

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS

**COMPACTIFICACIONES EN TEORÍA DE CUERDAS,
TEORÍA DOBLE DE CAMPOS Y FENOMENOLOGÍA**

Jeffrey Paredes Molina
Maestrando

Dr. Gerardo Aldazabal
Director

Miembros del Jurado

Dr. Cesar Fosco (Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)
Dra. Marina Huerta (Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)
Dra. Carmen Nuñez (Instituto de Astronomía y Física del Espacio
(CONICET-UBA), Departamento de Física (FCEN-UBA))

28 de Noviembre 2017

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
Introducción	1
1. Cuerda Bosónica	3
1.1. Partícula puntual relativista	3
1.2. Cuerda relativista	6
1.3. Acción de Polyakov	7
1.4. Ecuaciones de movimiento	9
1.5. Modos de oscilación	12
1.5.1. Cuerda cerrada	12
1.5.2. Cuerda abierta	13
1.6. Cuantización Cono de luz	17
2. Teoría de la supercuerda	21
2.1. Cuerda Ramond-Neveu-Schwarz	21
2.2. Expansión en Modos	22
2.2.1. Cuerda abierta	23
2.2.2. Cuerda cerrada	23
2.3. Cuantización Canónica	25
2.4. La cuerda heterótica	30
3. Teoría Doble de Campos	35
3.1. Compactificación teorías Kaluza-Klein	35
3.2. Compactificación	36
3.3. T-dualidad	39
3.4. Compactificación Toroidal	40
3.5. Transformación $O(D, D)$ en una compactificación toroidal	42

3.5.1. Acción de Supergravedad	44
3.6. Aspectos sobre Teoría Doble de Campos	45
3.7. Acción de la Teoría Doble de Campos	46
3.8. Compactificación Scherk-Schwarz Generalizada	50
4. Conclusiones y Perspectiva	55
4.1. Conclusiones	55
4.2. Perspectiva	55
Agradecimientos	59

Resumen

Introducimos la cuerda bosónica junto con la supercuerda y la cuerda heterótica. Repasamos el espectro de masa y la Level Matching Condition para cada teoría y hacemos énfasis en el proceso de compactificación de las mismas, en particular prestando atención a la T-dualidad una simetría de cuerdas.

En este marco estudiamos, la Teoría Doble de Campos, que es una teoría de campos con invariancia ante el grupo de T-dualidad. Esta, teoría junto con el proceso de compactificación de Sherck-Schwarz nos permite entender los flujos que aparecen en las teorías efectivas de cuerdas. Cerramos con un breve análisis de los vínculos que satisfacen estos flujos y su relación con los puntos de enhancement de la teoría de cuerdas.

Palabras clave: TEORIA DE CUERDAS, T-DUALIDAD, TEORIA DOBLE DE CAMPOS, LEVEL MATCHING CONDITION.

Abstract

We introduce the bosonic string, together with the Superstring and the heterotic string. Also, we reviewed the mass spectre and Level Matching Condition for each theory and emphasize in the compacting process of them, paying special attention to the T-duality string symmetry.

In order to achieve this, we take on account the Double Field Theory, which is invariant to the T-Duality group. This, together with the Sherck-Schwarz compacting process, allows us to understand the fluxes that rise within the effective string theories. We finish this article with a brief analysis of the bonds that satisfy such fluxes, and the relation they have with enhancement points in string theory.

Keywords: STRING THEORY, T-DUALITY, DOUBLE FIELD THEORY, LEVEL MATCHING CONDITION.

Introducción

“Sembrado para comer es sagrado sustento del hombre que fue hecho de maíz. Sembrado por negocio es hambre del hombre que fue hecho de maíz.”

— Miguel Angel Asturias

La teoría de cuerdas fue desarrollada a fines de los 60's con el propósito de describir las interacciones fuertes. Se encontraron varios problemas impidiendo que esta teoría lograra el éxito. En particular, se encontró que el espectro de la cuerda fundamental posee una partícula no masiva de espín-2 no deseada. Eventualmente la cromodinámica cuántica surgió proveyendo una teoría correcta para la descripción de la fuerza fuerte y la propiedad de los hadrones.

En 1974 Sherk y Schwarz, mostraron que una teoría basada en objetos unidimensionales o cuerdas en lugar de partículas puntuales podía describir la fuerza gravitatoria, proponiendo identificar la partícula no masiva de espín-2 con el gravitón, el bosón de la interacción gravitatoria, siendo así un gran candidato para la unificación de la teoría cuántica y la teoría gravitatoria.

Algunas características de una cuerda son:

- Un solo parámetro libre.
- La cuerda posee Tensión.
- La cuerda no posee estructura interna.
- La cuerda puede ser clásica o cuántica.
- La cuerda puede ser abierta o cerrada.
- La divergencia que aparecen en los diagramas de Feynman con lazos cerrados dejan de existir.

La teoría M se postula como la candidata más firme a proporcionar una descripción unificada de las interacciones de gauge, (como las que intervienen en el Modelo Estándar (ME) de partículas elementales) y las interacciones gravitacionales, de forma

consistente a nivel cuántico. Esta teoría fue propuesta por Witten en 1995, es supuesta no como una teoría de cuerdas, sino mas bien como una teoría no perturbativa de objetos fundamentales, cuyo límite a bajas energías es la supergravedad a once dimensiones.

La teoría de cuerdas tiene una característica muy especial que es la predicción de la dimensión del espacio-tiempo que en el caso de la supercuerda es $D=10$. Una manera de lidiar con las dimensiones extras es asumiendo que se enrollan hasta formar un espacio muy compacto para así evitar su detección a bajas energías. La teoría de cuerdas no es una teoría de campos. Es una teoría de objetos de una dimensión, su espectro contiene una torre infinita de partículas masivas cuya escala está a la longitud de la cuerda $l_s = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33} \text{cm}$.

La teoría de cuerdas posee diferentes tipos de simetría, dos de las más destacadas son la T-dualidad y la S-dualidad. La S-dualidad se refiere a la relación del acoplamiento fuerte y acoplamiento débil en los límites de las teorías. La T-dualidad es una simetría que aparece al compactificar la teoría, por ejemplo cuando se compactifica en un círculo de radio R , la teoría es invariante ante el intercambio de $R \rightarrow \frac{\alpha'}{R}$ junto con el intercambio del momento y la cantidad de veces que se enrolla la cuerda a lo largo de la dirección compacta.

Esta tesis versa sobre la T-dualidad y su representación en una teoría de campos. El trabajo propuesto profundizará en el estudio de la teoría de campos doble. La Teoría Doble de Campos o DFT por sus siglas en inglés propone una teoría de campos que incorpore la T-dualidad que es una simetría interna de la cuerda (por ser un objeto extendido). En particular se propone el estudio de compactificaciones de estas teorías que incluyan estados masivos de momento y de enrollamiento en manera consistente y su comparación con las compactificaciones de cuerdas.

Este trabajo está dividido de la siguiente manera: el próximo capítulo introduce conocimientos teóricos sobre la cuerda bosónica libre a nivel cuántico y clásico. El capítulo siguiente se trata sobre la cuerda supersimétrica donde se usa la supersimetría para la inclusión de los fermiones en la teoría, se describe también la cuerda heterótica donde se construye una cuerda supersimétrica con supersimetría $N=1$, combinando modos de oscilación izquierdos de la cuerda bosónica con modos de oscilación derechos de la cuerda supersimétrica. El último capítulo presenta las bases para DFT.

Capítulo 1

Cuerda Bosónica

“Madre, te bendigo porque supiste hacer de tu hijo un hombre real y enteramente humano.”

— Miguel Angel Asturias

1.1. Partícula puntual relativista

El movimiento de una partícula puntual de masa m en un campo gravitacional, puede ser formulado como un problema variacional, es decir, con un principio de acción. Una primera aproximación es estudiar cómo se caracteriza la acción no relativista de una partícula de masa “ m ”:

$$S_{nr} = \int dt L_{nr} = \frac{1}{2} \int dt \, m v^2. \quad (1.1)$$

La ecuación de movimiento encontrada a partir de la acción,

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

predice que la partícula libre se mueve a velocidad constante. Una partícula cualquiera que se mueva con velocidad constante la cumple, pero la misma podría moverse con una velocidad mayor a la velocidad de la luz y estaría violando uno de los principios de la relatividad, por lo tanto, esta acción no puede describir el movimiento de una partícula cualquiera como por ejemplo una partícula relativista.

La acción que se busca para caracterizar el movimiento de una partícula relativista debe ser tal que su ecuación sea covariante de Lorentz, esto hace que la acción sea un escalar de Lorentz. Para las diferentes líneas de mundo de la partícula, la cantidad que

todos los observadores comparten es el tiempo propio¹

$$S = -mc \int_P ds. \quad (1.2)$$

El signo menos resulta de la signatura que usaremos:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1)$$

El elemento de distancia es de la forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.3)$$

Esto nos permite escribir la acción como una integral sobre el tiempo,

$$S = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.4)$$

donde “t” es el tiempo coordenado. Se puede recuperar la acción no relativista tomando el límite donde $c \gg v$

$$S = -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Como se puede observar en el límite no relativista se obtiene la ecuación (1.1) más una constante, el cual no contribuye a las ecuaciones clásicas de movimiento.

Un requerimiento importante para la partícula puntual es que su acción sea invariante ante reparametrizaciones. Podemos usar un parámetro λ el cual parametriza la línea de mundo de la partícula, y este parámetro debe ir aumentando conforme la partícula va del punto inicial al punto final arbitrario.

$$\begin{aligned} x^\mu &= x^\mu(\lambda), \\ dx^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (1.5)$$

El elemento de longitud se reescribe con este nuevo parámetro:

$$ds = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (1.6)$$

¹Es el tiempo medido por un reloj que sigue la trayectoria de la partícula, la cual es la misma para todos los marcos.

La acción (1.2) toma la forma:

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (1.7)$$

Si ahora realizamos un cambio de parámetro $\lambda \rightarrow \lambda'$ tenemos:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda}. \quad (1.8)$$

Al substituir este cambio en la ecuación (1.7) obtenemos:

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda}} = -mc \int d\lambda' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'}}. \quad (1.9)$$

Lo cual muestra que tiene la misma forma que la ecuación (1.7), así se establece que la acción es un invariante ante reparametrizaciones. Ahora realizando la variación de la acción (1.2)

$$\delta S = -m \int \delta(ds), \quad (1.10)$$

donde la variación del elemento de distancia es

$$\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} d\lambda \quad (1.11)$$

y al introducir

$$m \frac{dx_\mu}{ds} = p_\mu, \quad (1.12)$$

se obtiene

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} p_\mu d\lambda. \quad (1.13)$$

Integrando por partes obtenemos lo siguiente

$$\frac{dp_\mu}{d\lambda} = 0. \quad (1.14)$$

Esta ecuación implica que el momento es constante a lo largo de la línea de mundo. A su vez esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0, \quad (1.15)$$

usando la ecuación(1.12).

1.2. Cuerda relativista

La línea trazada por la partícula en el espacio-tiempo es llamada línea de mundo. La superficie de dos dimensiones trazada por una cuerda en el espacio-tiempo es llamada hoja mundo. Anteriormente vimos que la acción de la partícula relativista es un invariante de Lorentz, para la cuerda se define el invariante de Lorentz como el área propia trazado por la hoja mundo. La acción de la cuerda relativista será proporcional a esta área propia la cual es llamada la acción de Nambu- Goto.

La parametrización de una superficie se realiza con dos parámetros. Si se desea encontrar el diferencial de área entonces la forma mas general de poder hallarla es que la figura sea un paralelogramo en el espacio de parámetros.

$$dA = dv_1 \times dv_2 = |dv_1||dv_2|\sqrt{1 - \cos^2 \theta}. \quad (1.16)$$

En términos de los productos internos, la expresión mas general para la funcional área de una superficie parametrizada es lo siguiente [1]:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right)^2}. \quad (1.17)$$

Sustituiremos a ξ^1 y ξ^2 con τ y σ respectivamente. Por lo que la superficie es descrita por $X^\mu(\tau, \sigma)$. La funcional de área es:

$$A = \int d\sigma d\tau \sqrt{(\partial_\tau X^\mu)^2 (\partial_\sigma X^\mu)^2 - (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2}. \quad (1.18)$$

Al usar el producto interno garantizamos que sea invariante de Lorentz. Pero surge un problema, el radicando es negativo, entonces para poder tomar la raíz cuadrada se deben de intercambiar los dos, y este cambio de signo no afectara que sea invariante de Lorentz.

$$A = \int d\sigma d\tau \sqrt{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2 - (\partial_\tau X^\mu)^2 (\partial_\sigma X^\mu)^2}. \quad (1.19)$$

Para poder comprobar que el cambio de signo es el correcto se debe comprobar que la expresión bajo la raíz es mayor o igual que 0 en cualquier punto de la hoja mundo, esta prueba se encuentra detallada en la bibliografía [1].

Definido correctamente el funcional de área se puede introducir la acción para la cuerda relativista. Para poder escribir la acción correctamente se debe de observar las dimensiones de esta

$$[S] = \frac{ML^2}{T}, \quad [F] = \frac{ML}{T^2}, \quad [c] = \frac{M}{T},$$

donde T, M, L son las unidades de medida temporal, masa y de longitud respectivamente. Por lo tanto la acción descrita por la cuerda relativista² es:

$$S = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2 - (\partial_\tau X^\mu)^2 (\partial_\sigma X^\mu)^2}. \quad (1.20)$$

Esta acción es la acción de Nambu-Goto.

1.3. Acción de Polyakov

La acción de Nambu-Goto resulta complicada de cuantizar por la raíz cuadrada en ella. Se introduce entonces un campo adicional (auxiliar) en la hoja mundo que remueve la raíz cuadrada de la ecuación (1.20). Este campo auxiliar es una métrica $h_{\alpha\beta}$ que tiene la signatura de Minkowski con auto valor negativo (tipo tiempo) y positivos (tipo espacio). En esta notación la acción de Polyakov o también llamada modelo sigma se puede escribir como:

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

Donde el objeto $h^{\alpha\beta}$ es un tensor simétrico en la hoja mundo que juega el rol de la métrica intrínseca y su inversa es $h_{\alpha\beta}$, h es el valor absoluto del determinante de $h_{\alpha\beta}$. El parámetro T en la integral es identificado como la tensión de la cuerda y ésta relacionado al parámetro de Regge slope:

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T}. \quad (1.22)$$

La acción de Polyakov a nivel clásico es equivalente a la acción de Nambu-Goto. Sin embargo, resulta mas conveniente usar la acción de Polyakov para cuantizar.

La acción de Polyakov posee varias simetrías. Una simetría (global) es la de Poincare que transforma los campos en la hoja mundo:

$$\delta X^\mu = w_\nu^\mu X^\nu + b^\mu, \quad \delta h^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.23)$$

Una forma sencilla de comprobar esta simetría es realizando las dos transformaciones en la acción.

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + b^\mu \quad y \quad X^\mu \rightarrow X^\mu + w_\beta^\mu X^\beta. \quad (1.24)$$

La primera transformación resulta trivial ya que la acción depende solamente de la primera derivada en la coordenada X^μ . La segunda transformación al quedarse solamente con los términos de primer orden en w_β^μ y ya que w_β^μ es antisimétrica se cancela

²Usaremos unidades naturales $[\hbar] = [c] = 1$

el término que depende de w_β^μ .

La acción posee simetrías locales dadas por la reparametrización en las coordenadas

$$(\tau, \sigma) \rightarrow (\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma)), \quad (1.25)$$

las cuales no realizan cambios en la acción, el término $d^2\sigma\sqrt{h}$ es el elemento invariante de volumen y $h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}$ es invariante puesto que los índices están correctamente contraídos.

La tercer simetría local que posee la acción es la simetría localmente conforme (Weyl invariance).

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= 0, \\ h_{\alpha\beta} &= e^{\phi(\sigma,\tau)} h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Esta simetría es especial por el hecho que la hoja mundo es de 2-dimensiones.

$$\begin{aligned} \sqrt{-h} &\rightarrow e^\phi\sqrt{-h}, \\ h^{\alpha\beta} &\rightarrow e^{-\phi}h^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Una cantidad importante en la teoría de campos es el tensor de energía-momento. El tensor de energía-momento se puede definir como la variación de la acción respecto a la métrica³,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (1.28)$$

Para poder evaluar la variación se requiere usar la siguiente propiedad

$$\delta[\det(A)] = \det(A)Tr(A^{-1}\delta A), \quad (1.29)$$

lo que implica

$$\delta h = -hh_{\alpha\beta}(\delta h^{\alpha\beta}), \quad (1.30)$$

luego de tomar la variación de la acción con respecto de la métrica se define el tensor de energía-momentum,

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{\gamma\delta}\partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X). \quad (1.31)$$

Ahora si se toma la raíz cuadrada del determinante de ambos lados de la ecuación de movimiento algo interesante sucede:

$$\sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu)} = \frac{1}{2}\sqrt{-h}h^{\gamma\delta}\partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X. \quad (1.32)$$

³Reescribo la acción usando la relación de la ecuación (1.22)

Al sustituir este resultado en la acción (1.21), la acción de Polyakov y la acción de Nambu-Goto a nivel clásico son equivalentes.

Ahora bien, una propiedad importante del tensor de energía-momentum es que no posee traza consecuencia de que la acción es invariante ante Weyl. Sin invocar las ecuaciones de movimiento tomando la traza sobre la ecuación (1.31) resulta:

$$h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}[\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{\gamma\delta}\partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X)] = 0. \quad (1.33)$$

En una hoja mundo de 2 dimensiones el difeomorfismo local junto con la invariancia de Weyl permiten fijar el gauge. La métrica de la hoja mundo permite elegir 3 componentes independientes al ser una matriz simétrica el conteo de grados de libertad para tal objeto es de $\frac{1}{2}D(D+1)$ siendo así

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

donde $h_{01} = h_{10}$. El difeomorfismo permite elegir dos de las componentes restantes, dejando así solamente una componente independiente. La simetría de Weyl restringe ese último grado de libertad, permitiendo así fijar completamente $h_{\alpha\beta}$. Eligiendo así la métrica:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Esta métrica plana de la hoja mundo es posible solo si no existen obstrucciones topológicas. En un gauge plano la acción de Polyakov (1.21) se reduce a:

$$S_P = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma ((\partial_\tau X)^2 - (\partial_\sigma X)^2). \quad (1.36)$$

1.4. Ecuaciones de movimiento

En la sección anterior no se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para X^μ . Esta es fundamental para así obtener los tipos de cuerdas, las cuales se alcanzan imponiendo diferentes condiciones de contorno, dando lugar así las cuerdas abiertas y cerradas. Variando la acción (1.21) respecto a las coordenadas X^μ obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta S &= -T \int d\tau d\sigma [\partial_\alpha (\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \delta X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}) \\ &\quad - \delta X^\mu \partial_\alpha (\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (1.37)$$

La ecuación de movimiento para X^μ es:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}) = 0. \quad (1.38)$$

A diferencia de la teoría cuántica de campos normalmente se encuentra las ecuaciones de movimiento descartando los términos de superficie ya que se asume que el espacio-tiempo es infinito y las cantidades relevantes se hacen cero rápidamente. Pero en la teoría de cuerdas la ecuación de movimiento debe ser complementada por las condiciones de contorno, las cuales surgen al hacer cero el término de superficie:

$$\int d\tau(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\delta X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu})|_0^\pi = 0. \quad (1.39)$$

Se elige $0 < \tau \leq \pi$, asegurándonos que el término de superficie desaparezca. La cuerda cerrada se satisface pidiendo que sea periódica:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi). \quad (1.40)$$

Los puntos finales de la cuerda se unen de tal manera que formen una topología circular. En la cuerda abierta suceden dos casos distintos. El primer caso es imponiendo:

$$X'^\mu|_{\sigma=0} = X'^\mu|_{\sigma=\pi} = 0. \quad (1.41)$$

Estas son las condiciones de borde de Neumann. Físicamente significa que el momento no fluye a través de los puntos finales de la cuerda. En el segundo caso se impone que

$$X^\mu|_{\sigma=0} = X_0^\mu \quad y \quad X^\mu|_{\sigma=\pi} = X_\pi^\mu, \quad (1.42)$$

donde X_0^μ y X_π^μ son constantes, conocidos como la condición de borde de Dirichlet, físicamente significa que los puntos finales de la cuerda están fijos. Con esta condición sucede algo muy interesante ya que rompe la simetría de Poincaré. Una solución correcta al problema es imponer que los puntos finales de la cuerda estén sujetos a una Dp-brana. Una Dp-brana es un tipo especial de p-brana en que una cuerda fundamental pueda terminar y es un objeto dinámico. [1]

La ecuación de movimiento usando el gauge conforme es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) X^\mu = 0. \quad (1.43)$$

Luego de fijar el gauge, es necesario imponer la restricción adicional ya que existe una ecuación de movimiento extra para la métrica, esta es $T_{\alpha\beta} = 0$ (ecuación (1.31)). Las

componentes de este tensor en el gauge conforme son:

$$T_{01} = T_{10} = \partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X = 0 \quad y \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}[(\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2] = 0. \quad (1.44)$$

O bien en una forma más compacta:

$$(\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X)^2 = 0. \quad (1.45)$$

Estas restricciones son conocidas como las condiciones de Virasoro. También se puede observar que se cumple la restricción sobre la traza del tensor de energía-momento.

Ahora bien, se debe de encontrar la solución a las ecuaciones de movimiento y las restricciones impuestas, para esto es conveniente introducir un tipo de coordenadas llamadas coordenadas cono de luz, definidas como:

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma. \quad (1.46)$$

En estas coordenadas la métrica (1.35) y la derivada se escriben como:

$$\tau = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2}, \quad \sigma = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2}, \quad (1.47)$$

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma), \quad \begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

La ecuación de movimiento de X^μ escrita en estas coordenadas es:

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (1.49)$$

Si se escribe el tensor de energía-momentum ecuación (1.44) en las coordenadas σ^\pm queda:

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0, \quad (1.50)$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \cdot \partial_- X = 0, \quad (1.51)$$

$$T_{+-} = T_{-+} = 0. \quad (1.52)$$

La ecuación (1.52) expresa la condición de que el tensor-energía momento no posee traza. La solución propuesta a la ecuación de movimiento (1.49) es:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma). \quad (1.53)$$

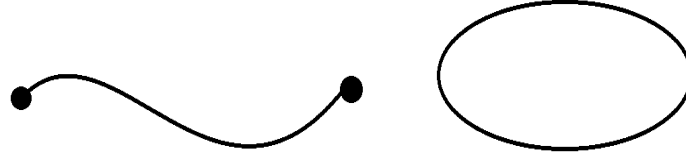


Figura 1.1: Cuerda abierta y cuerda cerrada.

Es la suma del movimiento hacia la derecha y hacia la izquierda de la cuerda. Se pueden escribir en base a la definición de las coordenadas como de luz (1.53).

1.5. Modos de oscilación

Como se explicó en la sección anterior, se imponen varias condiciones de borde correspondientes a la cuerda cerrada y abierta representados en la figura (1.1).

1.5.1. Cuerda cerrada

La solución general de la ecuación de onda en dos dimensiones es compatible con la condición de periodicidad (1.40). La solución general es:

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (1.54)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}\tilde{x}^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (1.55)$$

donde x^μ es la posición de centro de masa, p^μ es el momentum total de la cuerda, los α_n^μ son las componentes de Fourier que representan movimientos independientes a izquierda y a derecha. Se ha introducido una nueva longitud fundamental l_s , relacionado con α' y la tensión de la cuerda T

$$l_s = \sqrt{2\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}. \quad (1.56)$$

Si realizamos la suma de (1.54) con (1.55) se puede ver a simple vista que los términos de σ se cancelan a orden líneal, obedeciendo la condición de periodicidad como se esperaba. Un requisito que deben cumplir tanto X_R^μ como X_L^μ es que sean funciones reales implicando que x^μ y p^μ sean reales y por lo tanto

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger. \quad (1.57)$$

Si se realiza la derivada respecto a las coordenadas como de luz, se define una relación que será muy útil para cálculos posteriores

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}l_s p^\mu. \quad (1.58)$$

Entonces se escribe

$$\partial_- X_R^\mu = l_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (1.59)$$

$$\partial_+ X_L^\mu = l_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}. \quad (1.60)$$

Es importante determinar los corchetes de Poisson para las componentes de Fourier. En el gauge conforme los corchetes de Poisson son:

$$[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)]_{PB} = [\dot{X}^\mu(\sigma, \tau), \dot{X}^\nu(\sigma', \tau)]_{PB} = 0, \quad (1.61)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), \dot{X}^\nu(\sigma', \tau)]_{PB} = T^{-1}\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}. \quad (1.62)$$

Si se insertan (1.54) y (1.55) en estos corchetes se encuentran los corchetes de Poisson para las componentes de Fourier

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu]_{PB} = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{PB} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad (1.63)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{PB} = 0. \quad (1.64)$$

Viendo así que los modos de Fourier α_n^μ son las coordenadas de oscilador armónico, para valores de n distinto de cero.

1.5.2. Cuerda abierta

El análisis para la cuerda abierta es similar al anterior, excepto que los modos de oscilación en la cuerda abierta deben cumplir con la condición de borde (1.41) de Neumann

$$X^i(\tau, \sigma) = x_0^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + il_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{-in\tau} \alpha_n^\mu \cos n\sigma. \quad (1.65)$$

De la condición de borde impuesta se pierde la libertad de movimiento izquierdo y derecho, entonces aparece solamente un conjunto de modos α_n^μ . Causando así que se combinen en ondas estacionarias:

$$2\partial_\pm X^\mu = l_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (1.66)$$

donde $\alpha_0^\mu = l_s p^\mu$. Ahora bien ya encontradas las soluciones a la ecuación de movimiento, se puede hallar el Hamiltoniano:

$$H = \int d\sigma (\dot{X} \cdot P_0^\mu - L) = \frac{T}{2} \int d\sigma (\dot{X}^2 + X'^2) = T \int (\partial_+ X)^2 + (\partial_- X)^2. \quad (1.67)$$

El momento canónico conjugado es

$$P_0^\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^\mu} = T \dot{X}^\mu. \quad (1.68)$$

Usando las soluciones halladas anteriormente para la cuerda cerrada y abierta se obtiene:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (1.69)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n). \quad (1.70)$$

Como se expuso anteriormente por las condiciones impuestas a los modos de oscilación se nota que (1.69) es el Hamiltoniano de la cuerda abierta y (1.70) es el Hamiltoniano de la cuerda cerrada. El hamiltoniano genera la evolución temporal de la cuerda, este es adimensional porque se elige que τ sea adimensional.

Consideraremos los modos de expansión del tensor de energía-momentum. Usando los modos de expansión (1.50) y (1.51) de la cuerda cerrada se obtienen los modos:

$$T_{--} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-2im(\tau-\sigma)}, \quad T_{++} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{L}_m e^{-2im(\tau+\sigma)}. \quad (1.71)$$

Donde los coeficientes de Fourier son conocidos como generadores de Virasoro,

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \quad \tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n. \quad (1.72)$$

Los generadores de Virasoro para el caso de la cuerda abierta son

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n. \quad (1.73)$$

Comparando con el Hamiltoniano este se puede escribir como

$$H = L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (1.74)$$

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n). \quad (1.75)$$

La restricción impuesta al tensor de energía-momento implica en particular que:

$$L_0 = \tilde{L}_0 = 0. \quad (1.76)$$

Una cuerda en un estado de oscilación tiene una masa $M^2 = -p_\mu p^\mu$, donde p_μ es el momento total de la cuerda.

$$p^\mu = T \int d\sigma \dot{X}^\mu(\sigma). \quad (1.77)$$

Para la cuerda abierta

$$L_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \alpha' p^2 = 0, \quad (1.78)$$

en términos de los modos internos de oscilación de la cuerda queda

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (1.79)$$

En el caso de la cuerda cerrada debemos tomar en cuenta los modos de oscilación left y right, entonces se obtiene

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n). \quad (1.80)$$

Los corchetes de Poisson para los generadores de Virasoro, pueden ser calculados a partir de los corchetes de Poisson de los osciladores (1.63):

$$\begin{aligned} [L_m, L_n]_{PB} &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} [\alpha_{m-k} \cdot \alpha_k, \alpha_{m-l} \cdot \alpha_l]_{PB} \\ &= \frac{i}{2} \sum_k k \alpha_{m-k} \cdot \alpha_{k+n} + \frac{i}{2} \sum_k (m-k) \alpha_{m-k+n} \cdot \alpha_k, \\ [L_m, L_n]_{PB} &= i(m-n)L_{m+n}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

En la cuantización canónica promovemos el campo clásico y el momento canónico a operadores y reemplazamos el corchete de Poisson por el conmutador. La relación de

conmutación a tiempos iguales es:

$$\left[\hat{X}^\mu(\sigma), \hat{P}^\mu(\sigma') \right] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (1.82)$$

Los osciladores son también convertidos a operadores y su relación de conmutación es:

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}. \quad (1.83)$$

Al igual que en teoría cuántica de campos se define el orden normal como:

$$:\alpha_m^\mu \alpha_n^\nu := \begin{cases} \alpha_m^\mu \alpha_n^\nu & \text{si } m \leq n \\ \alpha_n^\nu \alpha_m^\mu & \text{si } n < m \end{cases}. \quad (1.84)$$

Los generadores de Virasoro definidos con orden normal quedan:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n :. \quad (1.85)$$

Una ambigüedad surge para los valores de L_0 y \tilde{L}_0 debido al orden normal

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (1.86)$$

y lo mismo sucede para \tilde{L}_0 . A esta ambigüedad en L_0 es necesario sumarle una constante arbitraria

$$L_0 \rightarrow L_0 - a, \quad (1.87)$$

esto se suma en todas las fórmulas y en especial al álgebra de Virasoro. La constante a contribuye al operador de masa, por la restricción impuesta a los modos cero del tensor energía-momento, en la cuerda abierta se pide que se cumpla

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0, \quad (1.88)$$

similar para la cuerda cerrada:

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0, \quad (\tilde{L}_0 - a) |\phi\rangle = 0. \quad (1.89)$$

El término de masa para la cuerda abierta es

$$\alpha' M^2 = N - a, \quad (1.90)$$

donde

$$N = \sum_n^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (1.91)$$

es llamado operador número, este posee autovalores enteros. Para la cuerda cerrada

$$\frac{1}{4}\alpha' M^2 = N - a = \tilde{N} - a. \quad (1.92)$$

Al realizar la diferencia de los modos de oscilación cero del tensor energía-momento

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |\phi\rangle = 0, \quad (1.93)$$

se cancela la constante “a”, implica que $N = \tilde{N}$, que se llama Level Matching Condition de la cuerda bosónica. Es una restricción que relaciona los modos de oscilación left y right.

1.6. Cuantización Cono de luz

Aun no se ha fijado completamente el gauge, es posible elegir un gauge conforme adicional, llamado gauge cono de luz, en que las restricciones de Virasoro se puedan resolver explícitamente y la teoría pueda ser descrita en términos de los grados físicos de libertad. Las coordenadas espacio-tiempo cono de luz están definidas como (X^+, X^-, X^i) , $i = 2, \dots, d-1$, X^i representa las coordenadas transversales

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1). \quad (1.94)$$

De el hecho que no se ha parametrizado completamente el gauge, la simetría satisface

$$\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Lambda \eta^{\alpha\beta}, \quad (1.95)$$

donde ξ^α es un parámetro infinitesimal para una reparametrización y Λ es un parámetro asociado con una transformación de Weyl. En esta notación el producto interno de dos vectores arbitrarios es

$$v \cdot w = \sum_i v^i w^i - v^+ w^- - v^- w^+. \quad (1.96)$$

Los índices son subidos y bajados por la regla:

$$v^- = -v_+, \quad v^+ = -v_-, \quad v^i = v_i. \quad (1.97)$$

En términos de las coordenadas cono de luz en la hoja mundo $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, la ecuación tiene soluciones

$$\xi^+ = \xi^+(\sigma^+), \quad \xi^- = \xi^-(\sigma^-). \quad (1.98)$$

Las transformaciones corresponden a

$$\tilde{\tau} = f(\sigma^+) + g(\sigma^-), \quad (1.99)$$

$$\tilde{\sigma} = f(\sigma^+) - g(\sigma^-). \quad (1.100)$$

La ecuación (1.99) afirma que $\tilde{\tau}$ podría ser solución a la ecuación de onda no masiva

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \tilde{\tau} = 0, \quad (1.101)$$

determinado $\tilde{\tau}$, entonces $\tilde{\sigma}$ es una constante. El gauge cono de luz es elegido

$$X^+(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) = x^+ + l_s^2 p^+ \tilde{\tau}. \quad (1.102)$$

Esto corresponde a la parte clásica haciendo cero los coeficientes α_n para $n \neq 0$. Este procedimiento no garantiza la invariancia de Lorentz a nivel cuántico y hay que verificarlo a mano. La ventaja del gauge cono de luz es que hace posible resolver las condiciones de Virasoro, habiendo fijado X^+ :

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{(\dot{X}^i \pm X'^i)^2}{2p^+ l_s}. \quad (1.103)$$

Los modos de expansión para X^- resultan:

$$X^- = x^- + p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (1.104)$$

donde

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+ l_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - a \delta_{n,0} \right). \quad (1.105)$$

En el gauge cono de luz es posible eliminar X^+ y X^- excepto para los modos cero de oscilación y se puede expresar la teoría en términos de los estados transversales de oscilación. Para valores $n = 0$ (1.105) la ecuación de masa es

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p_- - \sum_i p_i^2 = 2 \frac{N - a}{l_s^2}, \quad (1.106)$$

donde

$$N = \sum_i \sum_N \alpha_{-n}^i \alpha_n^i. \quad (1.107)$$

En este gauge como podemos observar todas las excitaciones están producidas por el modo transversal de oscilación α_n^i . El primer estado excitado es $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$ que es un vector con $(D-2)$ componentes y representa un grupo de rotación $SO(D-2)$. Los estados transversales sujetos a transformaciones de Lorentz, adquieren una polarización longitudinal a menos que sean no masivos. Por lo tanto, la cuerda bosónica en el gauge cono de luz es invariante de Lorentz si el estado $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$ es no masivo, implicando que $a = 1$. Calculando el orden normal se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (1.108)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación diverge y este necesita ser regularizado. Usando la función de regularización ζ , definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (1.109)$$

permite un valor analítico en $s = -1$ siendo

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (1.110)$$

Al sustituir en la ecuación (1.108), el resultado del término adicional queda

$$\frac{1}{2}(D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{D-2}{24}. \quad (1.111)$$

Sabemos que el valor de a es uno para la invariancia de Lorentz, entonces para que esto se cumpla el valor de D es $D = 26$. Ya determinado, los valores de $a = 1$ y $D = 26$ podemos determinar el espectro de la cuerda bosónica.

Estados físicos de la cuerda abierta

Para $N = 0$ el estado base es el taquión $|0; p\rangle$ cuya masa está dada por $\alpha' M^2 = -1$. Este estado es el taquión.

Para $N = 1$ el primer estado excitado como se vio antes es un bosón vectorial $\alpha_{-1}^\mu |0; p\rangle$ el cual es no masivo $M^2 = 0$. Transforma ante la representación fundamental del grupo $SO(24)$. Para $N \geq 2$ aparecen todos los estados masivos, estos estados están en diferentes representaciones del grupo $SO(25)$.

Estados físicos de la cuerda cerrada

En la cuerda cerrada existen dos estados de oscilación el left y right, sujetos al LMC⁴ los niveles de excitación en ambos sectores deben ser iguales. El espectro es deducido del producto tensorial de los modos de oscilación left y right, el cual cada uno tiene la misma estructura de los estados de la cuerda abierta. El operador de masa en la cuerda cerrada

$$\frac{1}{2}\alpha'M^2 = N + \tilde{N} - 2. \quad (1.112)$$

Los estados físicos de la cuerda cerrada. Para $N = 0$ el estado base $|0; p\rangle$ es el taquión con masa negativa $\alpha'M^2 = -4$. Para $N = \tilde{N} = 1$ el primer estado excitado es $\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^i |0; p\rangle$ no masivo bajo el grupo $SO(24)$. Este estado se puede descomponer en un singlete llamado dilaton, en un tensor simétrico sin traza que representa el gravitón y un tensor antisimétrico llamado Kalb-Ramond.

⁴Level Matching Condition.

Capítulo 2

Teoría de la supercuerda

“Lo más maravilloso de la ciencia es que está viva.”

— Richard Feynman

2.1. Cuerda Ramond-Neveu-Schwarz

La acción de la cuerda bosónica en el gauge conformal

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu, \quad (2.1)$$

donde el valor es $\alpha' = \frac{1}{2}$. Como se vio en el capítulo anterior esta es la acción del campo libre en dos dimensiones. Para generalizar esta acción se debe agregar grados de libertad en la hoja mundo descritos por fermiones.

Podemos agregar dos tipos de fermión, estos son el de Dirac o el de Majorana. Concretamente se trabaja con D fermiones de Majorana que poseen una representación vectorial del grupo de Lorentz $SO(D-1, 1)$. La acción obtenida de agregar los fermiones libres no masivos a la teoría bosónica es:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (2.2)$$

donde ρ^α , $\alpha = 0, 1$ representan las matrices de Dirac en dos dimensiones

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

obedecen el álgebra de Dirac $\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$. El espinor ψ^μ tiene dos componentes

reales

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

conocido como el espinor de Majorana. Cumple con varias propiedades que el espinor de Dirac no cumple, por ejemplo $\bar{\psi} = i\psi^T \rho^0$ ya que es real. La etiqueta ψ_\pm se refiere a la quiralidad, los autovalores bajo $\rho = \rho^0 \rho^1$

$$\rho \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Son llamados espinores de Majorana-Weyl, ya que ambos son reales y quirales. Esta notación permite reescribir la parte fermiónica de la acción

$$S_f = \frac{i}{\pi} \int \psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+, \quad (2.6)$$

donde ∂_\pm se refiere a las derivadas en las coordenadas cono de luz introducido en el capítulo anterior (1.48). Las ecuaciones de movimiento

$$\partial_+ \psi_- = 0, \quad \partial_- \psi_+ = 0, \quad (2.7)$$

para los modos de oscilación left y right respectivamente. La acción (2.2) es invariante ante las transformaciones

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon} \psi^\mu, \quad \delta \psi^\mu = -i \rho^\alpha (\partial_\alpha X^\mu) \epsilon, \quad (2.8)$$

son transformaciones supersimétricas y mezclan las coordenadas fermiónicas y bosónicas.

2.2. Expansión en Modos

Las posibles condiciones de contorno y modos de oscilación para el campo X^μ son los mismos encontrados en el caso de la cuerda bosónica y se pueden hallar en el capítulo anterior. Los modos de oscilación de la parte fermiónica se hallan considerando la variación de los campos ψ_\pm en la acción (2.6). Buscando que los términos de superficie sean cero

$$\delta S_f \approx \psi_+ \delta_+ - \psi_- \delta_- |_{\sigma=\pi} + \psi_- \delta_- - \psi_+ \delta_+ |_{\sigma=0}. \quad (2.9)$$

Hay varias maneras de hacer cero el término de superficie.

2.2.1. Cuerda abierta

En la cuerda abierta los dos términos son cero por separado. Se satisface si $\psi_+ = \pm\psi_-$. Eligiendo

$$\psi_+^\mu(0, \tau) = \psi_-^\mu(0, \tau). \quad (2.10)$$

Los posibles casos de elección de signo para la cuerda en $\sigma = \pi$, el primer caso es la condición de contorno Ramond

$$\psi_+^\mu(\pi, \tau) = \psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (2.11)$$

apropiado para la descripción de los estados fermiónicos. Sus modos de expansión son:

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (2.12)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (2.13)$$

La condición de Majorana requiere que la expansión sea real entonces $d_{-n} = d_n^\dagger$. La segunda posibilidad son los términos de contorno Neveu-Schwarz, correspondiente a la elección

$$\psi_+^\mu(\pi, \tau) = -\psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (2.14)$$

apropiado para la descripción de los estados bosónicos. Sus modos de expansión son:

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}, \quad (2.15)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}, \quad (2.16)$$

la suma sobre los modos r que son semi-enteros. Estos estados bosónicos son distintos de los descritos en la cuerda bosónica.

2.2.2. Cuerda cerrada

La cuerda cerrada tiene dos modos de oscilación, correspondiente a los modos de oscilación left y right. Las dos posibilidades de periodicidad son

$$\psi_\pm(\sigma, \tau) = \pm\psi(\sigma + \pi, \tau). \quad (2.17)$$

El signo positivo describe condiciones de contorno periódicas, asociadas al sector Ramond y el signo negativo describe condiciones de contorno antiperiódicas, asociadas al sector Neveu-Schwarz. Imponemos las condiciones por separado a los modos de oscilación. En los modos de oscilación right

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (2.18)$$

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)}. \quad (2.19)$$

En los modos de oscilación left

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (2.20)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)}. \quad (2.21)$$

Existen distintas combinaciones de los modos de oscilación, dos de estos sectores describen estados bosónicos en la cuerda cerrada, R-R, NS-NS y R-NS, NS-R, describen estados fermiónicos.

Los super generadores de Virasoro son los modos de oscilación del tensor energía-momentum $T_{\alpha\beta}$ y la supercorriente J^α . En la cuerda abierta están dados por

$$L_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} T_{++} = L_m^{(b)} + L_m^{(f)}. \quad (2.22)$$

La contribución de los modos bosónicos es

$$L_m^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_{m+n} : . \quad (2.23)$$

La contribución de los modos fermiónicos en el sector NS es

$$L_m^{(f)} = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(r + \frac{m}{2} \right) : b_{-r} \cdot b_{m+r} : . \quad (2.24)$$

Los modos de supercorriente

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ir\sigma} J_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \cdot b_{r+n}. \quad (2.25)$$

En el sector R

$$L_m^{(f)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(n + \frac{m}{2} \right) : d_{-n} \cdot d_{m+n}. \quad (2.26)$$

Los modos de la supercorriente

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} J_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \cdot d_{m+n}. \quad (2.27)$$

2.3. Cuantización Canónica

La relación de conmutación de los modos en expansión de Fourier de la coordenada espacio-tiempo satisface la misma relación de conmutación que en la cuerda bosónica (1.83). Para poder cuantizar la teoría, podemos introducir la relación canónica de anticonmutación para el campo fermiónico en la world-sheet

$$\{\psi_A^\mu(\sigma, \tau), \psi_A^\mu(\sigma', \tau)\} = \pi \eta^{\mu\nu} \delta_{AB} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.28)$$

Implica que los coeficientes satisfacen

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} \quad \{d_m^\mu, d_m^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}. \quad (2.29)$$

Esto mismo en los modos de oscilación left. Como vimos en la cuerda bosónica los modos cero de los generadores de Virasoro dan la fórmula de masa

$$\alpha' M^2 = N + a_{NS} + a_R, \quad (2.30)$$

a_{NS} y a_R son constantes por el efecto de orden normal. El operador número lo podemos escribir de dos formas distintas

$$N = N^\alpha + N^d, \quad (2.31)$$

$$N = N^\alpha + N^b, \quad (2.32)$$

donde N^α lo definimos anteriormente en la cuerda bosónica (1.91), en el sector fermiónico los operadores número son:

$$N^d = \sum_{m=1}^{\infty} m d_{-m} \cdot d_m, \quad (2.33)$$

$$N^b = \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r. \quad (2.34)$$

Los estados de más baja energía corresponden a los osciladores de estado base

$$\alpha_m |0\rangle_R = d_m^\mu |0\rangle_R = 0 \quad m > 0, \quad (2.35)$$

$$\alpha_m |0\rangle_{NS} = b_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad m, r > 0. \quad (2.36)$$

Similar para la cuerda cerrada. Los estados excitados del estado base son alcanzados aplicando los modos negativos α_{-m}^μ o b_{-r}^μ , aumentan los autovalores de $\alpha' M^2$ por r unidades y similar para d_{-m}^μ que incrementa m unidades. Una diferencia entre el sector NS y R, es que el estado base para el sector NS es único, corresponde al estado de espín 0, un escalar en el espacio-tiempo y si aplicamos el operador de creación varias veces entonces obtenemos estados excitados que también son bosones.

En el sector Ramond el estado base es degenerado, se puede ver que los operadores d_0^μ actúan sin cambiar la masa del estado ya que conmuta con el operador número. La relación de anticonmutación (2.35) implica

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Comparando con el álgebra de Clifford $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ se identifica a d_0^μ

$$d_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma^\mu. \quad (2.38)$$

El estado $|0\rangle_R$ provee una representación de d -dimensiones del álgebra de Clifford siendo así un fermión. Aplicando el operador de creación al estado base, se obtienen estados excitados fermiónicos, estos estados transforman entonces como un espinor bajo el grupo $SO(D-1, 1)$.

La cuantización de la acción RNS imponemos restricciones en que los modos positivos de Virasoro aniquilen el estado físico, similar a lo que se pide en la cuerda bosónica. En el sector NS la condición

$$G_r |\phi\rangle = 0 \quad r > 0, \quad (2.39)$$

$$L_m |\phi\rangle = 0 \quad m > 0, \quad (2.40)$$

$$(L_0 - a_{NS}) |\phi\rangle = 0. \quad (2.41)$$

La condición (2.41) implica que $\alpha' M^2 = N - a_{NS}$. Similar en el sector Ramond las condiciones

$$F_n |\phi\rangle = 0 \quad n \geq 0, \quad (2.42)$$

$$L_m |\phi\rangle = 0 \quad m > 0, \quad (2.43)$$

$$(L_0 - a_R) |\phi\rangle = 0. \quad (2.44)$$

Como se halló en la cuerda bosónica, existen valores específicos para a y D produciendo estados de norma cero que no son presentes genéricamente. La dimensión crítica resulta ser $D = 10$, mientras que los valores dependen del sector

$$a_{NS} = \frac{1}{2}, \quad a_R = 0. \quad (2.45)$$

Como en la cuerda bosónica esta teoría es invariante ante transformaciones Lorentz solamente para estos valores. En el sector Neveu-Schwarz usando los valores encontrados la fórmula de masa es

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i - \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

El estado base es aniquilado por los modos positivos, satisfaciendo

$$\alpha_n^i |0; p\rangle_{NS} = b_r^i |0; p\rangle_{NS} = 0. \quad (2.47)$$

Como se dijo anteriormente el estado base en NS es un escalar en el espacio-tiempo. De la fórmula de masa vemos que

$$\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}. \quad (2.48)$$

Como vemos nuevamente es un tachyon. El primer estado excitado actúa con el operador de creación en el estado base $b_{-\frac{1}{2}}^i$

$$b_{-\frac{1}{2}}^i |0; p\rangle_{NS}. \quad (2.49)$$

La razón por la que usamos el operador b_{-r}^i es que en la fórmula de masa podemos ver que este nos da r unidades semi enteras y α_{-m}^i aumenta m unidades enteras. De esto vemos que si usamos el mismo razonamiento de la cuerda bosónica, la masa de este vector debe ser cero entonces

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{2} - a_{NS}, \quad (2.50)$$

se estima el valor de $a_{NS} = \frac{1}{2}$. En el sector Ramond la ecuación de masa

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{-n}^i d_n^i. \quad (2.51)$$

El estado base es

$$\alpha_n^i |0; p\rangle_R = d_n^i |0; p\rangle_R = 0 \quad n > 0, \quad (2.52)$$

siendo así un estado con representación $SO(9, 1)$. Un espinor de Dirac en 10 dimensiones tiene 32 componentes reales, la ecuación de Dirac relaciona la mitad de ellas e imponiendo las condiciones de Weyl y Majorana, cada restricción reduce el número de componentes en un factor de dos, dejando solamente 8 componentes independientes. Estos pueden ser vistos como componentes de un espinor Majorana-Weyl de $SO(8)$. Los estados excitados se obtienen de actuar con α_{-n}^i o d_{-n}^i en el estado base, resultan estados fermiónicos del espacio-tiempo.

En el sector de NS existe el problema del tachyon y se quiere eliminarlo. Imponiendo una restricción extra, eliminando algunos estados, incluyendo el tachyon, manteniendo las partículas no masivas. [1] En esta proyección GSO definimos el operador llamado G-paridad. En el sector NS la proyección

$$G = (-1)^{F+1} = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r}^i b_r^i + 1}. \quad (2.53)$$

Donde F es el numero de osciladores excitados, que es el número de fermiones en la hoja mundo. Determinando así si un estado tiene un número par o impar de fermiones excitados. En el sector R la proyección

$$G = \Gamma_{11} (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n}^i d_n^i}. \quad (2.54)$$

Donde Γ_{11} es análogo a la matriz de Dirac γ_5 en 4 dimensiones, satisfaciendo $(\Gamma_{11})^2 = 1$ y $\{\Gamma_{11}, \Gamma^\mu\} = 0$, el espinor satisface

$$\Gamma_{11} \psi = \pm \psi. \quad (2.55)$$

Muestra una quiralidad positiva o negativa. La proyección GSO consiste en dejar solamente los estados con G-paridad positivas en NS

$$(-1)^{F_{NS}} = -1. \quad (2.56)$$

Los estados con G-paridad negativa son eliminados. Entonces en el sector NS debemos tener un numero impar de b osciladores. En el sector Ramond la G-paridad puede ser positiva o negativa dependiendo de la quiralidad del spinor. La GSO elimina la proyección del tachyon en la cuerda abierta del espectro

$$G |0; p\rangle_{NS} = - |0; p\rangle_{NS}. \quad (2.57)$$

Del espectro del sector NS el primer estado excitado $b_{-\frac{1}{2}} |0\rangle_{NS}$ tiene paridad positiva. Entonces luego de la proyección GSO el estado base es ahora el bosón vectorial no

masivo.

Hasta ahora se ha trabajado en la cuerda abierta, para analizar el espectro de la cuerda cerrada es necesario considerar las oscilaciones left y right. Como se dijo anteriormente hay cuatro posibles combinaciones, R-R, R-NS, NS-R, NS-NS. Como se vio en la proyección GSO se elimina el tachyon en el sector NS. Para el sector R obtenemos estados con G-paridad positiva o negativa dependiendo de la quiralidad de los estados base. Dando lugar a dos diferentes teorías dependiendo si la G-paridad de los sectores left o right son las mismas u opuestas.

En la teoría tipo *IIB* las oscilaciones left y right en el sector de Ramond los estados base tienen la misma quiralidad, por lo tanto tienen la misma G-paridad, usaré la notación que se encuentra [1], denotando así cada una de ellas como $|+\rangle_R$. Entonces el espectro para la cuerda cerrada

$$|+\rangle_R \otimes |+\rangle_R, \quad (2.58)$$

$$\tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i |0\rangle_{NS} \otimes b_{-\frac{1}{2}}^j |0\rangle_{NS}, \quad (2.59)$$

$$\tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i |0\rangle_{NS} \otimes |+\rangle_R, \quad (2.60)$$

$$|+\rangle_R \otimes b_{-\frac{1}{2}}^j |0\rangle_{NS}. \quad (2.61)$$

Este espectro no masivo es de la cuerda tipo *IIB* en supergravedad de 10 dimensiones. Para el tipo *IIA* la oscilación left y right del sector Ramond tienen quiralidad opuesta, los estados no masivos en el espectro

$$|-\rangle_R \otimes |+\rangle_R, \quad (2.62)$$

$$\tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i |0\rangle_{NS} \otimes b_{-\frac{1}{2}}^j |0\rangle_{NS}, \quad (2.63)$$

$$\tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i |0\rangle_{NS} \otimes |-\rangle_R, \quad (2.64)$$

$$|-\rangle_R \otimes b_{-\frac{1}{2}}^j |0\rangle_{NS}. \quad (2.65)$$

Ambas teorías de supergravedad, tipo *IIA* y *IIB*, tienen $N = 2$ multipletes de supergravedad, ya que ambas teorías poseen dos gravitinos Majorana-Weyl de $SO(1, 9)$. Las representaciones de los estados no masivos en los diferentes sectores, en el sector NS-NS

$$IIA : \quad (1) + (28) + (35)_v, \quad (2.66)$$

$$IIB : \quad (1) + (28) + (35)_v. \quad (2.67)$$

Contienen el mismo espectro de estados, un escalar el dilatón, 28 estados de un tensor antisimétrico de rango dos, 35 estados de un tensor simétrico llamado gravitón. En el

sector NS-R y R-NS

$$IIA : (8)_c + (56)_s, \quad (2.68)$$

$$IIB : (8)_c + (56)_s. \quad (2.69)$$

Cada sector contiene 56 estados del gravitino que tiene spin $\frac{3}{2}$ y 8 estados de un fermión llamado también dilaton con un espin $\frac{1}{2}$. El sector R-R

$$IIA : (8)_v + (56)_v, \quad (2.70)$$

$$IIB : (1) + (28) + (35)_s. \quad (2.71)$$

En el caso *IIA* que tienen diferente quiralidad, se obtiene 8 estados de un vector y 56 estados de un tensor antisimétrico de rango 3. El caso de la cuerda *IIB* que tienen una misma quiralidad se obtiene un escalar, 28 estados de un tensor antisimétrico de rango dos y 35 estados de un tensor antisimétrico de rango 4.

2.4. La cuerda heterótica

Es una cuerda con supersimetría $N=1$. Implementa esta supersimetría combinando los grados de libertad left de la cuerda bosónica con los grados de libertad right de la cuerda supersimétrica. Su espectro está basado en supermultipletes basados en los grupos $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$. En la acción (2.2) el espacio supersimétrico surge de incluir los sectores Ramond y Neveu-Schwarz con la proyección GSO. Hasta ahora solamente hemos discutido el caso en la hoja mundo donde los osciladores left y right de la cuerda bosónica y supersimétrica están desacoplados, pero en la cuerda heterótica la estructura de la cuerda es diferente usa los osciladores left de la cuerda bosónica y los osciladores right de la cuerda supersimétrica.

Incorporamos grados de libertad de gauge considerando una extensión distinta de la cuerda bosónica. Específicamente, agreguemos fermiones que sean singletes ante transformaciones de Lorentz en el espacio tiempo pero deben de tener un número interno. Introduciendo n fermiones Majorana λ^A con $A = 1, \dots, N$, la acción es

$$S = \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \bar{\lambda}^A \rho^\alpha \partial_\alpha \lambda^A). \quad (2.72)$$

Esta teoría tiene una simetría global $SO(n)$, bajo la cual λ^A transforma en la representación fundamental y las coordenadas X^μ queda invariante. Escribiendo la acción en el gauge cono de luz se evidencia que las oscilaciones left y right se transforman independientemente bajo la simetría global $SO(n)_L \times SO(n)_R$, esto nos indica que la simetría actual es mas grande que $SO(n)$.

Los modos de oscilación left corresponden a la cuerda bosónica y debe de tener 26 dimensiones, una posibilidad de cumplir esto es con la construcción fermiónica de la cuerda heterótica, se tienen 10 modos bosónicos de oscilación left y 32 modos de oscilación left fermiónicos, dando así $10 + \frac{32}{2} = 26$, es claro que es una teoría de 10 dimensiones. La acción de la cuerda heterótica en la formulación fermiónica es

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma (2\partial_+ X_\mu \partial_- X^\mu + i\psi^\mu \partial_+ \psi_\mu + i \sum_{A=1}^{32} \lambda^A \partial_- \lambda^A), \quad (2.73)$$

donde las coordenadas van desde 0 hasta 9 y tienen una representación $SO(9, 1)$, mientras que λ^A es un singlete de Lorentz. Esta acción tiene una simetría $SO(32)$ en la cual λ^A transforma en la representación fundamental.

Modos de oscilación right

Satisfacen las restricción de los supergeneradores de Virasoro como los modos de oscilación right de la supercuerda tipo II . En el sector Neveu-Schwarz debe satisfacer las siguientes condiciones

$$G_r |\phi\rangle = L_m |\phi\rangle = \left(L_0 - \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle = 0. \quad (2.74)$$

La condición de masa está dada por L_0

$$\left(L_0 - \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle = \left(\frac{p^2}{8} + N_R - \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle = 0, \quad (2.75)$$

donde

$$N_R = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_r \cdot b_r \quad (2.76)$$

En el sector Ramond la condición de los estados físicos es

$$F_m |\phi\rangle = L_m |\phi\rangle = 0. \quad (2.77)$$

La condición de masa es

$$L_0 |\phi\rangle = \left(\frac{p^2}{8} + N_R \right) |\phi\rangle = 0, \quad (2.78)$$

donde

$$N_R = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + n d_{-n} \cdot d_n). \quad (2.79)$$

Modos de oscilación left

Los modos de oscilación left pueden tener condiciones de contorno periódicas o antiperiódicas, como vimos en el formalismo RNS. Las condiciones de contorno periódicas P son análogas a las condiciones Ramond de la supercuerda. La expansión en modos en el sector P es

$$\lambda^A(\tau + \sigma) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \lambda_n^A e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (2.80)$$

Las condiciones de contorno antiperiódicas A, son análogas al sector Neveu-Schwarz de la supercuerda. La expansión en modos en el sector A es

$$\lambda^A(\tau + \sigma) = \sum_{r \in \mathcal{Z} + \frac{1}{2}} \lambda_r^A e^{-2ir(\tau + \sigma)}. \quad (2.81)$$

Los modos de oscilación left cumplen con la restricción de Virasoro

$$\tilde{L}_m |\phi\rangle = (\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |\phi\rangle = 0. \quad (2.82)$$

Los sectores P y A deben ser tratados de forma separada. El sector P satisface la restricción

$$(\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |\phi\rangle = \left(\frac{p^2}{8} + N_L - \tilde{a}_p \right) |\phi\rangle = 0, \quad (2.83)$$

donde

$$N_L = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n + n \lambda_{-n}^A \lambda_n^A). \quad (2.84)$$

El sector A satisface la restricción

$$\left(\frac{p^2}{8} + N_L - \tilde{a}_A \right) |\phi\rangle = 0, \quad (2.85)$$

donde

$$N_L = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r \lambda_{-r}^A \lambda_r^A. \quad (2.86)$$

Se puede hallar los valores de las constantes \tilde{a}_A y \tilde{a}_p

$$\tilde{a}_A = 1, \quad \tilde{a}_p = -1. \quad (2.87)$$

Así la fórmula de masa en el sector A es

$$\frac{1}{8} M^2 = N_R = N_L - 1, \quad (2.88)$$

y en el sector P es

$$\frac{1}{8}M^2 = N_R = N_L + 1. \quad (2.89)$$

Capítulo 3

Teoría Doble de Campos

“Toda obra, cualquiera que sea, literaria, política, científica, debe estar respaldada por una conducta.”

— Miguel Angel Asturias

La Teoría Doble de Campos propone introducir una T-dualidad (simetría propia de la teoría de cuerdas) como simetría de una teoría de campos. Motivado por la cuerda en un espacio compactificado en un toro, se consideran estados no masivos. Los campos dinámicos de la teoría son, la métrica, la dos-forma y un campo escalar. La teoría va a depender de la coordenada del espacio-tiempo y sus coordenadas duales \tilde{x} (asociadas al winding). En particular introducimos una coordanda generalizada $X^M = (\tilde{x}_\mu, \tilde{y}_m, x^\mu, y^m)$ donde x^μ , $\mu = 1, \dots, d$ son las direcciones no compactas, y^m , $m = 1, \dots, D - d$ son las coordenadas compactas. [2]

3.1. Compactificación teorías Kaluza-Klein

Surgió como una idea de unificar el electromagnetismo con la gravedad. El punto de partida de esta teoría es considerar la teoría de gravedad de Einstein en cinco dimensiones. Separando las coordenadas

$$\hat{x}^\mu = x^\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

$$\hat{x}^4 = \theta. \quad (3.2)$$

Consideramos una compactificación en la dimensión extra en un círculo de radio pequeño. Usando el siguiente ansatz

$$\tilde{g}_{AB}(x) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) - \xi^2 A_\mu A_\nu \tilde{g}_{55} & \xi A_\mu \tilde{g}_{55} \\ \xi A_\nu \tilde{g}_{55} & -\tilde{g}_{55} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Para transformaciones de coordenadas generales sin dependencia en θ , los elementos fuera de la diagonal transforman como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon. \quad (3.4)$$

La transformación de la coordenada compacta

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta + \xi \epsilon(x), \quad (3.5)$$

induce una transformación de gauge abeliana, por lo tanto A_μ es un potencial de gauge D-1 dimensiones. Esto significa que las coordenadas internas están provistas de una simetría interna y debe ser interpretada como otra simetría del espacio-tiempo.

La escala natural de las masas para esta teoría es de la escala de la masa de Planck. Si se supone un campo escalar no masivo en 4 + 1 dimensiones

$$\square_x \Phi(x) = 0. \quad (3.6)$$

Si realizamos una expansión de Fourier en la variedad compacta

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^n(x) e^{i \frac{k}{R} \theta}, \quad (3.7)$$

y si sustituimos en (3.6)

$$m_k^2 = \frac{k^2}{R^2}. \quad (3.8)$$

La colección de estos escalares masivos son llamados la torre de estados de Kaluza-Klein. Los campos $\phi^n(x)$ son los autoestados de masa en 4 dimensiones y los campos $\phi^0(x)$ son los no masivos. A medida que el radio se hace más pequeño el espectro de los campos escalares masivos se desacopla considerablemente del espectro de bajas energías.

3.2. Compactificación

En la teoría de la cuerda bosónica se predice que la dimensión del espacio tiempo es $D = 26$ y mientras que en la cuerda supersimétrica esta sería $D = 10$. Es necesario un mecanismo por el cual sea posible hacer contacto con el mundo real en 4 dimensiones. El mecanismo que se utiliza para que esto suceda es el de compactificar dimensiones extras como vimos anteriormente, el caso más simple teniendo una dimensión extra, la cuerda se enrolla en la dirección de la dimensión compacta formando un círculo de radio R . [1]

Compactifiquemos en la dirección 25 de la cuerda en un círculo S^1 de radio R ($\mathbb{R}^{24,1} \times S^1$)

$$X^{25}(\sigma + \pi, \tau) = X^{25}(\sigma, \tau) + 2\pi RW, \quad W \in \mathbb{Z}, \quad (3.9)$$

donde W es el número de enrollamiento (winding). El winding indica la cantidad de veces que la cuerda se enrolla alrededor del círculo y el signo indica la dirección como se ve en la tabla (3.1). La cuerda con número de winding cero es considerada una cuerda cerrada usual la cual puede ser contraída hasta un punto de manera continua, todo lo contrario sucede con la cuerda que tiene el número de winding diferente de cero ya que no se puede llegar al estado fundamental de una manera continua, estos son llamados solitones.

signo	winding
+	1
	0
-	1

Tabla 3.1: Una dimensión compacta y una dimensión no compacta.

Por la condición (3.9) la solución a la cuerda para X^μ $\mu = 0, \dots, 24$ no debe cambiar comparada con la encontrada a la expansión en 26 dimensiones. Pero en la coordenada $\mu = 25$ esto cambia agregando un término lineal en σ :

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + 2\alpha' p^{25} \tau + 2RW\sigma + \dots \quad (3.10)$$

p^{25} es el autovalor del momento a lo largo de la dirección cuantizada[7].

$$p^{25} = \frac{K}{R} \quad K \in \mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

donde K es llamado número de excitación de Kaluza-Klein. Partiendo de que X satisface la ecuación de la onda, separamos la solución en parte left y right

$$X(\tau, \sigma) = X_L(\tau + \sigma) + X_R(\tau - \sigma). \quad (3.12)$$

Aplicando la condición (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} X_R^{25}(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}(x^{25} - \tilde{x}^{25}) + \left(\alpha' \frac{K}{R} - WR \right) (\tau - \sigma) + \dots, \\ X_L^{25}(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}(x^{25} + \tilde{x}^{25}) + \left(\alpha' \frac{K}{R} + WR \right) (\tau + \sigma) + \dots, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definiendo así para la dimensión periódica

$$p_R^{(25)} = \frac{K}{R} - \frac{WR}{\alpha'}, \quad (3.14)$$

$$p_L^{(25)} = \frac{K}{R} + \frac{WR}{\alpha'}. \quad (3.15)$$

Recordemos que para la cuerda sin compactificar teníamos que:

$$\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu = p^\mu \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}. \quad (3.16)$$

Se puede reescribir el movimiento de la cuerda en términos de los modos de expansión

$$X_R^{25}(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}(x^{25} - \tilde{x}^{25}) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^{25}(\tau - \sigma) + \dots, \quad (3.17)$$

$$X_L^{25}(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}(x^{25} + \tilde{x}^{25}) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\alpha}_0^{25}(\tau + \sigma) + \dots, \quad (3.18)$$

donde

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^{25} = \alpha' \frac{K}{R} - WR, \quad (3.19)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\alpha}_0^{25} = \alpha' \frac{K}{R} + WR. \quad (3.20)$$

Lo interesante sobre este mecanismo es estudiar lo que sucede con la cuerda en los estados de oscilación, teniendo una fórmula de masa para los distintos estados de oscilación en la cual cada estado de excitación de Kaluza-Klein es asociado a una partícula distinta, este mecanismo debe cumplir la condición relativista de masa

$$M^2 = -p_\mu p^\mu. \quad (3.21)$$

Por otro lado, al observar la cuerda cerrada existe un problema con el ordenamiento normal de L_0 y se definía

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (3.22)$$

En la versión cuántica ordenando normalmente a todas las fórmulas que contengan a L_0 se le suma una constante, imponiendo así una restricción a la condición que establece que todo movimiento permitido de la cuerda debe ser aniquilado por L_0 . Siendo esta la condición de la formula masa

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0 \quad (\tilde{L}_0 - a) |\phi\rangle = 0. \quad (3.23)$$

Tomando en cuenta los osciladores left y right se obtiene

$$M_{26}^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n - 2a). \quad (3.24)$$

La condición incluye la contribución para todas las 26 dimensiones. Tomando la suma para la ecuación (3.15) y (3.14)

$$M_{25}^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) + \frac{K^2}{R^2} + \frac{W^2 R^2}{\alpha'^2}. \quad (3.25)$$

De esta ecuación se reconocen cinco contribuciones estas provienen de los osciladores, el momentum de compactificación, la energía aportada por el winding de la cuerda y el punto cero de la energía.

Una nueva característica surge tomando la diferencia en vez de la suma, son los modos de oscilación de la cuerda están restringidos por el Level Matching Condition (LMC)

$$N - \tilde{N} = WK. \quad (3.26)$$

Recordemos que antes de compactificar $N = \tilde{N}$. Esto refleja el hecho de que no hay punto especial en una cuerda cerrada. Algo que es muy fácil notar de la ecuación (3.26) es que si el número de winding es cero esta regresaría al LMC usual, restaurando la simetría entre los osciladores izquierdos y derechos. Si ahora se hace $W = 0$ y $K \neq 0$ contiene la torre de estados masivos de KK. Si ahora se toma la condición $W \neq 0$ se obtiene los estados de masa del winding. Se debe de notar que la formula de masa (3.25) refleja el coste de energía del winding debido a la tensión de la cuerda. El sector de winding representa un efecto de la cuerda no presente en la partícula puntual.

3.3. T-dualidad

Es importante destacar de la formula de masa (3.25) para la cuerda bosónica cerrada compactificada en un círculo de radio R se observa que el espectro de masa es invariante ante transformaciones,

$$W \leftrightarrow K \quad R \leftrightarrow \tilde{R}. \quad (3.27)$$

Esta transformación es llamada T-dualidad y también se puede notar en la ecuación (3.26) la misma simetría. Sugiere que la compactificación en un círculo de radio R es físicamente equivalente a la de un círculo de radio \tilde{R} . La T-dualidad es una simetría de la teoría de cuerdas incluso cuando se incluye interacciones.

Al realizar el cambio (3.27) en la ecuación (3.15) y (3.14) se corresponde a la transfor-

mación

$$p_L \rightarrow p_L \quad p_R \rightarrow -p_R. \quad (3.28)$$

No solo sucede en los momenta el cambio de signo, sino en toda la parte que involucra a la coordenada compacta

$$X_L \rightarrow X_L \quad X_R \rightarrow -X_R. \quad (3.29)$$

Esta transformación es equivalente a la transformación $X \rightarrow \tilde{X}$ donde,

$$\tilde{X}(\tau, \sigma) = X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma). \quad (3.30)$$

Esta coordenada \tilde{X} será la coordenada dual a X en teoría doble de campos. Usando las ecuaciones (3.17) y (3.18) la coordenada \tilde{x} resulta

$$\tilde{X}_{25}(\sigma, \tau) = \tilde{x}_{25} + 2\alpha' \frac{K}{R} \sigma + 2WR\tau + \dots \quad (3.31)$$

El espectro de masa y todas las interacciones son invariantes ante las transformaciones (3.27) consecuente a esto existe una distancia mínima $R = \sqrt{\alpha'}$ correspondiente al radio autodual. Esta es una simetría propia de la teoría de cuerdas que no existe en la teoría de campos.

3.4. Compactificación Toroidal

Consideramos una cuerda cerrada en un espacio tiempo con n dimensiones compactificadas, se tiene un producto del espacio de Minkowski con el n -toro $\mathcal{R} \times T^n$. Denotamos a la coordenada compacta por x^a y la coordenada no compacta por x^μ , con $x^i = (x^a, x^\mu)$. La coordenada compacta tiene una periodicidad de 2π .

En el espacio de Minkowski tenemos la métrica $\eta^{\mu\nu}$ con la signatura que hasta ahora hemos trabajado y el espacio compactificado tiene una métrica G_{ij} . La acción descrita por la cuerda en una compactificación toroidal es

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j G_{ij} + \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j B_{ij} \right). \quad (3.32)$$

Donde

$$\epsilon^{\sigma,\tau} = -1, \quad G_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & G_{ab} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{ab} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

La métrica G_{ij} y el tensor antisimétrico B_{ij} , son matrices de $D \times D$ constantes. Se introduce una matriz E que contenga una parte simétrica G y una parte antisimétrica B definida por

$$E_{ij} = G_{ij} + B_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & E_{ab} \end{pmatrix}, \quad E_{ab} = G_{ab} + B_{ab}. \quad (3.34)$$

Por la acción (3.32) el momentum canónico esta dado por

$$P_i = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^i} = \frac{1}{2\pi} \left(G_{ij} \dot{X}^j + B_{ij} X'^j \right). \quad (3.35)$$

Los modos de expansión de la cuerda toman la forma

$$X_L^i(\tau + \sigma) = \frac{1}{2} x^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\alpha}_0^i(\tau + \sigma) + \dots, \quad (3.36)$$

$$X_R^i(\tau - \sigma) = \frac{1}{2} x^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_0^i(\tau - \sigma) + \dots. \quad (3.37)$$

Por lo tanto

$$X^i(\tau, \sigma) = X_L^i(\tau + \sigma) + X_R^i(\tau - \sigma), \quad (3.38)$$

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\alpha}_0^i + \alpha_0^i) \tau + \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\alpha}_0^i - \alpha_0^i) \sigma + \dots. \quad (3.39)$$

Al imponer la condición de periodicidad se obtiene que el winding es:

$$W^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\alpha}_0^i - \alpha_0^i). \quad (3.40)$$

El momentum total de la cuerda lo obtenemos de integrar (3.35)

$$p_i = G_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\alpha}_0^i + \alpha_0^i) + B_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\alpha}_0^i - \alpha_0^i). \quad (3.41)$$

Los modos cero están dados por

$$\alpha_0^i = \frac{1}{\sqrt{2}} G^{ij} (p_j - E_{jk} W^k), \quad (3.42)$$

$$\tilde{\alpha}_0^i = \frac{1}{\sqrt{2}} G^{ij} (p_j + E_{kj} W^k). \quad (3.43)$$

Siguiendo el cálculo de la cuerda bosónica los generadores de Virasoro con modos ceros están dados por

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^i G_{ij} \alpha_0^j + N - 1, \quad (3.44)$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_0^i G_{ij} \tilde{\alpha}_0^j + \tilde{N} - 1. \quad (3.45)$$

La cuerda cerrada debe cumplir con la condición (LMC). Podemos expresar $L_0 - \tilde{L}_0$ usando (3.42) y (3.43) como:

$$L_0 - \tilde{L}_0 = N - \tilde{N} + \partial_i \tilde{\partial}^i. \quad (3.46)$$

La LMC ahora toma la siguiente forma:

$$N - \tilde{N} = -\partial_i \tilde{\partial}^i. \quad (3.47)$$

Como vimos en la cuerda bosónica los estados no masivos con $N = \tilde{N} = 1$ son e_{ij} con el gravitón (simétrico), Kalb-Ramond (antisimétrico) y d con el dilatón (escalar)

$$\partial_k \tilde{\partial}^k e_{ij}(\tilde{x}, x) = \partial_k \tilde{\partial}^k d(\tilde{x}, x) = 0. \quad (3.48)$$

Esta es una importante restricción que debe cumplirse en teoría de cuerdas y en Teoría Doble de Campos. Cuando la LMC en DFT actúa en los campos sera llamado restricción débil y cuando actué sobre un producto de campos sera llamado restricción fuerte (lo veremos mas adelante).

3.5. Transformación $O(D, D)$ en una compactificación toroidal

La T-dualidad en una compactificación toroidal, con una métrica constante y el campo antisimétrico, están relacionadas con rotaciones del grupo $\mathcal{O}(D, D, \mathbb{R})$. Sin embargo, no todos los elementos del grupo dejan el espectro de la teoría invariante. El subgrupo que deja invariante el espectro es $\mathcal{O}(D, D, \mathbb{Z})$. El Hamiltoniano de la teoría esta dado por:

$$H = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathbb{H} = \frac{1}{2} \mathcal{P} \mathcal{H}(E) \mathcal{P} + N + \tilde{N} + \dots, \quad (3.49)$$

donde \mathbb{H} es la densidad Hamiltoniana y los puntos representan términos que no son relevantes para nuestra discusión. La matriz \mathcal{H} tiene la forma dada por:

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik}b_{kj} \\ g^{ik}b_{kj} & g_{ij} - b_{ik}g^{kl}b_{lj} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

es una matriz de $2D \times 2D$ simétrica. Esta es llamada la métrica generalizada con índices $M, N = 1, \dots, 2D$. La matriz generalizada se puede escribir como un producto de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{MN} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H}_{MN} &= \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik}b_{kj} \\ g^{ik}b_{kj} & g_{ij} - b_{ik}g^{kl}b_{lj} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

al igual su inversa. Los elementos del grupo $\mathcal{O}(D, D)$ pueden ser definidos como un conjunto de matrices h_{MN} de $2D \times 2D$ los cuales dejan invariante la métrica η_{MN} [2]:

$$h^P{}_M \eta_{PQ} h^Q{}_N = \eta_{MN}, \quad (3.52)$$

donde

$$\eta_{MN} = \eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ \delta_j^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{MP} \eta_{PN} = \delta_N^M. \quad (3.53)$$

La métrica $\eta_{\mu\nu}$ sube y baja los índices del grupo $\mathcal{O}(D, D)$. Podemos relacionar la métrica generalizada \mathcal{H} y su inversa con la métrica η ,

$$\eta_{PM} \mathcal{H}^{MN} \eta_{NQ} = \mathcal{H}_{PQ}. \quad (3.54)$$

El momento y el winding se puede arreglar en un objeto llamado momento generalizado y es:

$$\mathcal{P}^M = \begin{pmatrix} \tilde{P}_i \\ P^i \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

La LMC se escribe equivalentemente como:

$$N - \tilde{N} = \frac{1}{2} \mathcal{P}^T \eta \mathcal{P}. \quad (3.56)$$

La ecuación para la masa escrita en función del momento generalizado es

$$M^2 = (N + \tilde{N} - 2) + \mathcal{P}^P \mathcal{H}_{PQ} \mathcal{P}^Q. \quad (3.57)$$

Aplicando la transformación

$$\mathcal{P}^M = h^M{}_N \mathcal{P}'^N, \quad (3.58)$$

las cantidades físicas no deben de cambiar y en particular la cantidad (3.56). Del Hamiltoniano (3.49)

$$\mathcal{P}^T \mathcal{H}(E) \mathcal{P} = \mathcal{P}'^T \mathcal{H}(E') \mathcal{P}' = \mathcal{P}'^T h \mathcal{H}(E) h^T \mathcal{P}', \quad (3.59)$$

de esto vemos que

$$\mathcal{H}(E') = h \mathcal{H}(E) h^T. \quad (3.60)$$

Estrictamente hablando, $O(n, n)$ es el grupo de la T-dualidad, con $n = D - d$ donde n es el número de dimensiones compactas, D es la dimensión total del espacio y d es la dimensión del espacio luego de compactificar pero formalmente se puede extender a $O(D, D)$ actuando trivialmente en la dirección no compacta.

Al abrir (3.60) en componentes obtenemos las transformaciones para la métrica g_{ij} y las dos formas b_{ij} conocidas como las reglas de Buscher¹

$$\begin{aligned} g'_{kk} &= \frac{1}{g_{kk}}, & g'_{ki} &= \frac{b_{ki}}{g_{kk}}, & g'_{ij} &= g_{ij} - \frac{g_{ki}g_{kj} - b_{ki}b_{kj}}{g_{kk}} \\ b'_{ki} &= \frac{g_{ki}}{g_{kk}}, & b'_{ij} &= b_{ij} - \frac{g_{ki}b_{kj} - b_{ki}g_{kj}}{g_{kk}}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

La transformación del dilatón no es trivial y es de la forma

$$\Phi = \Phi - \frac{1}{2} \log g_{kk}. \quad (3.62)$$

Sin embargo la siguiente combinación es invariante de T-dualidad

$$e^{-2d} = \sqrt{g} e^{-2\phi}. \quad (3.63)$$

3.5.1. Acción de Supergravedad

La descripción de bajas energías (sector no masivo) de la cuerda cerrada esta dada por una acción de supergravedad cuya parte bosónica es²:

$$S = \int d^D x \sqrt{g} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} H^{ijk} H_{ijk} \right], \quad (3.64)$$

¹Las transformaciones de Buscher se pueden obtener cuando g y b son campos no constantes pero que poseen isometrías en ciertas direcciones.

²Si compactificamos la cuerda heterótica hay que sumarle a la acción campos de gauge correspondientes a $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$.

con un campo de fuerza $H = dB$. Esta acción presenta simetrías locales que son las siguientes:

1. Cambio de coordenadas, parametrizadas por λ^i , los campos cambian de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{ij} + L_\lambda g_{ij}, & L_\lambda g_{ij} &= \lambda^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i \lambda^k + g_{ik} \partial_j \lambda^k, \\ b_{ij} &= b_{ij} + L_\lambda b_{ij}, & L_\lambda b_{ij} &= \lambda^k \partial_k b_{ij} + b_{kj} \partial_i \lambda^k + b_{ik} \partial_j \lambda^k, \\ \phi &= \phi + L_\lambda \phi, & L_\lambda \phi &= \lambda^i \partial_i \phi, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde L_λ es la derivada de Lie para un vector arbitrario V^i

$$L_\lambda V^i = \lambda^j \partial_j V^i - V^j \partial_j \lambda^i = [\lambda, V]^i. \quad (3.66)$$

Esta última igualdad se define como Lie Bracket, que es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi.

2. La transformación de gauge de la dos forma, parametrizado por la uno forma infinitesimal $\tilde{\lambda}_i$

$$b_{ij} = b_{ij} + \partial_i \tilde{\lambda}_j - \partial_j \tilde{\lambda}_i. \quad (3.67)$$

3.6. Aspectos sobre Teoría Doble de Campos

La idea principal de DFT es introducir una acción y transformaciones para ciertos campos tales que la teoría sea invariante de $O(D, D)$ y además tiene que ser tal que reproduzca (3.65) y (3.67) en cierto límite, este límite sea cuando los campos no dependan de \tilde{x}_i . La más baja dimensión de la representación $\mathcal{O}(D, D)$ es la fundamental que tiene como dimensión 2D. Las coordenadas del espacio-tiempo x^i y su dual son empaquetadas en un vector $O(D, D)$:

$$X^M = (\tilde{x}_i, x^i), \quad (3.68)$$

se define como coordenada generalizada. Transforma en la representación fundamental como

$$X'^M = h^M_N X^N. \quad (3.69)$$

La coordenada \tilde{x}_i no tiene significado desde el punto de vista de la supergravedad. Introduciendo restricciones que nos permita sustraer la dependencia de la coordenada y preservar la simetría T-dual

$$\eta^{MN} \partial_M \partial_N (\dots) = 0, \quad (3.70)$$

llamada restricción fuerte. Los puntos indican que cualquier campo o parámetro de gauge y también el producto de ellos debe ser aniquilado por el operador diferencial. Si se descompone en componentes la restricción, una posible solución es $\tilde{\partial}^i(\dots) = 0$ o cualquier rotación de esta. La restricción fuerte implica que localmente siempre existe una transformación $\mathcal{O}(D,)$ que rota en un marco en el cual los campos dependan solamente de la mitad de las coordenadas. [2][3]

Los campos de la teoría son \mathcal{H}_{MN} la métrica generalizada definida en (3.50) pero ahora g_{ij} y b_{ij} dependen de ambas coordenadas (\tilde{x}_i, x^i) , d el dilatón definido en (3.62) este también depende de ambas coordenadas y η_{MN} la métrica en $\mathcal{O}(D, D)$ definida en (3.53) y definimos en teoría doble de campo un parámetro de gauge generalizado

$$\xi^M = (\tilde{\lambda}_i, \lambda^i), \quad (3.71)$$

donde las primeras D componentes son uno-formas y las restantes D componentes son vectores. Cuando este parámetro no dependa de \tilde{x}^i parametrizará las transformaciones de coordenadas y las transformaciones de gauge de las dos-formas (3.65) y (3.67). Entonces la forma unificada de las transformaciones son:

$$\mathcal{L}_\xi e^{-2d} = \partial_M (\xi^M e^{-2d}), \quad (3.72)$$

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{H}_{MN} = L_\xi \mathcal{H}_{MN} + \eta^{RP} \eta_{MQ} \partial^Q \xi_P \mathcal{H}_{RN} + \eta^{RP} \eta_{NQ} \partial^Q \xi_P \mathcal{H}_{MR}, \quad (3.73)$$

donde L_ξ es la derivada de Lie usual definida en (3.66). El segundo y el tercer término miden el apartamiento de la geometría Rimaniana. La derivada de Lie generalizada con los términos adicionales es esencial para recuperar las transformaciones usuales del sector bosónico de la supergravedad y también preserva la métrica $\mathcal{O}(D, D)$ [2]

$$\mathcal{L}_\xi \eta_{MN} = 0. \quad (3.74)$$

La forma generalizada de la derivada de Lie con respecto a un vector ξ actuando sobre un vector V^M es

$$\mathcal{L}_\xi V^M = \xi^P \partial_P V^M + (\partial^M \xi_P - \partial_P \xi^M) V^P. \quad (3.75)$$

3.7. Acción de la Teoría Doble de Campos

Los campos dinámicos están codificados en la métrica generalizada $\mathcal{H}_{MN} \in \mathcal{O}(D, D)$ y d cabe destacar que es simétrica ($\mathcal{H}^t = \mathcal{H}$) bajo el grupo $\mathcal{O}(D, D)$ y satisface

$$\mathcal{H}^{MQ} \eta_{QP} \mathcal{H}^{NP} = \eta^{MN}. \quad (3.76)$$

Cuando se compactifica en un toro los campos poseen una simetría dual $\mathcal{O}(D, D)$, los campos escalares originados de la métrica toman valores en el coset $\frac{\mathcal{O}(D, D)}{\mathcal{O}(D) \times \mathcal{O}(D)}$. Al igual que en relatividad general introducimos un vielbein E^A_M transforma por la izquierda bajo una transformación global $\mathcal{O}(D, D)$ y por la derecha bajo una transformación local $\mathcal{O}(D) \times \mathcal{O}(D)$

$$E'^A_M(X') = O^N_M E^B_N h^B_A, \quad X'_M = O^N_M X_N, \quad (3.77)$$

donde $O \in \mathcal{O}(D, D)$ y $h \in \mathcal{O}(1, D-1) \times \mathcal{O}(1, D-1)$. El subgrupo $\mathcal{O}(1, D-1) \times \mathcal{O}(1, D-1)$ indica un doble índice de Lorentz \bar{A} , siendo así la métrica plana $\eta_{\bar{A}\bar{B}}$ definida como

$$\eta_{MN} = E^{\bar{A}}_M \eta_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{B}}_N, \quad (3.78)$$

$\eta_{\bar{A}\bar{B}}$ toma la misma forma que η_{MN} (3.53) sube y baja índices planos. Entonces como se observa en la ecuación (3.78) la métrica generalizada puede ser obtenida a partir de los vielbein

$$\mathcal{H}_{MN} = E^{\bar{A}}_M \mathcal{H}_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{B}}_N. \quad (3.79)$$

Mostrando así que la métrica generalizada es invariante localmente ante una doble transformación de Lorentz. Definiendo una métrica invariante ante el subgrupo $\mathcal{O}(1, D-1) \times \mathcal{O}(1, D-1)$.

$$\mathcal{H}_{\bar{A}\bar{B}} = \begin{pmatrix} s^{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & s_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

donde $s_{\bar{a}\bar{b}}$ tiene una signatura $s_{\bar{a}\bar{b}} = \text{diag}(- + \dots +)$. La parametrización triangular que lleva a la forma estándar de la métrica generalizada esta dada por

$$E^{\bar{A}}_M = \begin{pmatrix} e_{\bar{a}}^i & e_{\bar{a}}^j b_{ji} \\ 0 & e_{\bar{a}}^i \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

La transformación bajo difeomorfismos generalizados para el vielbein $E^{\bar{A}}_M$ siguiendo la ecuación (3.75) es:

$$\mathcal{L}_\xi E^{\bar{A}}_M = \xi^P \partial_P E^{\bar{A}}_M + (\partial_M \xi_P - \partial^P \xi^M) E^{\bar{A}}_P. \quad (3.82)$$

Bajo una T-dualidad la parametrización triangular se rompe y considerando una transformación del grupo $\mathcal{O}(1, D-1) \times \mathcal{O}(1, D-1)$ se puede restaurar la forma parametrizada del vielbein. [2]

Con el vielbein $E^{\bar{A}}_M$ y el dilatón d se puede construir los flujos generalizados

$$\mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = E_{\bar{C}M} \mathcal{L}_{E_{\bar{A}}} E_{\bar{B}}^M = 3\Omega_{[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]}, \quad (3.83)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{A}} = -e^{2d} \mathcal{L}_{E_{\bar{A}}} e^{-2d} = \Omega^{\bar{B}}_{\bar{B}\bar{A}} + 2E_{\bar{A}}^M \partial_M d, \quad (3.84)$$

donde $\Omega_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ se refiere a la conexión generalizada de Weitzenböck

$$\Omega_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = E_{\bar{A}}^M \partial_M E_{\bar{B}}^N E_{\bar{C}N} = -\Omega_{\bar{A}\bar{C}\bar{B}}. \quad (3.85)$$

Los flujos obtenidos están escritos en índices planos por ende estos son invariantes ante el grupo $\mathcal{O}(D, D)$, pero no lo son ante transformaciones $\mathcal{O}(D) \times \mathcal{O}(D)$.

La acción puede ser escrita en función de los campos generalizados y el dilatón por medio de los flujos encontrados en la ecuación (3.84), esta acción es:

$$S = \int dX e^{-2d} \mathcal{R}, \quad (3.86)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \mathcal{F}_{\bar{D}\bar{E}\bar{F}} \left[\frac{1}{4} S^{\bar{A}\bar{D}} \eta^{\bar{B}\bar{E}} \eta^{\bar{C}\bar{F}} - \frac{1}{12} S^{\bar{A}\bar{D}} S^{\bar{B}\bar{E}} S^{\bar{C}\bar{F}} - \frac{1}{6} \eta^{\bar{A}\bar{D}} \eta^{\bar{B}\bar{E}} \eta^{\bar{C}\bar{F}} \right] \\ & + \mathcal{F}_{\bar{A}} \mathcal{F}_{\bar{B}} \left[\eta^{\bar{A}\bar{B}} - S^{\bar{A}\bar{B}} \right]. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Cuando se elige la parametrización (3.81) y se impone la restricción fuerte, las coordenadas duales desaparecen y la acción se reduce a la acción usual NS de supergravedad. La acción escrita en función de los flujos generales es una forma particular de la formulación de la métrica generalizada. La acción se puede escribir en función de la métrica generalizada y sus derivadas, siguiendo la formulación introducida en [6], el grupo $\mathcal{O}(D, D)$ se puede construir escalares usando los objetos η^{MN} , \mathcal{H}^{MN} y ∂_N .

$$\mathcal{H}^{MN} \partial_M d \partial_N d, \quad \partial^K \mathcal{H}^{MN} \partial_M \mathcal{H}_{KN}. \quad (3.88)$$

Existiendo una serie de escalares que son combinación lineal de estos dos. Introduciendo una nueva simetría bajo el grupo discreto \mathbb{Z}_2 , esta no es una simetría que transforma a todas las coordenadas sino que solamente transforma a las coordenadas duales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} b_{ij} & \rightarrow -b_{ij} \\ \tilde{x} & \rightarrow -\tilde{x} \\ \tilde{\partial} & \rightarrow -\tilde{\partial}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Si se escribe entonces en coordenadas generalizadas,

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \tilde{\partial}^i \\ \partial_i \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

se escribe la transformación de tal manera que la matriz cumpla lo descrito con la

ecuación (3.89)

$$\begin{aligned}\partial_M &= Z\partial_M, \\ Z &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.91)$$

La matriz Z de transformación cumple con las siguientes propiedades

$$Z = Z^T = Z^{-1}, \quad Z^2 = 1. \quad (3.92)$$

Cuando el campo antisimétrico transforme ante el grupo lo que se encuentra fuera de la diagonal de la métrica generalizada \mathcal{H}^{MN} cambia de signo

$$\mathcal{H}^{MN} = Z\mathcal{H}^{MN}Z, \quad \mathcal{H}_{MN} = Z\mathcal{H}_{MN}Z. \quad (3.93)$$

La matriz Z no corresponde a una transformación de $\mathcal{O}(D, D)$ ya que no deja invariante la métrica (3.53) porque no transforma como

$$\eta^{MN} \neq Z\eta^{MN}Z, \quad \eta_{MN} \neq Z\eta_{MN}Z. \quad (3.94)$$

Teniendo en cuenta esto último la simetría prohíbe términos que necesiten ser escritos con la métrica, la simetría entonces prohíbe términos que incluyan a ∂^M . En base a la simetría \mathbb{Z}_2 se elimina el segundo término de la ecuación (3.88), no existen términos invariantes que involucren dos derivadas y dos métricas generalizadas. Se construye escalares cumpliendo la simetría \mathbb{Z}_2 usando los términos, ∂_M , \mathcal{H}_{MN} y \mathcal{H}^{MN} .

$$\begin{aligned}\partial_M d\partial_N \mathcal{H}^{MN}, & \quad \mathcal{H}^{MN} \partial_M d\partial_N d, \\ \mathcal{H}^{MN} \partial_M \partial_N d, & \quad \partial_M \partial_N \mathcal{H}^{MN}.\end{aligned}\quad (3.95)$$

Ya que no se pueden construir términos con dos métricas generalizadas pero si se puede construir términos con tres de ellas sin usar la métrica η^{MN} , las dos opciones posibles son

$$\mathcal{H}^{MN} \partial_M \mathcal{H}^{KL} \partial_N \mathcal{H}_{KL}, \quad \mathcal{H}^{MN} \partial_N \mathcal{H}^{KL} \partial_L \mathcal{H}_{MK}. \quad (3.96)$$

La acción entonces se puede reescribir de la forma

$$S = \int dX e^{-2d} \mathcal{R}, \quad (3.97)$$

donde \mathcal{R}

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\partial_N d + 4\partial_N d\partial_M\mathcal{H}^{MN} \\ &+ \frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL} + \Delta_{SC}\mathcal{R}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

donde $\Delta_{SC}\mathcal{R}$ se encuentran todos los términos que desaparecen bajo (3.70).

3.8. Compactificación Scherk-Schwarz Generalizada

En una reducción dimensional del espacio de D+E dimensiones este se divide en coordenadas x^μ espacio-tiempo D y las coordenadas internas y^m . Queremos que las transformaciones de campos y simetrías en el espacio-tiempo reducido son independientes de y . Generalizamos el procedimiento de Scherk-Schwarz en una dualidad covariante en una manera de aplicarlo a DFT. Esta sección sigue muy de cerca [2].

En un espacio doble tenemos coordenadas $X^M = (\tilde{x}_i, x^i)$, dividimos a ellas de la siguiente manera $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_\mu, \tilde{y}_m)$ y $x^i = (x^\mu, y^m)$. Los índices $m = 1, \dots, n$ son las direcciones internas y $\mu = 1, \dots, D$ son los índices espacio-tiempo. El espacio doble externo $\mathbb{X} = (\tilde{x}_\mu, x^\mu)$ y el espacio doble interno $\mathbb{Y} = (\tilde{y}_m, y^m)$.

El ansatz de reducción para el campo y los parámetros de gauge en la teoría. Son los siguientes:

$$E_M^{\hat{A}}(X) = \hat{E}_I^{\hat{A}}(\mathbb{X})U_M^I(\mathbb{Y}), \quad d(X) = \hat{d}(\mathbb{X}) + \lambda(\mathbb{Y}), \quad (3.99)$$

y para los parámetros de gauge tenemos

$$\xi^M(X) = \hat{\xi}^I(\mathbb{X})U_I^M(\mathbb{Y}). \quad (3.100)$$

Notar que aparece “ \mathbb{Y} ” los índices $M, N = 1, \dots, 2D$ son curvos en la teoría completa e $I, J = 1, \dots, 2D$ son los índices curvos en la teoría efectiva.³

A este ansatz le agregamos flujos generalizados (3.83) y obtenemos

$$\mathcal{F}_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}} = \hat{F}_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}} + f_{IJK}\hat{E}_A^I\hat{E}_B^J\hat{E}_C^K, \quad (3.101)$$

$$\mathcal{F}_{\hat{A}} = \hat{F}_{\hat{A}} + f_I\hat{E}_A^I, \quad (3.102)$$

³En la notación los objetos que poseen sombreros son los dependientes de las coordenadas dobles externas y la dependencia de las coordenadas dobles internas se encuentran en el twist y λ .

donde separamos la dependencia de las coordenadas en cantidades dependientes de las coordenadas dobles externas

$$\hat{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = 3\hat{\Omega}_{[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]}, \quad (3.103)$$

$$\hat{\Omega}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = \hat{E}_{\bar{A}}^I \partial_I \hat{E}_{\bar{B}}^J \hat{E}_{\bar{C}}^K, \quad (3.104)$$

$$F_{\bar{A}} = \hat{\Omega}_{\bar{B}\bar{A}}^{\bar{B}} + 2\hat{E}_{\bar{A}}^I \partial_I \hat{d} \quad (3.105)$$

y en cantidades dependientes de las coordenadas internas

$$f_{IJK} = 3\tilde{\Omega}_{[IJK]}, \quad (3.106)$$

$$\tilde{\Omega}_{IJK} = U_I^M \partial_M U_J^N U_{KN}, \quad (3.107)$$

$$f_I = \tilde{\Omega}_{JI}^J + 2U_I^M \partial_M \lambda. \quad (3.108)$$

Las cantidades f_{IJK} y f_I son llamados flujos y se demanda que tomen valores constantes

$$f_{IJK} = cte, \quad f_I = cte. \quad (3.109)$$

El hecho de que sea constante garantiza que la acción efectiva no dependa de las coordenadas internas⁴. Satisfaciendo también las restricciones

$$f_{IJK} \equiv \eta_{KL} f_{IJ}{}^L = f_{[IJK]}, \quad f_{H[IJ} f_{KL]}{}^H = 0, \quad (3.110)$$

cerrando así el álgebra. Cuando se introduce el ansatz (3.99) y (3.100) se obtiene

$$\begin{aligned} S_{eff} = & \int d^m x \sqrt{|g(x)|} e^{-2\phi(x)} \left[R + 4\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \mathcal{H}^{\mu\nu\rho} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \mathcal{H}_{AB} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^B + \frac{1}{8} (D_\mu \mathcal{H})_{AB} (D^\mu \mathcal{H})^{AB} - V \right]. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Aquí

$$V = -\frac{1}{12} f_{AB}{}^K f_{LC}{}^D (\mathcal{H}^{AL} \mathcal{H}^{BC} \mathcal{H}_{KD} - 3\mathcal{H}^{AL} \eta^{BC} \eta_{KD} + 2\eta^{AL} \eta^{BC} \eta_{KD}) - \Lambda \quad (3.112)$$

Esta S_{eff} es igual al sector eléctrico de SUGRA “gaugiada” $D = 4$ y $N = 4$. Es importante destacar que los flujos no solo tienen que ser constantes sino que tienen que satisfacer ciertas condiciones cuadráticas, esto garantiza la clausura del álgebra de gauge en la teoría. Podemos estudiar algunas soluciones a los vínculos cuadráticos 3.110 de la siguiente manera. Estos vínculos se pueden reescribir como:

⁴El twist satisface otras restricciones para garantizar la teoría reducida pero no son relevantes para esta tesis.

$$f_{K[M^P} f_{NQ]}^K = 0. \quad (3.113)$$

Este es un vínculo sobre $f_{MN}^P = f_{MNQ}\eta^{QP}$, con el agregado de que $f_{MNP} = f_{[MNP]}$. Si nos concentramos en el grupo $O(n, 6)$ (es decir que estamos compactificando a cuatro dimensiones) podemos tratar de identificar a f_{MN}^P con constantes de estructura de algún grupo de gauge semi-simple. El grupo de gauge puede ser como mucho de $6 + n$ dimensiones ya que $M = 1, \dots, 6 + n$. Consideremos entonces constantes de estructura f_{ab}^c de algún grupo de gauge semi-simple con $a, b, c = 1, \dots, \dim(G)$ y $\dim(G) \leq 6 + n$. Elegimos la métrica de Killing-Cartan $\eta_{ab} = f_{ac}^d f_{bd}^c$ en alguna base tal que sea diagonal $\eta_{ab} = \text{diag}(1, \dots, -1, \dots)$. En este caso elegimos p cantidad de $+1$ y q cantidad de -1 , es decir $a, b, c = 1, \dots, p + q$ con $p \leq n$ y $q \leq 6$. La idea ahora es identificar η_{ab} con componentes de la métrica de $O(n, 6)$ en la base diagonal $\eta_{MN} = \text{diag}(1, \dots, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Podemos identificar

$$p \leq n, \quad q \leq 6, \quad M = 1, \dots, p, 7, \dots, 6 + q \quad \eta_{ab} = \eta_{MN}. \quad (3.114)$$

Por lo tanto, si elegimos

$$f_{MNP} = f_{abc}, \quad \text{con } f_{abc} = f_{ab}^d \eta_{dc}, \quad (3.115)$$

vemos que la ecuación (3.113) se satisface pues es la identidad de Jacobi para las constantes de estructura del grupo de gauge, y el vínculo lineal $f_{MNP} = f_{[MNP]}$ también pues las constantes de estructura son antisimétricas cuando tienen los tres índices bajados con la métrica de Killing-Cartan (al menos para grupos semisimples). En particular, para $n > 6$ al ver el embebimiento de la signatura de la métrica de Killing-Cartan en la métrica de $O(n, 6)$ los siguientes grupos aparecen: $SU(3)$, $SO(5)$, $G_{2(2)}$, $SL(4)$, $SU(3, 1)$, $SO(5, 1)$, etc. Además, se pueden considerar soluciones con factores de $U(1)$.

La solución a estos vínculos es importante para entender las posibles interpretaciones de como cuerdas puede llegar a proveer estos grupos en cuestión. Por ejemplo, cuando se compactifica la cuerda heterótica en un toro r -dimensional, caracterizado por la métrica interna y el campo de Kalb-Ramond interno, además de líneas de Wilson (que caracterizan a fondos de los campos de gauge provenientes de la cuerda heterótica), existen ciertos valores de este espacio de módulos que hacen que la cuerda aumente su grupo de gauge de $U(1)^{16+r} \times U(1)^r$ a $G_L \times U(1)_R^r$ con $r = 10 - d$ y donde G_L es algún grupo de gauge formado por productos de grupos no abelianos y abelianos. El rango de G_L es de $16 + 10 - d$, donde 16 es la cantidad de generadores de Cartan provenientes del grupo de gauge en 10 dimensiones (o sea $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$). Si consideramos de insertar en la acción efectiva de DFT $f_{MNP} = f_{abc}$ donde f_{abc} es la constante del

grupo de gauge G_L y fijamos a cero las demás componentes entonces obtendremos la acción efectiva de la cuerda heterótica en algún punto de “enhancement” del espacio de módulos. Recordemos que los flujos f_{MNP} desde un punto de DFT provienen de compactificaciones de Scherk y Schwarz de los flujos dinámicos \mathcal{F}_{ABC} por lo tanto llevan información de la métrica, Kalb-Ramond, y líneas de Wilson internas. Es decir, f_{MNP} depende del espacio de módulos. Cuando se introduce en la acción efectiva de DFT, estos flujos genéricos mezclan componentes left y right de los índices. Por ejemplo, si está encendido $f_{ab\hat{I}}$, con \hat{I} un índice de Cartan de la parte right, además de estar encendido f_{abc} , lo que sucede es que se produce una ruptura de la simetría de gauge y los vectores de gauge y escalares adquieren masa. Queda por entender que sucede genéricamente con otras componentes del flujo encendidas y su interpretación desde el punto de vista de cuerdas.

Capítulo 4

Conclusiones y Perspectiva

4.1. Conclusiones

En el marco de la teoría de cuerda bosónica desarrollamos su expansión en modos y su espectro de la teoría. Mostramos que el espectro consiste de un gravitón, una dos-forma antisimétrica conocido como el campo Kalb-Ramond en el lenguaje de supergravedad y un campo escalar llamado dilatón. Analizando la cuerda bosónica, cuando es compactificada en una dirección, el espectro es invariante ante la simetría de T-dualidad, que intercambia R con $\frac{1}{R}$ al igual que el winding y el momentum. En el límite de bajas energías la cuerda bosónica es especificada por una supergravedad cuyo contenido bosónico es descrito por los estados no masivos de la cuerda. La cuerda bosónica presenta dos problemas, el primer problema es que la cuerda abierta contiene en su espectro al taquión que es un estado no físico que representa una inestabilidad en el vacío y el segundo es que en su espectro no contiene fermiones. En la teoría de cuerdas la inclusión de fermiones requiere de la supersimetría. La Teoría Doble de Campos es una teoría de campos con invariancia ante el grupo de T-dualidad. Esta teoría junto con el proceso de compactificación de Sherck-Schwarz nos permite entender los flujos que aparecen en las teorías efectivas de cuerdas.

4.2. Perspectiva

Si esta encendido $f_{ab\hat{I}}$, con \hat{I} un índice de Cartan de la parte right, además de estar encendido f_{abc} , lo que sucede es que se produce una ruptura de la simetría de gauge y los vectores de gauge y escalares adquieren masa. Queda por entender que sucede genéricamente con otras componentes del flujo encendidas y su interpretación desde el punto de vista de cuerdas.

Bibliografía

[1] Barton Zwiebach A First Course in String Theory. Cambridge University Press, 2008.

6, 10, 28, 29, 36

J. Polchinski, "String Theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string, Vol. 2: Superstring theory and beyond", Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998)

M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 1: Introduction, Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987). (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)

K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, "String theory and M-theory: A modern introduction, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007)

E. Kiritsis, "String theory in a nutshell" Princeton University Press, 2007

L. E. Ibanez and A. M. Uranga, "String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2012)

Prof. N. Beisert and Dr. J. Brödel "Introduction to String theory", ETH Zürich.

[2] G. Aldazabal, D. Marques and C. Nunez, "Double Field Theory: A Pedagogical Review", arXiv:1305.1907 [hep-th]. 35, 43, 46, 47, 50

[3] G. Aldazabal, Walter Baron, Diego Marqués and C. Nunez, "The effective action of Double Field Theory", arXiv:1109.029v3 [hep-th]. 46

[4] D. Geissbuhler, D. Marqués, C. Nuñez and V. Penas, "Exploring Double Field Theory, JHEP 1306", 101 (2013) arXiv:1304.1472 [hep-th].

[5] M. Grana and D. Marqués, "Gauged Double Field Theory," JHEP 1204, 020 (2012) [arXiv:1201.2924 [hep-th]].

-
- [6] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, “Generalized metric formulation of double field theory,” JHEP 1008, 008 (2010) [arXiv:1006.4823 [hep-th]]. 48
- [7] David Bailin and Alex Love, “Kaluza-Klein theories,” Rep. Prog. Phys. 50 (1987) 1087-1170. 37
- [8] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, “Target space duality in string theory,” Phys. Rept. 244 (1994) 77 [hep-th/9401139].
- [9] T. Kugo and B. Zwiebach, “Target space duality as a symmetry of string field theory,” Prog. Theor. Phys. 87 (1992) 801 [hep-th/9201040].
- [10] B. Zwiebach, “Double Field Theory, T-Duality, and Courant Brackets,” Lect. Notes Phys. 851 (2012) 265291, arXiv:1109.1782 [hep-th].
- [11] C. Hull and B. Zwiebach, “Double Field Theory”, JHEP 0909 (2009) 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].
- [12] G. Aldazabal, E. Andres, P. G. Camara and M. Grana, “More dual fluxes and moduli fixin,” JHEP 1011 (2010) 083 [arXiv:1007.5509 [hep-th]].
- [13] J. Scherk and J. H. Schwarz, “How to Get Masses from Extra Dimensions,” Nucl. Phys. B 153, 61 (1979).
- [14] G. Aldazabal, W. Baron, D. Marques and C. Nunez, “The effective action of Double Field Theory,” JHEP 1111 (2011) 052 [arXiv:1109.0290 [hep-th]].
- [15] C. Hull and B. Zwiebach, “Double Field Theory,” JHEP 0909 (2009) 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].
- [16] C. Hull and B. Zwiebach, “Double Field Theory,” JHEP 0909 (2009) 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].

Agradecimientos

En primer lugar debo agradecer a mi director Gerardo Aldazabal. En especial a Victor Penas por su gran paciencia a todas mis preguntas y compartirme su gran conocimiento a lo largo de mi formación en estos nuevos temas. Agradezco a Eduardo Andres y Martín Mayo por responder todas mis preguntas en temas relacionados con el trabajo de tesis y temas ajenos a esta. Agradezco al grupo de partículas por contribuir en mi formación académica. Agradezco a Roberto Trincherro, Ingomar Allekotte, Leandro Da Rold, Marina Huerta, Diego Hararí, Silvia Mollerach, Diego Mazzitelli y Segio Grillo, por su paciencia en mi lento aprendizaje. Estoy muy agradecido al ICTP por brindarme el soporte financiero a lo largo de esta maestría con la estancia y los vuelos a mi país. Agradezco a mis padres Eugenio y Dolores, mi hermano Frank, mi sobrinos queridos Emiliano y Luis Diego a mis tios, Siomara, Juanito y a mis demas tios, por su apoyo en esta dura etapa de aprendizaje y paciencia en estos últimos meses de ausencia que tuve hacia ellos. Agradezco a mis amigos Armando y Nicolas por la ayuda que me brindaron todo este tiempo y a la familia de Armando por su muestra de cariño hacia mi persona, a Juan Cruz, Santi, Luz por ser buenos vecinos y amigos de habitación y a mis amigos de partículas por su buena amistad. Por último agradezco a Rocío Brezán por su paciencia y cariño en este último semestre y compañía en la elaboración de este trabajo.

