

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS

**EL VACÍO CUÁNTICO: EFECTOS GEOMÉTRICOS Y
DINÁMICOS**

María Cristina Rodríguez
Maestrando

Dr. César Daniel Fosco
Director

Miembros del Jurado

Dr. R. Trinchero

Dr. H. Casini

Dr. F. C. Lombardo

28 de Noviembre de 2017

Grupo Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mi familia,
que han estado a mi lado
en cada momento
y me han apoyado
en cada decisión que tomé.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	iv
Abstract	v
1. Introducción	1
1.1. Energía del vacío y oscilaciones de punto cero	1
1.2. Efecto Casimir	2
1.2.1. Efecto Casimir estático	3
1.2.2. Efecto Casimir dinámico	5
1.3. Fuerza de fricción cuántica	8
2. Efecto Casimir estático para el campo escalar	9
2.1. Planteo del problema	9
2.2. Energía del vacío	10
2.3. Espejos semitransparentes	11
2.4. Espejos semitransparentes planos	13
2.4.1. Términos de orden superior	16
2.5. Espejos semitransparentes corrugados	18
2.5.1. Corrugación sinusoidal	21
2.5.2. Otras funciones de corrugación	28
2.6. Espejos semi-infinitos	32
3. Efecto Casimir dinámico para el campo escalar	34
3.1. Planteo del problema	34
3.2. Acción efectiva en el ECD	35
3.3. Fricción cuántica con velocidad uniforme	41
4. Efecto Casimir para el campo electromagnético	42
4.1. Planteo del problema	43
4.2. Cálculo de la acción efectiva	44

4.3. Espejos corrugados estáticos	46
4.4. Espejos planos en movimiento	50
5. Conclusiones y perspectivas	53
5.1. Conclusiones	53
5.2. Perspectivas	54
A. Integral de camino	55
A.1. Integral de camino en mecánica cuántica	55
A.2. Integral de camino para un campo escalar	57
B. Cálculos adicionales para el caso del campo EM	59
Bibliografía	62
Agradecimientos	65

Resumen

Uno de los fenómenos más distintivos que tienen origen en la mecánica cuántica son las fluctuaciones del vacío. En el caso del campo electromagnético, éstas dan lugar a diversos fenómenos observables, entre los cuales se destaca el efecto Casimir, debido a su carácter macroscópico. En este trabajo estudiamos diversos modelos en los que se manifiesta el efecto Casimir, tanto en su versión estática como dinámica.

Esta tesis está dividida en 2 secciones, en la primera parte estudiamos espejos acoplados con un campo escalar, mientras que en la segunda parte hicimos lo mismo con el campo electromagnético.

En el caso estático, calculamos la energía del vacío en un sistema en el que el campo interactúa con dos espejos semitransparentes de grosor nulo. Esta última característica de los espejos permite hacer un desarrollo perturbativo en el acoplamiento entre los espejos y el campo. En particular, estudiamos un sistema de dos espejos con una corrugación no necesariamente pequeña. Obtuvimos la fuerza de Casimir normal y lateral en los sistemas estudiados.

Para el dinámico, obtuvimos la probabilidad de decaimiento del vacío en un sistema de dos espejos planos semitransparentes en movimiento paralelo a las superficies.

Abstract

One of the most remarkable manifestations of quantum nature is due to vacuum fluctuations that lead to measurable phenomena, like the Casimir effect. We study the static and dynamic Casimir effect resulting from the coupling between two mirrors and the scalar and electromagnetic field.

In order to study the static Casimir effect, we compute the vacuum energy of a system where the field interacts with two zero-width semitransparent mirrors. Our approach relies on the main assumption that the mirrors are semi-transparent, what justifies our use of a perturbative expansion in the strength of the coupling between each mirror and the quantum field. In particular, we study a system of two corrugated mirrors where the amplitude of the corrugation is not assumed to be small. We compute the lateral force due to corrugation.

In addition, we study dynamic Casimir effect resulting from the parallel motion of two flat semitransparent mirrors. We compute the probability of vacuum decay based on a perturbative expansion of the effective action in the coupling between mirrors and field.

Capítulo 1

Introducción

“Somewhere, something incredible is waiting to be known.”
— Carl Sagan (1934-1996)

La naturaleza cuántica de diversos sistemas microscópicos puede, en ciertas circunstancias, manifestarse en efectos macroscópicos. Un ejemplo de esto es el efecto Casimir, que ocurre como consecuencia de la existencia de la energía de punto cero de un campo cuántico. En su versión más simple, este efecto genera una fuerza entre dos espejos paralelos neutros como consecuencia de las condiciones impuestas al campo electromagnético sobre los planos [1].

En este capítulo, veremos cómo se origina este efecto a partir de la energía del vacío y de las oscilaciones del campo en la sección 1.1. Además, en la sección 1.2 se presentará una introducción al efecto Casimir, así como sus aplicaciones y los últimos avances en esta área. Finalmente, en la sección 1.3, veremos una introducción a otro efecto de las fluctuaciones del vacío, que es la fuerza de fricción cuántica.

1.1. Energía del vacío y oscilaciones de punto cero

Actualmente, la teoría que describe la estructura fundamental de la materia y del vacío es el modelo estándar, que se desarrolla en el contexto de la teoría cuántica de campos. En este modelo, las partículas son excitaciones de un dado campo, cada uno de los cuales tiene un estado fundamental con una energía de punto cero. De esta forma, la energía del vacío, es decir del estado fundamental de la electrodinámica cuántica, está dada por la energía al estado fundamental de cada uno de los modos del campo. Esta energía está dada por

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_j \omega_j, \quad (1.1)$$

donde el índice j recorre los números cuánticos asociados a los modos del campo y ω es la frecuencia de cada modo [2].

Si bien las fluctuaciones del estado fundamental no producen un efecto observable en el espacio libre, esto puede revertirse si, por el contrario, se imponen condiciones de contorno no triviales en el sistema. En este caso, se obtiene una diferencia finita entre la densidad de energía del estado fundamental del campo en presencia de las condiciones de contorno y la misma en el espacio libre. Esta diferencia de energía es observable y da lugar al efecto Casimir. Este efecto se evidencia cuando aparece una fuerza entre dos cuerpos macroscópicos neutros, debido a que las fluctuaciones del vacío inducen una interacción macroscópica entre los cuerpos [1]. En particular, vamos a ver que este fenómeno se puede observar también en el caso en que la cantidad de modos que contribuyen a la energía es infinita.

1.2. Efecto Casimir

El efecto Casimir juega un importante rol en diversos campos de la Física, como en Teoría Cuántica de Campos, Física de la Materia Condensada, Física Atómica y Molecular, Gravitación y Cosmología, así como también en Física Matemática. Por ejemplo, en Cromodinámica Cuántica, la energía de Casimir de quarks y gluones aporta contribuciones esenciales a la energía total de los nucleones. Además, a través de mediciones del efecto Casimir se obtienen cotas para parámetros asociados a partículas predichas por teorías de gauge unificadas, supersimetría, supergravedad y teoría de cuerdas. En Física de la Materia Condensada, el efecto Casimir da lugar a fuerzas, tanto atractivas como repulsivas, entre superficies cercanas de distintos materiales [2].

En los últimos años, se han hecho experimentos de alta precisión para medir este efecto y otros se están llevando a cabo actualmente. La precisión alcanzada en estas mediciones presenta una de las principales motivaciones para continuar trabajando en predicciones teóricas aún más detalladas sobre este efecto [2].

En su manifestación más sencilla, el efecto Casimir es la interacción entre un par de cuerpos neutros en el vacío, que da lugar a una fuerza de origen cuántico debida a las fluctuaciones del campo. Para obtener la fuerza, hay que extraer de la energía infinita en presencia de estas condiciones de contorno la energía del espacio de Minkowski libre, de forma que se obtiene un resultado finito. En estos sistemas se produce el denominado efecto Casimir estático (ECE), que desarrollaremos en la sección 1.2.1.

Otro efecto que se observa en el vacío cuántico es la creación de partículas a partir de la existencia de campos externos. Éste se denomina efecto Casimir dinámico (ECD) y tiene lugar cuando la energía del campo externo es transferida a las partículas virtuales, es decir las oscilaciones del vacío, transformándolas en partículas reales. Por lo tanto si las condiciones de contorno dependen del tiempo, aparece este efecto, además de la

fuerza [2]. Este efecto será presentado en la sección 1.2.2.

El efecto Casimir en los últimos años

La fuerza de Casimir fue demostrada experimentalmente en Ref. [3] y recientemente se llevaron a cabo diversas mediciones experimentales más precisas de esta fuerza en diversos sistemas [4]. Actualmente se siguen desarrollando sensores micro y nanomecánicos capaces de medir la interacción de Casimir con alta precisión, permitiendo estudiar más en detalle las fluctuaciones del vacío en presencia de condiciones de contorno. En particular, estos sensores permiten cuantificar la influencia sobre la fuerza de Casimir debida a las propiedades del material y la geometría de la muestra [5].

Si bien tanto el efecto Casimir estático como el dinámico fueron verificados experimentalmente, es difícil observar los efectos dinámicos debido a las condiciones extremas en las que estos se vuelven apreciables [6].

En estos últimos años, motivados por los recientes avances experimentales en ECD [6], se estudió la creación de partículas en sistemas con espejos perfectos en movimiento [7]. Se trabajó también con sistemas de espejos que no son conductores perfectos en Refs. [8] y [9] y se estudiaron diferentes propuestas para observar el efecto experimentalmente en cavidades [10].

El estudio experimental en cavidades se debe a que, en las condiciones a las que se puede acceder actualmente, tanto la fuerza como el número de fotones creados son demasiado pequeños. La principal razón se debe a que, en el caso de movimiento oscilatorio, sería necesario alcanzar frecuencias demasiado altas para que el efecto sea detectado. Sin embargo, hay experimentos en los que el efecto se aprecia, por ejemplo, en el caso de un espejo móvil dentro de una cavidad electromagnética. En este caso, se amplifica el número de fotones emitidos, por lo menos para el caso de espejos perfectos. Para este tipo de configuración, la confirmación experimental es mucho más factible [11].

1.2.1. Efecto Casimir estático

El ejemplo más simple de un sistema en el que se manifiesta el efecto Casimir es la interacción entre un par de planos paralelos neutros, separados una distancia a , que dan lugar a una fuerza finita atractiva entre los planos dada por

$$F(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} S, \quad (1.2)$$

donde $S \gg a$ es el área de los planos y c es la velocidad de la luz [2].

Como ya dijimos, la interacción de Casimir es un efecto puramente cuántico ya que se debe a las fluctuaciones del campo electromagnético (EM). De hecho, clásicamente

no existe ninguna fuerza entre los planos neutros, por lo que la interacción con el vacío es la causa de que los planos se atraigan entre ellos.

La característica más importante del efecto Casimir es que, si bien es de naturaleza cuántica, predice una fuerza entre cuerpos macroscópicos. Consideremos por ejemplo el caso de dos planos paralelos metálicos de área $S = 1 \text{ cm}^2$ separados una distancia $a = 1 \text{ }\mu\text{m}$, suficientemente grande en escala atómica. En este caso, el valor de la fuerza atractiva entre ellos, dada por la ecuación (1.2), es $F(a) \approx 1,3 \times 10^{-7} \text{ N}$. Esta magnitud, si bien es pequeña, se encuentra en el rango en el cual es posible medir una fuerza en laboratorios modernos [2].

Una de las particularidades de la fuerza de Casimir es que ésta es independiente de la carga eléctrica y de otras constantes de acoplamiento. Por el contrario, depende fuertemente de la geometría y composición de las superficies que sirven de condiciones de contorno y puede ser tanto atractiva en algunos casos como repulsiva en otros.

Por este motivo nuestro interés particular en el efecto Casimir es el cálculo de la dependencia de la fuerza con las propiedades del medio y la geometría del problema. En el capítulo 2 se planteará el problema en particular que vamos a considerar, que es el caso de dos cuerpos con algunas geometrías particulares.

Además de la fuerza de Casimir normal, que fue estudiada extensivamente y ha sido demostrada mediante mediciones de precisión, en el caso en que las superficies son corrugadas existe una fuerza lateral actúa entre dos superficies alineadas y da lugar a una fuerza mecánica que actúa de forma tangencial a las superficies. Al igual que la fuerza de Casimir normal, se origina a partir de las oscilaciones de punto cero del campo. La existencia de esta fuerza lateral, debida a anisotropías en las condiciones de contorno, fue estudiada teóricamente [12] y verificada experimentalmente [13]. El cálculo de esta fuerza lateral es la motivación por la que se estudiarán en particular sistemas en los que las condiciones de contorno están dadas por superficies corrugadas.

Cálculo de la energía del vacío

Para obtener la energía del vacío, recurrimos a la función de partición cuántica, que es la traza de la matriz densidad, es decir

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H}, \quad (1.3)$$

Formalmente, la matriz densidad describe la evolución de un sistema con tiempo imaginario. Esto se ve mediante la sustitución $\beta \rightarrow it/\hbar$, a partir de la cual obtenemos el operador de evolución. El tiempo imaginario se suele llamar tiempo euclídeo y de lugar a la acción euclídea. Más aún, las propiedades del operador de evolución en tiempo real se pueden generalizar fácilmente para obtener las propiedades algebraicas de las integrales de camino euclídeas.

Una característica importante de la función de partición es que provee una herramienta para determinar la energía del nivel fundamental de un sistema cuántico. Cuando el Hamiltoniano está acotado inferiormente, la energía del nivel fundamental E_0 está dada por

$$E_0 = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln(\text{tr } e^{-\beta H}). \quad (1.4)$$

Por lo tanto, las integrales de camino euclídeas permiten entender la estructura del estado fundamental en sistemas con un gran número de grados de libertad [14]. Una introducción al formalismo de integrales funcionales, tanto para sistemas cuánticos como para el campo escalar, está descrita en el apéndice A.

Para calcular la energía E_0 utilizamos el formalismo de integrales de camino que permite obtener una expresión para la función de partición cuántica. A partir de la expresión

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \langle q, -i\beta/2 | e^{-\beta H} | q, i\beta/2 \rangle dq, \quad (1.5)$$

y utilizando la ecuación (A.14), obtenemos que la función de partición está dada por

$$\mathcal{Z}(\beta) \propto \int Dq \exp \left[- \int d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q) \right) \right], \quad (1.6)$$

donde τ es el tiempo imaginario.

1.2.2. Efecto Casimir dinámico

Cuando el sistema se halla en presencia de condiciones de contorno dependientes del tiempo, las fluctuaciones del vacío se manifiestan en diversas formas, que se suman a los efectos discutidos en la sección anterior, dando lugar a diversos efectos macroscópicos.

En el caso en que las condiciones de contorno del sistema están impuestas por uno o más cuerpos neutros acelerados, tiene lugar el denominado efecto Casimir dinámico. En este caso, la existencia de un movimiento acelerado puede generar que el vacío evolucione a un estado excitado. Este efecto puede ser descrito desde dos puntos de vista. Por un lado, el proceso puede verse como el resultado de una fuerza, que actúa como reacción ante el cambio en las condiciones externas. Por otro lado, al medir el campo se puede observar que este efecto genera la creación de fotones reales a partir del vacío.

Un caso particular en el que se observan efectos inducidos por el movimiento es el denominado fricción cuántica, que también se debe a las fluctuaciones del vacío. Este efecto tiene lugar cuando aparecen fuerzas de fricción sin contacto entre cuerpos neutros en movimiento relativo paralelo a las superficies, incluso en el caso en que el

movimiento es uniforme. Este efecto puede entenderse en términos del intercambio de fotones virtuales entre los cuerpos, que luego produce excitaciones en los grados de libertad internos de los espejos [15].

Por lo tanto, los efectos de disipación que tienen lugar cuando los cuerpos están en movimiento no sólo se producen por la excitación de fotones reales a partir del vacío cuántico, sino también por los grados de libertad internos del espejo, con la mediación de fotones virtuales provenientes del campo en el vacío [16].

Cálculo de la acción efectiva

En el formalismo de integrales funcionales, el sistema está definido en términos de su acción S en tiempo real, es decir, en el espacio de Minkowski, en $D = d+1$ dimensiones. Vamos a considerar sistemas en los que el campo interactúa con dos espejos, que actúan como campos externos en el sistema y de cuya configuración va a depender la acción del sistema.

El ECD se pone de manifiesto cuando aparece una parte imaginaria en la acción efectiva Γ del sistema [17].

La acción efectiva es una funcional de las funciones que determinan la posición instantánea de cada espejo y está definida en términos de la amplitud de persistencia del vacío $\mathcal{Z} = \langle 0_{out}|0_{in} \rangle$, mediante la siguiente ecuación

$$\mathcal{Z} = e^{i\Gamma}, \quad (1.7)$$

en el caso en que consideramos, donde la acción del sistema está dada por $S = S_0 + S_I$, donde S_0 es la acción del campo en el espacio libre y S_I tiene en cuenta la interacción entre el campo y los espejos. La acción de interacción va a estar dada por

$$S_I = \int d^D x \gamma^{-1}(t) V(x), \quad (1.8)$$

donde V es el potencial de acoplamiento y

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \quad (1.9)$$

es el factor de Lorentz, que solo es relevante en el caso relativista.

Entonces, notamos que la acción efectiva también puede dividirse en $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_I$, donde Γ_0 no será tenida en cuenta porque es la que corresponde a la acción del campo en el espacio libre S_0 .

La probabilidad P de creación de pares de partículas reales a partir del vacío, debido al movimiento acelerado del cuerpo, está dada por

$$P = 1 - e^{-2 \text{Im} \Gamma} \quad (1.10)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$e^{i\Gamma_I} = \langle e^{iS_I} \rangle, \quad (1.11)$$

donde el valor medio funcional con peso gaussiano está dado por S_0 :

$$\langle \dots \rangle = \frac{\int D\phi \dots e^{iS_0(\phi)}}{\int D\phi e^{iS_0(\phi)}} \quad (1.12)$$

donde la integral depende del campo que va a estar acoplado a los espejos.

En particular vamos a considerar sistemas formados por dos espejos en los que el acoplamiento es cuadrático. Los diagramas de Feynman que contribuirán al orden más bajo de la acción efectiva se observan en Figura 1.1.

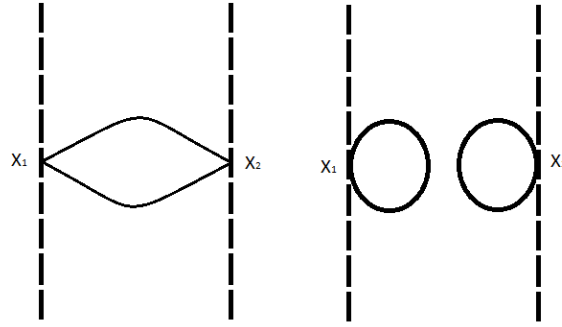


Figura 1.1: Diagramas de Feynman para 2 espejos acoplados cuadráticamente con el campo.

En el caso de acoplamiento débil, usamos el desarrollo en cumulantes. Para ello suponemos que el término S_I es proporcional a un coeficiente g , del que dependerá el orden del desarrollo de Γ . Entonces, Γ_I tendrá un desarrollo perturbativo en potencias de S_I . Vemos que, denotando $\Gamma_I^{(k)}$ el término de orden k del desarrollo obtenemos:

$$\Gamma_I = \Gamma_I^{(1)} + \Gamma_I^{(2)} + \dots + \Gamma_I^{(k)} + \dots \quad (1.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{(1)} &= \langle S_I \rangle \\ \Gamma_I^{(2)} &= \frac{i}{2} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^2 \rangle \\ \Gamma_I^{(k)} &= \frac{i^{k-1}}{k!} \langle (S_I)^k \rangle_c \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde el subíndice c denota los diagramas de Feynman conectados.

Entonces en el caso que vamos a estudiar, solo el primer diagrama de la Figura

1.1 va a contribuir al cálculo de $\Gamma_I^{(2)}$. Éste será, además, el término de orden más bajo que contribuirá a la acción efectiva. Esto se debe a que un resultado general permite afirmar que el primer término que contribuye a la acción efectiva (o, en el caso estático, a la energía) en un sistema con N condiciones de contorno es el término a orden N. Es decir, los diagramas que contribuirán serán los que tienen un vértice correspondiente a cada espejo.

En el espacio euclídeo, la acción efectiva está dada por

$$\mathcal{Z} = e^{-\Gamma}, \quad (1.15)$$

y la probabilidad de decaimiento del vacío está asociada a los términos que contribuyen a la parte imaginaria, una vez que hacemos la rotación para volver al espacio de Minkowski. En este caso, también se puede hacer un desarrollo de la acción efectiva en el acoplamiento entre los espejos y el campo, análoga a la discutida previamente.

1.3. Fuerza de fricción cuántica

Las mismas fluctuaciones cuánticas discutidas con anterioridad pueden producir diferentes efectos en distintos sistemas. Uno de ellos es la existencia de una fuerza de fricción entre planos paralelos que no están en contacto entre ellos y que se encuentran en movimiento con velocidad relativa constante. La explicación de este fenómeno, a nivel cuántico, es que en el caso de dos espejos en el vacío, la energía de punto cero de los electrones en cada superficie produce fluctuaciones en la carga, que a su vez induce cargas imagen en la otra superficie, dando lugar al ECE. Cuando dos espejos imperfectos se hallan en movimiento relativo paralelo a las superficies, se genera una fuerza de fricción debida a la diferencia de fase entre las cargas inducidas por las fluctuaciones de vacío en cada superficie. Esta diferencia de fase no está presente en el caso de espejos perfectos [15].

En términos del formalismo de la teoría cuántica de campos, aparece una parte imaginaria en la acción efectiva como consecuencia de la fricción sin contacto, originada por la excitación de grados de libertad internos de los espejos.

Capítulo 2

Efecto Casimir estático para el campo escalar

“La dernière démarche de la raison est de reconnaître qu’il y a une infinité de choses qui la surpassent.”

— Blaise Pascal (1623-1662)

En este capítulo, estudiaremos la interacción del campo escalar con diversos sistemas, que dan lugar al efecto Casimir. En la sección 2.1 plantearemos el problema que vamos a resolver. En la sección 2.2 veremos cómo obtener la energía del vacío usando cálculos funcionales y en 2.3 presentaremos los detalles del cálculo de la energía de vacío del campo escalar para sistemas de dos espejos semitransparentes de espesor nulo.

A partir de estos resultados, realizaremos el cálculo para dos casos particulares. Uno de ellos, detallado en la sección 2.4, es el sistema de dos placas planas paralelas, para el cual obtendremos la fuerza normal de Casimir. El otro sistema consiste en dos placas corrugadas y está desarrollado en la sección 2.5. Para este sistema obtendremos la fuerza lateral de Casimir. Finalmente en la sección 2.6 presentaremos el cálculo en el caso de espejos con espesor semi-infinito a partir de los resultados para espesor nulo.

2.1. Planteo del problema

El objetivo es calcular la fuerza de Casimir para espejos semitransparentes de distintas geometrías. Esta propiedad de los espejos permite calcular en forma perturbativa la acción efectiva, partiendo de la acción del sistema. Ésta define el sistema y depende de la configuración de los espejos y de la interacción de estos con el campo escalar. En ciertas geometrías, se puede resolver el problema exactamente, obteniendo la dependencia de la fuerza de Casimir con los parámetros que definen la geometría del sistema. Para obtener la fuerza, calculamos la energía del vacío dada por la interacción

del campo con los espejos. La diferencia entre esta energía y la que tiene el sistema cuando los espejos están muy alejados entre sí es finita.

Consideramos el efecto Casimir en un caso general en el que la geometría del problema está caracterizada solo por dos superficies, que definen dos espejos de espesor nulo. En esta situación, se puede pensar la energía de Casimir como una funcional de las funciones que caracterizan las superficies [18]. En el caso general, no es sencillo calcular esta funcional para superficies arbitrarias. Se pueden obtener resultados exactos para configuraciones que tienen simetría, como en el caso de dos placas planas paralelas. Éste es el primer sistema que estudiamos, en el caso en que interactúa con el campo escalar real. Para este sistema obtendremos la contribución a la energía para los dos órdenes más bajos.

El otro sistema que estudiamos contiene dos espejos paralelos corrugados en alguna dirección. Este problema fue resuelto con anterioridad de manera exacta en el límite en que la amplitud de la corrugación es pequeña en comparación con la distancia entre los espejos, por ejemplo, utilizando el método PFA, o *proximity force approximation*. Éste es un método que permite calcular la energía de Casimir en el caso en que las superficies están cerca y tienen una pequeña curvatura [18].

En el caso que nosotros estudiamos, en cambio, la amplitud de ondulación puede tener un valor finito, por lo que el cálculo sólo es perturbativo en el acoplamiento entre los espejos.

2.2. Energía del vacío

Para el campo escalar obtenemos análogamente al caso discutido en el capítulo anterior, que la función de partición está dada por

$$\mathcal{Z} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int D\phi e^{-S[\phi]}, \quad (2.1)$$

donde S es la acción euclídea, es decir definida para tiempo imaginario, que depende del campo escalar real ϕ y de las condiciones de contorno del sistema. La acción está dada por

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + V(x, \phi) \right]. \quad (2.2)$$

Supongamos ahora que la acción tiene la forma

$$S = S_0 + S_I, \quad (2.3)$$

donde S_0 es la acción del campo escalar libre y S_I , dada por

$$S_I = \int d^4x V(x, \phi), \quad (2.4)$$

tiene en cuenta la interacción entre el campo y las condiciones de contorno impuestas. Para condiciones de contorno lineales, V es cuadrático en ϕ .

Ahora nos interesa calcular la energía de interacción, para lo cual separamos $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_I$, donde

$$\mathcal{Z}_I = \langle e^{-S_I[\phi]} \rangle \quad (2.5)$$

y el valor medio está definido de la siguiente manera

$$\langle \dots \rangle = \frac{\int D\phi \dots e^{-S_0[\phi]}}{\int D\phi e^{-S_0[\phi]}}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, la energía que nos interesa calcular, que es la de interacción referida a la del vacío sin potencial es

$$E = E_T - E_0 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\beta} \ln \langle e^{-S_I[\phi]} \rangle \right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}_I \right), \quad (2.7)$$

donde los diferentes órdenes en la expansión se denominan cumulantes e involucran sólo a los diagramas conectados. De esta forma, mientras que los valores de expectación calculados teniendo en cuenta todos los diagramas contienen potencias arbitrarias de β debido a la contribución de los diagramas desconectados, los cumulantes son proporcionales a β . Debido a ello, el límite para $\beta \rightarrow \infty$ es finito, por lo que la energía del vacío E_I es finita [19].

2.3. Espejos semitransparentes

Consideremos un sistema de dimensión $D = d+1$ con dos espejos semitransparentes paralelos e infinitos, ubicados a una distancia a entre ellos. Cada uno de los espejos R y L está en las regiones en las que $f_R(x) \neq 0$ y $f_L(x) \neq 0$ respectivamente, las cuales son las funciones que dan lugar a la corrugación. Es decir, el potencial es

$$V[x, \phi(x)] = V_L + V_R = \frac{g_L}{2} f_L(x) \phi^2(x) + \frac{g_R}{2} f_R(x) \phi^2(x), \quad (2.8)$$

donde g_L y g_R son constantes que determinan el acoplamiento del espejo de la derecha y el de la izquierda, respectivamente. Entonces la acción de interacción es $S_I = S_L + S_R$, donde

$$S_{L,R} = \int d^4x V_{L,R}[x, \phi(x)] \quad (2.9)$$

La aproximación que vamos a considerar se basa en que los espejos son semitransparentes, es decir el acoplamiento entre los planos y el campo es débil. Esto permite expandir perturbativamente la energía en serie de potencias de S_I , que es proporcional a la constante de acoplamiento. Para ello desarrollamos la exponencial de $-S_I$ y el logaritmo en su serie de potencias, respectivamente. Luego, agrupando los términos hasta tercer orden que dependen de la misma potencia de S_I , obtenemos la siguiente expresión

$$-\ln \mathcal{Z}_I = -\ln \langle e^{-S_I} \rangle \simeq \langle S_I \rangle - \frac{1}{2} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^2 \rangle + \frac{1}{3!} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^3 \rangle. \quad (2.10)$$

A partir de esta ecuación, podemos calcular la energía del vacío en los distintos órdenes del desarrollo para ver cómo depende E_I de la separación a entre los espejos. Recordemos que las únicas contribuciones a la energía que tienen interpretación física son aquellas que cambian al modificarse las condiciones de borde que, en este caso, dependen sólo del parámetro a . Por este motivo, como el primer orden es divergente y no depende de la distancia a , comenzaremos calculando el segundo orden del desarrollo, que es el más bajo en el que se observa dependencia con a . A este orden, reemplazando la expansión dada por (2.10) en la ecuación (2.7), obtenemos que la energía está dada por

$$E^{(2)} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^2 \rangle. \quad (2.11)$$

Suponemos que los planos no están acoplados directamente entre ellos y la única interacción proviene de la interacción con el campo, por lo cual podemos separar la acción total en $S = S_L + S_R$, donde S_L y S_R son los términos de la acción proporcionales a g_L y g_R respectivamente. Entonces, desarrollando el cuadrado obtenemos que el segundo orden de la energía de interacción del vacío está dado por la ecuación

$$E^{(2)} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta} [\langle (S_L - \langle S_L \rangle)^2 \rangle + \langle (S_R - \langle S_R \rangle)^2 \rangle + 2 \langle (S_L - \langle S_L \rangle)(S_R - \langle S_R \rangle) \rangle]. \quad (2.12)$$

Vemos en esta expresión que la única contribución que depende de la distancia a está dada por el último término, ya que los dos primeros representan las energías individuales debidas a la presencia de cada uno de los espejos y no la interacción entre ellos. Esas energías individuales, o autoenergías, en general son divergentes. Del último término, la única parte que va a contribuir está dada por

$$\begin{aligned}
E_I^{(2)} &= - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \langle S_L S_R \rangle_c = \\
&= - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_L g_R}{2\beta} \int d^D x d^D y f_L(x) \langle : \phi^2 : (x) : \phi^2 : (y) \rangle f_R(y),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde para calcular $\langle : \phi^2 : (x) : \phi^2 : (y) \rangle$ usamos el teorema de Wick, que consiste en tomar el valor de expectación de todos los posibles pares de operadores $\phi(x)$ y $\phi(y)$ [20]. En este caso vale

$$\langle : \phi^2 : (x) : \phi^2 : (y) \rangle = 2 \langle \phi(x) \phi(y) \rangle^2, \tag{2.14}$$

donde sólo contribuyen los diagramas conectados, por lo que los términos de la forma $\langle \phi^2(x) \rangle \langle \phi^2(y) \rangle$, que son los que dan lugar a los diagramas de la Figura 2.1, se cancelan.

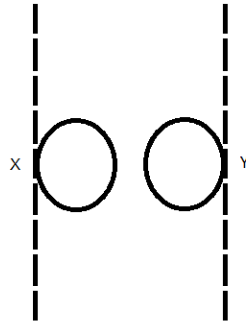


Figura 2.1: Diagrama de Feynman de los términos no conectados.

Entonces, luego de utilizar el teorema de Wick para sustituir el valor medio de $\phi^2(x)\phi^2(y)$ por el término que contribuye a la dependencia con a , obtenemos

$$E_I^{(2)} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_L g_R}{2\beta} \int d^D x d^D y f_L(x) \langle \phi(x) \phi(y) \rangle^2 f_R(y). \tag{2.15}$$

A continuación veremos la resolución con este método en dos casos particulares, un sistema de dos espejos paralelos y uno en el que los espejos presentan una corrugación.

2.4. Espejos semitransparentes planos

Consideremos dos espejos planos, paralelos e infinitos, ubicados a una distancia a entre ellos en un espacio con dimensión $d = 3$. Es decir, en este caso las funciones f están dadas por

$$f_L(x_3) = \delta(x_3) \tag{2.16}$$

$$f_R(x_3) = \delta(x_3 - a), \quad (2.17)$$

por lo que el potencial en este caso está dado por

$$V(x, \phi) = \frac{g_L}{2} \delta(x_3) \phi^2(x) + \frac{g_R}{2} \delta(x_3 - a) \phi^2(x). \quad (2.18)$$

Además vamos a usar la expresión del propagador del campo escalar en el espacio euclídeo dada por

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = G(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p(x-y)}}{p^2 + m^2}. \quad (2.19)$$

Reemplazando todo lo discutido previamente obtenemos

$$E_I^{(2)} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g_L g_R}{2\beta} \int d^3 \bar{x}_{\parallel} d^3 \bar{y}_{\parallel} \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{e^{i(\bar{p}_{\parallel} + \bar{k}_{\parallel})(\bar{x}_{\parallel} - \bar{y}_{\parallel})} e^{-i(p_3 + k_3)a}}{(p^2 + m^2)(k^2 + m^2)} \right\}, \quad (2.20)$$

y luego integramos en $d\bar{y}_{\parallel}$, de forma que obtenemos una delta en los momentos \bar{p}_{\parallel} y \bar{k}_{\parallel} . Esto permite hacer la integral en \bar{k}_{\parallel} , resultando

$$E_I^{(2)} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g_L g_R}{2\beta} \int d^3 \bar{x}_{\parallel} \frac{d^4 p dk_3}{(2\pi)^5} \frac{e^{-i(p_3 + k_3)a}}{(p^2 + m^2)(p_{\parallel}^2 + k_3^2 + m^2)} \right\}. \quad (2.21)$$

A continuación, si hacemos la integral en x_0 obtenemos un factor β multiplicativo, que se cancela por el factor que aparece dividiendo, haciendo que el límite para $\beta \rightarrow \infty$ sea trivial. Sin embargo, si queremos hacer lo mismo con la integral que depende de x_1 y x_2 obtenemos un factor divergente A , que es el área de los planos. Para evitar tener esta divergencia, supongamos que los planos tienen una superficie finita S y calculemos la energía por unidad de área. Tomando a la vez el límite cuando el área tiende a infinito, obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{E_I^{(2)}}{A} = - \frac{g_L g_R}{2} \int \frac{d^4 p dk_3}{(2\pi)^5} \frac{e^{-i(p_3 + k_3)a}}{(p^2 + m^2)(p_{\parallel}^2 + k_3^2 + m^2)}. \quad (2.22)$$

A continuación, usando el método de residuos, integramos sobre p_3 y k_3 y obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = - \frac{g_L g_R}{8} \int \frac{d^3 \bar{p}_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2a\sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}}}{p_{\parallel}^2 + m^2}. \quad (2.23)$$

Ahora hacemos un cambio de variables, definiendo $\bar{u} = \bar{p}_{\parallel} a$, por lo cual $d^3 \bar{u} = a^3 d^3 \bar{p}_{\parallel}$. De esta forma obtenemos una expresión que sólo depende del módulo cuadrado de u ,

por lo que podemos hacer la integral en ángulo sólido, obteniendo finalmente

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{16 \pi^2 a} \int_0^\infty du u^2 \frac{e^{-2\sqrt{u^2+(ma)^2}}}{u^2 + (ma)^2}. \quad (2.24)$$

Esta integral se puede resolver exactamente en el caso en que $m = 0$, resultando

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{32 \pi^2 a}. \quad (2.25)$$

A partir de la expresión dada por la ecuación (2.24) podemos calcular la fuerza por unidad de superficie

$$\mathcal{F}(a) = -\frac{\partial \mathcal{E}_I^{(2)}}{\partial a} = -\frac{g_L g_R}{8 a^2 \pi^2} \int_0^\infty du u^2 \frac{e^{-2\sqrt{u^2+(ma)^2}}}{\sqrt{u^2 + (ma)^2}}, \quad (2.26)$$

donde se observa del signo negativo que la fuerza entre las placas es atractiva. En el caso de masa nula, se obtiene

$$\mathcal{F}(a) = -\frac{g_L g_R}{32 \pi^2 a^2} \quad (2.27)$$

En el caso $d = 2$, se puede realizar el mismo procedimiento, de forma que se obtiene que la energía por unidad de longitud resulta

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{16 \pi} \int_0^\infty du u \frac{e^{-2\sqrt{u^2+(ma)^2}}}{u^2 + (ma)^2}. \quad (2.28)$$

Esta integral, en el caso en que $m = 0$, se reduce a

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{16 \pi} \int_0^\infty du \frac{e^{-2u}}{u}. \quad (2.29)$$

Esta integral tiene una divergencia infrarroja, pero se puede obtener la fuerza por unidad de área para $m = 0$, que es finita. Para obtener esta expresión, derivamos la ecuación (2.28), obteniendo

$$\mathcal{F}(a) = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = \frac{g_L g_R}{16 \pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_{(ma)^2}^\infty dx \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{x}, \quad (2.30)$$

donde se realizó el cambio de variables $x = u^2 + (ma)^2$. A partir de esta expresión, derivando y evaluando en $m = 0$ obtenemos

$$\mathcal{F}(a) = -\frac{g_L g_R}{16 \pi} e^{-2ma} \Big|_{m=0} = -\frac{g_L g_R}{16 \pi a}, \quad (2.31)$$

donde vemos nuevamente que la fuerza disminuye al aumentar la distancia entre los espejos. Podemos observar también que la fuerza de Casimir no es sensible a la existencia de una divergencia infrarroja en la energía.

2.4.1. Términos de orden superior

Para calcular el siguiente orden en el desarrollo de la energía del vacío, partimos de la siguiente expresión, que se obtiene de la ecuación (2.10)

$$E_I^{(3)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{3! \beta} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^3 \rangle = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{3! \beta} [\langle S_I^3 \rangle + 2\langle S_I \rangle^3 - 3\langle S_I^2 \rangle \langle S_I \rangle], \quad (2.32)$$

donde en la segunda igualdad desarrollamos el cubo.

Para hacer este cálculo separamos nuevamente la acción en $S_I = S_R + S_L$ y si llamamos $E^{(r,l)}$ al término de la energía proporcional a $g_R^r g_L^l$, obtenemos que los únicos términos que contribuyen a la parte dependiente de la distancia a son

$$E^{(2,1)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{3! \beta} [3\langle S_L S_R^2 \rangle + 3!\langle S_R \rangle^2 \langle S_L \rangle - 3\langle S_R^2 \rangle \langle S_L \rangle - 3!\langle S_R S_L \rangle \langle S_R \rangle], \quad (2.33)$$

y uno análogo $E^{(1,2)}$ que se obtiene intercambiando S_R y g_R por S_L y g_L .

Nuevamente, usando el Teorema de Wick y desarrollando los cuatro términos, obtenemos que una de las contribuciones a la energía está dada por

$$E^{(1,2)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_L^2 g_R}{2\beta} \int d\bar{x}_{\parallel} d\bar{y}_{\parallel} d\bar{z}_{\parallel} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \langle \phi(z) \phi(y) \rangle \langle \phi(x) \phi(z) \rangle, \quad (2.34)$$

donde $\phi(x) = \phi(\bar{x}_{\parallel}, a)$, $\phi(y) = \phi(\bar{y}_{\parallel}, 0)$ y $\phi(z) = \phi(\bar{z}_{\parallel}, 0)$. Y la otra contribución proviene de un término análogo, dado por

$$E^{(2,1)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_R^2 g_L}{2\beta} \int d\bar{x}_{\parallel} d\bar{y}_{\parallel} d\bar{z}_{\parallel} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \langle \phi(z) \phi(y) \rangle \langle \phi(x) \phi(z) \rangle, \quad (2.35)$$

donde $\phi(x) = \phi(\bar{x}_{\parallel}, 0)$, $\phi(y) = \phi(\bar{y}_{\parallel}, a)$ y $\phi(z) = \phi(\bar{z}_{\parallel}, a)$.

Una vez más reemplazamos $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$ por la expresión del propagador del campo escalar, obteniendo

$$E^{(2,1)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_R^2 g_L}{2\beta} \int d^3 \bar{x}_{\parallel} d^3 \bar{y}_{\parallel} d^3 \bar{z}_{\parallel} \int \frac{d^4 p d^4 k d^4 q}{(2\pi)^{12}} \frac{e^{i p(x-y)}}{p^2 + m^2} \frac{e^{i k(y-z)}}{k^2 + m^2} \frac{e^{i q(y-z)}}{q^2 + m^2}, \quad (2.36)$$

y un término equivalente para $E^{(1,2)}$. Vemos a partir de esta expresión que, integrando sobre \bar{z}_{\parallel} obtenemos un factor $(2\pi)^3 \delta(\bar{q}_{\parallel} - \bar{k}_{\parallel})$, que permite hacer la integral sobre q_{\parallel} , de forma que

$$E^{(2,1)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_R^2 g_L}{2\beta} \int \frac{d^4 k d^4 p}{(2\pi)^8} \int \frac{dq_3}{2\pi} \int \frac{d^3 \bar{x}_{\parallel} d^3 \bar{y}_{\parallel} e^{i(\bar{p}_{\parallel} - \bar{k}_{\parallel})(\bar{x}_{\parallel} - \bar{y}_{\parallel})}}{(p^2 + m^2)(k^2 + m^2)(k_{\parallel}^2 + q_3^2 + m^2)}. \quad (2.37)$$

Si ahora hacemos la integral sobre \bar{x}_{\parallel} obtenemos un factor $(2\pi)^3 \delta(\bar{p}_{\parallel} - \bar{k}_{\parallel})$, de forma que luego podemos integrar sobre \bar{p}_{\parallel} . De esta forma ya no hay dependencia con \bar{y}_{\parallel} , por lo que podemos hacer la integral directamente que resulta βS , suponiendo que los espejos tienen una superficie finita S . Finalmente, la energía por unidad de área queda

$$\mathcal{E}^{(2,1)} = \frac{g_R^2 g_L}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \int \frac{dq_3 dp_3}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(q_3 - p_3)a}}{(p_3^2 + k_{\parallel}^2 + m^2)(q_3^2 + k_{\parallel}^2 + m^2)}. \quad (2.38)$$

Usando el método de los residuos, integramos sobre q_3 y p_3 y llegamos a la expresión

$$\mathcal{E}^{(2,1)} = -\frac{g_R^2 g_L}{32\pi^2} \int d^3 \bar{k}_{\parallel} \frac{e^{-2a\sqrt{k_{\parallel}^2 + m^2}}}{k_{\parallel}^2 + m^2} \int \frac{dk_3}{k_3^2 + k_{\parallel}^2 + m^2}. \quad (2.39)$$

En esta ecuación vemos, por un lado, que la integral de \bar{k}_{\parallel} sólo depende del módulo cuadrado. Por lo tanto, podemos integrar en la variable angular. Además, si hacemos la integral sobre k_3 , obtenemos un factor

$$\int \frac{dk_3}{k_3^2 + k_{\parallel}^2 + m^2} = \frac{\pi}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + m^2}}.$$

De esta forma obtenemos

$$\mathcal{E}^{(2,1)} = -\frac{g_R^2 g_L}{4\pi} \int du u^2 \frac{e^{-2a\sqrt{u^2 + m^2}}}{(u^2 + m^2)^{3/2}}. \quad (2.40)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las dos contribuciones a la energía, queda

$$\mathcal{E}_I^{(3)} = -\frac{g_R g_L}{4\pi} (g_R + g_L) \int_0^{\infty} du u^2 \frac{e^{-2a\sqrt{u^2 + m^2}}}{[u^2 + m^2]^{3/2}}. \quad (2.41)$$

Para obtener la fuerza, derivamos la energía respecto de la distancia a :

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = \frac{g_L g_R}{2\pi} (g_R + g_L) \int_0^{\infty} du u^2 \frac{e^{-2a\sqrt{u^2 + m^2}}}{[u^2 + m^2]} \quad (2.42)$$

Esta integral converge y, en el caso de $m = 0$ se puede calcular, dando como resultado

$$\mathcal{F} = \frac{g_L g_R}{4\pi a} (g_R + g_L), \quad (2.43)$$

haciendo un análisis dimensional, vemos que la dependencia con a es la esperada. En dimensiones de masa $\mathcal{E}_I = 3$, entonces $[\mathcal{F}] = 4$ y además $[g_{L,R}] = 1$, por lo que $\mathcal{F} \propto a^{-1}$.

Por lo tanto, juntando los 2 órdenes más bajos, los términos dominantes de la fuerza están dados por

$$\mathcal{F}(a) = -\frac{g_L g_R}{32\pi^2 a^2} + \frac{g_L g_R}{4\pi a} (g_R + g_L). \quad (2.44)$$

2.5. Espejos semitransparentes corrugados

Ahora vamos a considerar un sistema con dos espejos semitransparentes corrugados con una amplitud finita. Por lo tanto, el resultado no es perturbativo en la amplitud de la ondulación, pero sí lo es en el acoplamiento entre los espejos.

En este caso partimos nuevamente de la ecuación (2.15) y definimos

$$\pi^{(2)}(x-y) = -\frac{g_L g_R}{2} \langle \phi(x)\phi(y) \rangle^2 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} \tilde{\pi}^{(2)}(k), \quad (2.45)$$

por lo que la transformada de Fourier queda

$$\tilde{\pi}^{(2)}(k) = -\frac{g_L g_R}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{G}(p) \tilde{G}(p-k), \quad (2.46)$$

donde \tilde{G} es el propagador de Feynman para el campo escalar en el espacio de impulsos. De esta forma, reemplazando en la ecuación (2.15), la expresión de la energía queda

$$E_I^{(2)} = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \int d^D k \tilde{f}_R^*(k) \tilde{\pi}^{(2)}(k) \tilde{f}_L(k), \quad (2.47)$$

donde $\tilde{f}_R^*(k)$ y $\tilde{f}_L(k)$ son las transformadas de Fourier en D dimensiones de las funciones que aparecen en el potencial.

Si ahora consideramos que las superficies L y R no dependen del tiempo, podemos integrar \tilde{f} en la variable temporal, obteniendo $\tilde{f}_R^*(k) = \delta(k_0) \tilde{f}_R^*(\bar{k})$ y $\tilde{f}_L(k) = \delta(k_0) \tilde{f}_L(\bar{k})$. De esta forma, se cancela la dependencia de la energía con β y queda

$$E_I^{(2)} = - \int d^d \bar{k} \tilde{f}_R^*(\bar{k}) \tilde{\pi}(0, \bar{k}) \tilde{f}_L(\bar{k}). \quad (2.48)$$

En particular si definimos las funciones de la forma

$$f_R(\bar{x}) = \delta(x_d - \epsilon_R \eta_R(x_{d-1})) \quad (2.49)$$

$$f_L(\bar{x}) = \delta(x_d - a - \epsilon_L \eta_L(x_{d-1})), \quad (2.50)$$

podemos obtener en este caso las transformadas de Fourier $\tilde{f}_R^*(\bar{k})$ y $\tilde{f}_L(\bar{k})$

$$\tilde{f}_R^*(\bar{k}) = \delta(k_{d-2}) \left[\delta(k_{d-1}) + \int \frac{dx_{d-1}}{2\pi} e^{ik_{d-1}x_{d-1}} (e^{ik_d(\epsilon_R \eta_R(x_{d-1}))} - 1) \right] \quad (2.51)$$

$$\tilde{f}_L(\bar{k}) = \delta(k_{d-2}) \left[\delta(k_{d-1}) + e^{-ik_d a} \int dx_{d-1} e^{-ik_{d-1}x_{d-1}} (e^{-ik_d \epsilon_L \eta_L(x_{d-1})} - 1) \right]. \quad (2.52)$$

Si además separamos en cada una de las funciones f el término de orden cero en la amplitud de la corrugación ϵ , que corresponde a la contribución de placas paralelas, podemos definir

$$\tilde{f}_{R,L}(\bar{k}) = \delta(k_{d-2}) \left[\tilde{f}_{R,L}^{(0)}(k_{d-1}, k_d) + \tilde{g}_{R,L}(k_{d-1}, k_d) \right] \quad (2.53)$$

Se puede ver en primer lugar que $\tilde{f}_L(k_{d-1}, k_d = 0) = \tilde{f}_R(k_{d-1}, k_d = 0) = 0$.

Ahora, volviendo a la expresión de la energía, reemplazando en la ecuación (2.48) en función de las nuevas funciones definidas e integrando la delta de k_{d-2} obtenemos que la energía por unidad de longitud resulta:

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = - \int dk_{d-1} dk_d [\tilde{f}_R^{*(0)} + \tilde{g}_R^*] \tilde{\pi}(k_{d-1}, k_d) [\tilde{f}_L^{(0)} + \tilde{g}_L]. \quad (2.54)$$

De esta forma podemos definir la contribución a la energía por unidad de longitud de orden cero en ϵ , que es el límite que debe coincidir con la energía de placas paralelas. Ésta se define de la siguiente forma

$$\frac{\check{E}_I^{(2)}}{L} = - \int dk_{d-1} dk_d \tilde{f}_R^{*(0)} \tilde{\pi}(k_{d-1}, k_d) \tilde{f}_L^{(0)} = -L \int dk_d \tilde{\pi}(0, k_d) e^{-ik_d a} \quad (2.55)$$

donde en la segunda igualdad se realizó la integral en k_{d-1} , de forma que se obtuvo un resultado proporcional a la longitud de la placa en esa dirección.

Lo primero que queremos ver es si este resultado reproduce el obtenido para la energía del sistema compuesto por dos placas paralelas. Para eso necesitamos obtener la función $\tilde{\pi}^{(2)}(k)$, es decir, queremos resolver explícitamente la integral de la ecuación (2.46) para $d = 3$. En este caso, al integrar el momento k se obtiene un término constante que es divergente. Sin embargo, como es constante, al reemplazar el término en la expresión de la energía (2.55) se obtiene una delta que no contribuye, debido a que

las placas no se tocan en ningún punto, como se observa en el diagrama de Feynman de la Figura 2.2.

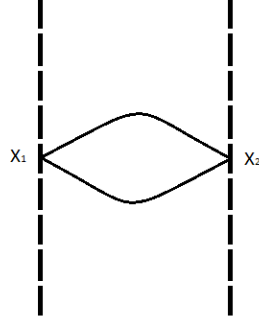


Figura 2.2: Diagrama de Feynman de la interacción entre el campo escalar y los dos planos

Por lo tanto, podemos quedarnos con el resultado finito [21], que es

$$\tilde{\pi}^{(2)}(k) = -\frac{g_L g_R}{32\pi^2} \log(k^2) = -\frac{g_L g_R}{16\pi^2} \log(|k|). \quad (2.56)$$

Ahora podemos reemplazar este resultado en la ecuación (2.55), obteniendo la energía por unidad de superficie:

$$\check{\mathcal{E}}_I^{(2)} = \frac{g_L g_R}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \log\left(\frac{p^2}{a^2}\right) e^{-ip} \quad (2.57)$$

Para hacer esta última integral, vamos a usar que la transformada de Fourier de $\log(|x|)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \log(|x|) e^{-i\omega x} = -\frac{1}{2} |\omega|^2, \quad (2.58)$$

donde usamos la definición de la transformada de Fourier para funciones generalizadas [22].

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación (2.57) obtenemos

$$\check{\mathcal{E}}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{32\pi^2 a} \quad (2.59)$$

que es el mismo resultado que obtuvimos para placas paralelas de masa nula, en la ecuación (2.25).

Luego hacemos el cálculo para $d = 2$, para lo cual usamos la expresión de la función $\tilde{\pi}^{(2)}(k)$, que al integrar para esta dimensión se obtiene un resultado finito [21], dado por

$$\tilde{\pi}^{(2)}(k) = \frac{g_L g_R}{16\pi\sqrt{k^2}} \quad (2.60)$$

y reemplazamos en la ecuación (2.55), obteniendo

$$\check{\mathcal{E}}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{16\pi} \int dk_d \frac{e^{-ik_d a}}{\sqrt{k^2}}, \quad (2.61)$$

que es la misma expresión que obtuvimos en la ecuación (2.29).

Ahora calculemos la energía por unidad de superficie en un caso particular, en el que sólo uno de los planos presenta una corrugación. Para ello, partimos de la ecuación (2.48), donde reemplazamos una de las funciones \tilde{f} por $\tilde{f}^{(0)}$, que es que toma cuando $\epsilon = 0$. En este caso, la única contribución está dada por el término

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = - \int dk_{d-1} \delta(k_d) e^{-ik_d a} \int dx_{d-1} (e^{-ik_d \epsilon \eta(x_{d-1})} - 1) \tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, 0, k_d). \quad (2.62)$$

Luego de reemplazar las funciones correspondientes e integrar la delta de k_{d-1} obtenemos

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = - \int dk_d e^{-ik_d a} \int dx_{d-1} (e^{-ik_d \epsilon_L \eta_L(x_{d-1})} - 1) \tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, 0, k_d). \quad (2.63)$$

Para poder integrar es necesario especificar la función que define la corrugación. En las secciones 2.3 y 2.5.2 estudiaremos distintas geometrías.

2.5.1. Corrugación sinusoidal

Consideramos la función corrugación que se observa en la Figura 2.3, dada por

$$\eta_{L,R} = \cos(x_{d-1}/\lambda_{L,R} + \delta_{L,R}), \quad (2.64)$$

donde λ_L y λ_R son las longitudes de onda de la ondulación de cada uno de los espejos y δ_L y δ_R son los desfases. En este caso, sólo definimos un λ y un δ no nulos.

Luego reemplazamos estas expresiones en la ecuación (2.63), obteniendo

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = - \int dk_d \tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, 0, k_d) e^{-ik_d a} \int dx_{d-1} e^{ik_d \epsilon (\cos(x_{d-1}/\lambda + \delta))}, \quad (2.65)$$

y usando el desarrollo de Jacobi-Anger dado por

$$e^{iu \cos(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(u) e^{inx}, \quad (2.66)$$

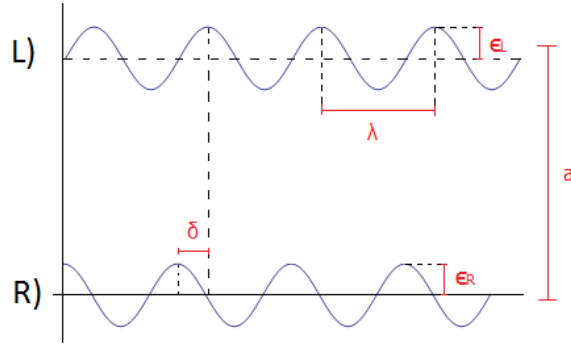


Figura 2.3: Esquema de los espejos corrugados por una función sinusoidal.

donde J_n son las funciones de Bessel de primera especie, obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = - \int dk_d \tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, 0, k_d) e^{-ik_d a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\epsilon k_d) e^{in\delta} \int dx_{d-1} e^{inx_{d-1}/\lambda}. \quad (2.67)$$

En esta ecuación hacemos la integral en x_{d-1} , obteniendo que el único término de la serie que contribuye es el que corresponde a $n = 0$. De esta forma, realizando el cambio de variables $p = ka$, obtenemos la energía por unidad de superficie a orden 2 en el acoplamiento entre espejos está dada por

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = \frac{E_I^{(2)}}{L^2} = -\frac{\lambda}{aL} \int dp \tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, 0, p/a) e^{-ip} J_0\left(\frac{\epsilon}{a}p\right), \quad (2.68)$$

donde se ve que cuando la amplitud de la corrugación es muy chica $\epsilon \ll a$, por lo que $J_0(\epsilon/a) \rightarrow 1$. Si además $\lambda \sim L$, obtenemos $\mathcal{E}_I^{(2)} = 0$, es decir, recuperamos la solución de placas paralelas.

Ahora obtenemos la ecuación (2.68) para dimensión $d = 3$, reemplazando el valor de $\tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, 0, p/a)$ dado por la ecuación (2.56), que resulta ser

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = \frac{g_L g_R}{32\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} dp 2 \log\left(\frac{|p|}{a}\right) e^{-ip} \frac{\lambda}{L} J_0\left(\frac{\epsilon}{a}p\right). \quad (2.69)$$

Por otro lado, para dimensión $d = 2$, reemplazando la expresión de $\tilde{\pi}^{(2)}$ dado por la ecuación (2.60) en la ecuación (2.68) obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{-ip}}{|p|} \frac{\lambda}{L} J_0\left(\frac{\epsilon}{a}p\right). \quad (2.70)$$

Por otro lado, se puede ver que sólo en el caso de un sistema con una placa con

corrugación y la otra plana, el cálculo que hicimos para la energía coincide con el resultado obtenido con el método PFA. Este método consiste en tomar la energía por unidad de superficie en el sistema de placas paralelas, suponer que la distancia a entre ellas depende de la corrugación del espejo e integrarla en una longitud finita.

Por lo tanto, para calcular la energía con el método PFA partimos de la expresión dada por la ecuación (2.25) e integramos

$$E = -\frac{g_L g_R}{32\pi^2} \int_{-L/2}^{L/2} d^2 \bar{x}_{\parallel} \frac{1}{a(x_{d-1})} = -\frac{g_L g_R \lambda}{32\pi^2 a} \int_{-L/2\lambda}^{L/2\lambda} d^2 \bar{x}_{\parallel} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{a} \cos(x_{d-1})} \quad (2.71)$$

Haciendo la integral obtenemos

$$\mathcal{E} = -\frac{g_L g_R \lambda}{8\pi^2 a L} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon/a)^2 - 1}} \tanh^{-1} \left[\frac{(\epsilon/a) - 1}{\sqrt{(\epsilon/a)^2 - 1}} \tan \left(\frac{L}{4\lambda} \right) \right], \quad (2.72)$$

de donde se obtiene que el límite para $\epsilon/a \rightarrow 0$, cuando $L \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ es la energía de placas paralelas, dada por la ecuación (2.25).

Finalmente, consideraremos el caso en que $\epsilon_L \neq 0$ y $\epsilon_R \neq 0$ y calculamos la energía del vacío en este caso. Para ello, reemplazando en la ecuación (2.54) obtenemos

$$E_I^{(2)} = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \int d^4 x f_L(x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\pi}(k) \int dy_2 dy_3 f_R(y) \int dy_0 dy_1 e^{i(x-y)k}, \quad (2.73)$$

podemos integrar en y_0 e y_1 , obteniendo $\delta(k_0)$ y $\delta(k_1)$, respectivamente. A continuación podemos hacer también la integral en k_0 y k_1 , de forma que desaparece toda la dependencia con x_0 y x_1 , por lo que al integrar resulta un factor $L\beta$ si suponemos que el espejo es finito, donde L es la longitud en la dirección en que no hay ondulación. De esta forma, obtenemos que la energía es

$$E_I^{(2)} = -L_1 \int dk_2 dk_3 \tilde{f}_L(k_2, k_3) \tilde{\pi}(0, 0, k_2, k_3) \tilde{f}_R(k_2, k_3), \quad (2.74)$$

Luego, integrando las dos expresiones en x_3 e y_3 respectivamente, obtenemos

$$\tilde{f}_L(k_2, k_3) = \int \frac{dx_2}{2\pi} e^{i x_2 k_2} e^{i k_3 \epsilon_L \cos(x_2/\lambda_L - \delta_L)} \quad (2.75)$$

$$\tilde{f}_R(k_2, k_3) = \int dy_2 e^{-i y_2 k_2} e^{-i k_3 (a + \epsilon_R \cos(y_2/\lambda_R - \delta_R))}. \quad (2.76)$$

A continuación, usando el desarrollo de Jacobi-Anger y reemplazando en las ecuaciones, obtenemos dos expresiones que al integrar sobre x_2 e y_2 , queda

$$\tilde{f}_L(k_2, k_3) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\epsilon_L k_3) e^{-im\delta_L} \delta(k_2 - m/\lambda_L) \quad (2.77)$$

y

$$\tilde{f}_R(k_2, k_3) = e^{ik_3 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\epsilon_R k_3) e^{-in\delta_R} \delta(k_2 + n/\lambda_R). \quad (2.78)$$

Luego reemplazamos estas expresiones en la ecuación (2.74) y observamos que la única forma en que las condiciones de las deltas que aparecen en \tilde{f}_L y \tilde{f}_R se cumplan simultáneamente es que valga la relación $-m/\lambda_L = n/\lambda_R$, es decir $m = n\frac{\lambda_L}{\lambda_R}$. Esto impone una condición muy fuerte entre la longitud de onda de la ondulación de cada plano, ya que una de las longitudes de onda tiene que ser múltiplo entero de la otra.

Entonces, en el caso en que una longitud de onda es proporcional a la otra, obtenemos el cuadrado de una delta por lo que podemos integrar en k_2 , usando que $[\delta(k_2 + n/\lambda_R)]^2 = L_2 \delta(k_2 + n/\lambda_R)$, donde L_2 es la longitud de la placa en la dirección de ondulación que suponemos finita. Si ahora tomamos la energía por unidad de área no hace falta que la superficie del plano $S = L_1 L_2$ sea finita y de esta forma obtenemos que

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n(1-\lambda_L/\lambda_R)} e^{in\left(\frac{\lambda_L}{\lambda_R}\delta_L - \delta_R\right)} \int dk J_n(\epsilon_R k) J_{-n\frac{\lambda_L}{\lambda_R}}(\epsilon_L k) e^{ika} \tilde{\pi}^{(2)}(k), \quad (2.79)$$

donde $\tilde{\pi}^{(2)}(k) = \tilde{\pi}^{(2)}(0, 0, -n/\lambda_R, k)$ está dada por la ecuación (2.56).

Ahora consideremos el caso en que la amplitud y la longitud de onda de las dos placas es la misma, es decir $\epsilon_R = \epsilon_L = \epsilon$ y $\lambda_R = \lambda_L$. Definiendo el desfase $\delta = \delta_R - \delta_L$ y haciendo el cambio de variables $p = ka$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_I^{(2)} = & \frac{g_L g_R}{8\pi^2 a} \int_0^{\infty} dp J_0^2\left(\frac{\epsilon}{a} p\right) \log(p) \cos(p) - \\ & - \frac{g_L g_R}{8\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\delta) \int_0^{\infty} dp J_n^2\left(\frac{\epsilon}{a} p\right) \log(p^2 + (na/\lambda)^2) \cos(p). \end{aligned} \quad (2.80)$$

El primer término de esta ecuación tiende a la energía de placas paralelas cuando $\epsilon/a \rightarrow 0$, mientras que el resto de los términos de la serie contribuyen a la energía para órdenes superiores y dependen de los parámetros de la corrugación, es decir su amplitud, longitud de onda y el desfase entre los espejos.

En el caso en que la corrugación de los dos espejos está en fase, podemos comparar

el resultado obtenido con el del método PFA. Como mencionamos previamente, este método presenta una corrección al sistema de placas paralelas, teniendo en cuenta solamente cómo varía la distancia entre los planos. Por lo tanto, en este caso con el método PFA obtenemos que la energía de los espejos corrugados en fase es igual a la de los planos paralelos. Sin embargo, vemos en la ecuación (2.80) que aún cuando el desfase es nulo aparecen correcciones a la energía de placas paralelas que dependen de la longitud de onda de la corrugación.

Finalmente, haciendo un cálculo análogo, obtenemos la energía por unidad de longitud para dimensión $d = 2$ en el caso en que la amplitud y la longitud de onda de las dos placas es la misma. Esta resulta ser

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{8} \left[\int_0^\infty dp \frac{J_0^2\left(\frac{\epsilon p}{a}\right) \cos(p)}{p} + 2 \sum_{n=1}^\infty \cos(n\delta) \int_0^\infty dp \frac{J_n^2\left(\frac{\epsilon p}{a}\right) \cos(p)}{\sqrt{p^2 + (na/\lambda)^2}} \right]. \quad (2.81)$$

A continuación discutiremos los resultados, mediante la integración numérica de las ecuaciones (2.80) y (2.81).

Estudio de los resultados mediante cálculo numérico

Al integrar numéricamente la ecuación (2.81), vemos que el primer término no converge. Esto se puede deber a que el integrando, cuyo gráfico se observa en la Figura 2.4, diverge en cero.

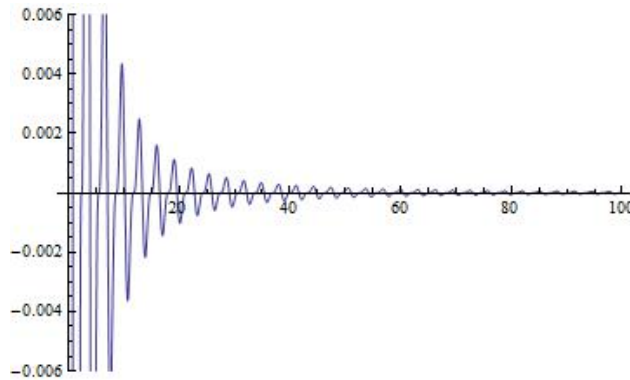


Figura 2.4: Gráfico del integrando del primer término de la ecuación (2.81) en función de la variable de integración p .

Sin embargo, si analizamos el caso en que $\epsilon \ll a$ vemos que el primer término tiende al caso de placas paralelas y podemos ver cómo varían los términos de la sumatoria en función de los parámetros de la corrugación.

Para ello definimos la función

$$f(A, B, \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\delta) \int_0^{\infty} dp J_n^2(Ap) \frac{\cos(p)}{\sqrt{p^2 + (nB)^2}}, \quad (2.82)$$

donde $A = \epsilon/a$ y $B = a/\lambda$. Vemos, por un lado, que los términos de la sumatoria se atenúan muy rápidamente, como se observa en la Figura 2.5.

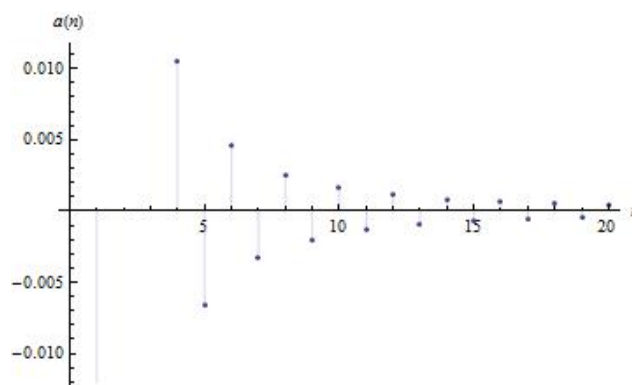


Figura 2.5: Coeficientes de los primeros términos de la serie de la ecuación (2.81).

Además, fijando el ancho y el desfase, obtenemos que la suma de los primeros 20 términos, en función de $B = a/\lambda$ está dada por el gráfico de la Figura 2.6, en el caso en que $a > \lambda$.

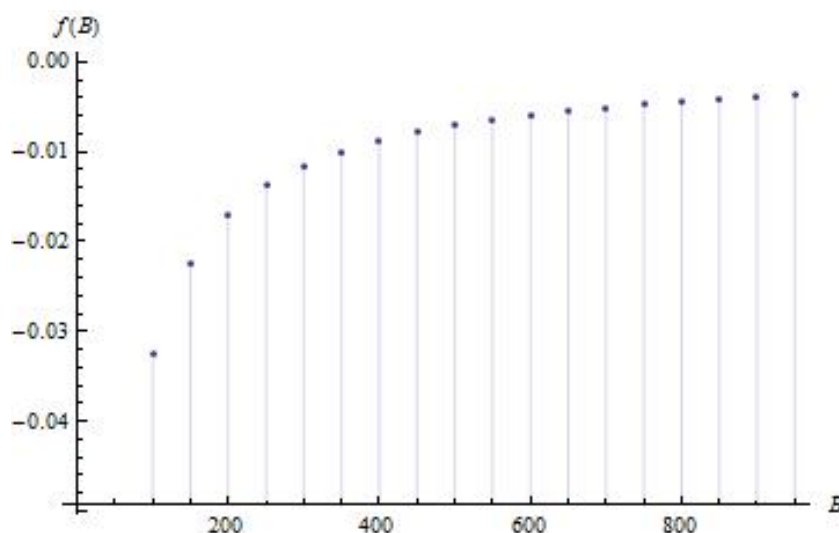


Figura 2.6: Suma de los primeros términos de la corrección a la energía en el caso de placas paralelas en función de B para $a > \lambda$.

Se puede ver que, cuando el ancho es mayor a la longitud de onda, disminuye el valor absoluto de la corrección a la energía de placas paralelas debido a la corrugación al aumentar la distancia entre los espejos.

Por otro lado, en la Figura 2.7 se observa la corrección a la energía en función de $B = a/\lambda$, en el caso en que $\lambda > a$.

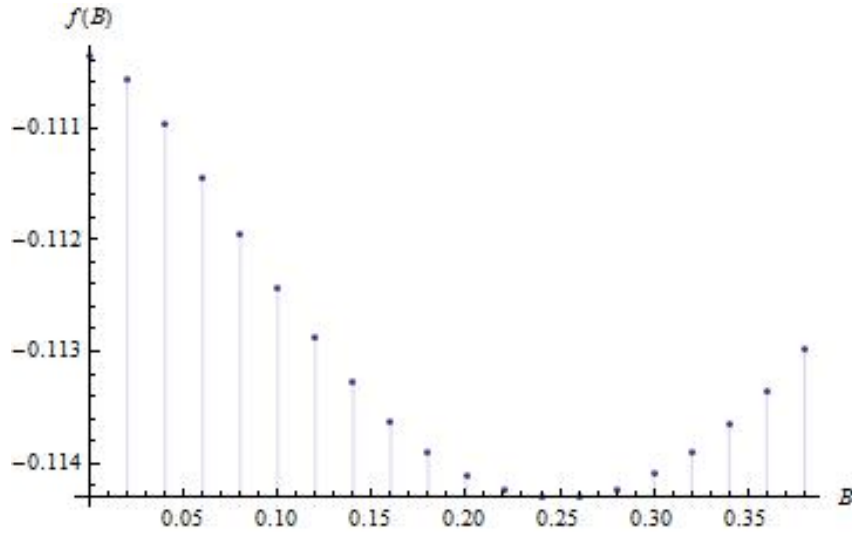


Figura 2.7: Suma de los primeros términos de la corrección a la energía en el caso de placas paralelas en función de B para $\lambda > a$.

Se observa que en el caso en que la longitud de onda es mayor a la distancia entre los espejos, cuanto más grande es la longitud de onda, menor es la corrección. Esto es esperable, ya que el límite de placas paralelas coincide con $\lambda \rightarrow \infty$. Se puede ver que la corrección mayor se produce en el caso en que la longitud de onda es del orden de la distancia entre espejos.

Fuerza lateral

A partir de dos superficies corrugadas, se puede ver que se genera una componente lateral en la fuerza de Casimir. El estudio de esta fuerza es de gran importancia para desarrollos tecnológicos a escalas pequeñas, como es el caso de sistemas microelectromecánicos.

Se observó experimentalmente que la fuerza medida mantiene la periodicidad de la corrugación de las superficies y depende de una potencia de la inversa de la distancia [13]. Además, el acoplamiento entre dos superficies corrugadas a través del vacío cuántico es proporcional al seno de la diferencia de fases entre las corrugaciones [23].

A partir de la energía del vacío obtenida en la sección anterior en la ecuación (2.80), calculamos la fuerza lateral debida a la corrugación, usando la siguiente expresión

$$\mathcal{F}_L = \frac{F_L}{L^2} = \frac{\partial \mathcal{E}_I^{(2)}}{\partial \delta}, \quad (2.83)$$

de forma que obtenemos

$$\mathcal{F}_L = \frac{g_L g_R}{8\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\delta) \int_0^{\infty} dp J_n^2\left(\frac{\epsilon}{a} p\right) \log\left[p^2 + \left(\frac{na}{\lambda}\right)^2\right] \quad (2.84)$$

Podemos ver inicialmente que la fuerza lateral se anula en el caso en que el desfase es nulo y es proporcional, como dijimos, al seno del desfase.

Para comparar este resultado con Cuando dos planos separados a una distancia media a , corrugados sinusoidalmente con longitud de onda λ , amplitudes ϵ_R y ϵ_L con un desfase δ entre la corrugación de cada superficie, estos experimentan una fuerza lateral dada por

$$F_L = -\tilde{F} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right] \quad (2.85)$$

donde

$$\tilde{F} = \frac{2\pi\epsilon_R\epsilon_L S}{\lambda a^5} J\left(\frac{a}{\lambda}\right) \quad (2.86)$$

donde S es la superficie de los planos y la función J representa el acoplamiento, tiende a una constante cuando $a \simeq \lambda$ y decae exponencialmente cuando el argumento tiende a infinito [23].

Vemos que al igual que en 2.84, la fuerza lateral disminuye con la distancia. Además vemos que la potencia con la que depende de a es distinta por cuestiones dimensionales, ya que este cálculo está hecho para el caso del campo electromagnético.

2.5.2. Otras funciones de corrugación

Con el objetivo de comparar los resultados obtenidos con otras funciones de corrugación para observar cómo depende la energía de la geometría de las superficies, estudiamos dos funciones de corrugación diferentes.

Para calcular la energía utilizamos la ecuación (2.48), donde cada función corrugación está definida como en las ecuaciones (2.49) y (2.50).

Todas las funciones que vamos a considerar son periódicas con longitud de onda $\lambda_{L,R}$, por lo que definimos

$$\omega_n^{L,R} = \frac{2\pi n}{\lambda_{L,R}}. \quad (2.87)$$

En el espacio de momentos las funciones están dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{f}_L(k) &= \delta(k_1) e^{-ik_3 a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(-k_3 \epsilon_L) \delta(k_2 - \omega_n^L) \\ \tilde{f}_R^*(k) &= \delta(k_1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_m^R \delta} C_m(k_3 \epsilon_R) \delta(k_2 + \omega_m^R)\end{aligned}\quad (2.88)$$

donde los coeficientes C_n saldrán de transformar Fourier la función corrugación.

Corrugación dientes de sierra

Consideramos espejos corrugados por la función que se observa en la Figura 2.8. En este caso, mediante Fourier, obtenemos que los coeficientes de las series que aparecen en las ecuaciones (2.88) están dados por

$$C_n(A) = -2i A e^{iA} \frac{[1 - (-1)^n e^{-2iA}]}{[(2A)^2 - (\pi n)^2]} \quad (2.89)$$

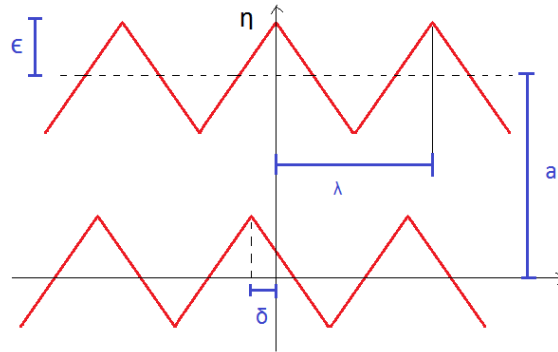


Figura 2.8: Esquema de los espejos corrugados por una función de diente de sierra.

Reemplazando en la energía, obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = - \sum_n e^{-in\delta\lambda_L} \int dk_3 e^{-ik_3 a} C_n(-k_3 \epsilon_L) C_m(k_3 \epsilon_R) \tilde{\pi}(k_3), \quad (2.90)$$

donde, al igual que en el caso de corrugación sinusoidal, para que haya una contribución no nula a la energía debida a la corrugación, las longitudes de onda deben estar relacionadas por

$$m = -\frac{\lambda_L}{\lambda_R} n \quad (2.91)$$

Haciendo la cuenta para $\epsilon = \epsilon_L = \epsilon_R$ y $\lambda_L = \lambda_R$ obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{4}{\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\delta\omega_n^L} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-ipa/\epsilon} \tilde{\pi} \left(0, \omega_n^L, \frac{p}{\epsilon} \right) p^2 \frac{2[1 - \cos(2p)]}{[(2p)^2 - (n\pi)^2]^2} \quad (2.92)$$

Corrugación función escalón

En el caso de la función corrugación que se observa en la Figura 2.9, tenemos que los coeficientes de las series de Fourier de (2.88) son

$$C_n(A) = \frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi} \sin(A), \quad (2.93)$$

donde vemos que sólo van a contribuir los términos de índice par.

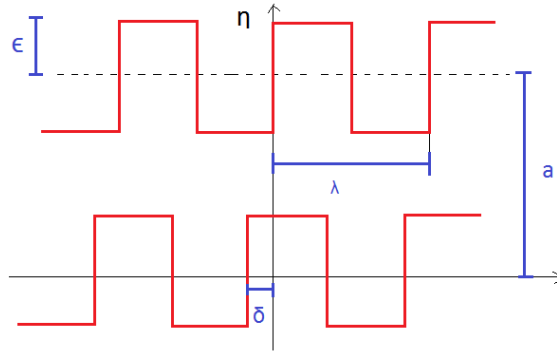


Figura 2.9: Esquema de los espejos corrugados por una función escalón.

Por lo tanto, reemplazando en la energía obtenemos que los índices m y n también tienen que cumplir la relación (2.91), por lo que en este caso la energía queda

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = - \sum_{n \text{ impar}} \frac{2}{n\pi} \frac{2}{Mn\pi} \int dk_3 \tilde{\pi}(k_3) \sin(k_3 \epsilon_R) \sin(k_3 \epsilon_L) e^{-ik_3 a}, \quad (2.94)$$

donde definimos $M = \lambda_R/\lambda_L$.

Además, cuando las amplitudes son las mismas $\epsilon = \epsilon_L = \epsilon_R$, el resultado se reduce a

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{4}{a} \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \sum_{n \text{ impar}} \frac{e^{i\delta\omega_n^L}}{(n\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-ip} \tilde{\pi} \left(0, \omega_n^L, \frac{p}{a} \right) \sin^2 \left(p \frac{\epsilon}{a} \right) \quad (2.95)$$

A continuación vamos a analizar en particular el caso $d = 2$,

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{g_L g_R}{4\pi} \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \int dp \sin^2 \left(\frac{\epsilon}{a} p \right) e^{-ip} \sum_{n \text{ impar}} \frac{e^{i\Omega_n^L \delta}}{(n\pi)^2 \sqrt{p^2 + (\Omega_n^L a)^2}} \quad (2.96)$$

para el cual se puede resolver analíticamente la serie dada por

$$S_1 = \sum_{n \text{ impar}} \frac{e^{i \delta \omega_n^L}}{(n\pi)^2 \sqrt{p^2 + (\omega_n^L a)^2}} \quad (2.97)$$

usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} \quad (2.98)$$

Reemplazando en la ecuación (2.97) y usando el método de fracciones simples, obtenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\pi (\Omega x a)^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i(2l+1)x}}{(2l+1)^2} - \frac{e^{i(2l+1)x}}{(2l+1)^2 + \Omega^2} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\pi (\Omega x a)^2} [S_3 - S_2] \end{aligned} \quad (2.99)$$

Para calcular cada una de estas sumas, vamos a usar la sumatoria de Poisson, es decir

$$S_2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2l+1)x}}{(2l+1)^2 + \Omega^2} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(l), \quad (2.100)$$

donde

$$\tilde{f}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2\pi i l y} \frac{e^{i(2y+1)x}}{(2y+1)^2 + \Omega^2} = \frac{(-1)^l \pi}{4|\Omega|} e^{-|\Omega||x-\pi l|}. \quad (2.101)$$

Reemplazando, llegamos a que

$$S_2 = \frac{\pi}{4|\Omega|} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l e^{-|\Omega||x-\pi l|} = \frac{\pi}{4|\Omega|} e^{|\Omega|x} \left[\frac{e^{|\Omega|(\pi-2x)} - 1}{e^{\pi|\Omega|} + 1} \right]. \quad (2.102)$$

Ahora solo falta resolver la otra serie

$$S_3 = -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{n^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{4\pi} - \frac{g(x)}{2} \right], \quad (2.103)$$

donde, llamando $G(x) = x^2$, tenemos

$$g(x) = \begin{cases} G(x + \pi) & -\pi < x < 0 \\ G(x - \pi) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

de forma que, reemplazando todas las expresiones en la energía, obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{2g_L g_R \lambda^2}{(4\pi)^3 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sin^2\left(\frac{\epsilon}{a}p\right) e^{-iap} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \frac{e^{|\Omega|}}{\Omega^3} \left[\frac{e^{|\Omega|(\pi-2x)} - 1}{e^{\pi|\Omega|} + 1} \right]. \quad (2.104)$$

2.6. Espejos semi-infinitos

Con el objetivo de generalizar los cálculos presentados en el caso en el que los espejos tienen un espesor que no es despreciable, consideramos el caso de espejos corrugados semi-infinitos, como los que se observan en la Figura 2.10.

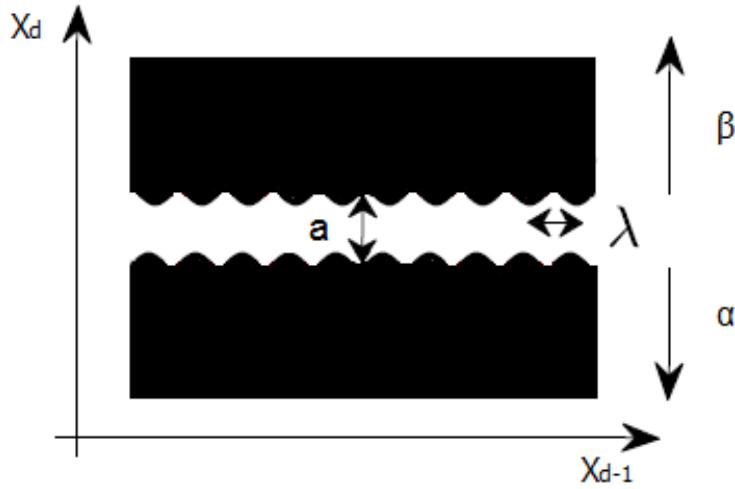


Figura 2.10: Esquema del sistema de dos espejos corrugados semi-infinitos.

En este sistema los potenciales van a estar dados por

$$f_L(\bar{x}) = \theta [\epsilon_L \eta_L(x^{d-1}) - x^d] \quad (2.105)$$

$$f_R(\bar{x}) = \theta [x^d - a - \epsilon_R \eta_R(x^{d-1})] \quad (2.106)$$

y los podemos escribir en términos de variables auxiliares de la siguiente forma

$$\theta [\epsilon_L \eta_L(x^{d-1}) - x^d] = \int_{-\infty}^{\epsilon_L \eta_L(x^{d-1})} d\alpha \delta(x^d - \alpha) \quad (2.107)$$

$$\theta [x^d - a - \epsilon_R \eta_R(x^{d-1})] = \int_{a + \epsilon_R \eta_R(x^{d-1})}^{\infty} d\beta \delta(x^d - \beta) \quad (2.108)$$

Por lo tanto, queremos obtener la acción efectiva, que está dada por

$$\Gamma_{LR}^{(2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}} \tilde{\pi}(p) \tilde{f}_L^*(p) \tilde{f}_R(p), \quad (2.109)$$

donde

$$\tilde{f}_{L,R}(p) = \int d^{d+1}x e^{-ipx} f_{L,R}(x) \quad (2.110)$$

Podemos ver que haciendo un procedimiento análogo al discutido para espejos de grosor nulo, en el caso en que la amplitud de ambas corrugaciones es ϵ , obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)}(a) = \int_{-\infty}^0 d\alpha \int_0^{+\infty} d\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\delta} \int_0^{\infty} dk J_n^2(\epsilon k) e^{ik(a-\beta+\alpha)} \tilde{\pi}^{(2)}(0, -n/\lambda_R, k), \quad (2.111)$$

que se puede obtener del cálculo para espejos de grosor nulo, integrando en dos variables auxiliares, asociadas al espesor. Por lo que podemos utilizar todos los cálculos realizados en este capítulo para generalizar al caso en el que los espejos tienen grosor no nulo.

Capítulo 3

Efecto Casimir dinámico para el campo escalar

“Savoir s’étonner à propos est le premier mouvement de l’esprit vers la découverte.”

— Louis Pasteur (1822-1895)

El efecto Casimir dinámico tiene lugar cuando uno o varios cuerpos acelerados neutros en el vacío dan lugar a la emisión de fotones reales, a la vez que experimentan una fuerza de reacción. Actualmente, se están estudiando modelos en los cuales condiciones no estacionarias del campo simulan la presencia de placas en movimiento [24].

A través de los años, el ECD ha recibido cada vez más atención y se ha vuelto un fenómeno relevante en estudios en electrodinámica cuántica, guías de ondas superconductoras con condiciones de contorno dependientes del tiempo, fricción cuántica, entre otros [11].

En este capítulo plantearemos los sistemas dinámicos que vamos a estudiar en la sección 3.1. A continuación, en la sección 3.2, veremos cómo obtener la acción efectiva para condiciones de contorno dependientes del tiempo. Finalmente en la sección 3.3 comentaremos las similitudes y diferencias que aparecen en el caso de movimiento uniforme, en el que se observa la fuerza de fricción de Casimir.

3.1. Planteo del problema

Las fluctuaciones del vacío proveen una fuente de disipación para sistemas en movimiento acoplados a campos cuánticos. En el caso de movimiento uniforme entre dos cuerpos, aparece una fuerza disipativa, dando lugar a un mecanismo de fricción sin que haya contacto. En este capítulo estudiaremos sistemas en los que el campo escalar interactúa con dos espejos planos paralelos en movimiento. Consideraremos el caso

en el que los espejos son infinitesimalmente delgados, separados por una distancia a . Estudiaremos sistemas en los que los espejos no son conductores perfectos. Esta característica es necesaria para que exista fricción de Casimir, debido a que ésta es generada por la excitación de los grados de libertad internos de los espejos.

Existen, además, otros efectos cuánticos de disipación en objetos en movimiento que se deben a la excitación de fotones reales a partir del vacío. Este fenómeno, conocido como efecto Casimir dinámico, requiere que el movimiento sea acelerado, lo cual no es necesario en el caso de fricción cuántica. En el formalismo funcional la probabilidad de creación de fotones reales se traduce en la contribución de una parte imaginaria en la acción efectiva. Estudiaremos en particular el caso en que los espejos se hallan en movimiento relativo paralelo a la superficie.

Luego, veremos el caso particular en el que el movimiento tiene velocidad constante, usando métodos funcionales para obtener la acción efectiva del sistema, cuya parte imaginaria refleja la existencia de la fuerza de fricción de Casimir.

3.2. Acción efectiva en el ECD

En el formalismo de integrales funcionales, el sistema está definido en términos de su acción S en tiempo real para un campo escalar ϕ en $D = d + 1$ dimensiones, que depende a su vez de la configuración de los espejos. Consideramos espejos paralelos e infinitos, por lo que alcanza con dar una función del tiempo para determinar la posición de cada espejo. Además, suponemos que la acción tiene la estructura $S = S_0 + S_I$, donde S_0 denota la acción del campo escalar real libre, es decir, la parte que no depende de los espejos. El término S_I denota la interacción entre el campo y los espejos.

Queremos calcular la acción efectiva Γ del sistema, dada por

$$\mathcal{Z} = e^{i\Gamma} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{Z} = \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle$ es la amplitud de persistencia del vacío.

Consideramos el caso en que no hay acoplamiento directo entre los espejos, es decir, solo existe el indirecto dado por la mediación del campo. Entonces la acción de interacción está dada por $S_I = S_L + S_R$, donde

$$S_{L,R} = \frac{1}{2} \int_{x,y} \phi(x) V_{L,R}(x,y) \phi(y) \quad (3.2)$$

obtenemos que la integral de camino de \mathcal{Z} es Gaussiana, por lo que usamos que

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \phi(x) A(x,y) \phi(y)}, \quad (3.3)$$

y obtenemos

$$\Gamma = \frac{i}{2} \text{Tr} [\log A] \quad (3.4)$$

donde

$$A(x, y) = A_0 + A_I = i(\square + m^2) \delta(x - y) + iV(x, y) \quad (3.5)$$

donde $A_0 = G^{-1}(x - y)$ y, expandiendo el logaritmo, obtenemos que a segundo orden la función Γ es

$$\Gamma^{(2)} = -\frac{i}{4} \text{Tr} [G(x, y) V(y, z) G(z, w) V(w, x)]. \quad (3.6)$$

Ahora definimos $V(x, y) = V_L(x, y) + V_R(x, y)$, de forma que obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= -\frac{i}{4} \text{Tr} [G V_L G V_L] - \frac{i}{4} \text{Tr} [G V_R G V_R] - \frac{i}{2} \text{Tr} [G V_R G V_L] \equiv \\ &\equiv \Gamma_{LR}^{(2)} + \Gamma_{LL}^{(2)} + \Gamma_{RR}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde las contribuciones $\Gamma_{RR}^{(2)}$ y $\Gamma_{LL}^{(2)}$ dan lugar a la autointeracción de cada uno de los espejos. Por lo tanto, el término que va a depender de la interacción entre los espejos, mediada por el campo, está dado por

$$\Gamma_{LR}^{(2)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} [G V_R G V_L]. \quad (3.8)$$

Entonces, en el caso de potenciales V_L y V_R generales, obtenemos que esta expresión en el espacio de coordenadas queda

$$\Gamma_{RL}^{(2)} = -\frac{i}{2} \int_{x,y,z,w} G(x-y) V_R(y,z) G(z-w) V_L(w,x) \quad (3.9)$$

y, transformando Fourier, en el espacio de momentos:

$$\Gamma_{RL}^{(2)} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) \tilde{G}(q) \tilde{V}_L(p, -q) \tilde{V}_R(-p, q), \quad (3.10)$$

donde

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.11)$$

En estas últimas expresiones se puede ver que, en el caso en que los potenciales son proporcionales a funciones δ , obtenemos nuevamente en el integrando la función $\tilde{\pi}$, calculada en el capítulo anterior. Un ejemplo de sistema dinámico en el que se obtiene una dependencia con esta función es el caso en el que el movimiento es transversal [21].

Para ver cómo quedaría la parte imaginaria de la acción efectiva en el caso general

que estamos estudiando, veamos algunas propiedades de los potenciales. Por un lado, sabemos que éstos son funciones reales, por lo que

$$\begin{aligned} V(x, y) &= V(y, x) \\ V(x, y) &= V^*(x, y), \end{aligned} \quad (3.12)$$

debido a esto, se puede ver que sus transformadas de Fourier cumplen

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p, q) &= \tilde{V}(q, p) \\ \tilde{V}(p, q) &= \tilde{V}^*(-p, -q). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por esta relación, vemos que la expresión que aparece en la ecuación (3.10) es igual a:

$$\tilde{V}_L(-p, q) \tilde{V}_R(p, -q) = [\tilde{V}_L(p, -q) \tilde{V}_R(-p, q)]^*. \quad (3.14)$$

Entonces, como se cumple que $\tilde{G}(p) = \tilde{G}(p^2) = \tilde{G}(-p)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) \tilde{G}(q) \tilde{V}_L(p, -q) \tilde{V}_R(-p, q) = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) \tilde{G}(q) [\tilde{V}_L(p, -q) \tilde{V}_R(-p, q) + \tilde{V}_L(-p, q) \tilde{V}_R(p, -q)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde

$$[\tilde{V}_L(p, -q) \tilde{V}_R(-p, q) + \tilde{V}_L(-p, q) \tilde{V}_R(p, -q)] \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, reemplazando este resultado en (3.10), obtenemos que la parte imaginaria de la función $\Gamma_{RL}^{(2)}$ va a estar dada por

$$\text{Im } \Gamma_{RL}^{(2)} = -\frac{1}{4} \int \text{Re}[\tilde{G}(p) \tilde{G}(q)] [\tilde{V}_L(p, -q) \tilde{V}_R(-p, q) + \tilde{V}_L(-p, q) \tilde{V}_R(p, -q)]. \quad (3.16)$$

Este es un resultado general, que no depende de los potenciales de acoplamiento entre los espejos y el campo. A partir de esta expresión, que luego particularizaremos para dos casos, se puede ver que si inicialmente el vacío es $|0_{in}\rangle$, el sistema evoluciona hacia un estado final excitado. De hecho, se puede obtener de la ecuación (1.10), la probabilidad de persistencia del vacío, que está dada por

$$|\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 = e^{-2\text{Im}\Gamma_I} \quad (3.17)$$

A partir de acá se ve que por conservación de energía, tiene que haber una fuerza disipativa que realice trabajo mecánico al mover el espejo [15].

En el caso particular que vamos a considerar, los sistemas están compuestos por espejos planos moviéndose en una de las direcciones \bar{x}_{\parallel} paralelas a las superficies. Supongamos, por ejemplo, que se mueven en dirección x^1 , por lo que el movimiento de cada espejo está dado por

$$x^1 = q_{L,R}(x^0). \quad (3.18)$$

En este caso, suponiendo que la posición de cada espejo está dada por una función que depende de la coordenada x^3 , los potenciales son de la forma

$$\begin{aligned} V_R(x, y) &= \chi(x^3) \delta(x^3 - y^3) \lambda_R(x'_{\parallel} - y'_{\parallel}) \\ V_L(x, y) &= \chi(x^3) \delta(x^3 - y^3) \lambda_L(x'_{\parallel} - y'_{\parallel}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\lambda_{L,R}$ son funciones que dependen de las propiedades de los espejos y del estado de movimiento. Además las coordenadas x'_{\parallel} e y'_{\parallel} son las que corresponden a sistemas de referencia comovientes a cada espejo, por lo que, para velocidades $|\dot{q}_{L,R}| \ll 1$ tenemos que, por las transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 - q_{L,R}(x^0) \\ x'^2 &= x^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En particular, si los espejos tienen espesor nulo y están separados una distancia a :

$$\begin{aligned} V_R(x, y) &= \delta(x^3) \delta(x^3 - y^3) \lambda_R(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \\ V_L(x, y) &= \delta(x^3 - a) \delta(x^3 - y^3) \lambda_L(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se puede ver que, al igual que vimos en el caso estático en la sección 2.6, el resultado para espejos semi-infinitos se puede obtener a partir del caso de espejos de grosor nulo, haciendo un procedimiento análogo al discutido previamente, es decir, integrando sobre variables auxiliares. Como estas variables son reales, se puede extraer la parte imaginaria de la acción efectiva a partir de la obtenida para espejos de grosor nulo.

Entonces, reemplazando en la ecuación (3.24) obtenemos

$$\Gamma_{RL} = \frac{i}{2} Tr \left[G(x-y) \delta(y^3) \delta(y^3 - z^3) \lambda_R(z_{\parallel} - y_{\parallel}) \times \right. \\ \left. \times G(z-w) \delta(w^3 - a) \delta(x^3 - w^3) \lambda_L(x_{\parallel} - w_{\parallel}) \right]_{x'_1, y'_1, z'_1, w'_1} \quad (3.22)$$

donde

$$x'_1 = x_1 - q_{L,R}(x_0) \quad (3.23)$$

Evaluando la traza en el espacio de coordenadas, obtenemos que la acción efectiva está dada por

$$\Gamma_{RL} = \frac{i}{2} \int_{x,y,z,w} G(x-y) \delta(y^3) \delta(y^3 - z^3) \lambda_R(z'_{\parallel} - y'_{\parallel}) \times \\ \times G(z-w) \delta(w^3 - a) \delta(x^3 - w^3) \lambda_L(x'_{\parallel} - w'_{\parallel}), \quad (3.24)$$

donde hay que considerar que las funciones $\lambda_{L,R}$ están evaluadas en el sistema en que el espejo está en reposo.

Antes de continuar esta cuenta, para abreviar la notación definimos:

$$\int_{\mathbb{p}} \equiv \int dp \equiv \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D},$$

de forma que, transformando Fourier la ecuación (3.24), obtenemos en el espacio de momentos:

$$\frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L^2} = -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{p}_{\parallel}} \int_{k_0 l_0 q_0} \tilde{g}(p_0, \bar{p}_{\parallel}, a) \tilde{g}(k_0, \bar{p}_{\parallel}, -a) \tilde{\lambda}_L(q_0, \bar{p}_{\parallel}) \tilde{\lambda}_R(l_0, \bar{p}_{\parallel}) \times \\ \tilde{f}_L(p_0 - q_0, p_1) \tilde{f}_L(q_0 - k_0, -p_1) \tilde{f}_R(k_0 - l_0, p_1) \tilde{f}_R(l_0 - p_0, -p_1) \quad (3.25)$$

donde

$$\tilde{f}_{L,R}(p^0, p^1) = \int dx_0 e^{ix_0 p^0} e^{iq_{L,R}(x_0) p^1} \quad (3.26)$$

y

$$\tilde{g}(p_0, \bar{p}_{\parallel}, a) = \int \frac{dp^3}{2\pi} \tilde{G}(p^0, \bar{p}_{\parallel}, p^3) e^{ip^3 a} = \tilde{g}(p_0, \bar{p}_{\parallel}, -a) \quad (3.27)$$

Consideramos ahora el caso particular en el que tenemos el caso de una placa estática

$$\frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L^2} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^d p_{\parallel}}{(2\pi)^d} \int \frac{dl_0}{2\pi} [\tilde{g}(p_{\parallel}, a)]^2 \tilde{\lambda}_L(p_0, \bar{p}_{\parallel}) \tilde{\lambda}_R(l_0, \bar{p}_{\parallel}) |\tilde{f}_R(p_0 - l_0, p_1)|^2 \quad (3.28)$$

Finalmente, falta introducir un modelo microscópico de la interacción entre el vacío y los campos de materia que dé lugar a las funciones $\lambda_{L,R}$. Los grados de libertad microscópicos de los espejos se comportan como osciladores armónicos en una dimensión, cada uno de los cuales ocupa un punto en el espejo [15]. Las transformadas de Fourier van a estar dadas por

$$\tilde{\lambda}_{L,R}(k^0) = \frac{g_{L,R}^2}{(k^0)^2 - \Omega_{L,R}^2 + i\varepsilon}. \quad (3.29)$$

Usando este modelo, podemos obtener la acción efectiva en el caso en que uno de los espejos está en reposo. Reemplazando en la ecuación (3.28) y haciendo el cambio de coordenadas $p^0 \rightarrow p^0 - l^0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L^2} &= -\frac{i}{2} \int_{p_{\parallel}} |\tilde{f}_R(p^0, p^1)|^2 \int_{l^0} \tilde{\lambda}_L(p^0 + l^0) \tilde{\lambda}_R(l^0) [\tilde{g}(p^0 + l^0, \bar{p}_{\parallel})]^2 \equiv \\ &\equiv -\frac{i}{2} \int_{p_{\parallel}} |\tilde{f}_R(p^0, p^1)|^2 H(p_{\parallel}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} H(p_{\parallel}) &= \int_{p^3 q^3} e^{ia(p^3+q^3)} \int_{l^0} \frac{g_L^2}{(l^0 + p^0)^2 - \Omega_L^2 + i\varepsilon} \frac{g_R^2}{(l^0)^2 - \Omega_R^2 + i\varepsilon} \times \\ &\times \frac{i}{(l^0 + p^0)^2 - \bar{k}_{\parallel}^2 - (p^3)^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(l^0 + p^0)^2 - \bar{k}_{\parallel}^2 - (q^3)^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Introduciendo parámetros de Feynman, podemos resolver las integrales, obteniendo

$$H(p_{\parallel}) = -3! g_R^2 g_L^2 \int_{p^3 q^3} e^{ia(p^3+q^3)} \int_0^1 \prod_{i=1}^3 d\alpha_i \int_{l^0} \frac{1}{[(l^0)^2 - M^2]^4}, \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} -M^2 &= (p^0)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) - \bar{k}_{\parallel}^2 (\alpha_1 + \alpha_2) - \\ &- (p^3)^2 \alpha_1 - (q^3)^2 \alpha_2 - \Omega_L^2 \alpha_3 - \Omega_R^2 \alpha_4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ahora usamos que

$$\int \frac{dl^0}{2\pi} \frac{1}{[(l^0)^2 + M^2]^4} = i \frac{\Gamma(4 - 1/2)}{3! (4\pi)^{1/2} (M^2)^{4-1/2}}. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, obtuvimos

$$\frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L^2} = -\frac{g_L^2 g_R^2 \Gamma(7/2)}{2(4\pi)^{1/2}} \int_{\not{p}_\parallel} |\tilde{f}_R(p^0, p^1)|^2 \int_{\not{p}^3 \not{q}^3} e^{ia(p^3+q^3)} \int \prod_{i=1}^3 d\alpha_i (M^2)^{-7/2}, \quad (3.35)$$

de donde se puede extraer la parte imaginaria para obtener la probabilidad de decaimiento del vacío.

A continuación veremos a qué se reduce este resultado en el caso en el que uno de los espejos se mueve con velocidad constante.

3.3. Fricción cuántica con velocidad uniforme

En el caso en que los espejos se hallan en movimiento uniforme, tenemos que, como solo el movimiento relativo entre los espejos afectará los resultados, podemos usar un sistema de referencia en el que el espejo L está en reposo, mientras R se mueve rígidamente con velocidad constante u en dirección x^1 .

Para continuar, vamos a usar la ecuación (3.28), obtenida en el caso en que un espejo está en reposo. Para ello le agregamos la condición de que el espejo R se mueva con velocidad constante v , obteniendo:

$$\frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L^2 T} = -\frac{i}{2} \int d^d p_\parallel \tilde{g}^2(p_\parallel) \tilde{\lambda}_L(p_0, \bar{p}_\parallel) \tilde{\lambda}_R(p_0 - u p_1, \bar{p}_\parallel) \quad (3.36)$$

Vemos que este resultado corresponde a evaluar la función $\lambda_R(x'_\parallel - y'_\parallel)$ en las coordenadas comovientes x'_\parallel e y'_\parallel , de forma que la función esté determinada por el modelo microscópico en reposo. Como necesitamos tener ambos potenciales V_L y V_R en el mismo sistema de referencia, obtenemos que la transformada de Fourier de la función λ_R estará desplazada en el sistema en que L está en reposo, dando lugar a:

$$\tilde{\lambda}_R = \tilde{\lambda}_R(k^0 - u k^1, k^1, k^2). \quad (3.37)$$

Capítulo 4

Efecto Casimir para el campo electromagnético

“In Physics, you have to have an understanding of the connection of words with the real world.”

— Richard Feynman (1918-1988)

Uno de los más conocidos ejemplos en los que se manifiesta el efecto Casimir se debe a las fluctuaciones de punto cero del campo electromagnético. En los últimos años se han obtenido numerosas predicciones acerca de fenómenos potencialmente observables en los que se presenta el efecto Casimir debido a las oscilaciones del estado fundamental del campo electromagnético, en diversos sistemas con distintas geometrías [25].

El estudio de este tipo de sistemas conlleva un formalismo distinto al del caso del campo escalar, debido a la naturaleza vectorial del campo. El objetivo de este capítulo es estudiar sistemas en los que interactúa el campo electromagnético análogos a los que resolvimos en los capítulos anteriores para el campo escalar. Para ello vamos a calcular la acción efectiva en el espacio euclídeo para un sistema en el que el campo interactúa con dos espejos imperfectos.

En la sección 4.1 daremos una introducción al problema que queremos resolver y en la sección 4.2 introduciremos el formalismo de métodos funcionales para el campo electromagnético. A continuación, calcularemos la energía del vacío en un sistema de espejos corrugados estáticos en la sección 4.3. Finalmente, en la sección 4.4 obtendremos la probabilidad de decaimiento del vacío, en el caso de un sistema de planos en movimiento.

4.1. Planteo del problema

En este capítulo consideramos un campo de *gauge* abeliano A_μ acoplado a dos espejos L y R con grosor nulo, separados a una distancia a . Utilizamos coordenadas en el espacio-tiempo euclídeo. Describimos el acoplamiento entre el campo y los espejos mediante términos localizados en las superficies ocupadas por estos últimos.

La acción S en este sistema va a tener la siguiente estructura

$$S = S_0(A) + S_L(A, y_L) + S_R(A, y_R) \quad (4.1)$$

donde S_0 es la acción del campo electromagnético libre,

$$S_0(A) = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

S_R y S_L son los términos que acoplan el campo con cada uno de los espejos, mientras que y_L e y_R corresponden a la parametrización de cada una de las superficies. Éstas pueden ser diferentes debido a que los espejos pueden tener distintas geometrías y no necesariamente tienen las mismas propiedades electromagnéticas.

Consideramos un término general S_Σ que corresponde al acoplamiento con una superficie arbitraria Σ . En este caso, el volumen de mundo definido por la superficie Σ , que es tridimensional, está parametrizado por

$$y^\mu(\sigma) = y^\mu(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2), \quad (4.3)$$

con $\mu = 0, 1, 2, 3$. Como convención vamos a utilizar las letras griegas desde el principio del alfabeto para denotar las componentes en este espacio, es decir, por ejemplo σ^α , con $\alpha = 0, 1, 2$.

Además, introducimos la métrica inducida $g_{\alpha\beta}$, que puede depender de la parametrización:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{\partial y_\mu(\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial y_\mu(\sigma)}{\partial \sigma^\beta}, \quad (4.4)$$

así como definimos una base local de vectores tangentes al volumen de mundo, tales que

$$e_\alpha^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \quad (4.5)$$

y están normalizados de forma tal que satisfacen

$$e_\alpha^\mu(\sigma) e_\beta^\mu(\sigma) = g_{\alpha\beta}(\sigma). \quad (4.6)$$

La forma general de la acción S_Σ , cuadrática en A_μ e invariante de calibre, es

$$S_{\Sigma}(A, y) = \frac{1}{4} \int d^3\sigma \sqrt{g(\sigma)} d^3\sigma' \sqrt{g(\sigma')} \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\sigma) \mathcal{F}_{\alpha'\beta'}(\sigma') \pi^{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\sigma, \sigma') \quad (4.7)$$

donde $\pi^{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\sigma, \sigma')$ es el tensor de polarización que depende de los grados de libertad microscópicos del espejo y

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} \mathcal{A}_{\beta} - \nabla_{\beta} \mathcal{A}_{\alpha} = \partial_{\alpha} \mathcal{A}_{\beta} - \partial_{\beta} \mathcal{A}_{\alpha} \quad (4.8)$$

donde ∇_{α} denota el operador de derivada covariante y \mathcal{A}_{α} representa las componentes del campo de gauge A_{μ} en el volumen de mundo, proyectado sobre las direcciones definidas por la base local, es decir:

$$\mathcal{A}_{\alpha}(\sigma) = A_{\mu}[y(\sigma)] e_{\alpha}^{\mu}(\sigma). \quad (4.9)$$

Suponemos que la interacción es local y que la intensidad del acoplamiento está determinada por una única constante $g_{L,R}$ para cada espejo. Por lo tanto obtenemos que la acción sobre la superficie estará dada por

$$S_{\Sigma} = \frac{g}{4} \int d^3\sigma \sqrt{g(\sigma)} \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\sigma) \mathcal{F}^{\alpha\beta}(\sigma). \quad (4.10)$$

De ahora en adelante llamamos x_{\parallel} a las coordenadas definidas por los parámetros σ^{α} , es decir, $x_{\parallel} = (x_0, x_1, x_2)$.

En el caso más general que consideraremos, tanto la forma como la posición de cada espejo están determinadas por una función escalar ψ , tal que $x_3 = \psi(x_{\parallel})$. A partir de ésta, se puede obtener la acción efectiva, como veremos a continuación.

4.2. Cálculo de la acción efectiva

Consideramos el caso en que la posición de las superficies L y R (de grosor nulo) se encuentran en movimiento transversal y tienen una dada corrugación, es decir $x_3 = \psi_{L,R}(x_{\parallel})$, por lo que las superficies van a estar definidas por

$$y_{L,R}(x_{\parallel}) = [x_{\parallel}, \psi_{L,R}(x_{\parallel})]. \quad (4.11)$$

Para obtener la acción efectiva del sistema, usamos que en el caso euclídeo, análogamente a la definición con tiempo real, ésta está dada por

$$e^{-\Gamma} = \frac{\mathcal{Z}(\psi)}{\mathcal{Z}(0)}, \quad (4.12)$$

donde

$$\mathcal{Z}(\psi) = \int \mathcal{D}A e^{-S(A,\psi)} \quad (4.13)$$

Entonces, desarrollando a segundo orden en la interacción entre los espejos y el campo obtenemos

$$\Gamma_{LR}^{(2)} = -\langle S_L S_R \rangle, \quad (4.14)$$

En este caso, la acción sobre las superficies L y R está dada por la ecuación (4.10), por lo que tenemos que calcular

$$\langle S_L S_R \rangle = \frac{g_L g_R}{16} \int_{x,y} \delta_L(x) \delta_R(y) \sqrt{g_L(x_{\parallel})} \sqrt{g_R(y_{\parallel})} \langle \mathcal{F}_{\alpha\beta}(x_{\parallel}) \mathcal{F}^{\alpha\beta}(x_{\parallel}) \mathcal{F}_{\gamma\delta}(y_{\parallel}) \mathcal{F}^{\gamma\delta}(y_{\parallel}) \rangle \quad (4.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_L(x) &= \delta[x_3 - \psi_L(x_{\parallel})] \\ \delta_R(y) &= \delta[y_3 - \psi_R(x_{\parallel}) - a]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A continuación, usando que

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = F_{\mu\nu} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \quad (4.17)$$

obtenemos

$$\langle \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\gamma\delta} \mathcal{F}^{\gamma\delta} \rangle = \langle F_{\mu\nu}(x) F_{\mu'\nu'}(x) F_{\rho\sigma}(y) F_{\rho'\sigma'}(y) \rangle K^{\mu\nu\mu'\nu'}[\psi_L(x)] K^{\rho\sigma\rho'\sigma'}[\psi_R(y)], \quad (4.18)$$

donde definimos las funciones K, que dependen de los vectores tangentes y calcularemos posteriormente para distintos casos.

Luego, reemplazando esta última expresión en la ecuación (4.15) y mediante el teorema de Wick obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle S_L S_R \rangle &= \frac{g_L g_R}{16} \int_{x,y} \delta_L(x) \delta_R(y) \sqrt{g_L(x_{\parallel})} \sqrt{g_R(y_{\parallel})} [\langle F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(y) \rangle \langle F_{\mu'\nu'}(x) F_{\rho'\sigma'}(y) \rangle + \\ &\quad + \langle F_{\mu\nu}(x) F_{\rho'\sigma'}(y) \rangle \langle F_{\mu'\nu'}(x) F_{\rho\sigma}(y) \rangle] K^{\mu\nu\mu'\nu'}(\psi_L) K^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(\psi_R). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por lo tanto tenemos que resolver los valores medios de las funciones F que en el

gauge de Feynman van a resultar

$$\langle F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(y) \rangle = (\delta_{\nu\sigma}\partial_\mu^x\partial_\rho^y + \delta_{\mu\rho}\partial_\nu^x\partial_\sigma^y - \delta_{\nu\rho}\partial_\mu^x\partial_\sigma^y - \delta_{\mu\sigma}\partial_\nu^x\partial_\rho^y) G(x-y). \quad (4.20)$$

Usando este resultado, tenemos que:

$$\langle F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(y) \rangle \langle F_{\mu'\nu'}(x)F_{\rho'\sigma'}(y) \rangle = \delta_{\nu\sigma}\partial_\mu^x\partial_\rho^y G(x-y) \delta_{\nu'\sigma'}\partial_{\mu'}^x\partial_{\rho'}^y G(x-y), \quad (4.21)$$

más todas las combinaciones de índices. Por lo tanto, a partir de esto, podemos definir una función

$$\pi_{\mu\rho\mu'\rho'}(x-y) = \partial_\mu^x\partial_\rho^y G(x-y) \partial_{\mu'}^x\partial_{\rho'}^y G(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} \tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(k) \quad (4.22)$$

donde la transformada de Fourier está dada por

$$\tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(k) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\rho (k-p)_{\mu'} (k-p)_{\rho'}}{p^2 (k-p)^2} \quad (4.23)$$

que va a depender de la dimensión d del sistema y vamos a calcular más adelante.

Se puede ver que la función $\tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(0, k_1, 0, k_3)$ en el caso $d = 4$ está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'} = & A k^4 (\delta_{\mu\rho} \delta_{\mu'\rho'} + \delta_{\mu\rho'} \delta_{\mu'\rho} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\rho\rho'}) - D k_\mu k_\rho k_{\mu'} k_{\rho'} + \\ & + k^2 [B (\delta_{\mu\rho'} k_{\mu'} k_\rho + \delta_{\rho\rho'} k_\mu k_{\mu'} + \delta_{\mu\mu'} k_\rho k_{\rho'} + \delta_{\mu'\rho} k_\mu k_{\rho'}) - \\ & - C (\delta_{\mu\rho} k_{\mu'} k_{\rho'} + \delta_{\mu'\rho'} k_\mu k_\rho)] \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde los coeficientes A , B , C y D son escalares y están calculados en el apéndice A.

Para continuar el cálculo, es necesario obtener las funciones K para cada sistema en particular. En las siguientes secciones, veremos primero el caso de espejos estáticos, con una dada corrugación, por lo que podremos obtener la energía del vacío del sistema. Luego veremos cómo varían los resultados al considerar espejos móviles, sin corrugación.

4.3. Espejos corrugados estáticos

Consideramos el caso en que las superficies L y R son estáticas $\mathbf{y}(\sigma_1, \sigma_2)$ y llamamos x_{\parallel} a las coordenadas definidas por los parámetros σ^α . En este caso, entonces, vamos a tener $x_3 = \psi_{L,R}(x_1)$, es decir

$$y_{L,R}(x_{\parallel}) = [x_{\parallel}, \psi_{L,R}(\mathbf{x}_{\parallel})]. \quad (4.25)$$

Para este sistema obtenemos que la métrica está dada por

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (\partial_1\psi)^2 & \partial_1\psi\partial_2\psi \\ 0 & \partial_1\psi\partial_2\psi & 1 + (\partial_2\psi)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

por lo que obtenemos

$$\sqrt{g(\sigma)} = \sqrt{1 + (\nabla\psi)^2} \quad (4.27)$$

y además

$$e_{\alpha}^{\mu}(x_{\parallel}) = \delta_{\alpha}^{\mu} + \delta_3^{\mu} \partial_{\alpha}\psi(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad (4.28)$$

Para obtener la energía del vacío a segundo orden, usamos la ecuación (4.14), donde la acción sobre las superficies L y R está dada por la ecuación (4.10). Por lo tanto, vemos que tenemos que calcular la expresión dada por la ecuación (4.15).

Utilizando cuánto valen los vectores tangentes definimos las funciones K , que están dadas por

$$K_{\mu\nu\mu'\nu'}(\psi_{\Sigma}) = \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\mu'}^{\alpha} \delta_{\nu'}^{\beta} + 2\psi'_{\Sigma} \delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu'}^1 \delta_{\nu'}^{\alpha} + 2(\psi'_{\Sigma})^2 [\delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^3 \delta_{\mu'}^3 \delta_{\nu'}^{\alpha} + \delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^1 \delta_{\mu'}^1 \delta_{\nu'}^3], \quad (4.29)$$

en el caso particular en el que $\psi = \psi(x_1)$.

A partir de estos resultados, usando la ecuación (4.19), la energía por unidad de longitud, al orden más bajo en el acoplamiento, queda

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_I^{(2)} = & -\frac{g_L g_R}{16} \int_{k_1, k_3} \frac{e^{-iak_3}}{(2\pi)^2} \int_{x_1, y_1} \sqrt{g(\psi_R)} \sqrt{g(\psi_L)} e^{i(k_1 x_1 + k_3 \psi_L) - i(k_1 y_1 + k_3 \psi_R)} \times \\ & \times \tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(k) K^{\mu\nu\mu'\nu'}(\psi_L) K^{\rho\nu\rho'\nu'}(\psi_R) \end{aligned} \quad (4.30)$$

más todas las otras combinaciones de índices, donde

$$\sqrt{g(\psi_L)} = \sqrt{1 + [\psi'_L(x_1)]^2} \quad (4.31)$$

$$\sqrt{g(\psi_R)} = \sqrt{1 + [\psi'_R(y_1)]^2} \quad (4.32)$$

Lo primero que vamos a hacer es ver el límite en el que las placas son paralelas y

estáticas. En este caso, se obtiene que la energía del vacío está dada por

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = \frac{\langle S_L S_R \rangle}{L^2 \beta} = \frac{3 g_L g_R}{64 (4\pi)^2} \int dk e^{-ika} k^4 \log(k^2), \quad (4.33)$$

donde usamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk k^4 e^{-ika} = 0. \quad (4.34)$$

A partir del resultado para la transformada de Fourier [22]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ika} k^4 \log |k| dk = -4! \frac{2\pi}{a^5}, \quad (4.35)$$

obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = -\frac{9 g_L g_R}{64 \pi a^5} \quad (4.36)$$

Vemos que este resultado es similar al obtenido en el caso de espejos planos acoplados al campo escalar, en la ecuación (2.25), pero tiene una dependencia distinta con a . Haciendo un análisis dimensional de este resultado, podemos ver que era de esperarse que la energía \mathcal{E}_I fuera proporcional a la inversa de la quinta potencia de la distancia, ya que la dimensión de masas de la energía es $[\mathcal{E}_I] = 3$ y se puede ver que $[g_{L,R}] = -1$, entonces, como $[a] = -1$, de la dependencia en a^n resulta que $[n] = -5$.

A partir de este resultado, se podría obtener mediante el método PFA, la energía en el caso en que un espejo tiene una corrugación $x_3 = \psi(x^1)$, de amplitud pequeña, mediante la integral

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = -\frac{9 g_L g_R}{64 \pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx^1}{[\psi(x^1)]^5} \quad (4.37)$$

donde L^2 es la superficie del espejo plano.

Para continuar con el estudio de sistemas en los que la corrugación no es necesariamente pequeña, consideramos el caso particular en que el acoplamiento sólo está dado por el campo eléctrico. En este caso, la acción deja de ser covariante y está dada por:

$$S_{L,R} = \epsilon_{L,R} \int d^3 x_{\parallel} E_{\parallel}^2 = \epsilon_{L,R} \int d^3 x_{\parallel} (E_1^2 + E_2^2), \quad (4.38)$$

donde las componentes del $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ que aparecen en la acción son

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{01} &= F_{01} + F_{03} \psi'(x^1) \\ \mathcal{F}_{02} &= F_{02}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

por lo que el término que va a contribuir a la energía del vacío va a estar dado por

$$\begin{aligned} \langle S_R S_L \rangle = \epsilon_L \epsilon_R \int_{x,y} \sqrt{g_L(x^1)} \delta(x^3 - \psi_L(x^1)) \delta(y^3 - a) \langle [F_{01}^2 + F_{02}^2 + \\ + (\psi'_L)^2 F_{02}^2 + 2\psi'_L F_{01} F_{03}] [F_{01}^2 + F_{02}^2 + (\psi'_R)^2 F_{02}^2 + 2\psi'_R F_{01} F_{03}] \rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Entonces en el espacio de Fourier obtenemos

$$\frac{\langle S_R S_L \rangle}{LT} = \frac{2\epsilon_R \epsilon_L}{(2\pi)^2} \int_{k^1 k^3} \tilde{\pi}(0, k^1, 0, k^3) e^{-ik^3 a} f_L(k^1, k^3) f_R(k^1, k^3) \quad (4.41)$$

donde

$$f_{L,R} = \int_{x_1} \sqrt{1 + \psi'_{L,R}} e^{\pm i[k^1 x^1 + k^3 \psi_{L,R}(x^1)]}. \quad (4.42)$$

En esta expresión general, podemos ver que la energía del vacío depende, a través de las funciones $f_{L,R}$, de la función que define la corrugación. Además podemos ver que, como la métrica acopla las componentes 1 y 3 del campo eléctrico, la función π también va a depender de derivadas de la función de corrugación.

Hasta acá, analizamos el caso general en que ambas superficies están corrugadas. En el caso particular $\psi_R = 0$ tenemos:

$$\frac{\langle S_R S_L \rangle}{LT} = \frac{2\epsilon_R \epsilon_L}{(2\pi)^2} \int dk^1 dk^3 \tilde{\pi}(0, 0, 0, k^3) e^{-ik^3 a} f_L(k^1, k^3) \quad (4.43)$$

donde

$$\tilde{\pi}(0, 0, 0, k^3) = 4(k^3)^4 [(9 + (\psi')^2) A(k^3) + (\psi')^2 B(k^3)], \quad (4.44)$$

donde $A \equiv A_1 + A_2 \log(k^2)$ y $B \equiv B_1 + B_2 \log(k^2)$ son los coeficientes de la función $\tilde{\pi}$ calculados en el apéndice B. De esta forma, tomando $p = ak^3$, la energía por unidad de longitud queda:

$$\begin{aligned} \frac{E_I^{(2)}}{L} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle S_R S_L \rangle}{LT} = \frac{4\epsilon_R \epsilon_L}{\pi^2 a^5} \int_{x_1} \sqrt{1 + (\psi')^2} \int_p e^{-ip(1-\psi/a)} |p|^4 \times \\ \times \{ [9 + (\psi')^2] [A_1 + A_2 \log(p^2)] + (\psi')^2 [B_1 + B_2 \log(p^2)] \} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Vemos, por un lado, que la dependencia con la distancia entre los espejos tiene la dimensión esperada, como discutimos en el caso de placas planas, ya que la variable p está definida para que sea adimensional.

Además, usando la ecuación (4.35), podemos resolver la integral en p ,

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = \frac{8 \epsilon_R \epsilon_L}{\pi^2 a^5} \int_{x^1} \sqrt{1 + (\psi')^2} [9 A_2 + (\psi')^2 (A_2 + B_2)] \int_p e^{-ip(1-\psi/a)} |p|^4 \log |p|, \quad (4.46)$$

donde $A_2 = [160 (4\pi)^2]^{-1}$ y $B_2 = [15 (4\pi)^2]^{-1}$ (ver apéndice B), obteniendo

$$\frac{E_I^{(2)}}{L} = -\frac{\epsilon_R \epsilon_L}{4 \pi^3 a^5} \int_{x^1} \frac{\sqrt{1 + (\psi')^2}}{(1 - \psi/a)^5} \left[\frac{27}{5} + 7 (\psi')^2 \right]. \quad (4.47)$$

Este resultado refleja la dependencia de la energía del vacío, como era de esperarse, con la distancia entre las placas y con la función que define la corrugación. A partir de esta ecuación se puede obtener, para el caso de alguna geometría particular dada por ψ , la expresión explícita para la energía, a partir de la cual se puede obtener la fuerza de Casimir, como hicimos en el capítulo 2 en el caso del campo escalar. En el caso en que ambos espejos están corrugados, aparecerá también una fuerza lateral.

En la próxima sección vamos a ver que en el caso de espejos planos en movimiento, vamos a obtener una contribución análoga, pero con un término menos, ya que en este caso había un efecto que provenía de la curvatura de las superficies.

4.4. Espejos planos en movimiento

Consideramos el caso en que la posición de las superficies L y R (de grosor nulo) son planas, pero se encuentran en movimiento transversal, es decir $x_3 = \psi_{L,R}(x_0)$, por lo que las superficies van a estar definidas por

$$y_{L,R}(x_{\parallel}) = [x_{\parallel}, \psi_{L,R}(\mathbf{x}_0)]. \quad (4.48)$$

Para este sistema obtenemos que la métrica está dada por

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \partial_0 \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \partial_0 \psi & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

por lo que obtenemos

$$\sqrt{g_{L,R}(x_0)} = \sqrt{1 + \dot{\psi}_{L,R}^2(x_0)} \quad (4.50)$$

y además

$$e_{\alpha}^{\mu}(x_0) = \delta_{\alpha}^{\mu} + \delta_3^{\mu} \partial_0 \psi(\mathbf{x}_0) \delta_{\alpha}^0 \quad (4.51)$$

Utilizando cuánto valen los vectores tangentes definimos las funciones K , que están dadas por

$$K_{\mu\nu\mu'\nu'}(\psi_\Sigma) = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \delta_{\mu'}^\alpha \delta_{\nu'}^\beta + 2\psi'_\Sigma \delta_\mu^3 \delta_\nu^\alpha \delta_{\mu'}^0 \delta_{\nu'}^\alpha + 2(\psi'_\Sigma)^2 [\delta_\mu^3 \delta_\nu^\alpha \delta_{\mu'}^3 \delta_{\nu'}^\alpha + \delta_\mu^3 \delta_\nu^0 \delta_{\mu'}^0 \delta_{\nu'}^3]. \quad (4.52)$$

Vemos primero que en el caso particular en que ambas placas se mueven con la misma velocidad constante v , obtenemos

$$\mathcal{E}_I^{(2)} = \frac{3g_L g_R}{32(4\pi)^2} (1+v^2) \int dk e^{ika} k^4 \log|k|, \quad (4.53)$$

donde recuperamos el resultado de la ecuación (4.36) para placas estáticas, con un factor $(1+v^2)$, asociado al movimiento relativista de los espejos.

Además, podemos ver a partir de esta cuenta que si los espejos se mueven ambos con velocidades constantes, pero distintas, la contribución a la acción efectiva es nula. Esto se debe a que el acoplamiento que tomamos entre los espejos y el campo es una función constante, por lo que no consideramos los grados de libertad internos del espejo. Por ese motivo no obtenemos la contribución a la fricción cuántica debida a un movimiento relativo uniforme.

A continuación vamos a calcular la acción efectiva en el caso particular en que la acción, no covariante, está dada por un término como el de la ecuación (4.38). En este caso, queda

$$S_{L,R} = \epsilon_{L,R} \int d^3x_{\parallel} (\mathcal{F}_{01} \mathcal{F}^{01} + \mathcal{F}_{02} \mathcal{F}^{02}) \quad (4.54)$$

y, además, se cumple en este caso que $\mathcal{F}_{0i} = F_{0i}$ con $i = 1, 2$.

En el caso general tenemos que

$$\begin{aligned} \langle S_R S_L \rangle &= \epsilon_L \epsilon_R \int_{x,y} \sqrt{g_L(x^0)} \delta(x^3 - \psi_L(x^0)) \times \\ &\times \delta(y^3 - a - \psi_R(x^0)) \langle [F_{01}^2 + F_{02}^2] [F_{01}^2 + F_{02}^2] \rangle \end{aligned} \quad (4.55)$$

Entonces en el espacio de Fourier obtenemos

$$\frac{\langle S_R S_L \rangle}{L^2} = \frac{2\epsilon_R \epsilon_L}{(2\pi)^2} \int_{k^0 k^3} \tilde{\pi}(k^0, 0, 0, k^3) e^{-ik^3 a} f_L(k^0, k^3) f_R(k^0, k^3) \quad (4.56)$$

donde

$$f_{L,R} = \int_{x_1} \sqrt{1 + \psi'_{L,R}} e^{\pm i[k^1 x^1 + k^3 \psi_{L,R}(x^1)]} \quad (4.57)$$

y además

$$\tilde{\pi}(k_0, 0, 0, k_3) = 16 A (k_0^2 + k_3^2)^2 + 2 (5B - 4C) k_0^2 (k_0^2 + k_3^2) - 2 D k_0^4 \quad (4.58)$$

En el caso en el que $\psi_R = 0$, tomando $k \equiv k^3$, obtenemos

$$\frac{\langle S_R S_L \rangle}{L^2} = \frac{\epsilon_L \epsilon_R}{5 (4\pi)^4} \int_{x^0} \sqrt{1 + \dot{\psi}^2(x^0)} \int dk k^4 e^{-ik[a - \psi(x^0)]} \left[-\gamma_E + \frac{47}{30} + \log(k^2) \right] \quad (4.59)$$

donde la integral sobre k se puede hacer, análogamente al caso estático, usando la ecuación (4.35) y da como resultado:

$$\frac{\Gamma}{L^2} = \frac{i \langle S_R S_L \rangle}{L^2} = \frac{3 i \epsilon_R \epsilon_L}{20 \pi^3 a^5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \dot{\psi}^2(x^0)}}{[1 - \psi(x^0)/a]^5} dx^0 \quad (4.60)$$

entonces la parte imaginaria es toda la expresión que obtuvimos en la ecuación (4.60), es decir que la probabilidad de creación de fotones reales en este caso está asociada a

$$\frac{\text{Im } \Gamma}{L^2} = \frac{3 \epsilon_R \epsilon_L}{20 \pi^3 a^5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \dot{\psi}^2(x^0)}}{[1 - \psi(x^0)/a]^5} dx^0. \quad (4.61)$$

Como ya discutimos previamente, se puede ver, a partir de la ecuación (4.59) que, en el caso en que el movimiento del espejo es uniforme, es decir $\dot{\psi} = v$ es constante, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\langle S_R S_L \rangle}{L^2} &= \frac{\epsilon_L \epsilon_R}{5 (4\pi)^4} \sqrt{1 + v^2} \int dk k^4 e^{-ika} \left[-\gamma_E + \frac{47}{30} + \log(k^2) \right] \int_{x^0} e^{i k v x^0} = \\ &= \frac{\epsilon_L \epsilon_R}{5 (4\pi)^4} \sqrt{1 + v^2} \int dk k^4 e^{-ika} \left[-\gamma_E + \frac{47}{30} + \log(k^2) \right] 2\pi \delta(v k), \end{aligned} \quad (4.62)$$

dando lugar a una contribución que tiene parte imaginaria nula en el caso en que $v \neq 0$. Como dijimos en el caso covariante, esto se debe a que la función de acoplamiento no depende de la frecuencia por lo que los grados de libertad microscópicos del espejo no contribuyen.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

“Das Schönste, was wir erleben können, ist das Geheimnisvolle.”

— Albert Einstein (1879-1955)

5.1. Conclusiones

Utilizando el método de integrales de camino, estudiamos el efecto Casimir estático y dinámico en un sistema de dos espejos semitransparentes, es decir con acoplamiento débil, interactuando tanto con el campo escalar como el electromagnético.

En el caso del efecto Casimir estático calculamos la energía del vacío para un sistema de dos planos paralelos, infinitos y semitransparentes de grosor nulo. Esta propiedad de los espejos nos permitió hacer un desarrollo perturbativo en el acoplamiento entre los espejos. Calculamos el orden más bajo no trivial de este desarrollo de la energía y después repetimos el procedimiento para un orden mayor. A partir de la energía, obtuvimos la expresión de la fuerza de Casimir entre los espejos. Además, obtuvimos la energía del vacío en un sistema con dos espejos paralelos e infinitos corrugados, con amplitud no necesariamente pequeña y calculamos la fuerza lateral entre los espejos debida para un tipo de corrugación. Para ver cómo depende el efecto Casimir de la geometría, estudiamos distintas funciones de corrugación. Vimos que para espejos con grosor semi-infinito, los resultados se pueden obtener a partir de los de grosor nulo.

En el caso del efecto Casimir dinámico, estudiamos un sistema de dos espejos planos en movimiento paralelo a la superficie y obtuvimos la acción efectiva, cuya parte imaginaria está asociada a la probabilidad de creación de fotones reales a partir del vacío. También estudiamos en particular el caso en que el movimiento es uniforme, dando lugar a una fuerza de fricción cuántica si los espejos no son conductores perfectos.

Para el campo electromagnético, obtuvimos la expresión de la acción efectiva en dos

casos particulares. Por un lado, estudiamos un sistema estático de espejos corrugados. En el caso particular de espejos planos, obtuvimos la densidad de energía. El otro sistema que estudiamos contenía espejos planos en movimiento paralelo a la superficie. En el caso en el que el acoplamiento estaba dado solamente por el campo eléctrico, obtuvimos la energía en el caso corrugado y la parte imaginaria de la acción efectiva para el caso dinámico.

5.2. Perspectivas

Por un lado, se podría continuar el estudio de la dependencia de la fuerza de Casimir con la geometría considerando el caso en que los espejos tienen una geometría a la estudiada en este trabajo, por ejemplo, dos discos concéntricos.

Con respecto al caso dinámico para el campo escalar, se podría continuar el estudio a través del análisis de algún caso con funciones $q_{R,L}$ particulares, a partir de lo cual se podría obtener una expresión explícita para la probabilidad de decaimiento del vacío.

En el caso del campo electromagnético, sería interesante estudiar el caso del ECD correspondiente a $2 + 1$ dimensiones, ya que en ese caso habría menos contribuciones.

Además, se podrían analizar diferentes sistemas en los que interactúa el campo electromagnético, por ejemplo, el caso en el que uno de los espejos se deforma periódicamente sin alejarse en promedio del otro.

Se podría también analizar el caso en que el campo electromagnético presenta un acoplamiento dependiente de la frecuencia, para obtener en este caso la fuerza de fricción. Estos análisis se podrían hacer a partir de los resultados presentados en este trabajo.

Apéndice A

Integral de camino

A.1. Integral de camino en mecánica cuántica

El Hamiltoniano de una partícula no relativista en una dimensión está dado por

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \hat{V}(x), \quad (\text{A.1})$$

donde m es la masa de la partícula y $V(x)$ el potencial en el cual está inmersa, que supongamos sólo depende de la posición.

Nos interesa calcular la función de Green G del operador de evolución en espacio de coordenadas.

Si el Hamiltoniano no depende del tiempo, podemos escribir el operador de Green de la siguiente forma:

$$G(t, t_0) = \Theta(t - t_0)e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)}, \quad (\text{A.2})$$

y podemos tomar $t_0 = 0$, de forma que en el espacio de coordenadas obtenemos

$$G(t, x; y) = \langle x | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} | y \rangle. \quad (\text{A.3})$$

A continuación, definiendo $\lambda = i\frac{t}{\hbar}$, podemos escribir

$$G(t, x; y) = \langle x | \left[e^{-\frac{\lambda}{N}(\hat{T} + \hat{V})} \right]^N | y \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x | \left[e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} \right]^N | y \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Ahora introducimos la identidad cada dos exponenciales, de forma que obtenemos

$$G(t, x; y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{i=1}^N \langle x_{i-1} | e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} | x_i \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Luego usamos que $V = V(x)$,

$$e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}}|x_i\rangle = |x_i\rangle e^{-\frac{\lambda}{N}V(x_i)}$$

y además intercalamos la identidad en el espacio de momentos

$$\mathbf{1} = \int |p\rangle\langle p|.$$

De esta forma, usando que

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px},$$

obtenemos para cada par x_{i-1}, x_i

$$\begin{aligned} f &\equiv \int dp \langle x_{i-1}|p\rangle\langle p|x_i\rangle e^{-\frac{\lambda}{N}V(x_i)} e^{-\frac{\lambda}{N}\frac{p^2}{2m}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-\frac{ip}{\hbar}(x_i-x_{i-1})} e^{-\frac{\lambda}{N}V(x_i)} e^{-\frac{\lambda}{N}\frac{p^2}{2m}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

por lo que, haciendo la integral en p, resulta

$$f = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda}{N}V(x_i)} \int dp e^{-\left[\frac{ip}{\hbar}(x_i-x_{i-1}) + \frac{\lambda}{N}\frac{p^2}{2m}\right]} = \sqrt{\frac{mN}{2\pi\lambda\hbar^2}} e^{-\frac{\lambda}{N}V(x_i)} e^{-\left[\frac{mN}{2\lambda\hbar^2}(x_i-x_{i-1})^2\right]}. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, reemplazando (A.6) en (A.5) y tomando $\varepsilon = \frac{t}{N}$ obtenemos

$$G(t, x; y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \left(\frac{mN}{2\pi\lambda\hbar^2} \right)^{N/2} \exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_i) \right] \right\} \quad (\text{A.8})$$

Si ahora tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, entonces vale:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_i) \right] \sim \int_0^T \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - V(x) \right] dt, \quad (\text{A.9})$$

por lo que obtenemos

$$G(t, x; y) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \left(\frac{mN}{2\pi\lambda\hbar^2} \right)^{N/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - V(x) \right] dt \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Ahora notemos que

$$\int_0^T \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - V(x) \right] = \int \mathcal{L} \left(x, \frac{\partial x}{\partial t} \right) dt = S, \quad (\text{A.11})$$

con \mathcal{L} el Lagrangiano y S la acción, de forma que obtenemos

$$G(t, x; y) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \left(\frac{m N}{2\pi\lambda\hbar^2} \right)^{N/2} e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (\text{A.12})$$

que es la integral de camino para el operador evolución temporal [26].

Para obtener la generalización 3D de este resultado, simplemente hay que convertir todas las variables posición en vectores, por lo que en cada integral $d\mathbf{x}_j$ es tridimensional, mientras que el factor de normalización en este caso está elevado a la $3N/2$. Es decir en el caso 3D obtenemos

$$G(x, t; y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d^3 \bar{x}_j \left(\frac{m N}{2\pi\lambda\hbar^2} \right)^{3N/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_i) \right] \right\}, \quad (\text{A.13})$$

que por convenciencia se puede escribir de la forma

$$G(x, t; y) = \int_{\bar{y}, 0}^{\bar{x}, t} d\bar{x}(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}(t)] \right], \quad (\text{A.14})$$

donde S es la acción, definida en la ecuación A.11 [26].

A.2. Integral de camino para un campo escalar

Para el caso de un campo escalar libre ϕ definimos el estado del sistema $|\Psi(t)\rangle$ que evoluciona según

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{A.15})$$

donde H es el Hamiltoniano que está dado por

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \bar{x} [\pi^2 + |\nabla^2 \phi|^2 + m^2 \phi^2], \quad (\text{A.16})$$

mientras que la acción es

$$S = \int d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \int d^4 x (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (\text{A.17})$$

donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana [20].

En términos de la derivada funcional definimos el momento π en el espacio de coordenadas

$$\hat{\pi}(\bar{x}, t) = -i \frac{\delta}{\delta\phi(\bar{x})}, \quad (\text{A.18})$$

y reemplazando en el Hamiltoniano obtenemos la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi[\phi, t] = \frac{1}{2} \int d^3\bar{x} \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\bar{x})} + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2 \right) \Psi[\phi, t]. \quad (\text{A.19})$$

cuya solución es

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle. \quad (\text{A.20})$$

Por lo tanto, el operador evolución temporal, que es la amplitud de probabilidad de que el campo $\phi_0(t_0)$ evolucione a $\phi(t)$, va a estar dado por

$$G[\phi, t; \phi_0, t_0] = \langle\phi|e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\phi_0\rangle. \quad (\text{A.21})$$

A partir de esta expresión, haciendo un procedimiento análogo al de la sección anterior llegamos a que la integral de camino para un campo escalar libre es

$$\begin{aligned} G[\phi, t; \phi_0, t_0] &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N D\phi_i \prod_{j=1}^N D\pi_j \exp \left\{ i\epsilon \sum_j \left[\int d^3\bar{x} \pi_j(x) \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\epsilon} - H[\pi_j, \phi_j] \right] \right\} = \\ &= \int D\phi D\pi \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \int d^3\bar{x} (\pi(x) \dot{\phi}(x) - H[\pi, \phi]) \right] = \\ &= \int D\phi \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \int d^3\bar{x} \mathcal{L}[\dot{\phi}, \phi, t] \right] = \int D\phi e^{iS[\phi(t)]}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde en la segunda línea se aproximó $\epsilon \rightarrow 0$ y en la tercera se realizó la integral en π , igual que en el caso del sistema cuántico [27].

Apéndice B

Cálculos adicionales para el caso del campo EM

El objetivo es obtener el resultado de la función $\tilde{\pi}$ en el caso en que el campo interactuante es el electromagnético, la cual está dada por

$$\tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(k) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\rho (k-p)_{\mu'} (k-p)_{\rho'}}{p^2 (k-p)^2}. \quad (\text{B.1})$$

Cabe aclarar que este cálculo es similar al correspondiente a las correcciones a 1 lazo en teoría de campos.

Comenzamos introduciendo un parámetro de Feynman, de forma que tenemos

$$\tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(k) = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\rho (k-p)_{\mu'} (k-p)_{\rho'}}{[(p-k\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2}, \quad (\text{B.2})$$

por lo que, haciendo el corrimiento $p \rightarrow p - k\alpha$, obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'}(k) = & \int_0^1 d\alpha [I_{\mu\rho\mu'\rho'}^{(4)}(k) + (1-\alpha)^2 k_{\mu'} k_{\rho'} I_{\mu\rho}^{(2)} + \alpha^2 k_\mu k_\rho I_{\mu'\rho'}^{(2)} - \\ & - \alpha(1-\alpha) [k_{\mu'} k_\rho I_{\mu\rho'}^{(2)} + k_\mu k_{\rho'} I_{\mu'\rho}^{(2)} + k_{\mu'} k_\mu I_{\rho'\rho}^{(2)} + k_\rho k_{\rho'} I_{\mu\mu'}^{(2)}] + \\ & + \alpha^2 (1-\alpha^2) k_\mu k_{\mu'} k_\rho k_\rho I^{(0)}] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde

$$I^{(0)} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp p^{d-1} \frac{1}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} \quad (\text{B.4})$$

$$I_{\mu\rho}^{(2)} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\rho}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} = \frac{\delta_{\mu\rho}}{d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp p^{d-1} \frac{p^2}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} I_{\mu\rho\mu'\rho'}^{(4)} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\rho p_{\mu'} p_{\rho'}}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} = \\ &= \frac{(\delta_{\mu\rho} \delta_{\mu'\rho'} + \delta_{\mu\rho'} \delta_{\mu'\rho} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\rho\rho'})}{d^2} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp p^{d-1} \frac{p^4}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto, el resultado de la siguiente integral:

$$\int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]^2} = \frac{[\alpha(1-\alpha)k^2]^{D/2-2}}{2} \Gamma(D/2) \Gamma(2-D/2) \quad (\text{B.7})$$

válida para $0 < D < 6$ [28], permite hacer resolver las integrales, de forma que la función π queda

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(k) &= \frac{S_d}{(2\pi)^d} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2) \left\{ \frac{1}{2} k_\mu k_{\mu'} k_\rho k_{\rho'} \int_0^1 d\alpha [\alpha(1-\alpha)k^2]^{d/2-2} \alpha^2 (1-\alpha)^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{2-d} \int_0^1 d\alpha [\alpha(1-\alpha)k^2]^{d/2-1} [(1-\alpha)^2 k_{\mu'} k_{\rho'} \delta_{\mu\rho} + \alpha^2 k_\mu k_\rho \delta_{\mu'\rho'} - \\ &- \alpha(1-\alpha) (k_{\mu'} k_\rho \delta_{\mu\rho'} + k_\mu k_{\rho'} \delta_{\mu'\rho} + k_\rho k_{\rho'} \delta_{\mu\mu'} + k_{\mu'} k_\mu \delta_{\rho\rho'})] + \\ &\left. + \left(\frac{d}{d-2} - \frac{1}{2} \right) \frac{(\delta_{\mu\rho} \delta_{\mu'\rho'} + \delta_{\mu\rho'} \delta_{\mu'\rho} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\rho\rho'})}{d^2} \int_0^1 d\alpha [\alpha(1-\alpha)k^2]^{d/2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Para dimensión $d = 4$, obtenemos que la función está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(k) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(\epsilon/2) \left\{ \frac{1}{30} k_\mu k_{\mu'} k_\rho k_{\rho'} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{47}{15} + \log(k^2) \right) \right] + \right. \\ &+ \frac{k^2}{10} (k_{\mu'} k_{\rho'} \delta_{\mu\rho} + k_\mu k_\rho \delta_{\mu'\rho'}) \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{4} \log(k^2) \right) \right] + \\ &+ \frac{k^2}{15} (k_{\mu'} k_\rho \delta_{\mu\rho'} + k_\mu k_{\rho'} \delta_{\mu'\rho} + k_\rho k_{\rho'} \delta_{\mu\mu'} + k_{\mu'} k_\mu \delta_{\rho\rho'}) \left[-1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{47}{30} + \log(k^2) \right) \right] \\ &\left. + \frac{k^4}{160} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\mu'\rho'} + \delta_{\mu\rho'} \delta_{\mu'\rho} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\rho\rho'}) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{47}{30} + \log(k^2) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde para evaluar definimos $\epsilon = 4 - d$ y usamos el desarrollo

$$[\alpha(1-\alpha)k^2]^{-\epsilon/2} \simeq 1 - \frac{\epsilon}{2} \log[\alpha(1-\alpha)k^2], \quad (\text{B.10})$$

válido para $\epsilon \simeq 0$.

Vemos que la única parte divergente es la función Γ , cuyo desarrollo hasta orden cero en $\epsilon = 4 - d$ está dado por

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E, \quad (\text{B.11})$$

donde $\gamma_E = 0,5772156649\dots$ es la constante de Euler [28].

Por lo tanto, la parte finita de la función π para $d = 4$ es

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'} = & A k^4 (\delta_{\mu\rho} \delta_{\mu'\rho'} + \delta_{\mu\rho'} \delta_{\mu'\rho} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\rho\rho'}) - D k_\mu k_\rho k_{\mu'} k_{\rho'} + \\ & + k^2 [B (\delta_{\mu\rho'} k_{\mu'} k_\rho + \delta_{\rho\rho'} k_\mu k_{\mu'} + \delta_{\mu\mu'} k_\rho k_{\rho'} + \delta_{\mu'\rho} k_\mu k_{\rho'}) - \\ & - C (\delta_{\mu\rho} k_{\mu'} k_{\rho'} + \delta_{\mu'\rho'} k_\mu k_\rho)] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

donde

$$A = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{160} \left(-\gamma_E + \frac{47}{30} + \log(k^2) \right) \quad (\text{B.13})$$

$$B = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{30} \left(\gamma_E + \frac{47}{30} + \log(k^2) \right) \quad (\text{B.14})$$

$$C = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{10} \left(\gamma_E + \frac{5}{6} + \log(k^2) \right) \quad (\text{B.15})$$

$$D = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{30} \left(\gamma_E + \frac{47}{15} + \log(k^2) \right) \quad (\text{B.16})$$

Las partes divergentes de la función no afectan al resultado, ya que al transformar nuevamente al espacio de coordenadas, darán contribuciones dependientes de deltas. Como los espejos no están en contacto, estos términos se anulan.

Se puede ver, además, que para dimensión $d = 3$ no aparecen divergencias, por lo que el resultado es:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mu\rho\mu'\rho'} = & \frac{3}{2048} \left\{ \frac{k_\mu k_\rho k_{\mu'} k_{\rho'}}{\sqrt{k^2}} - \sqrt{k^2} [5 (\delta_{\mu\rho} k_{\mu'} k_{\rho'} + \delta_{\mu'\rho'} k_\mu k_\rho) - \right. \\ & - 3 (\delta_{\mu\rho'} k_{\mu'} k_\rho + \delta_{\rho\rho'} k_\mu k_{\mu'} + \delta_{\mu\mu'} k_\rho k_{\rho'} + \delta_{\mu'\rho} k_\mu k_{\rho'})] + \\ & \left. + \frac{5}{9} |k|^3 (\delta_{\mu\rho} \delta_{\mu'\rho'} + \delta_{\mu\rho'} \delta_{\mu'\rho} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\rho\rho'}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Bibliografía

- [1] Farías, M. B., Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., López, A. E. R. Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force. *Physical Review D*, **91** (10), 105020, 2015. [1](#), [2](#)
- [2] Bordag, M., Mohideen, U., Mostepanenko, V. M. New developments in the casimir effect. *Physics reports*, **353** (1), 1–205, 2001. [2](#), [3](#), [4](#)
- [3] Lamoreaux, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, **78** (1), 5, 1997. [3](#)
- [4] Lamoreaux, S. K. Progress in experimental measurements of the surface–surface casimir force: Electrostatic calibrations and limitations to accuracy. En: Casimir Physics, págs. 219–248. Springer, 2011. [3](#)
- [5] Decca, R., Aksyuk, V., López, D. Casimir force in micro and nano electro mechanical systems. En: Casimir Physics, págs. 287–309. Springer, 2011. [3](#)
- [6] Nation, P., Johansson, J., Blencowe, M., Nori, F. Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits. *Reviews of Modern Physics*, **84** (1), 1, 2012. [3](#)
- [7] Moore, G. T. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. *Journal of Mathematical Physics*, **11** (9), 2679–2691, 1970. [3](#)
- [8] Silva, J. D. L., Braga, A. N., Alves, D. T. Dynamical casimir effect with δ - δ mirrors. *Physical Review D*, **94** (10), 105009, 2016. [3](#)
- [9] Wang, Q., Unruh, W. G. Mirror moving in quantum vacuum of a massive scalar field. *Physical Review D*, **92** (6), 063520, 2015. [3](#)
- [10] Dodonov, V., Dodonov, A. Theory of the dynamical casimir effect in nonideal cavities with time-dependent parameters. En: Journal of Physics: Conference Series, tomo 99, págs. 012006. IOP Publishing, 2008. [3](#)

- [11] Dodonov, V. Current status of the dynamical casimir effect. *Physica Scripta*, **82** (3), 038105, 2010. [3](#), [34](#)
- [12] Golestanian, R., Kardar, M. Mechanical response of vacuum. *Physical review letters*, **78** (18), 3421, 1997. [4](#)
- [13] Chen, F., Mohideen, U., Klimchitskaya, G., Mostepanenko, V. Demonstration of the lateral casimir force. *Physical review letters*, **88** (10), 101801, 2002. [4](#), [27](#)
- [14] Zinn-Justin, J. Path integrals in quantum mechanics. Oxford University Press, 2010. [5](#)
- [15] Farías, M. B., Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., López, A. E. R. Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force. *Physical Review D*, **91** (10), 105020, 2015. [6](#), [8](#), [38](#), [40](#)
- [16] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Quantum dissipative effects in moving imperfect mirrors: Sidewise and normal motions. *Physical Review D*, **84** (2), 025011, 2011. [6](#)
- [17] Itzykson, C., Zuber, J.-B. Quantum field theory. Courier Corporation, 2006. [6](#)
- [18] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Derivative expansion of the electromagnetic casimir energy for two thin mirrors. *Physical Review D*, **85** (12), 125037, 2012. [10](#)
- [19] Kleinert, H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. World Scientific, 2009. [11](#)
- [20] Zinn-Justin, J. Quantum field theory and critical phenomena, 2002. [13](#), [57](#)
- [21] Fosco, C., Giraldo, A., Mazzitelli, F. Dynamical casimir effect for semitransparent mirrors. *arXiv preprint arXiv:1704.07198*, 2017. [20](#), [36](#)
- [22] Lighthill, M. J. An introduction to Fourier analysis and generalised functions. Cambridge University Press, 1958. [20](#), [48](#)
- [23] Ashourvan, A., Miri, M., Golestanian, R. Casimir rack and pinion. En: Journal of Physics: Conference Series, tomo 89, pág. 012017. IOP Publishing, 2007. [27](#), [28](#)
- [24] Dalvit, D. A., Neto, P. A. M., Mazzitelli, F. D. Fluctuations, dissipation and the dynamical casimir effect. En: Casimir Physics, págs. 419–457. Springer, 2011. [34](#)
- [25] Barton, G., Dodonov, V. V., Man'ko, V. I. The nonstationary casimir effect and quantum systems with moving boundaries. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **7** (3), S1, 2005. [42](#)

-
- [26] Schulman, L. S. Techniques and Applications of Path Integration. Dover, 2005. [57](#)
- [27] Hatfield, B. Quantum Field Theory of Point Particles and Strings. Addison-Wesley, 1992. [58](#)
- [28] Kleinert, H., Schulte-Frohlinde, V. Critical properties of phi4-theories. World Scientific, 2001. [60](#), [61](#)

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer especialmente a mi familia, porque durante el transcurso de este trabajo y toda mi vida, siempre me acompañaron y me apoyaron en los momentos más difíciles. Realmente no hubiera podido hacer nada de esto sin sus consejos, su aliento y su paciencia. Gracias por ayudarme tanto, porque cada paso importante que di, sé que lo hice en gran parte gracias a todos ustedes.

También me gustaría agradecer a mis amigos, que desde tan lejos siempre estuvieron presentes, especialmente en los momentos en que más los necesité. Gracias por enseñarme que la distancia hace aún más fuerte la amistad verdadera.

Finalmente, me gustaría agradecer a mi director, por toda la ayuda durante este año y medio de trabajo, por la paciencia y la buena voluntad, por siempre estar para darme una mano y por saber cómo tranquilizarme en los momentos en los estaba empezando a desesperar. También estoy muy agradecida al Instituto Balseiro, por darme la oportunidad de estudiar en una institución de muy buen nivel, que representó para mi un desafío y una experiencia única.