamos el bloque $[B]$ como una cadena de l sitios con un espacio de Hilbert de dimensión M donde se definen operadores (en particular el Hamiltoniano en esta cadena finita H_B , y los operadores de los extremos del bloque). A excepción de la primera iteración, la base en este bloque no se conoce explícitamente, debido a operaciones previas realizadas sobre la base completa (rotaciones y reducciones). Los operadores en esta base son matrices, y los estados de la base están caracterizados por números

cuánticos. Definamos también un sitio agregado $[\mathbf{a}]$ que tiene asociados n estados.

Entonces, una iteración general del método es como sigue:

- Se define el Hamiltoniano $H_{BB'}$ para el *universo* (superbloque), formado juntando dos bloques $[\mathbf{B}]$ y $[\mathbf{B}']$ (que típicamente vienen de iteraciones previas, y tienen la misma estructura), y agregando dos sitios $[\mathbf{a}]$ y $[\mathbf{a}']$, de la siguiente manera: $[\mathbf{B} \mathbf{a} \mathbf{a}' \mathbf{B}']$. El espacio de Hilbert total de este superbloque es el producto directo de los espacios individuales correspondientes a cada uno de los bloques y sitios agregados.
- Se diagonaliza el Hamiltoniano $H_{BB'}$ para obtener el estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ usando los algoritmos de Lanczos o Davidson. Se pueden conservar otros estados también, como primeros excitados.
- Se construye la matriz densidad

$$\rho_{ii'} = \sum_j \Psi_{0,ij} \Psi_{0,i'j} \quad (7.1)$$

en el bloque $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$, donde $\Psi_{0,ij} = \langle i \otimes j | \Psi_0 \rangle$, y los estados $|i\rangle$ y $|j\rangle$ pertenecen a los bloques $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$ y $[\mathbf{a}' \mathbf{B}']$, respectivamente. La matriz densidad considera la parte $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$ como un sistema y la parte $[\mathbf{a}' \mathbf{B}']$ como un baño estadístico. Los autoestados de ρ con mayor autovalor corresponden a los estados más probables del bloque $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$ en el estado fundamental del superbloque. Estos estados se conservan hasta cierto punto, con algún criterio, por ej. conservando una cantidad dada m de estados por bloque. Los autovalores de la matrix densidad, digamos w_α , suman uno, y el error de truncamiento se define como la suma de los autovalores correspondientes a los autoestados de ρ descartados, $\sum_{\alpha=m+1}^{m_{max}} w_\alpha = 1 - \sum_{\alpha=1}^m w_\alpha$, da una idea cualitativa de la precisión del cálculo (m_{max} es el tamaño del espacio completo $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$).

- Con estos m estados se forma una matriz rectangular O , que cambia de base y reduce todos los operadores definidos en $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$. Este bloque es renombrado $[\mathbf{B}_{nuevo}]$ (o simplemente $[\mathbf{B}]$), y por ej. el Hamiltoniano nuevo se calcula como $H_B = O^\dagger H_{Ba} O$.
- Un nuevo sitio $[\mathbf{a}]$ se agrega y el nuevo superbloque $[\mathbf{B} \mathbf{a} \mathbf{a}' \mathbf{B}']$ se forma como producto directo de los estados de todos los bloques.
- Este proceso continua hasta que se alcanza la longitud del sistema deseada. A cada paso la longitud es $N = 2l + 2$ (l es la longitud del bloque $[\mathbf{B}]$ y pensamos que $[\mathbf{a}]$ es un sitio).

Este método es conocido como *algoritmo de sistema infinito*, dado que a cada iteración el tamaño crece. Hay un método que permite, una vez alcanzado el tamaño deseado, aumentar la precisión para un largo fijo N , conocido como *algoritmo de sistema finito*. Consiste en dejar fijo el tamaño del sistema pero cambiar el tamaño de los bloques $[\mathbf{B}]$ y $[\mathbf{B}']$ de a uno, barriendo hasta que se alcanza la convergencia (ver figura 7.2). El largo del sistema $[\mathbf{B} \mathbf{a} \mathbf{a}' \mathbf{B}']$ será $N = l + 1 + 1 + l'$, mientras que luego de utilizar la matriz densidad se proyecta el bloque $[\mathbf{B} \mathbf{a}]$ un sitio hacia la izquierda de modo que $N = (l + 1) + 1 + 1 + (l - 1)'$.

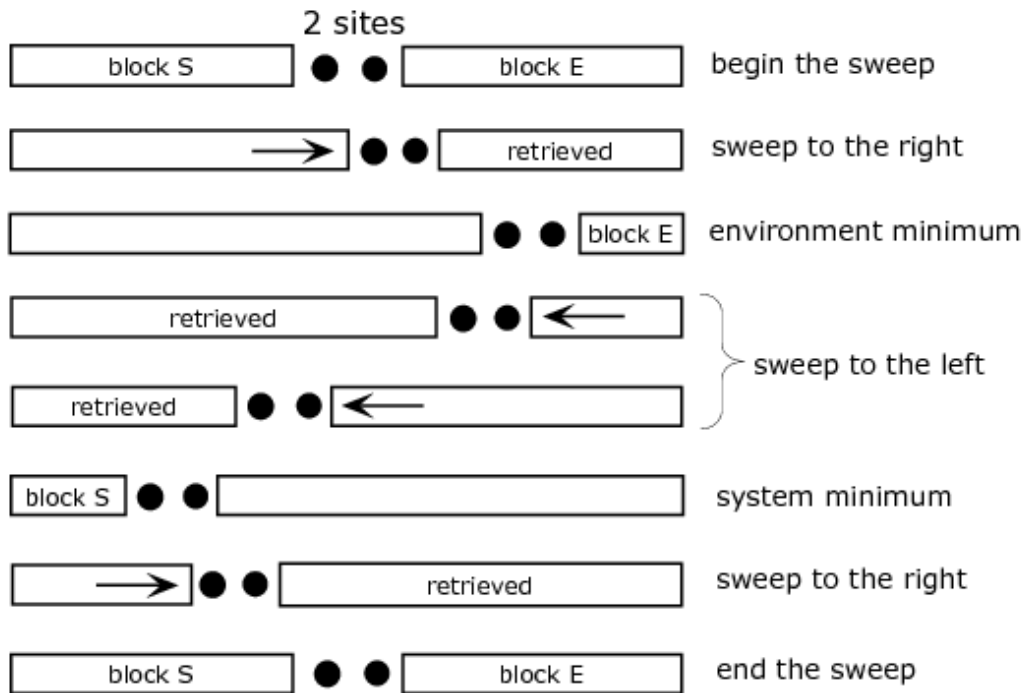


Figura 7.2: Barridos (*sweep*). El algoritmo de sistema finito. El diagrama muestra los progresivos crecimientos y reducciones. El comienzo del barrido puede ser el final del algoritmo de sistema infinito o el final de un paso del sistema finito. (Adaptado de ref. [35])

Lo interesante del DMRG es que los cálculos de entropía se pueden hacer fácilmente considerando los autovalores de la matriz densidad w_α (la entropía de von Neumann $S_{vN} = -\sum_\alpha w_\alpha \log w_\alpha$). En el DMRG, implementando condiciones periódicas de contorno, podría calcularse una entropía de entrelazamiento donde se considera uno de los dos bloques más grandes como un subsistema, donde el largo del bloque sería el R .

7.1.3. Matrix Product Operator

No desarrollaremos la teoría de los *Matrix Product States* (MPS) y los *Matrix Product Operators* (MPO) en este trabajo, simplemente nos atenderemos a describir los cálculos hechos, y referimos a [36] para una descripción detallada de las teorías.

Como puede verse en [37, 38], dado un operador O tal que se escribe como suma de N operadores $\hat{O} = \sum_{1 \leq i \leq N} \hat{O}_i$, definimos los operadores

$$\hat{O}^{[\alpha, N]} = \sum_{\alpha \leq i \leq N} \hat{O}_i, \quad (7.2)$$

es decir, restringiendo la suma sobre operadores al intervalo $[\alpha, N]$. Lo mismo definimos en caso de haber más sumas. Por ejemplo, el hamiltoniano que nos interesa se escribe genéricamente como suma sobre cuatro índices (eliminando los sombreros $\hat{}$)

$$H = \sum_{1 \leq ijkl \leq N} V_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l. \quad (7.3)$$

Definimos entonces el operador $H^{[\alpha, N]}$ de modo que la suma sobre todos los índices esté restringida al intervalo desde α , es decir

$$H = \sum_{\alpha \leq ijkl \leq N} V_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l. \quad (7.4)$$

Notemos que la suma extendida sobre todo el intervalo devuelve el operador original

$$H = H^{[1, N]}. \quad (7.5)$$

El objetivo es ahora construir una fórmula de recurrencia, de modo que el operador $H^{[\alpha, N]}$ se pueda escribir como combinación de $H^{[\alpha+1, N]}$ y eventualmente otros operadores $O_1^{[\alpha+1, N]}, O_2^{[\alpha+1, N]} \dots$. Veamos un ejemplo sencillo partiendo del hamiltoniano $h = \sum_i c_i^\dagger c_{i+1}$. Escribimos el operador en $[\alpha, N]$

$$h^{[\alpha, N]} = \sum_{\alpha \leq i \leq N} c_i^\dagger c_{i+1} = \sum_{\alpha+1 \leq i \leq N} c_i^\dagger c_{i+1} + c_\alpha^\dagger c_{\alpha+1} = h^{[\alpha+1, N]} + c_\alpha^\dagger c_{\alpha+1}. \quad (7.6)$$

Vemos que en el camino de escribir nuestra fórmula de recurrencia, apareció un nuevo operador $c_\alpha^\dagger c_{\alpha+1}$ que depende de α . Para el hamiltoniano completo de cuatro operadores de creación y destrucción puede hacerse este mismo desarrollo, y siguiendo el algoritmo aparecerán nuevos términos dependientes de α . Si a su vez, estos nuevos términos se escriben como sumatorias ¹, aparecerán más operadores para los cuales debemos encontrar sus propias fórmulas de recurrencia.

Pongamos ahora todos los operadores que hayan aparecido en el proceso en un vector de operadores X . Debido a que en el algoritmo para conseguir la fórmula de recurrencia encontramos *todos* los operadores necesarios, de alguna forma la escritura de cada

¹En el ejemplo sencillo no apareció debido a que sólo había una suma, sí lo hace en el caso ligeramente más complejo de $\sum_{ij} t_{ij} c_i^\dagger c_j$.

operador es cerrada en el vector. Ahora, como cada componente de X se escribe como una sumatoria de operadores, definimos el vector de operadores $X^{[k,K]}$. Como sabemos que se escribe en términos de los otros operadores que pertenecen a $X^{[k,K]}$, tiene que existir una matriz $\hat{W}[k]$ tal que

$$X^{[k,K]} = \hat{W}[k] \cdot X^{[k+1,K]} . \quad (7.7)$$

Efectivamente, haciendo el desarrollo y utilizando todas las fórmulas de recurrencia, podemos escribir la operación anterior en el siguiente producto de matriz-vector:

$$\begin{aligned} & [H \quad d_i \quad d_i^\dagger \quad n_{i,j} \quad d_{i,j} \quad d_{i,j}^\dagger \quad c_{[\alpha]} \quad c_k \quad c_{[\alpha]}^\dagger \quad c_k^\dagger \quad N \quad I]_{[\alpha,N]}^T = \\ & \begin{bmatrix} I_\alpha & \tilde{c}_\alpha^\dagger \delta_{\alpha p} & -\tilde{c}_\alpha \delta_{\alpha p} & -n_\alpha \delta_{(p\alpha)}^{(q\alpha)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_\alpha \lambda_\alpha \\ 0 & \tilde{I}_\alpha \delta_{ip} & 0 & -c_\alpha \delta_{(ip)}^{(q\alpha)} & c_\alpha^\dagger \delta_{(ip)}^{(q\alpha)} & 0 & \tilde{n}_\alpha W_{i\alpha\alpha r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_\alpha \delta_{ip} & -c_\alpha^\dagger \delta_{(ip)}^{(q\alpha)} & 0 & c_\alpha \delta_{(ip)}^{(q\alpha)} & 0 & \tilde{n}_\alpha W_{i\alpha\alpha r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\alpha \delta_{(ip)}^{(jq)} & 0 & 0 & \tilde{c}_\alpha^\dagger W_{i\alpha jr} & -\tilde{c}_\alpha W_{i\alpha jr} & 0 & n_\alpha W_{i\alpha j\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_\alpha \delta_{(ip)}^{(jq)} & 0 & \tilde{c}_\alpha W_{ij\alpha r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_\alpha \delta_{(ip)}^{(jq)} & 0 & -\tilde{c}_\alpha^\dagger W_{ij\alpha r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{I}_\alpha \delta_{kr} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_\alpha^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{I}_\alpha \delta_{kr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_\alpha & n_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_\alpha & n_\alpha \end{bmatrix} \\ & \cdot [H \quad d_p \quad d_p^\dagger \quad n_{p,q} \quad d_{p,q} \quad d_{p,q}^\dagger \quad c_r \quad c_r^\dagger \quad N \quad I]_{[\alpha+1,A]}^T, \quad (7.8) \end{aligned}$$

donde $i, j \in [1, \alpha - 1]$, $k \in [\alpha + 1, A]$ y $p, q \in [1, \alpha]$, $r \in [\alpha + 1, N]$, la $\delta_{(ip)}^{(q\alpha)} = \delta_{ip} \delta_{q\alpha}$.

Para terminar, podemos ver que el hamiltoniano del sistema puede hallarse de tomar la primera fila y última columna del producto de matrices:

$$H \doteq \hat{W}[1] \dots \hat{W}[N]. \quad (7.9)$$

Esto es particularmente útil numéricamente en el DMRG adaptado al lenguaje de MPO, puesto que las matrices $W[\alpha]$ son muy ralas. En efecto, se utilizó para mejorar la eficiencia del programa considerablemente.

Con esto finalizamos la descripción de los métodos numéricos para la teoría A, y a continuación presentamos los resultados obtenidos.

7.1.4. Entropías en la teoría A

En el cálculo de entropías en la teoría A, lo primero que se hizo fue establecer la validez del código de diagonalización exacta. Esto se hizo probando problemas sencillos y conocidos, como el hamiltoniano de Heisenberg. Luego se probó el rendimiento del cálculo con el hamiltoniano del QHE, pudiendo calcular hasta $N = 16$ sitios en 30 minutos en el cluster de *fierro-tmc* del grupo de Teoría de la Materia Condensada del Centro Atómico Bariloche.

Una vez que obtenemos los resultados para las energías del fundamental y las entropías con diagonalización exacta, buscamos reproducirlos con el DMRG. Conseguimos reproducir los valores de energías con mucha fidelidad tomando pocos estados m (ver 7.1.2 por el significado y notación del m). Por ejemplo, para el caso de $N = 16$ obtenemos el valor de energía fundamental con una precisión de 10^{-10} con respecto al exacto, tomando un $\sim 50\%$ del m exacto y en aproximadamente 2 minutos (en las mismas condiciones que el exacto). Por otro lado, vimos que para la entropía es necesario tomar m relativamente grandes, es decir cercanos al exacto, para obtener una predicción realista. Si bien no tenemos resultados conclusivos, se pudo cuantificar ligeramente esta afirmación. para poder mencionar que, para nuestro caso particular, con m menores que aproximadamente un 25% del m exacto dan lugar a entropías no confiables. Esto es notable puesto que el DMRG ha alcanzado casos donde obtiene resultados confiables con una fracción 10^{-20} de estados del sistema. El procedimiento para determinar esto fue empírico. Repetimos el cálculo con distintos m y observamos la convergencia del resultado hacia el m exacto, aunque debido a la escasez de cálculos con números de sitios N distintos no se pudo determinar una generalidad.

Por otro lado, al incorporar el lenguaje de los MPO al DMRG fue posible paralelizar casi completamente utilizando la librería *OpenMP*. Se observó que utilizando 8 núcleos para el cálculo en paralelo, es posible utilizar más de un 700% de CPU de forma efectiva, y reducir así el tiempo de cómputo por un factor $1/7$.

En particular, en el caso abierto se hicieron diversos cálculos hasta $N = 24$, es decir un espacio de Hilbert 256 veces mayor al máximo alcanzado por diagonalización exacta. Se comenzaron a explorar cadenas de hasta $N = 28$ sitios, pero sin lograr seguridad sobre si el estado fundamental se ha alcanzado con el número de estados necesario para ver una curva de entropía confiable. Todos los resultados que siguen con el DMRG fueron realizados con saltos de 128, 256, 512 m en distinta secuencia para mejorar la eficiencia del método. El resultado de $N = 20$ y $L_y = 18$ se presenta en la figura 7.3. En muchos casos, como el presentado, se pudo realizar un ajuste logarítmico sobre los primeros puntos de la gráfica.

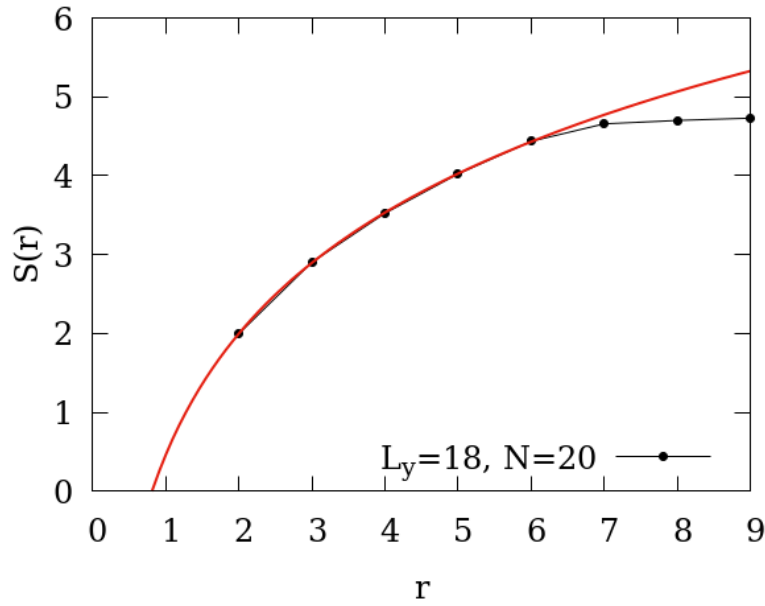


Figura 7.3: Curva de entropía para $N = 20$ y $L_y = 18$. En rojo se presenta el ajuste logarítmico según $a \log(x) + b$. Se obtuvo $a = 0,25 \pm 0,02$, $b = -0,01$

Motivados por nuestra intuición (6.3), se repitió el procedimiento de ajuste y obtener la pendiente del logaritmo para varios valores de L_y , manteniendo fijo $N = 24$. Esperando que el resultado sea lineal, se realizó un ajuste $a x + b$ sobre los coeficientes del logaritmo, definiendo el coeficiente de la entropía como

$$S(r) = C(L_y, N) \log r. \quad (7.10)$$

En la figura 7.4 se muestran valores de $C(L_y, N)$ vs L_y , para $N = 24$ constante. Se puede ver que hay buen acuerdo entre la forma funcional esperada de que el coeficiente sea proporcional a L_y y los resultados obtenidos con el DMRG. Aún así, es importante notar que debido al tamaño finito y los errores en la forma de ajustar los logaritmos, esta consistencia es sólo cualitativa y es necesario considerar mayor número N de sitios. Esto es así debido a que la fórmula de la entropía fue derivada en el límite continuo. Resta analizar la dependencia del coeficiente $C(L_y, N)$ con N para cuando sea posible alcanzar mayor N sistemáticamente. Si bien por la fórmula anterior estimamos que esta dependencia sea despreciable, es posible que los efectos de tamaño finito sean relevantes para estas dimensiones lejanas al continuo.

También se realizó un barrido para $N = 16, 20$ sobre el parámetro de masa para el potencial (6.41), sobre los valores $M = 0,125, 0,25, 0,5$, pero no se observaron diferencias significativas. La diferencia en los valores de $C(L_y)$ para los ajustes de los logaritmos, es menor al error por un factor 10^{-1} . Recordemos que este parámetro tenía un significado en el potencial propuesto análogo a la masa de un bosón que media la interacción entre

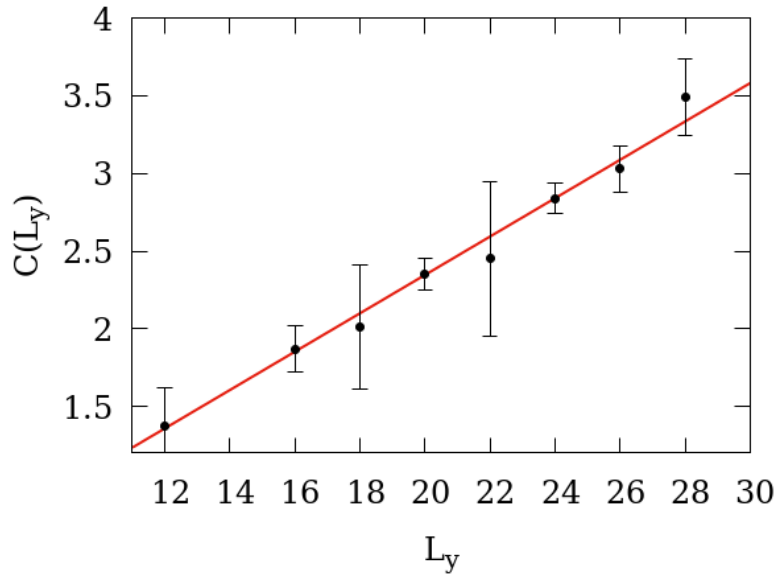


Figura 7.4: Coeficientes $C(L_y, N)$ para $N = 24$ en función de L_y . En rojo se presenta el ajuste lineal según $ax + b$. Se obtuvieron valores de $a = 0,11 \pm 0,02$, $b = -0,1 \pm 0,1$. El criterio de las barras de error se definió de acuerdo a la diferencia en la pendiente al elegir el conjunto de puntos mostrado o uno adyacente para hacer el ajuste logarítmico.

los fermiones. El rango de interacción entonces va como $\sim 1/M$. Es decir, es notable que (en unidades de la longitud magnética) pasamos de una interacción de rango ~ 2 a ~ 8 sitios, para redes de 16 a 20 sitios sin ver efectos sobre la entropía.

Otro parámetro de control para modificar del potencial es la potencia del momento dentro de la integral. Es posible modificarlo ligeramente a través de convertir la potencia $(p^2 + M^2)$ en $(p^2 + M^2)^{1-\gamma}$, con $\gamma > 0$. Se compararon valores de $\gamma = 0, 0,1, 0,2$, nuevamente sin observar diferencias para $N = 16, 20$ (esta vez del orden de 10^{-2} dentro del error).

Un análisis interesante para hacer en esta teoría es la validez de los cálculos de entropía lejos del continuo como interpretación para la fórmula de la violación logarítmica. Por un lado, es necesario considerar que $L_y \gg R$, donde R es la longitud en x de la región sobre la que consideramos la entropía (ver fig. 6.1). Esto se debía a que en la fórmula de la entropía habíamos asumido extensividad en la dirección y , lo que nos permitía sumar los modos unidimensionales en el borde de la región. En el toro, encontramos la relación (6.25), que nos dice que el área del sistema es proporcional a la cantidad de sitios (que se ubican a lo largo de la coordenada x) que podemos llenar. Reescribiendo esta relación, incorporando la longitud $R = r l_B$ y utilizando una relación de proporcionalidad tenemos

$$\frac{R}{r} = \frac{L_x}{N}, \quad L_y \gg R \quad \Rightarrow \quad r \ll \frac{1}{2\pi} \left(\frac{L_y}{l_B} \right)^2. \quad (7.11)$$

Por otro lado, también asumimos que dentro de la cinta hay una cantidad macroscópica de modos, con lo cual debemos tener $r = R/l_B \gg 1$. Esto implica que $2\pi r l_B / L_y \gg 1$, lo cual da lugar a la ventana de posibilidades para r

$$\frac{1}{2\pi} \frac{L_y}{l_B} \ll r \ll \frac{1}{2\pi} \left(\frac{L_y}{l_B} \right)^2. \quad (7.12)$$

Veamos si es razonable, de acuerdo a los cálculos hechos. En unidades de la longitud magnética, hemos considerado hasta ahora $L_y \in (12, 20)$ y $r \in (2, 8)$. Esto da lugar a $2 < r < 30$, lo cual difícilmente puede considerarse \ll , pero al menos nos dice que no estamos fuera de esta ventana.

En el caso periódico se procedió de forma similar. Se realizaron ajustes logarítmicos y luego se intentó encontrar la dependencia en L_y de estos parámetros. En este caso, a diferencia del caso abierto, no fue posible determinar ninguna dependencia de $C(L_y, N)$ con L_y . Nos queda aún por entender cuál es la diferencia entre el tamaño finito para sistemas periódicos y abiertos que causa este efecto.

7.2. Teoría B

Para la teoría B supondremos correcta la conjetura de la fórmula de Widom que establece que la violación logarítmica a la ley de áreas para la entropía de entrelazamiento está dominada por la parte libre de la acción sobre la superficie de Fermi. Luego usaremos esto como argumento para justificar el mapeo de las entropías.

Se escribió un programa en el lenguaje *Mathematica 10* que llevara a cabo los cálculos de la sección (6.4).

El programa primero carga el hamiltoniano en la forma (6.54). Luego lo diagonaliza y encuentra sus autovectores $\psi_j(k)$, con los cuales encontramos la matriz C_{ij}^F de (6.55). Ahora debemos restringirnos a la región de interés, es decir las bandas en el cilindro (6.1) o en el toro de acuerdo a la geometría deseada. Nuevamente debemos diagonalizar esta matriz restringida para poder aplicar la fórmula (6.56). Ahora que tenemos la expresión diagonal de estas matrices $C_{ij}^F|_A$, debemos calcular los logaritmos sobre los autovalores. Y finalmente llevar a cabo los productos entre matrices son tarea sencilla puesto que las tenemos en su forma diagonal.

7.2.1. Entropías en la teoría B

El objetivo de los cálculos numéricos fue contrastar con nuestra intuición de (6.3), y ver si efectivamente se observa la violación logarítmica a la ley de área en la entropía, debido a la superficie de Fermi. Se utilizó la discretización de la sección 6.3.2 para escribir la entropía en función del parámetro r que identifica el número de sitios que están dentro de la región considerada.

Para sistemas abiertos, con $N = 40, 100$ se muestran los resultados obtenidos en las fig. 7.5a, 7.5b. Se puede ver que el efecto de tamaño finito es muy notorio, y hay una dispersión muy grande de los puntos, incluso para tamaños grandes como $N = 100$. Si bien es imposible ajustar un logaritmo, se observa una tendencia que favorece la visión de la entropía proporcional al logaritmo $S \sim \log L$, antes que la entropía $S \sim \text{constante}$.

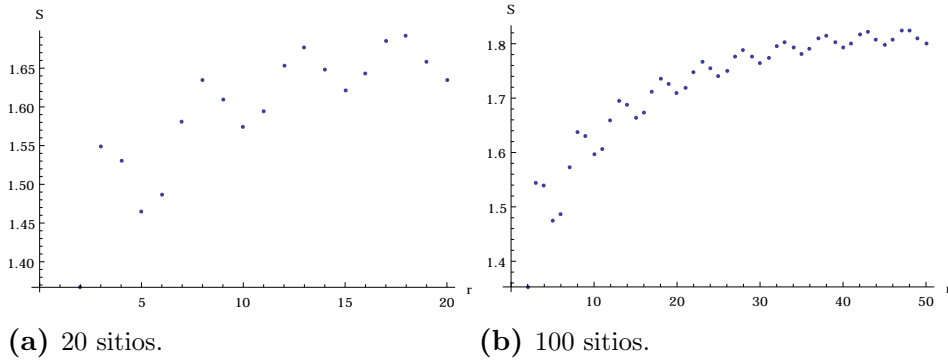


Figura 7.5: Gráficas de entropía $S(r)$ para el sistema abierto. Incluso para 100 sitios hay gran dispersión.

Para sistemas periódicos con $N = 20, 60$, los resultados se muestran en las fig. 7.6a, 7.6b. A diferencia del caso de condiciones de borde abiertas, sí fue posible obtener una curva suficientemente definida como para hacer un ajuste. Usando los primeros puntos en cada caso, encontramos que los resultados se corresponden bien con la relación $S \propto \log r$.

Una vez establecida la existencia de un logaritmo en las curvas de entropía, es necesario fijar un criterio de ajuste. Es decir, dado que para los r mayores el resultado se aleja del logaritmo, necesitamos saber cuántos puntos considerar en el ajuste. Luego nos preguntamos qué información podemos obtener sobre el coeficiente que acompaña al logaritmo en la entropía. En (6.3) establecimos que, según nuestra intuición, el factor de proporcionalidad debía ser tal que

$$S(r) \approx (L_y k_F) \log r = C(L_y, k_F) \log r. \quad (7.13)$$

Los resultados obtenidos de ajustar el coeficiente con esta fórmula se presentan en

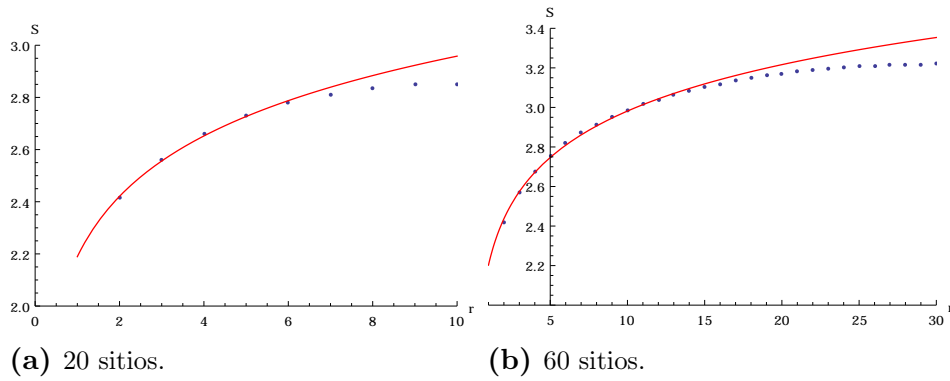


Figura 7.6: Gráficas de entropía $S(r)$ para el sistema periódico. En rojo se ve el ajuste logarítmico para los primeros sitios.

7.7. Encontramos buena correspondencia cualitativa con esta propuesta y forma de dependencia en los parámetros.

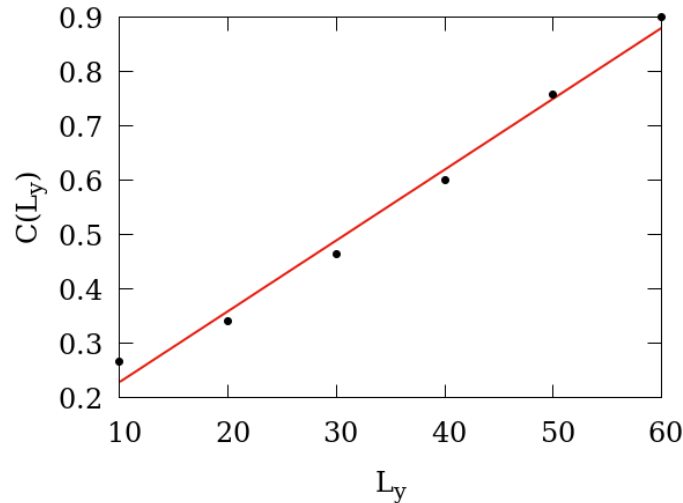


Figura 7.7: Se presenta el ajuste lineal $ax + b$ de los coeficientes del logaritmo $C(L_y)$ vs L_y . Se ve que hay buena correspondencia, con $a = 0,013 \pm 0,001$, $b = 0,1 \pm 0,03$.

7.3. Comparación entre resultados de ambas teorías

Se calcularon en las teorías A y B las entropías de entrelazamiento (EE) para número de partículas menores a $N = 24$. En ambos lados de la dualidad se encontraron EE que tienen un claro comportamiento logarítmico. Esto es un indicio fuerte de la violación logarítmica a la ley de áreas de entropía de entrelazamiento debido a la presencia de una superficie de Fermi de fermiones compuestos. Dicho comportamiento es altamente no trivial para fermiones en un campo magnético.

Asimismo, se verificó la progresión lineal con L_y en el coeficiente logarítmico de la

entropía. Físicamente, este coeficiente mide la cantidad de modos de la superficie de Fermi que contribuyen $\log r$ a la entropía. Por otro lado, mostramos que la EE es independiente del regulador infrarojo M y, lo que es más no trivial, tampoco depende de la forma del potencial electrónico $V(r)$. Esto implica que la violación logarítmica en la EE está dominada por fermiones compuestos en su aproximación libre. De esta manera, mostramos la validez de la conjetura de Widom para nuestro sistema, dentro de las limitaciones de tamaño finito.

Capítulo 8

Conclusiones

“I am not young enough to know everything.”

— Oscar Wilde.

En este trabajo estudiamos el sistema físico del Efecto Hall Cuántico Fraccionario (FQHE), electrones confinados a 2D espaciales con un campo magnético normal y uniforme. Consideramos el campo magnético suficientemente fuerte como para que los espines estén completamente polarizados, con lo cual el grado de libertad de espín no juega ningún papel.

El primer paso fue entender teóricamente el sistema, analizando los casos semiclásico y cuántico. Diferenciamos los casos sin y con interacciones, aplicando una transformación de Chern-Simons. Este es un proceso mediante el cual los electrones capturan parte de los cuantos del flujo magnético, dando lugar a los llamados *fermiones compuestos*. Estudiamos la perspectiva de campo medio, y destacamos la importancia de la fracción de llenado $\nu = 1/2$. También discutimos unas perspectivas en relación a la existencia de dualidades entre el FQHE y teorías de campos relativistas, haciendo hincapié en la simetría electrón-hueco.

Luego describimos de forma concisa la herramienta conocida como supersimetría, por ser de utilidad en los capítulos siguientes.

Discutimos en detalle la dualidad conocida como *mirror symmetry*, la cual relaciona dos teorías supersimétricas a bajas energías. Presentamos ambas teorías y dimos un sabor de cuáles son las técnicas involucradas en la demostración de la dualidad. Buscamos además romper SUSY para poder obtener teorías efectivas a bajas energías no supersimétricas, más realistas.

Siguiendo la motivación de Dam Son, encontramos una nueva derivación de una dua-

lidad no supersimétrica a partir de imponer un campo magnético e integrar los grados de libertad masivos de la teorías de bajas energías. Esto da origen a discusiones interesantes sobre si y cómo se preservan las simetrías propuestas por Son, y cuáles son los grados de libertad fundamentales en la física del estado fundamental del FQHE.

Mostramos después por qué es importante entender la entropía de entrelazamiento, y cómo podemos usarla para profundizar nuestro entendimiento de la dualidad. En particular, nos interesa detectar la violación logarítmica a la ley de áreas de la EE, siguiendo la fórmula de Widom. Conjeturamos que esta fórmula es cierta, y que la violación logarítmica está dominada por la parte libre de la acción sobre la superficie de Fermi.

Estudiamos métodos numéricos de atacar el problema, en particular un método con diagonalización exacta (mediante operaciones de bits) y el DMRG (*Density Matrix Renormalization Group*) en el lenguaje de MPO (*matrix product operators*), el último especialmente útil para los problemas 1D. Llevamos a cabo cálculos numéricos con el objetivo de detectar la superficie de Fermi de los fermiones compuestos, a través de la EE en función del ancho de la región de entrelazamiento. Esta violación logarítmica implica la existencia de una superficie de Fermi, y por lo tanto prueba la existencia de fermiones compuestos. En esta dirección, también establecimos que la EE es proporcional a la longitud compactificada L_y del cilindro. Esto proporciona una medida de la cantidad de grados de libertad de fermiones compuestos que contribuyen a la entropía.

Por otro lado, modificando parámetros del potencial utilizado (Coulomb modificado) pudimos verificar que la EE es robusta frente a estos cambios, y que no varía apreciablemente. De este modo, verificamos la conjetura de Widom para nuestro sistema interactuante. Por estas razones, la entropía de entrelazamiento es una medida interesante que merece mucha más atención como herramienta en dualidades y promete ser la fuente de muchos nuevos resultados.

A su vez, el DMRG resulta ser muy prometedor a la hora de calcular las energías del estado fundamental. En futuros trabajos será posible seguir utilizando el DMRG para calcular EE con mayor cantidad de sitios y esperamos obtener relaciones más precisas, junto con otros observables de la dualidad. Entre los objetivos a futuro, contamos con aplicar el DMRG para el cálculo de estas cantidades, buscando deducir propiedades de la descripción dual. Además, buscamos entender el efecto del desorden en el sistema, para estudiar los *plateaux* del *Integer QHE* y sus propiedades de transporte. Para esto es necesario introducir dinámica en el DMRG, tema que según creemos no estamos lejos de entender.

Finalmente, tenemos como objetivo profundizar tanto analítica como numéricamente

otras dualidades relacionadas con la presente, tanto supersimétricas como no supersimétricas.

Apéndice A

Variables de Grassman

Un excelente resumen de notación de índices con punto y sin punto, espinores de Dirac, Weyl y Majorana, junto con muchas de las fórmulas útiles para derivar los resultados del capítulo 3 respecto a variables de Grassman se presenta en el primer capítulo del libro de Bailin y Love [12]. Respecto a la notación de índices con punto, lo único necesario para entender el desarrollo del trabajo es que los espinores de Weyl $\psi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ transforman según las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ de $SU(2)$ y a un nivel pragmático que los índices punto sólo se pueden contraer con índices punto, al igual que los índices sin punto. Las matrices que relacionan ambos tipos de índices son las $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\beta}}$.

A continuación se presentan las definiciones básicas y notaciones que conciernen a las variables de Grassman como son la derivación y la integración, junto con la idea fundamental del truncamiento en la expansión en serie de potencias.

Consideremos una sola variable θ . Al expandir una función analítica genérica en θ como serie de potencias, el hecho de que $\theta^2 = 0$ cancela todos los términos excepto dos:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \theta^k = f_0 + f_1 \theta + f_2 \theta^2 + \dots = f_0 + f_1 \theta. \quad (\text{A.1})$$

De esto se deduce que la función $f(\theta)$ más general posible es lineal en θ .

La derivada es $\frac{df}{d\theta} = f_1$, y para integrales se define:

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} := 0 \Rightarrow \int d\theta = 0, \quad (\text{A.2})$$

como si no hubiera términos de borde. Se definen para completar las integrales sobre coordenadas

$$\int d\theta\theta := 1 \Rightarrow \delta(\theta) = \theta. \quad (\text{A.3})$$

Entonces en general, para una función arbitraria de θ

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta(f_0 + f_1\theta) = f_1 = \frac{df}{d\theta}. \quad (\text{A.4})$$

Si ahora promovemos la variable θ a espinor de números de Grassman $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, se definen los cuadrados

$$\theta\theta = \theta^2 = \theta^\alpha\theta_\alpha, \quad \bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \quad (\text{A.6})$$

y se puede subir y bajar índices con las matrices $\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\theta^\beta = \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha, \quad \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.7})$$

Las derivadas funcionan en analogía los índices de Minkowski (de ahí la ventaja de usar estos índices espinoriales)

$$\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha} = \delta_\alpha^\beta, \quad \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.8})$$

Y las integrales múltiples resultan de la extensión natural de las integrales simples, con cuidado en el orden de integración

$$\int d\theta^1 \int d\theta^2\theta^2\theta^1 = \frac{1}{2} \int d\theta^1 \int d\theta^2\theta\theta = 1, \quad (\text{A.9})$$

lo cual justifica las definiciones siguiente

$$\frac{1}{2} \int d\theta^1 \int d\theta^2 := \int d^2\theta, \quad \int d^2\theta \theta\theta = 1, \quad \int d^2\theta \int d^2\theta d^2\bar{\theta} = 1. \quad (\text{A.10})$$

En términos de índices y ϵ

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta}, \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \quad (\text{A.11})$$

Nuevamente podemos identificar las integrales con derivadas, que es lo que nos deja

“seleccionar” las componentes de los supercampos que nos interesan

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}, \quad \int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}. \quad (\text{A.12})$$

Bibliografía

- [1] Jain, J. K. Composite fermions. En: Perspectives in Quantum Hall Effects, págs. 265–305. Wiley-VCH Verlag GmbH, 1997. URL <https://doi.org/10.1002/9783527617258.ch7>. 2
- [2] Jain, J. K. The composite fermion: A quantum particle and its quantum fluids. *Physics Today*, **53** (4), 39–45, apr 2000. URL <https://doi.org/10.1063/1.883035>. v, v, 2, 3
- [3] Son, D. T. Is the composite fermion a dirac particle? *Physical Review X*, **5** (3), sep 2015. URL <https://doi.org/10.1103/physrevx.5.031027>. 4, 13, 40, 45, 55
- [4] Metlitski, M. A., Vishwanath, A. Particle-vortex duality of two-dimensional dirac fermion from electric-magnetic duality of three-dimensional topological insulators. *Physical Review B*, **93** (24), jun 2016. URL <https://doi.org/10.1103/physrevb.93.245151>. 4
- [5] Wang, C., Senthil, T. Dual dirac liquid on the surface of the electron topological insulator. *Physical Review X*, **5** (4), nov 2015. URL <https://doi.org/10.1103/physrevx.5.041031>.
- [6] Mross, D. F., Alicea, J., Motrunich, O. I. Explicit derivation of duality between a free dirac cone and quantum electrodynamics in (2+1) dimensions. *Physical Review Letters*, **117** (1), jun 2016. URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.117.016802>.
- [7] Seiberg, N., Senthil, T., Wang, C., Witten, E. A duality web in 2+1 dimensions and condensed matter physics. *Annals of Physics*, **374**, 395–433, nov 2016. URL <https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.08.007>. 4
- [8] Kachru, S., Mulligan, M., Torroba, G., Wang, H. Mirror symmetry and the half-filled landau level. *Physical Review B*, **92** (23), dec 2015. URL <https://doi.org/10.1103/physrevb.92.235105>. 4, 45

- [9] Kachru, S., Mulligan, M., Torroba, G., Wang, H. Bosonization and mirror symmetry. *Physical Review D*, **94** (8), oct 2016. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.94.085009>. 4, 36
- [10] Halperin, B. I., Lee, P. A., Read, N. Theory of the half-filled landau level. *Physical Review B*, **47** (12), 7312–7343, mar 1993. URL <https://doi.org/10.1103/physrevb.47.7312>. 12
- [11] Alvarez-Gaumé, L., Hassan, S. F. Introduction to S-duality in $N = 2$ supersymmetric gauge theories (a pedagogical review of the work of seiberg and witten). *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, **45** (3-4), 159–236, 1997. URL <https://doi.org/10.1002/prop.2190450302>. 16
- [12] Bailin, D., Love, A. Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory. Graduate Student Series in Physics. CRC Press, 1994. URL <https://books.google.com.ar/books?id=03oDEORp8ZwC>. 16, 18, 19, 22, 26, 79
- [13] Terning, J. Modern Supersymmetry: Dynamics and Duality. International Series of Monogr. OUP Oxford, 2006. URL <https://books.google.com.ar/books?id=1JMf-fcn0HYC>. 19
- [14] Wess, J., Bagger, J. Supersymmetry and Supergravity. Princeton University Press, 1992.
- [15] Weinberg, S. 003: The Quantum Theory of Fields: Volume 3, Supersymmetry. Cambridge University Press, 2000. 16
- [16] Seiberg, N. Naturalness versus supersymmetric non-renormalization theorems. *Physics Letters B*, **318** (3), 469–475, dec 1993. URL [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)91541-t](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91541-t). 17
- [17] Coleman, S., Mandula, J. All possible symmetries of the SM matrix. *Physical Review*, **159** (5), 1251–1256, jul 1967. URL <https://doi.org/10.1103/physrev.159.1251>. 17
- [18] Salam, A., Strathdee, J. Super-gauge transformations. *Nuclear Physics B*, **76** (3), 477–482, jul 1974. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90537-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90537-9). 18
- [19] Salam, A., Strathdee, J. Superfields and fermi-bose symmetry. *Physical Review D*, **11** (6), 1521–1535, mar 1975. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.11.1521>. 18
- [20] Zee, A. Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition. Princeton University Press, 2010. 18

- [21] Quevedo, F. Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions. University of Cambridge, 2010. 26
- [22] Kapustin, A., Strassler, M. J. On mirror symmetry in three dimensional abelian gauge theories. *Journal of High Energy Physics*, **1999** (04), 021–021, apr 1999. URL <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/04/021>. 34
- [23] Sachdev, S., Yin, X. Quantum phase transitions beyond the landau–ginzburg paradigm and supersymmetry. *Annals of Physics*, **325** (1), 2–15, jan 2010. URL <https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.08.003>. 34
- [24] Casini, H., Huerta, M. Entanglement entropy in free quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42** (50), 504007, dec 2009. URL <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504007>. 46, 60
- [25] Calabrese, P., Cardy, J. Entanglement entropy and conformal field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42** (50), 504005, dec 2009. URL <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504005>. 47
- [26] Swingle, B. Entanglement entropy and the fermi surface. *Physical Review Letters*, **105** (5), jul 2010. URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.050502>. 47
- [27] Ding, W., Seidel, A., Yang, K. Entanglement entropy of fermi liquids via multidimensional bosonization. *Physical Review X*, **2** (1), mar 2012. URL <https://doi.org/10.1103/physrevx.2.011012>. 57
- [28] Mishmash, R. V., Motrunich, O. I. Entanglement entropy of composite fermi liquid states on the lattice: In support of the widom formula. *Physical Review B*, **94** (8), aug 2016. URL <https://doi.org/10.1103/physrevb.94.081110>.
- [29] Swingle, B. Rényi entropy, mutual information, and fluctuation properties of fermi liquids. *Physical Review B*, **86** (4), jul 2012. URL <https://doi.org/10.1103/physrevb.86.045109>. 57
- [30] Nielsen, H., Ninomiya, M. A no-go theorem for regularizing chiral fermions. *Physics Letters B*, **105** (2-3), 219–223, oct 1981. URL [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)91026-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)91026-1). 58
- [31] Hallberg, K. A. New trends in density matrix renormalization. *Advances in Physics*, **55** (5-6), 477–526, jul 2006. URL <https://doi.org/10.1080/00018730600766432>. 62, 63

- [32] Fehske, H., Schneider, R., Weisse, A. (eds.) Computational Many-Particle Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2008. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74686-7>. 63
- [33] White, S. R. Density matrix formulation for quantum renormalization groups. *Physical Review Letters*, **69** (19), 2863–2866, nov 1992. URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.69.2863>. 63
- [34] Peschel, I., Kaulke, M., Wang, X., Hallberg, K. (eds.) Density-Matrix Renormalization. Springer Berlin Heidelberg, 1999. URL <https://doi.org/10.1007/bfb0106062>. v, 64
- [35] Schollwöck, U. The density-matrix renormalization group. *Reviews of Modern Physics*, **77** (1), 259–315, apr 2005. URL <https://doi.org/10.1103/revmodphys.77.259>. vi, 66
- [36] Schollwöck, U. The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states. *Annals of Physics*, **326** (1), 96–192, jan 2011. URL <https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.09.012>. 66
- [37] Chan, G. K.-L., Keselman, A., Nakatani, N., Li, Z., White, S. R. Matrix product operators, matrix product states, and ab initio density matrix renormalization group algorithms. *The Journal of Chemical Physics*, **145** (1), 014102, jul 2016. URL <https://doi.org/10.1063/1.4955108>. 67
- [38] Li, Z., Chan, G. K.-L. Spin-projected matrix product states: Versatile tool for strongly correlated systems. *Journal of Chemical Theory and Computation*, **13** (6), 2681–2695, may 2017. URL <https://doi.org/10.1021/acs.jctc.7b00270>. 67

Agradecimientos

Quiero agradecer antes que nada a Gonzalo, por ser un director gigante, por mostrarme la punta del iceberg de las cosas que desconozco, por darme una idea de todo lo que hay por descubrir. Por estar siempre, tanto en lo académico como en lo personal, para compartir sus conocimientos, experiencias, sus éxitos y sus fallas. Por sacar lo mejor sin presionar, por su contagiosa pasión y su amor por el trabajo. Gracias por la infinita paciencia, sé que te hice repetir muchas cosas (algunas muchas veces).

A Karen, por siempre compartir sus conocimientos y su curiosidad. Por su imaginación, su creatividad, sus incasables preguntas (y su descomunal capacidad de organización!). Y por supuesto, por siempre tener una mano lista para apoyar sobre tu hombro y dar la palabra justa que te hace sentir mejor.

A Yuri claro, por ser posiblemente quien más tuvo que sufrirme y quien más paciencia me tuvo. Por ser un gran compañero y un gran maestro.

A mis compañeros del IB por tantas horas pasadas juntos, las buenas y las malas (cada uno entiende), dentro y fuera de la cancha! En particular a los compañeros de la pajarera, que tanto hemos sufrido y reído (pero más que nada sufrido).

A mi familia por siempre apoyarme en todo lo que decido, muchas veces sin tener la menor idea de lo que estoy haciendo o por qué, muchas veces estando equivocado. Quién sabe, incluso todas las veces! Sin dudas no podría haber llegado hasta acá sin el apoyo de ustedes, los quiero inmensamente.

Y por último y más importante, a mi compañera de vida Agui. Sin ella no sería quien soy, y sin dudarlo sos quien más felicidad me da. Sos en quien me apoyo cuando estoy mal, con quien me alegro cuando estoy bien. Y ni una sola vez me decepcionaste. Gracias por toda la paciencia y el cariño que me das todos los días desde hace casi 10 años.