

TESIS DE LA CARRERA DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**Sistemas Lagrangianos Discretos:  
Existencia de Trayectorias**

Lic. Sebastián Elías Graiff Zurita  
**Autor**

Dr. Javier Fernandez  
**Director**

Dr. Sergio Grillo  
**Colaborador**

Diciembre de 2015

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica

San Carlos de Bariloche  
Argentina



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Prefacio</b>	<b>vii</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas lagrangianos . . . . .	1
1.2. Sistemas lagrangianos con fuerzas . . . . .	4
<b>2. Sistemas Lagrangianos Discretos</b>	<b>7</b>
2.1. Según J. E. Marsden y M. West . . . . .	7
2.2. Según C. Cuell y G. W. Patrick . . . . .	13
<b>3. Relación con los Sistemas Lagrangianos</b>	<b>19</b>
3.1. Discretización de Sistemas Lagrangianos . . . . .	19
3.1.1. Según J. E. Marsden y M. West . . . . .	19
3.1.2. Según C. Cuell y G. W. Patrick . . . . .	23
3.2. Existencia de Trayectorias Discretas . . . . .	26
3.2.1. Sistemas lagrangianos discretos (CP) . . . . .	26
3.2.2. Sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos . . . . .	29
3.2.3. Sistemas lagrangianos discretos (MW) de orden $r$ . . . . .	31
<b>4. Sistemas Lagrangianos Discretos con fuerza</b>	<b>33</b>
4.1. Según J. E. Marsden y M. West . . . . .	33
4.2. A la C. Cuell y G. W. Patrick . . . . .	36
4.3. Discretización de Sistemas Lagrangianos con Fuerza . . . . .	37
4.3.1. Según J. E. Marsden y M. West . . . . .	38
4.3.2. A la C. Cuell y G. W. Patrick . . . . .	40
<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. Oscilador Armónico Discreto</b>	<b>47</b>
<b>B. Partícula en un círculo</b>	<b>49</b>
B.0.3. Entorno $h$ -admisible . . . . .	49
B.0.4. Lagrangiano discreto exacto . . . . .	50
B.0.5. Trayectoria discreta . . . . .	50
<b>Agradecimientos</b>	<b>53</b>



# Resumen

Un problema básico de la Mecánica clásica es hallar la evolución de cada sistema mecánico. Este problema se traduce, según la formulación variacional (o *lagrangiana*), al de hallar los extremos de una funcional (la *acción*) sobre un espacio de caminos; y en última instancia, al de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dado que esto no siempre puede hacerse mediante técnicas analíticas, es usual hacerlo a través de métodos numéricos llamados, en forma genérica, integradores. En particular suelen emplearse *integradores variacionales* pues tienen en cuenta las estructuras subyacentes del problema en cuestión, como por ejemplo la conservación de estructuras simplécticas, permitiendo realizar simulaciones a tiempos prolongados. Los *sistemas lagrangianos discretos* son sistemas dinámicos discretos cuyas trayectorias, que se obtienen mediante un principio variacional, son integradores variacionales.

Para los sistemas lagrangianos continuos existen condiciones muy naturales que garantizan existencia y unicidad de trayectorias, al menos para tiempos cortos. Motivados por este resultado, en el presente trabajo estudiaremos el problema de existencia y unicidad de trayectoria de los sistemas lagrangianos discretos. Veremos que éstos, en general, pueden poseer trayectorias únicas o múltiples para una misma condición inicial, y en algunos casos pueden no poseer trayectorias. Probaremos que, si un sistema lagrangiano posee una trayectoria, entonces posee una familia de trayectorias con condiciones iniciales cercanas a la primera. Además, estudiaremos los sistemas lagrangianos discretos que se obtienen al discretizar un sistema lagrangiano continuo, y veremos que bajo condiciones razonables podremos capturar las propiedades del sistema continuo y, de esta manera, garantizar la existencia y unicidad de trayectorias discretas para este tipo de sistema. Presentaremos la mayoría de los resultados desde dos puntos de vistas (según J. E. Marsden y M. West por un lado, y según C. Cuell y G. W. Patrick por el otro), y veremos que ambas nociones son equivalentes.

Finalmente, también estudiaremos el problema de existencia y unicidad de trayectorias en el contexto de sistemas lagrangianos con fuerza, motivados principalmente por la conexión con los sistemas lagrangianos con vínculos. Para esto introducimos una noción (a la C. Cuell y G. W. Patrick) de sistema lagrangiano discreto con fuerza que no es la usual y, al igual que el caso sin fuerzas, probaremos que ambas nociones son equivalentes.

**Palabras clave:** LAGRANGIANO DISCRETO, DISCRETIZACIÓN, C. CUELL, G. W. PATRICK.



# Prefacio

Supongamos que podemos observar cómo una pelota cae libremente y conocemos, en cada instante, su posición y velocidad  $(q(\cdot), \dot{q}(t))$ . Mientras esto sucede le pedimos a un amigo que tome fotografías del sistema y anote la posición de la pelota  $(q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots)$ , respetando siempre el mismo intervalo de tiempo  $h$  entre cada disparo de la cámara. Al finalizar el experimento, nosotros podremos reconstruir la trayectoria del sistema dibujando una curva en el espacio de velocidades  $TQ$ . En cambio, nuestro amigo solo podrá decirnos por cuáles puntos del espacio de configuración  $Q$  pasó y, observando instantáneas sucesivas, podrá estimar la velocidad media entre cada par de puntos (tomando, por ejemplo,  $(q_{k+1} - q_k)/h$ ). Diremos que nosotros conocemos una versión continua del sistema mientras que nuestro amigo conoce una versión discreta. Así como la descripción continua de este sistema físico puede determinarse a partir de un sistema lagrangiano, una versión discreta del mismo puede obtenerse a partir de un *sistema lagrangiano discreto*.

Más en general, la noción de sistema lagrangiano discreto surge a partir de considerar a los integradores variacionales como las trayectorias de algún sistema dinámico con tiempo discreto. Las ideas originales nos remontan a los años '60, con sus raíces en la teoría de control óptimo. En aquel punto de vista (ampliamente entendido, desarrollado y usado), dado un sistema lagrangiano cuyas trayectorias queramos conocer, la receta es la de reemplazar el espacio de fases  $TQ$  por  $Q \times Q$ , con la idea intuitiva de que dos puntos cercanos son el análogo discreto de la velocidad. Finalmente, se postula un *lagrangiano discreto* con la esperanza de que sus trayectorias se parezcan a la del sistema lagrangiano de interés.

Un importante artículo que resume la basta información conocida sobre este tema fue publicado en el año 2001 por J. E. Marsden y M. West [8]. En aquel trabajo podemos hallar expuesta una amplia colección de métodos, usados para construir integradores numéricos, y teorías, que explican la bondad de tales construcciones. Por ejemplo, así como para los sistemas lagrangianos continuos la existencia de trayectorias (o *flujos*) está garantizada bajo condiciones muy naturales de no degeneración (ver [8], Teorema 1.4.3):

“Given a lagrangian  $L$ , the flow map is well-defined if and only if  $\mathbb{F}L$  is locally an isomorphism”,

para los sistemas lagrangianos discretos enuncian un teorema análogo (Teorema 1.5.1) que predice, con hipótesis de no degeneración razonables, la existencia de soluciones:

“Given a discrete lagrangian system  $L_d$ , the discrete lagrangian map is well-defined if and only if  $\mathbb{F}^-L_d$  is locally an isomorphism.”

Sin embargo, estas condiciones pueden no cumplirse haciendo imposible la continuación de la evolución del sistema discreto más allá de un cierto paso del tiempo, de no contar con información adicional que permita, por ejemplo, elegir entre múltiples posibles evoluciones “la correcta”. Lo curioso es que, aún cuando el sistema discreto aproxima bien a un sistema continuo, puede ocurrir que la solución del sistema continuo exista y no la del sistema discreto.

Dado un sistema lagrangiano  $(Q, L)$ , existe una familia especial de sistemas lagrangianos discretos asociados; para cada uno de ellos su lagrangiano (ecuación 1.6.1 de [8]) se denomina *lagrangiano discreto exacto*  $L_d^E : \mathbb{R} \times (Q \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$ , y se define mediante

$$L_d^E(h, q_0, q_1) := \int_0^h L(q_{01}(t), \dot{q}_{01}(t)) dt,$$

donde  $q_{01}(\cdot)$  es la única trayectoria del sistema continuo que satisface que  $q_{01}(0) = q_0$  y  $q_{01}(h) = q_1$ , tomando  $h$  suficientemente chico y  $q_1$  suficientemente cerca de  $q_0$ . Gracias al Teorema 1.6.4 de [8], la particularidad de estos sistemas es la de poseer trayectorias que coinciden, a intervalos de tiempo fijo, con la trayectoria del sistema lagrangiano dado; es decir, permiten recuperar una visión estroboscópica del sistema con tiempo continuo. Finalmente, la utilidad práctica de los sistemas discretos exactos no está dada por este último resultado, pues la construcción del lagrangiano discreto exacto presupone que conocemos la solución del sistema continuo, sino por una propiedad que tienen otros lagrangianos discretos que se aproximan al discreto exacto. En concreto, si tenemos algún lagrangiano discreto que se *parece* (en algún sentido técnico que veremos más adelante) al lagrangiano discreto exacto; entonces, las trayectorias de uno se *parecen en igual medida* a las del otro (Teorema 2.3.1 de [8]).

Un primer objetivo del trabajo fue estudiar el problema de existencia de trayectorias de sistemas lagrangianos discretos a través de un ejemplo en concreto (Ejemplo 2.14). Estudiando un sistema análogo al de una partícula en un potencial cúbico nos dimos cuenta de que el enunciado del Teorema 1.5.1 es incompleto y, en algún sentido, incorrecto. Incompleto pues hay que agregar información extra, la intersección de ciertos abiertos tiene que ser no vacía, e incorrecto porque el teorema (ya con las hipótesis adecuadas) no garantiza existencia sino, prueba que, dada una trayectoria discreta, entonces existen otras trayectorias cerca. Nuestro resultado en este tema es el Teorema 2.13, y en la Observación 2.16 damos una versión similar al enunciado en [8]. La teoría de los sistemas lagrangianos discretos, vistos de manera independiente a los sistemas continuos, la exponemos en el Capítulo 2

¿Será cierto que un sistema lagrangiano tiene trayectorias? Sabemos que, a partir del ejemplo anterior, un sistema lagrangiano discreto genérico no tiene por qué poseer trayectorias pero, ¿qué sucede con los sistemas lagrangianos discretos exactos? Al estudiar tales sistemas aparecieron nuevos inconvenientes: como el lagrangiano discreto exacto necesita de una trayectoria que, para un intervalo de tiempo  $h$  fijo conecte a  $q_0$  con  $q_1$ , entonces para estar bien definido tal trayectoria tiene que ser única. En su trabajo, J. E. Marsden y M. West aseveran que tal unicidad existe, y citan al libro [7] para su demostración. Pero un ejemplo que muestra que tales hipótesis no son suficientes ( $h$  suficientemente chico y  $q_1$  suficientemente cerca de  $q_0$ ) es el de una partícula en un círculo: no importa que tan chico sea el intervalo de tiempo ni que tan próximo este  $q_1$  de  $q_0$ , mientras podamos tomar velocidades suficientemente grandes van a existir infinitas trayectorias que conecten a tales puntos,



para un mismo intervalo de tiempo. Por ello introducimos la noción de los *abiertos  $h$ -admisibles*, que son los encargados de restringir las velocidades; en la sección 3.1.1 discutimos con más detalles estos temas. Avanzando un poco más, si suponemos que un sistema discreto exacto tiene trayectorias, entonces sigue valiendo el Teorema 1.6.4 enunciado en [8]; pero, ¿existen trayectorias? Esta pregunta nos mantuvo ocupados un buen tiempo; pensar que con  $h$  suficientemente chico debíamos obtener resultados similares al caso continuo tiene sentido, pero en el límite  $h \rightarrow 0$  el lagrangiano discreto no está definido. En este contexto no pudimos responder aquella pregunta.

Usando una nueva noción de sistema lagrangiano discreto C. Cuell y G. W. Patrick (en una publicación del año 2009 [9]) muestran que el Teorema 2.3.1 de [8], que habla de la similitud de soluciones con respecto a la similitud de los lagrangianos discretos, no es correcto y proveen una nueva demostración (de una parte del enunciado original). Además de [9], C. Cuell y G. W. Patrick publicaron [4] en el año 2009 y [3] en el año 2007. En [4] presentan las bases para el nuevo concepto de sistema lagrangiano discreto y mencionan como su construcción generaliza la de [8]; luego, en [3] proveen las técnicas básicas.

A diferencia de J. E. Marsden y M. West, quienes empiezan con la identificación del espacio de velocidades  $TQ$  con  $Q \times Q$ , sin detenerse en el cómo, C. Cuell y G. W. Patrick enfatizan tal proceso intermedio (que denominan *discretización de un sistema continuo*) caracterizándolo por un parámetro de deformación  $h$ . De esta manera, cada instancia de  $h$  es un *objeto discreto* (como los de [8]) y, además, el límite  $h \rightarrow 0$  permite recuperar al sistema continuo. A continuación presentamos una idea que permite ver como se podría discretizar un espacio tangente (el espacio de velocidades).

Una forma de pensar al espacio tangente  $T_qQ$  de un punto  $q \in Q$ , en lugar de compuesto por *flechas* que representan las velocidades, es como un conjunto de clases de equivalencias de curvas sobre  $Q$ ; donde las curvas de cada clase tienen la misma velocidad a tiempo  $t = 0$ . Es decir,

$$T_qQ := \left\{ v \equiv [\psi_v(\cdot)] / \psi_v(\cdot) \in v \Leftrightarrow \psi_v(0) = q \wedge \frac{d}{dt}\psi_v(0) = v \right\}.$$

Luego, consideremos un conjunto  $\Psi_qQ$  constituido por la elección suave de un representante de cada clase de equivalencia de  $T_qQ$ ,

$$\Psi_qQ := \{ \psi_v(t) / v \in T_qQ \}.$$

Finalmente, para cada  $h > 0$  podemos seleccionar la posición a  $t = 0$  y a  $t = h$  de cada curva del conjunto  $\Psi_qQ$ . El resultado final va a ser asignar para cada par  $(q, v) \equiv (q, \psi_v(\cdot))$  pares de puntos  $(q, \psi_v(h))$  tales que, cuanto más chico sea  $h$  mejor aproximan a la velocidad  $v$ .

En una instancia previa a la demostración correcta del Teorema 2.3.1 de [8], C. Cuell y G. W. Patrick prueban (como un resultado extra) que ciertos objetos poseen *flujo*. Demostración clave para el posterior estudio que hicimos sobre la existencia de trayectorias. Con pequeñas modificaciones probamos que los sistemas lagrangianos discretos de los cuales ellos hablaban poseen trayectorias (Teorema 3.25). Luego, usando, además, la construcción de los sistemas lagrangianos discretos exactos según

C. Cuell y G. W. Patrick probamos la existencia de trayectorias de los lagrangianos discretos exactos según J. E. Marsden y M. West (Teorema 3.29). Finalmente, pudimos dar la versión completa del teorema (Teorema 1.6.4 de [8]) que habla sobre la correspondencia de las trayectorias del lagrangiano discreto exacto con las trayectorias del sistema continuo (Teorema 3.30); presentados en la sección 3.2. Para esto último tuvimos que mostrar con más detalle la equivalencia entre ambos tipos de construcciones discretas (Teorema 2.22 y Teorema 2.27).

Este trabajo termina con un capítulo que habla de los sistemas lagrangianos discretos con fuerza. Esta noción también es discutida explícitamente en [8], donde refieren para su demostración al caso sin fuerzas. Debido a los errores detectados en este último caso presentamos un análisis completo de la existencia y unicidad de trayectorias para los sistemas lagrangianos discretos con fuerza, basada en una extensión de los resultados de C. Cuell y G. W. Patrick al caso con fuerzas.

# Capítulo 1

## Preliminares

La formulación variacional de la mecánica clásica muestra que las soluciones a las ecuaciones de Newton, las *trayectorias*, son los extremos de una funcional, la *acción*, cuando se consideran solo aquellas variaciones de la trayectoria que fijan los extremos (ver, por ejemplo, [6]). Inspirados con esta formulación, se extiende la noción de sistemas mecánicos a la de *sistemas lagrangianos*.

### 1.1. Sistemas lagrangianos

**Definición 1.1.** Dada una variedad diferencial  $Q$ , definimos su *espacio de caminos* como el conjunto

$$\mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}(Q|[a, b]) := \{q(\cdot) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow Q \mid q(\cdot) \text{ es una curva } C^2\};$$

más aún, puede probarse que tal construcción define una variedad diferencial de dimensión infinita (ver [1], sección 3.8). Luego, dado  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  llamaremos *variación infinitesimal*

$$\delta q(\cdot) : [a, b] \rightarrow TQ$$

de  $q(\cdot)$  a una curva  $C^2$ , tal que  $\delta q(t) \in T_{q(t)}Q$  para todo  $t \in [a, b]$ , y diremos que tal variación es a *extremos fijos* si además  $\delta q(a) = 0$  y  $\delta q(b) = 0$ . Por último, definimos la *variedad de segundo orden*  $\ddot{Q}$ , que en efecto es una subvariedad de  $TTQ$ , mediante

$$\ddot{Q} := \{w \in TTQ \mid \mathbf{d}\tau_Q(w) = \tau_{TQ}(w)\},$$

donde  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$ , y  $\tau_{TQ} : TTQ \rightarrow TQ$ , son las proyecciones canónicas a  $Q$ , y  $TQ$ , respectivamente.

**Observación 1.2.** Dado  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$ , escribiremos a su primera y segunda derivada como:  $q'(\cdot) : (a, b) \rightarrow TQ$  y  $q''(\cdot) : (a, b) \rightarrow \ddot{Q}$ , respectivamente. Es decir,

$$q'(t) := \frac{d}{dt}q(t) \quad \text{y} \quad q''(t) := \frac{d^2}{dt^2}q(t).$$

**Definición 1.3.** Dada un función suave  $G : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la *acción* de  $G$

como la funcional  $\mathcal{S} : \mathcal{C}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ , mediante

$$\mathcal{S}[q(\cdot)] := \int_a^b G(q'(t)) dt.$$

**Definición 1.4.** Sea  $G : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Entonces, su *derivada en la fibra*  $\mathbb{F}G : TQ \rightarrow T^*Q$  se define como

$$\mathbb{F}G(v)(w) := \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} G(v + \lambda w),$$

para todo  $v, w \in TQ$  tales que  $\tau_Q(v) = \tau_Q(w)$ .

Puede verse (en [4], sección 4.1) que vale la siguiente expresión para el diferencial de la acción de  $G$ :

$$d\mathcal{S}[q(\cdot)][\delta q(\cdot)] = \int_a^b D_{\text{EL}}G(q''(t))(\delta q(t)) dt + \mathbb{F}G(q'(t))(\delta q(t)) \Big|_a^b. \quad (1.1)$$

El operador  $D_{\text{EL}}G : \ddot{Q} \rightarrow T^*Q$  es llamado en [8] el *operador de Euler-Lagrange* y se define localmente como

$$D_{\text{EL}}\check{G}(q, \dot{q}, \ddot{q}) := \sum_i \left( \frac{\partial \check{G}}{\partial q^i} - \sum_j \left( \frac{\partial^2 \check{G}}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 \check{G}}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j \right) \right) dq^i, \quad (1.2)$$

donde  $\check{G}$  es la expresión de  $G$  respecto de las coordenadas  $q^i$ .

**Definición 1.5.** Un *sistema lagrangiano* es un dupla  $(Q, L)$ , donde  $Q$  es una variedad diferencial, el *espacio de configuraciones*, y  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, el *lagrangiano*.

Diremos que una curva  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una *trayectoria* del sistema  $(Q, L)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta q(\cdot)$  de  $q(\cdot)$ ,

$$d\mathcal{S}[q(\cdot)][\delta q(\cdot)] = 0,$$

donde  $\mathcal{S}$  es la acción del lagrangiano.

**Observación 1.6.** De acuerdo a la ecuación (1.1), podemos ver que  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una trayectoria de  $(Q, L)$  si y solo si satisface las siguientes ecuaciones, conocidas como las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$D_{\text{EL}}L(q''(t)) = 0, \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.3)$$

**Ejemplo 1.7. Sistema mecánico.** Consideremos el sistema lagrangiano  $(\mathbb{R}^d, L)$ , con

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q), \quad (1.4)$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  es una matriz definida positiva y  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Supongamos que  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una trayectoria. Entonces, a partir de las ecuaciones

## 1.1. Sistemas lagrangianos

---

de Euler-Lagrange (1.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(q(t), \dot{q}(t)) &= 0, \\ \sum_j M_{ij} \ddot{q}^j(t) + \frac{\partial V}{\partial q^i}(q(t)) &= 0, \quad \forall t \in [a, b], \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, d$ . En forma más compacta

$$M\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.5)$$

Es decir, las trayectorias del sistema lagrangiano (1.4) satisfacen las ecuaciones de Newton para un sistema mecánico en  $d$  dimensiones, con matriz de masa  $M$ , y función potencial  $V$ .

**Ejemplo 1.8. Oscilador armónico.** Uno de los ejemplos más importantes de la mecánica clásica, tanto por su sencillez como por su utilidad, es el sistema lagrangiano  $(\mathbb{R}, L)$ , con

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2,$$

donde  $\omega > 0$  es un parámetro fijo. La expresión (1.5) define el sistema de ecuaciones diferenciales  $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$ , cuyas soluciones son

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \omega^{-1} v_0 \sin(\omega t),$$

para las condiciones iniciales:  $q(0) = q_0$  y  $\dot{q}(0) = v_0$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange plantean un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, con  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  como incógnita. Por lo tanto, el campo vectorial asociado a tal sistema de ecuaciones será un *campo vectorial de segundo orden* (ver Proposición 3.5.13 en [1]). Es decir, un campo vectorial sobre  $TQ$  cuya imagen se encuentra contenida en  $\ddot{Q}$ .

**Definición 1.9.** Dado un sistema lagrangiano  $(Q, L)$ , un *campo lagrangiano*  $X_L : TQ \rightarrow \ddot{Q}$  es un campo vectorial de segundo orden que satisface

$$D_{\text{EL}}L \circ X_L = 0.$$

Llamaremos *flujo lagrangiano*  $F^{X_L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow TQ$  al flujo asociado al campo lagrangiano  $X_L$ . Además, identificaremos como  $F_t^{X_L} : TQ \rightarrow TQ$  al flujo lagrangiano a tiempo  $t$  fijo.

Puede verse que  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una trayectoria del sistema lagrangiano  $(Q, L)$  si y solo si  $q(t) = \tau_Q(F_t^{X_L}(v))$ , donde  $v := q'(0)$  es la condición inicial. El flujo lagrangiano puede no estar definido globalmente; en tal situación habrá que restringir el dominio de definición a abiertos de  $TQ$ . Más aún, para un lagrangiano cualquiera el campo lagrangiano no tiene por qué estar bien definido; con lo cual, el flujo lagrangiano puede no existir. Usando (1.2), vemos que las ecuaciones de Euler-

Lagrange (1.3) se escriben, en coordenadas, como:

$$\frac{\partial \check{L}}{\partial \dot{q}^i} - \sum_j \left( \frac{\partial^2 \check{L}}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 \check{L}}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j \right) = 0, \quad \forall i,$$

donde  $\check{L}$  es una expresión local del lagrangiano  $L$ . Luego, podremos despejar  $\ddot{q}$  como función de  $q$  y  $\dot{q}$  solo si la matriz de coeficientes  $\partial^2 \check{L} / \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i$  es invertible. Si vale esto último podremos usar, localmente, resultados usuales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma normal para garantizar la existencia y unicidad de trayectorias; al menos, para tiempos chicos (ver Teorema 4.1 en [2], sección IV).

**Definición 1.10.** Dado un sistema lagrangiano  $(Q, L)$ , se define la *transformada de Legendre* de  $L$  como su derivada en la fibra  $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ . Diremos que el sistema lagrangiano  $(Q, L)$  es *regular* (*hiper-regular*) si la transformada de Legendre de  $L$  es un difeomorfismo local (difeomorfismo global).

Siguiendo con la discusión anterior vemos, entonces, que el campo lagrangiano  $X_L$  va a estar bien definido si el sistema lagrangiano es regular.

## 1.2. Sistemas lagrangianos con fuerzas

**Definición 1.11.** Un *sistema lagrangiano con fuerza* es una terna  $(Q, L, f)$ , donde  $(Q, L)$  es un sistema lagrangiano y  $f : TQ \rightarrow T^*Q$  es una función suave que preserva las fibras<sup>1</sup>, el *campo de fuerzas*.

Diremos que una curva  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una *trayectoria* del sistema  $(Q, L, f)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta q(\cdot)$  de  $q(\cdot)$ ,

$$d\mathcal{S}[q(\cdot)][\delta q(\cdot)] + \int_a^b f(q'(t))(\delta q(t)) dt = 0,$$

donde  $\mathcal{S}$  es la acción del lagrangiano.

**Observación 1.12.** Trabajando de manera análoga al caso sin fuerzas, diremos que  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una trayectoria de  $(Q, L, f)$  si y solo si satisface las *ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerza*

$$D_{\text{EL}}L(q''(t)) + f(q'(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.6)$$

**Ejemplo 1.13. Sistema mecánico con fuerzas externas** Si consideramos una extensión del Ejemplo 1.7, adicionando un campo de fuerzas  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , se puede ver que las trayectorias de  $(\mathbb{R}^d, L, f)$  siguen satisfaciendo las ecuaciones de Newton

$$M\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) + f(q'(t)), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.7)$$

**Ejemplo 1.14. Oscilador armónico amortiguado.** Continuando con los ejemplos vistos en la sección anterior, obtengamos las trayectorias de un oscilador armó-

<sup>1</sup>Es decir, si  $v \in T_qQ$ , entonces  $f(v) \in T_q^*Q$ .

## 1.2. Sistemas lagrangianos con fuerzas

---

nico con rozamiento. Sea el sistema lagrangiano con fuerza  $(\mathbb{R}, L, f)$ , con

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2, \text{ y} \quad (1.8)$$

$$f(q, \dot{q})(\delta q) := -2\mu\dot{q}\delta q, \quad (1.9)$$

donde  $\omega > 0$  y  $\mu \in [0, \omega)$  son parámetros fijos. Luego, la expresión (1.7) define el sistema de ecuaciones diferenciales  $\ddot{q}(t) + 2\mu\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$ . Sus soluciones son, definiendo  $\omega_\mu := \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ ,

$$q(t) = e^{-\mu t} \left( q_0 \cos(\omega_\mu t) + \frac{\mu q_0 + v_0}{\omega_\mu} \sin(\omega_\mu t) \right), \quad (1.10)$$

para las condiciones iniciales:  $q(0) = q_0$  y  $\dot{q}(0) = v_0$ .

**Definición 1.15.** Dado un sistema lagrangiano con fuerza  $(Q, L, f)$ , un *campo lagrangiano con fuerza*  $X_{Lf} : TQ \rightarrow \tilde{Q}$  es un campo vectorial de segundo orden que satisface

$$D_{\text{EL}}L \circ X_{Lf} + f \circ \tau_{TQ} \circ X_{Lf} = 0.$$

Llamaremos *flujo lagrangiano con fuerza*  $F^{X_{Lf}} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow TQ$  al flujo asociado al campo lagrangiano con fuerza  $X_{Lf}$ . Además, identificaremos como  $F_t^{X_{Lf}} : TQ \rightarrow TQ$  al flujo lagrangiano con fuerza a tiempo  $t$  fijo.

Puede verse que  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  es una trayectoria del sistema lagrangiano con fuerza  $(Q, L, f)$  si y solo si  $q(t) = \tau_Q(F_t^{X_{Lf}}(v))$ , donde  $v = q'(0)$  es la condición inicial. Además, la regularidad de tal sistema es la misma que la del sistema lagrangiano  $(Q, L)$ ; ver Definición 1.10.





# Capítulo 2

## Sistemas Lagrangianos Discretos

Buscando sistemas dinámicos tales que sus trayectorias sean la evolución, paso a paso, de un integrador numérico que resuelva las ecuaciones de movimiento de algún sistema lagrangiano surgieron los *sistemas lagrangianos discretos*. El protagonista principal de estos sistemas es, en efecto, el *lagrangiano discreto*; el cual está definido sobre un *fibrado tangente discreto*. Por último, aunque las definiciones asociadas a los sistemas lagrangianos discretos fueron inspiradas en los sistemas lagrangianos con tiempo continuo, sus propiedades pueden estudiarse de manera independiente.

En las siguientes secciones estudiaremos dos tipos de sistemas lagrangianos discretos diferenciados principalmente por su fibrado tangente discreto. Por un lado, el mismo se obtiene al reemplazar  $TQ$  por  $Q \times Q$ , con la idea intuitiva de que dos puntos cercanos son el análogo discreto de la velocidad. Por otro lado, el fibrado tangente discreto es un objeto con menor estructura que permite generalizar la noción anterior.

### 2.1. Según J. E. Marsden y M. West

**Definición 2.1.** Dada una variedad diferencial  $Q$ , definimos su *espacio de caminos discretos* (MW)

$$\mathcal{C}_d(Q) = \mathcal{C}_d(Q|N) := \{q_* : [0, N] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow Q\} \simeq Q^{N+1};$$

su *espacio de primer orden discreto* (MW)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}_d(Q) = \dot{\mathcal{C}}_d(Q|N) := \{u_* \in (Q \times Q)^N \mid \exists q_* \in \mathcal{C}_d(Q), \\ u_k = (q_k, q_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}; \end{aligned}$$

y su *variedad de segundo orden discreta* (MW)

$$\ddot{\mathcal{C}}_d := \{(v, \tilde{v}) \in (Q \times Q) \times (Q \times Q) \mid p_2(v) = p_1(\tilde{v})\} = \dot{\mathcal{C}}_d(Q|2)$$

donde  $p_1, p_2 : Q \times Q \rightarrow Q$  son las proyecciones en la primera y segunda componente, respectivamente.

**Observación 2.2.** Dado  $u_* \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q)$ , si  $q_*, \tilde{q}_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  cumplen que  $u_k = (q_k, q_{k+1})$  y  $u_k = (\tilde{q}_k, \tilde{q}_{k+1})$  para todo  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ; entonces,  $q_* = \tilde{q}_*$ . Es decir, podemos

identificar a cada  $u_* \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q)$  con un único  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$ , en tal caso escribiremos  $u_* \equiv u(q_*)$  y  $u_k \equiv u(q_k) = (q_k, q_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

**Definición 2.3.** Dado  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$ , una *variación infinitesimal*  $\delta q_*$  de  $q_*$  es un elemento de  $T_{q_*}\mathcal{C}_d(Q)$ . Diremos que tal variación es a *extremos fijos* si, además,  $\delta q_0 = 0$  y  $\delta q_N = 0$ .

Dado  $u(q_*) \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q)$ , una *variación infinitesimal*  $\delta u_*$  de  $u(q_*)$  es un elemento de  $T_{u(q_*)}\dot{\mathcal{C}}_d(Q)$ ; es decir  $\delta u_* = (\delta q_k, \delta q_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , donde  $\delta q_k \in T_{q_k}\mathcal{C}_d(Q)$ . Diremos que tal variación es a *extremos fijos* si, además,  $\delta u_0 = (0, \delta q_1)$  y  $\delta u_{N-1} = (\delta q_{N-1}, 0)$ .

**Definición 2.4.** Dada un función suave  $G : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la *acción discreta* (MW) de  $G$  como la función  $\mathcal{S}_d : \mathcal{C}_d(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ , mediante

$$\mathcal{S}_d(q_*) := \sum_{k=0}^{N-1} G(q_k, q_{k+1}).$$

Sean  $Q_1, Q_2$  y  $M$  variedades diferenciales. Entonces, la diferencial de toda función suave,  $f : Q_1 \times Q_2 \rightarrow M$ , definida sobre un producto cartesiano de variedades diferenciales puede escribirse como  $\mathbf{d}f(q_1, q_2) := D_1f(q_1, q_2) + D_2f(q_1, q_2)$ , donde

$$D_1f(q_1, q_2) : T_{q_1}Q_1 \rightarrow T_{f(q_1, q_2)}M, \text{ y } D_2f(q_1, q_2) : T_{q_2}Q_2 \rightarrow T_{f(q_1, q_2)}M$$

satisfacen que  $\mathbf{d}f(q_1, q_2)(\delta q_1, \delta q_2) = D_1f(q_1, q_2)(\delta q_1) + D_2f(q_1, q_2)(\delta q_2)$ . Por lo tanto, dado  $G : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ , puede verse que vale la siguiente expresión para la diferencial de la acción de  $G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathcal{S}_d(q_*)(\delta q_*) &= \sum_{k=1}^{N-1} D_{\text{DEL}}G((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1}))(\delta q_k) \\ &\quad + D_2G(q_{N-1}, q_N)(\delta q_N) + D_1G(q_0, q_1)(\delta q_0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

El operador  $D_{\text{DEL}}G : \ddot{Q}_d \rightarrow T^*Q$  es llamado en [8] el *operador de Euler-Lagrange discreto* y se define mediante

$$D_{\text{DEL}}G((q_0, q_1), (q_1, q_2)) := (D_2G(q_0, q_1) + D_1G(q_1, q_2)) \, dq_1. \quad (2.2)$$

**Definición 2.5.** Un *sistema lagrangiano discreto* (MW) es un dupla  $(Q, L_d)$ , donde  $Q$  es una variedad diferencial, el *espacio de configuraciones*, y  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, el *lagrangiano discreto*.

Diremos que  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  es una *trayectoria discreta* del sistema  $(Q, L_d)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta q_*$  de  $q_*$ ,

$$\mathbf{d}\mathcal{S}_d(q_*)(\delta q_*) = 0,$$

donde  $\mathcal{S}_d$  es la acción discreta (MW) de  $L_d$ .

**Observación 2.6.** Dado  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$ , se puede ver que  $q_*$  es una trayectoria discreta del sistema  $(Q, L_d)$  si y solo si para toda variación infinitesimal  $\delta u_*$  de  $u(q_*)$  a extremos fijos,  $\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{d}L_d(u(q_k))(\delta u_k) = 0$ , donde  $u(q_*) \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q)$  es el camino de primer orden discreto asociado a  $q_*$ .

**Definición 2.7.** De acuerdo a la ecuaciones (2.1) y (2.2),  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  es una trayectoria discreta del sistema lagrangiano discreto (MW)  $(Q, L_d)$  si y solo si satisface las siguientes ecuaciones, llamadas en [8] *ecuaciones de Euler-Lagrange discretas*,

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.3)$$

A continuación consideraremos análogos discretos a los sistemas lagrangianos vistos en los ejemplos del capítulo anterior, en los cuales reemplazaremos la velocidad por un cociente incremental.

**Ejemplo 2.8. Sistema mecánico discreto.** Sea  $(\mathbb{R}^d, L_d)$  un sistema lagrangiano discreto (MW) con

$$L_d(q_0, q_1) := h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^T M \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - V(q_0) \right],$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  es una matriz definida positiva,  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, y  $h \neq 0$  un parámetro fijo. Podemos ver que, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas (2.3)

$$M(q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}) = -h^2 \nabla V(q_k), \quad (2.4)$$

obtenemos el algoritmo de Störmer-Verlet (ver [5], sección I.1.4) usado para resolver las ecuaciones de Newton  $M\ddot{q} = -\nabla V(q)$ .

**Ejemplo 2.9. Oscilador armónico discreto.** Consideremos el sistema lagrangiano discreto (MW)  $(\mathbb{R}, L_d)$  con

$$L_d(q_0, q_1) := h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} q_0^2 \right],$$

donde  $h \in (0, 2)$  es un parámetro fijo. Las ecuación (2.4) define el sistema de ecuaciones algebraicas  $(q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}) + h^2 q_k = 0$ ; cuyas soluciones son (ver Apéndice A), en función de la condición inicial  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ ,

$$q_k = \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta} q_1 - \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin\theta} q_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

donde  $\theta$  es tal que  $\cos\theta = 1 - h^2/2$ .

**Definición 2.10.** Sea  $(Q, L_d)$  un sistema lagrangiano discreto (MW), diremos que la función  $X_d : Q \times Q \rightarrow \dot{Q}_d$  es un *campo lagrangiano discreto* (MW) si es de la forma  $X_d(q_0, q_1) = ((q_0, q_1), (q_1, X_d^{(2)}(q_0, q_1)))$  y satisface que

$$D_{\text{DEL}} L_d \circ X_d = 0.$$

Además, dado un campo lagrangiano discreto (MW)  $X_d$ , definimos su *flujo lagrangiano discreto* (MW) como la función  $F_d : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$  que satisface

$$X_d(q_0, q_1) = ((q_0, q_1), F_d(q_0, q_1)).$$

**Observación 2.11.** Vemos que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in \ddot{Q}_d$  va a ser una trayectoria discreta de  $(Q, L_d)$  si y solo si existe un flujo lagrangiano discreto  $F_d$  definido sobre un abierto que contiene a  $(q_0, q_1)$ ; en tal caso vale que  $F_d(q_0, q_1) = (q_1, q_2)$ .

El flujo lagrangiano discreto (MW) puede no estar definido globalmente, por lo cual habrá que restringir el dominio de definición a abiertos de  $Q \times Q$ . Más aún, si  $(Q, L_d)$  es un sistema lagrangiano discreto (MW) cualquiera, entonces el flujo  $F_d$  puede no existir (pues el campo  $X_d$  puede no estar bien definido).

**Ejemplo 2.12.** Sea  $(\mathbb{R}, L_d)$  un sistema lagrangiano discreto dado por

$$L_d(q_0, q_1) = q_1^2 - \frac{1}{3}(q_0 + q_1)^3.$$

Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas determinan el sistema  $(q_1 + q_2)^2 = 2q_1 - (q_0 + q_1)^2$ . Tomando  $(q_0, q_1) = (-4, 5)$  como condición inicial vemos que existen dos valores de  $q_2$  ( $-2$  y  $-8$ ) que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas:  $(5 + q_2)^2 = 9$ ; con lo cual, el campo lagrangiano discreto (MW) no está bien definido.

Dado que las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas se escriben como

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad \forall k,$$

podremos hallar  $q_{k+1}$  como función de  $q_{k-1}$  y  $q_k$  si  $D_2D_1L_d(q_k, q_{k+1})$  es invertible, y  $(D_2L_d)^{-1}(D_1L_d(q_k, q_{k+1})) \neq \emptyset$ . En tal caso podremos garantizar la existencia y unicidad de trayectorias; al menos, la existencia de un paso más  $q_{k+1}$ . En el siguiente teorema resumimos estos comentarios.

**Teorema 2.13.** Sean  $(Q, L_d)$  un sistema lagrangiano discreto (MW), y  $(q_k, q_{k+1}) \in Q \times Q$ .

Entonces, si  $\mathbf{d}D_1L_d(q_k, q_{k+1})$  es invertible<sup>1</sup>, existen  $U \subset Q \times Q$  y  $V \subset T^*Q$ , con  $(q_k, q_{k+1}) \in U$  y  $D_1L_d(q_k, q_{k+1}) \in V$ , tales que

$$D_1L_d|_U : U \rightarrow V / D_1L_d|_U(\tilde{q}_k, \tilde{q}_{k+1}) := D_1L_d(\tilde{q}_k, \tilde{q}_{k+1}),$$

es un difeomorfismo. Si además,  $(-D_2L_d)^{-1}(V) \neq \emptyset$  entonces para todo  $(\tilde{q}_{k-1}, \tilde{q}_k) \in (-D_2L_d)^{-1}(V)$  existe un único  $(\tilde{q}_k, \tilde{q}_{k+1}) \in U$  tal que  $((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1}))$  es una trayectoria discreta del sistema  $(Q, L)$ .

*Demostración.* La primera parte del enunciado es un resultado directo del Teorema de la Función Inversa (ver Teorema 6.4 en [2], sección II). Luego, si  $(-D_2L_d)^{-1}(V) \neq \emptyset$ , por definición de pre-imagen, para todo par de puntos  $(\tilde{q}_{k-1}, \tilde{q}_k) \in (-D_2L_d)^{-1}(V)$  vale que  $-D_2L_d(\tilde{q}_{k-1}, \tilde{q}_k) \in V$ . Finalmente, por ser  $D_1L_d|_U$  un difeomorfismo, existe un único  $\tilde{q}_{k+1}$  tal que  $D_1L_d(\tilde{q}_k, \tilde{q}_{k+1}) = -D_2L_d(\tilde{q}_{k-1}, \tilde{q}_k)$ . Con lo cual, para todo  $(\tilde{q}_{k-1}, \tilde{q}_k) \in (-D_2L_d)^{-1}(V)$  existe un único  $(\tilde{q}_k, \tilde{q}_{k+1}) \in U$  tal que las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas del sistema  $(Q, L_d)$  se satisfacen.  $\square$

<sup>1</sup>Recordemos que  $D_1L_d(q_0, q_1) \in T_{q_0}^*Q$  y  $D_2L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^*Q$  son tales que  $\mathbf{d}L_d(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) = D_1L_d(q_0, q_1)(\delta q_0) + D_2L_d(q_0, q_1)(\delta q_1)$

**Ejemplo 2.14. Un caso problemático.** Estudiemos un análogo discreto al sistema mecánico de una partícula unidimensional en un potencial cúbico. Veamos que, dependiendo de las condiciones iniciales, las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas admiten dos, una, o ninguna solución, en regiones en las cuales sabemos que el sistema con tiempo continuo está bien definido. En concreto, consideremos el sistema mecánico discreto (MW),  $(\mathbb{R}, L_d)$ , con

$$L_d(q_0, q_1) = \frac{1}{2h} (q_1 - q_0)^2 - \frac{1}{3} hK (q_1 + q_0)^3, \quad (2.6)$$

donde  $h \neq 0$  un parámetro fijo. Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas (2.3) definen el sistema de ecuaciones algebraicas

$$q_{k-1} - 2q_k + q_{k+1} = -h^2 K \left( (q_{k+1} + q_k)^2 + (q_{k+1} + q_k)^2 \right), \quad \forall k. \quad (2.7)$$

Definamos las funciones  $f_q^-, f_q^+ : Q \rightarrow T_q^*Q$  que, localmente, satisfacen

$$D_2 \check{L}_d(q_0, q_1) = (q_1, f_{q_1}^+(q_0)), \quad \text{y} \quad D_1 \check{L}_d(q_0, q_1) = (q_0, -f_{q_0}^-(q_1)).$$

Por lo tanto, se puede ver que las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas, en términos de las funciones  $f_q^+$  y  $f_q^-$ , equivalen a

$$f_{q_k}^+(q_{k-1}) = f_{q_k}^-(q_{k+1}), \quad \forall k. \quad (2.8)$$

En lo que resta, tomemos  $k = 1$  y estudiemos cómo tienen que ser las condiciones iniciales  $(q_0, q_1)$  para que exista un paso más  $q_2$ ; es decir, para que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2))$  sea una trayectoria discreta.

Las funciones  $f_{q_1}^+$  y  $f_{q_1}^-$  para el lagrangiano discreto (2.6) valen

$$f_{q_1}^+(q) = \frac{q_1 - q}{h} - hK (q + q_1)^2, \quad \text{y} \quad f_{q_1}^-(q) = \frac{q - q_1}{h} + hK (q_1 + q)^2.$$

Con lo cual, definiendo  $\gamma := 1/(2h^2K)$  y notando que  $f_{q_1}^-(q) = -f_{q_1}^+(q)$ ,

$$\frac{1}{2hK} f_{q_1}^-(q) = -\frac{1}{2hK} f_{q_1}^+(q) = \gamma(q - q_1) + \frac{(q + q_1)^2}{2}.$$

Entonces, para saber si existe  $q_2$  tal que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2))$  sea trayectoria discreta, con condiciones iniciales  $(q_0, q_1)$ , simplemente tenemos que buscar que valga

$$(f_{q_1}^+)^{-1}(f_{q_1}^-(q_2)) \neq \emptyset$$

para algún par  $(q_1, q_2)$ . En la figura 2.1 podemos ver un gráfico que esquematiza este procedimiento. Como las parábolas que definen las funciones  $f_{q_1}^+$  y  $f_{q_1}^-$  son una la inversa de la otra, entonces va a existir un tal  $(q_1, q_2)$  (solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas) solamente si las parábolas se intersecan<sup>2</sup>. Esta condición

<sup>2</sup>Para un sistema lagrangiano cualquiera, esta condición no necesariamente tiene que cumplirse para garantizar existencia de trayectorias discretas pero, para un sistema tal que  $f_{q_1}^- = -f_{q_1}^+$  la intersección no vacía de ambas funciones es condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas. Notar, además, que si existe  $q$  tal que  $f_{q_1}^-(q) = f_{q_1}^+(q)$ , entonces  $((q, q_1), (q_1, q))$  es trayectoria discreta; es decir, la trayectoria *vuelve* sobre

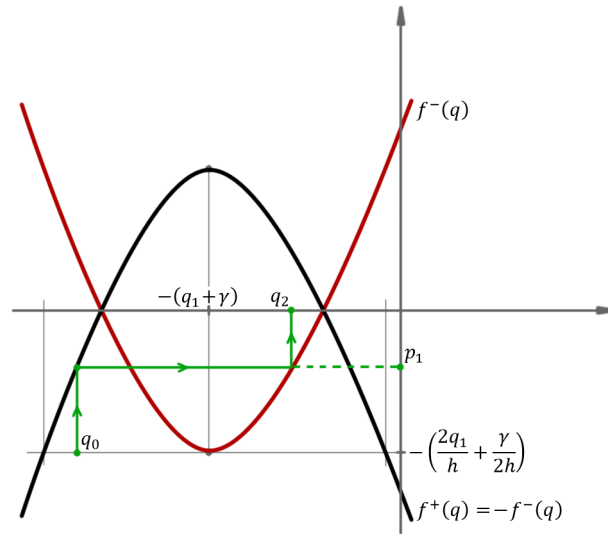


Figura 2.1: Gráfica de las funciones  $f^+ \equiv f_{q_1}^+$  y  $f^- \equiv f_{q_1}^-$  para un sistema unidimensional en un potencial cúbico.

se cumple si, fijando  $q_1$ , el mínimo valor de  $f_{q_1}^-$  es menor o igual a cero. Por un lado

$$\frac{d}{d\tilde{q}} f_{q_1}^-(\tilde{q}) = \gamma + \tilde{q} + q_1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = -q_1 - \gamma,$$

luego, el mínimo valor de  $f_{q_1}^-$  es

$$f_{q_1}^-(-q_1 - \gamma) = -\frac{2}{h}q_1 - \frac{1}{2h}\gamma,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \exists q_2 / (f_{q_1}^+)^{-1}(f_{q_1}^-(q_2)) \neq \emptyset &\Leftrightarrow -\frac{2}{h}q_1 - \frac{1}{2h}\gamma \leq 0, \\ &\Leftrightarrow q_1 \geq -\gamma/4, \\ &\Leftrightarrow q_1 \geq -\frac{1}{8h^2K}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalmente, podemos ver que

1. si  $q_1 < -\gamma/4$ , entonces las parábolas que definen a  $f_{q_1}^+$  y  $f_{q_1}^-$  no se intersecan. Esto nos dice que para toda condición inicial  $(q_0, q_1)$  no existe ningún par  $(q_1, q_2)$  tal que se satisfaga (2.8). Es decir, si  $q_1 < -\gamma/4$ , el sistema lagrangiano discreto no tiene trayectorias.

2. si  $q_1 = -\gamma/4$ , las parábolas se intersecan en un único punto

$$f_{q_1}^+(\mathbb{R}) \cap f_{q_1}^-(\mathbb{R}) = \{-q_1 - \gamma\} = \{-3\gamma/4\}.$$

si misma; comportamiento que es imposible de observar en los sistemas lagrangianos con tiempo continuo.

Por lo tanto, existe una única condición inicial  $(-3\gamma/4, -\gamma/4) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tal que  $((-3\gamma/4, -\gamma/4), (-\gamma/4, -3\gamma/4)) \in \ddot{Q}_d$  es una trayectoria discreta.

3. si  $q_1 \geq -\gamma/4$ , existe  $\delta_{q_1, \gamma} > 0$  tal que el intervalo

$$I_{q_1, \gamma} := (-q_1 - \gamma - \delta_{q_1, \gamma}, -q_1 - \gamma + \delta_{q_1, \gamma}) \subset \mathbb{R}$$

verifica que, para todo  $q_0 \in I_{q_1, \gamma}$ , el sistema lagrangiano posee dos trayectorias discretas con condición inicial  $(q_0, q_1)$ . Además, si  $q_0 = -(q_1 + \gamma) - \delta_{q_1, \gamma}$  ó  $q_0 = -(q_1 + \gamma) + \delta_{q_1, \gamma}$ , el sistema posee una única trayectoria discreta con condición inicial  $(q_0, q_1)$ .

**Definición 2.15.** Dado un sistema lagrangiano discreto (MW)  $(Q, L_d)$ , definimos las transformadas de Legendre discretas (MW) de  $L_d$  como las funciones  $\mathbb{F}^+ L_d, \mathbb{F}^- L_d : Q \times Q \rightarrow T^*Q$ , definidas mediante

$$\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) := D_2 L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q, \quad (2.10)$$

$$\mathbb{F}^- L_d(q_0, q_1) := -D_1 L_d(q_0, q_1) \in T_{q_0}^* Q. \quad (2.11)$$

Diremos que el sistema lagrangiano discreto (MW)  $(Q, L_d)$  es *regular* (*hiper-regular*), si las transformadas de Legendre discretas de  $L_d$ ,  $\mathbb{F}^+ L_d$  y  $\mathbb{F}^- L_d$ , son difeomorfismos locales (difeomorfismos globales).

Notemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange Discretas pueden reescribirse en términos de las transformadas de Legendre discretas, como

$$\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) = \mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2).$$

**Observación 2.16.** Sea  $(Q, L_d)$  un sistema lagrangiano discreto regular (MW). Luego, para todo  $(q_1, q_2) \in Q \times Q$  existen abiertos  $U \subset Q \times Q$  y  $V \subset T^*Q$ , con  $(q_1, q_2) \in U$  y  $\mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2) \in V$ , tales que, si  $(\mathbb{F}^+ L_d)^{-1}(V) \neq \emptyset$  entonces, para todo  $(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1) \in (\mathbb{F}^+ L_d)^{-1}(V)$  las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas tienen una única solución  $((\tilde{q}_0, \tilde{q}_1), (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2))$ , con  $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \in U$ .

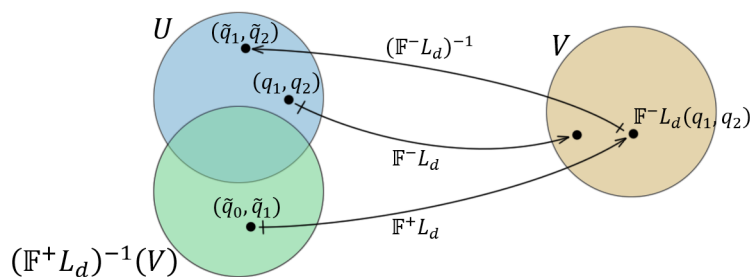


Figura 2.2: Diagrama representativo de la Observación 2.16.

## 2.2. Según C. Cuell y G. W. Patrick

**Definición 2.17.** (Definition 2 de [4]) Dada una variedad diferencial  $Q$ , un *fibrado tangente discreto* de  $Q$  es una terna  $(\mathcal{V}, \partial^+, \partial^-)$ , donde

1.  $\mathcal{V}$  es una variedad diferencial de dimensión  $\dim(\mathcal{V}) = 2 \dim(Q)$ ,
2.  $\partial^+ : \mathcal{V} \rightarrow Q$  y  $\partial^- : \mathcal{V} \rightarrow Q$  son submersiones tales que  $\ker(\mathbf{d}\partial^+) \cap \ker(\mathbf{d}\partial^-) = \{0\}$ ; y
3. para todo  $q \in Q$  vale que  $(\partial^+)^{-1}(q)$  y  $(\partial^-)^{-1}(q)$  se intersecan en un punto.

Por simplicidad identificaremos  $\mathcal{V} \equiv (\mathcal{V}, \partial^+, \partial^-)$ , y definiremos, además, la función  $\partial^\mp : \mathcal{V} \rightarrow Q \times Q$  mediante  $\partial^\mp(v) := (\partial^-(v), \partial^+(v))$ .

Veamos que la función  $\partial^\mp$  es un difeomorfismo local con su imagen. Por un lado, por el ítem 2, vale que  $\ker(\mathbf{d}\partial^\mp(v)) = \{\delta v \in T_v\mathcal{V} / \delta v \in \ker(\mathbf{d}\partial^+(v)) \cap \ker(\mathbf{d}\partial^-(v))\} = \{0\}$ , para todo  $v \in \mathcal{V}$ . Por otro lado, por ser  $\partial^+$  y  $\partial^-$  submersiones, entonces  $\mathbf{d}\partial^\mp(v)(T_v\mathcal{V}) = \mathbf{d}\partial^-(v)(T_v\mathcal{V}) \times \mathbf{d}\partial^+(v)(T_v\mathcal{V}) = T_{\partial^-(v)}Q \times T_{\partial^+(v)}Q$ , para todo  $v \in \mathcal{V}$ . Juntando todo vemos que  $\mathbf{d}\partial^\mp(v)$  es un isomorfismo para todo  $v \in \mathcal{V}$ ; es decir,  $\mathbf{d}\partial^\mp$  es un difeomorfismo local con su imagen.

**Definición 2.18.** Dado un fibrado tangente discreto de  $Q$ ,  $\mathcal{V}$ , definimos su *espacio de caminos discretos* (CP)

$$\dot{\mathbf{C}}_d(Q) = \dot{\mathbf{C}}_d^\mathcal{V}(Q|N) := \left\{ v_* \in \mathcal{V}^N / \partial^+(v_{k-1}) = \partial^-(v_k), k = 1, 2, \dots, N-1 \right\};$$

y su *variedad de segundo orden discreta* (CP)

$$\ddot{\mathbf{O}}_d := \left\{ (v, \tilde{v}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} / \partial^+(v) = \partial^-(\tilde{v}) \right\} = \dot{\mathbf{C}}_d^\mathcal{V}(Q|2).$$

Dado  $v_* \in \dot{\mathbf{C}}_d(Q)$ , una *variación infinitesimal*  $\delta v_*$  de  $v_*$  es un elemento de  $T_{v_*}\dot{\mathbf{C}}_d(Q)$ , y diremos que tal variación es a *extremos fijos* si, además,  $\mathbf{d}\partial^-(v_0)(\delta v_0) = 0$  y  $\mathbf{d}\partial^+(v_{N-1})(\delta v_{N-1}) = 0$ .

**Ejemplo 2.19.** Sea  $Q$  una variedad diferencial, y consideremos la terna  $(Q \times Q, p_2, p_1)$ , donde  $p_1, p_2 : Q \times Q \rightarrow Q$  son las proyecciones en la primera y segunda componente. Entonces, podemos ver que

$$\mathcal{V}^{Q \times Q} := (Q \times Q, p_2, p_1) \tag{2.12}$$

es un fibrado tangente discreto de  $Q$ . Además, el espacio de primer orden discreto (MW), ver Definición 2.1, coincide con el espacio de caminos (CP); es decir,  $\dot{\mathbf{C}}_d(Q) = \dot{\mathbf{C}}_d^{Q \times Q}(Q)$ .

**Definición 2.20.** Dada un función suave  $G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la *acción discreta* (CP) de  $G$  como la función  $\mathbf{S}_d : \dot{\mathbf{C}}_d(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\mathbf{S}_d(v_*) := \sum_{k=0}^{N-1} G(v_k)$$

**Definición 2.21.** Un *sistema lagrangiano discreto* (CP) es una terna  $(Q, \mathcal{V}, \mathbf{L}_d)$ , donde  $Q$  es una variedad diferencial, el *espacio de configuraciones*,  $\mathcal{V}$  un fibrado tangente discreto de  $Q$ , y  $\mathbf{L}_d : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, el *lagrangiano discreto*.



Diremos que  $v_* \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q)$  es una *trayectoria discreta* del sistema  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta v_*$  de  $v_*$ ,

$$d\mathfrak{S}_d(v_*)(\delta v_*) = 0,$$

donde  $\mathfrak{S}_d$  es la acción discreta (CP) de  $\mathfrak{L}_d$ .

En el siguiente teorema probaremos que la familia de sistemas lagrangianos discretos (MW) está contenida en la familia de sistemas lagrangianos discretos (CP).

**Teorema 2.22.** Sean  $(Q, L_d)$  y  $(Q, \mathcal{V}^{Q \times Q}, \mathfrak{L}_d^{Q \times Q})$  sistemas lagrangiano discretos (MW) y (CP), respectivamente, con  $\mathcal{V}^{Q \times Q}$  definido como (2.12) y  $\mathfrak{L}_d^{Q \times Q} := L_d$ . Entonces,  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  es trayectoria discreta de  $(Q, L_d)$  si y solo si  $u(q_*) \in \dot{\mathcal{C}}_d^{Q \times Q}(Q)$  es trayectoria discreta de  $(Q, \mathcal{V}^{Q \times Q}, \mathfrak{L}_d^{Q \times Q})$ .

*Demostración.*  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  es trayectoria discreta de  $(Q, L_d)$  si y solo si, por la Observación 2.6, para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta u_*$  de  $u(q_*) \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q) = \dot{\mathcal{C}}_d^{Q \times Q}(Q)$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{N-1} dL_d(u(q_k))(\delta u_k), \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} d\mathfrak{L}_d(u(q_k))(\delta u_k), \\ &= d\mathfrak{S}(u(q_*))(\delta u_*). \end{aligned}$$

Finalmente, esto último ocurre si y solo si  $u(q_*)$  es trayectoria discreta del sistema  $(Q, \mathcal{V}^{Q \times Q}, \mathfrak{L}_d^{Q \times Q})$ .  $\square$

Debido a este último resultado podemos concluir que los mismos tipos de comportamientos que presentan los sistemas lagrangianos discretos (MW), respecto a la existencia y unicidad de trayectorias, van a presentarlos los sistema lagrangiano discreto (CP). Es decir, un sistema  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$  no tiene por qué poseer trayectorias y, en caso de tenerlas, no tienen por qué ser únicas. Este mismo razonamiento se aplica a la existencia, local y global, de flujos discretos (CP), que definiremos a continuación.

**Definición 2.23.** Sea  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$  un sistema lagrangiano discreto (CP). Entonces, diremos que la función  $\mathfrak{F}_d : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  es un *flujo lagrangiano discreto* (CP) si satisface que  $(v, \mathfrak{F}_d(v))$  es una trayectoria discreta de  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$ .

Podemos ver que, el par  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$  va a ser una trayectoria discreta de  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$ , si y solo si existe un flujo lagrangiano discreto  $\mathfrak{F}_d$  definido en un abierto que contiene a  $v$ ; en tal caso vale que  $(v, \tilde{v}) = (v, \mathfrak{F}_d(v))$ .

A continuación relacionaremos la noción de sistemas lagrangianos discretos según J. E Marsden y M. West con la de C. Cuell y G. W. Patrick, de la siguiente manera: veremos que, si los lagrangianos discretos de los dos tipos de sistemas lagrangianos discretos están vinculados mediante la función  $\partial^\mp$ , entonces sus trayectorias discretas

están conectadas mediante la misma función (Teorema 2.27). Para ello es conveniente primero definir la función  $\partial^{\mathcal{C}^d} : \ddot{\mathfrak{O}}_d \rightarrow \ddot{Q}_d$ , como

$$\partial^{\mathcal{C}^d} := (\partial^{\mp} \times \partial^{\mp})|_{\ddot{\mathfrak{O}}_d}.$$

Notemos que  $\partial^{\mathcal{C}^d}$  está bien definida pues la condición de pertenecer a  $\ddot{\mathfrak{O}}_d$  impone la igualdad en la segunda y tercera componente de  $\partial^{\mathcal{C}^d}(v, w) \in (Q \times Q) \times (Q \times Q)$ , y que, además, es un difeomorfismo local. Probemos esto último: Por un lado

$$\ker(\mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(v, \tilde{v})) \subset \{(\delta v, \delta \tilde{v}) / \delta v \in \ker(\mathbf{d}\partial^{\mp}(v)), \delta \tilde{v} \in \ker(\mathbf{d}\partial^{\mp}(\tilde{v}))\} = \{(0, 0)\},$$

para todo  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_{(v, \tilde{v})}\ddot{\mathfrak{O}}_d &= \{(\delta v, \delta \tilde{v}) \in T_v\mathcal{V} \times T_{\tilde{v}}\mathcal{V} / \mathbf{d}\partial^+(v)(\delta v) = \mathbf{d}\partial^-(\tilde{v})(\delta \tilde{v})\} \\ &\simeq T_{\partial^-(v)}Q \times T_{\partial^+(v)}Q \times T_{\partial^+(\tilde{v})}Q, \end{aligned}$$

entonces  $\dim(T_{(v, \tilde{v})}\ddot{\mathfrak{O}}_d) = 3 \dim(Q)$  para todo  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$ . Finalmente, juntando todo y usando que  $\dim(\ddot{Q}_d) = 3 \dim(Q)$ , pues

$$\ddot{Q}_d = \{((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in (Q \times Q) \times (Q \times Q)\} \simeq Q^3,$$

vemos que  $\mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(v, \tilde{v})$  es un isomorfismo para todo  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$ ; es decir,  $\partial^{\mathcal{C}^d}$  es un difeomorfismo local con su imagen.

**Lema 2.24.** Sean  $(Q, L_d)$  y  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$  dos sistemas lagrangianos discretos,  $(MW)$  y  $(CP)$  respectivamente, tales que  $\mathfrak{L}_d = L_d \circ \partial^{\mp}$ . Entonces:

1. Para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta u_0, \delta u_1)$  de  $(u_0, u_1)$ , con  $(u_0, u_1) \in \partial^{\mathcal{C}^d}(\ddot{\mathfrak{O}}_d)$ , existe una variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v_0, \delta v_1)$  de  $(v_0, v_1)$ , que satisface

$$\mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(v_0, v_1)(\delta v_0, \delta v_1) = (\delta u_0, \delta u_1),$$

donde  $(v_0, v_1) \in (\partial^{\mathcal{C}^d})^{-1}(u_0, u_1)$ .

2. Para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v_0, \delta v_1)$  de  $(v_0, v_1) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$ , existe una variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta u_0, \delta u_1)$  de  $\partial^{\mathcal{C}^d}(v_0, v_1)$ , que satisface

$$(\delta u_0, \delta u_1) = \mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(v_0, v_1)(\delta v_0, \delta v_1).$$

*Demostración.* Para la primer parte; por ser  $\partial^{\mathcal{C}^d}$  un difeomorfismo local, entonces para todo  $(v_0, v_1)$  perteneciente a  $(\partial^{\mathcal{C}^d})^{-1}(u_0, u_1)$

$$\mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(v_0, v_1) : T_{(v_0, v_1)}\ddot{\mathfrak{O}}_d \rightarrow T_{(u_0, u_1)}\ddot{Q}_d$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto, para cada variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta u_0, \delta u_1)$  de  $(u_0, u_1)$ , la variación infinitesimal a extremos fijos

$$(\delta v_0, \delta v_1) := \mathbf{d}(\partial^{\mathcal{C}^d})^{-1}(u_0, u_1)(\delta u_0, \delta u_1)$$

de  $(v_0, v_1)$ , satisface que  $\mathbf{d}\partial^{c_d}(v_0, v_1)(\delta v_0, \delta v_1) = (\delta u_0, \delta u_1)$ . La segunda parte se demuestra de igual manera.  $\square$

**Aclaración 2.25.** Para resumir notación, en los siguientes resultados escribiremos a una variación infinitesimal de  $m \in M$  como un elemento del fibrado tangente  $\delta m \in TM$ , tal que  $\tau_M(\delta m) = m$ , con  $M = \ddot{\mathbf{O}}_d$  ó  $\ddot{Q}_d$ . En otras palabras, omitiremos la escritura explícita de los puntos base de los elementos del fibrado tangente.

**Observación 2.26.** Identificando como  $\text{Inf}_m(M)$  al conjunto de variaciones infinitesimales a extremos fijos de  $m \in M$ , con  $M = \ddot{\mathbf{O}}_d$  ó  $\ddot{Q}_d$ . Entonces, usando el Lema 2.24, se puede ver que

$$\mathbf{d}\partial^{c_d}(\text{Inf}_{(v_0, v_1)}(\ddot{\mathbf{O}}_d)) = \text{Inf}_{\partial^{c_d}(v_0, v_1)}(\ddot{Q}_d), \quad (2.13)$$

para cada  $(v_0, v_1) \in \ddot{\mathbf{O}}_d$ .

**Teorema 2.27.** Sean  $(Q, L_d)$  y  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$  dos sistemas lagrangianos discretos (MW) y (CP), respectivamente, tales que  $\mathfrak{L}_d = L_d \circ \partial^\mp$ . Luego:

1. Si  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathbf{O}}_d$  es trayectoria discreta de  $(Q, \mathcal{V}_d, \mathfrak{L}_d)$ , entonces  $\partial^{c_d}(v, \tilde{v}) \in \ddot{Q}_d$  es trayectoria discreta de  $(Q, L_d)$ .
2. Inversamente, si  $(v, \tilde{v})$  es tal que  $\partial^{c_d}(v, \tilde{v})$  es trayectoria discreta de  $(Q, L_d)$ , entonces  $(v, \tilde{v})$  es trayectoria discreta de  $(Q, \mathcal{V}_d, \mathfrak{L}_d)$ .

*Demostración.* Para la primera parte: por la Observación 2.26, toda variación infinitesimal a extremos fijos de  $\partial^{c_d}(v, \tilde{v})$  es de la forma  $\mathbf{d}\partial^{c_d}(\delta v, \delta \tilde{v})$ , para alguna variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  de  $(v, \tilde{v})$ . Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}S_d(\mathbf{d}\partial^{c_d}(\delta v, \delta \tilde{v})) &= \mathbf{d}L_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta v)) + \mathbf{d}L_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta \tilde{v})), \\ &= \mathbf{d}(L_d \circ \partial^\mp)(\delta v) + \mathbf{d}(L_d \circ \partial^\mp)(\delta \tilde{v}), \\ &= \mathbf{d}\mathfrak{L}_d(\delta v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_d(\delta \tilde{v}), \\ &= \mathbf{d}\mathfrak{S}_d(\delta v, \delta \tilde{v}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\partial^{c_d}(v, \tilde{v})$  es trayectoria discreta del sistema lagrangiano  $(Q, L_d)$ . La segunda parte se demuestra de manera análoga.  $\square$

Terminamos este capítulo remarcando que ambas construcciones de sistemas lagrangianos discretos son similares, si estudiamos a los sistemas lagrangianos discretos como objetos independientes de los sistemas lagrangianos con tiempo continuo. Va a existir una clara distinción entre ellos cuando hablemos de las *discretizaciones de los sistemas continuos* (noción introducida por C. Cuell y G. W. Patrick). Por un lado, en [4], C. Cuell y G. W. Patrick enfatizan la diferencia entre una tal *discretización* y un *objeto discreto*, ejemplos de estos últimos son los sistemas lagrangianos discretos y los fibrados tangentes discretos que definimos en este capítulo. Una discretización de un sistema continuo, en cambio, es un proceso controlado suavemente por un parámetro  $h$ , tal que para cada  $h$  (cada instancia) se obtiene un objeto discreto; además, el límite  $h \rightarrow 0$  permite recupera las propiedades del sistema continuo. Más adelante utilizaremos esto para extraer propiedades muy importantes, como ser la existencia y unicidad de trayectorias de los sistemas lagrangianos con tiempo

continuo. Por otro lado, en [8], J. E. Marsden y M. West asocian sistemas lagrangianos discretos a sistemas lagrangianos con tiempo continuo, sin hacer una referencia explícita al proceso de discretización, para luego caracterizar la bondad de tal asociación comparando las trayectorias. En el próximo capítulo estudiaremos ambas discretizaciones.

# Capítulo 3

## Relación con los Sistemas Lagrangianos

En el capítulo anterior introdujimos a los sistemas lagrangianos discretos de manera independiente de los sistemas lagrangianos con tiempo continuo, y vimos que, en general, pueden tener trayectorias únicas, trayectorias múltiples, o no poseer trayectorias. En este capítulo nos centraremos en la relación, que llamaremos *discretización de un sistema continuo*, que puede establecerse entre los sistemas lagrangianos continuos y discretos. Finalmente probaremos que bajo condiciones razonables, impuestas a la discretización, los sistemas lagrangianos discretos poseen trayectorias, que son únicas dentro de ciertos abiertos.

### 3.1. Discretización de Sistemas Lagrangianos

Expondremos este tema desde dos puntos de vista: según J. E. Marsden y M. West, por un lado; y según C. Cuell y G. W. Patrick, por el otro lado. A pesar de que, el primer punto de vista (ampliamente entendido, aceptado y usado), proviene de la contribución de publicaciones de muchas personas, que ser remontan desde los años '60 hasta la actualidad, optamos por hacer referencia a ellos mediante dos personas porque fueron los autores de [8], publicación del año 2001 que resume la basta información conocida sobre el tema. El segundo punto de vista que estudiaremos está confinado solamente a aquellas dos personas y a dos publicaciones (del año 2009): [4] y [9]. Haciendo uso de las técnicas expuestas en sus trabajos y en [3] pudimos responder preguntas concretas, que posteriormente traducimos al contexto de J. E. Marsden y M. West.

Para cada noción de sistema lagrangiano discreto presentaremos primero a las discretizaciones de un fibrado tangente, para luego definir las discretizaciones de los sistemas lagrangianos continuos. Finalmente, en la próxima sección probaremos los resultados sobre la existencia y unicidad de trayectorias discretas.

#### 3.1.1. Según J. E. Marsden y M. West

Las definiciones que daremos aquí no están dadas en [8] pero constituyen, creemos, una construcción más detallada que surge a partir de los argumentos expuestos

en la sección 1.3 del mismo trabajo. Esto nos va a permitir ser más precisos con los resultados derivados de tales definiciones.

**Definición 3.1.** Dada una variedad diferencial  $Q$ , diremos que una función  $\varphi : U \subset TQ \rightarrow Q \times Q$ , definida sobre un abierto  $U$ , es una *discretización (MW) de  $TQ$*  si es un difeomorfismo con su imagen. Además, diremos que una familia uniparamétrica de discretizaciones,  $\varphi_h \equiv \{\varphi_h\}_{h \in I}$ , es una *discretización de  $TQ$  de paso de tiempo  $h$*  si depende suavemente con el parámetro  $h \neq 0$ .

**Ejemplo 3.2.** Tomemos  $Q = \mathbb{R}^d$ , y  $h \neq 0$  fijo. Luego, la función  $\varphi_h : T\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  tal que  $\varphi_h(x, \dot{x}) := (x, x + \dot{x}h)$ , es una función suave con inversa  $\varphi_h^{-1}(x_0, x_1) = (x_0, (x_1 - x_0)/h)$  suave; por lo tanto, es una discretización. Más aún, da lugar a una discretización de  $T\mathbb{R}^d$  de paso de tiempo  $h$ . Notemos que esta discretización surge naturalmente al pensar a  $TQ$  como  $Q \times Q$ , donde pares de puntos cercanos son el análogo discreto a la velocidad.

**Definición 3.3.** Dado un sistema lagrangiano  $(Q, L)$  y una discretización de  $TQ$  de paso de tiempo  $h \neq 0$ ,  $\varphi_h$ , una *discretización (MW) del sistema lagrangiano  $(Q, L)$*  es un sistema lagrangiano discreto (MW)  $(Q, L_{d,h})$  tal que:

$$L_{d,h} := h(L \circ \varphi_h^{-1}). \quad (3.1)$$

**Ejemplo 3.4. Discretización de un sistema mecánico.** Sea el sistema lagrangiano  $(\mathbb{R}^d, L)$ , con

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q),$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  es una matriz definida positiva y  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Consideremos la discretización de  $TQ$  paso de tiempo  $h \neq 0$ ,  $\varphi_h : T\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  tal que  $\varphi_h(q, \dot{q}) := (q, q + \dot{q}h)$ . Luego, una discretización del sistema mecánico,  $(Q, L_{d,h})$ , queda determinado por

$$L_{d,h}(q_0, q_1) = h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^T M \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - V(q_0) \right].$$

Es decir, obtenemos el sistema mecánico discreto que estudiamos en el Ejemplo 2.8.

A continuación mencionamos otra forma que podría emplearse para discretizar sistemas lagrangianos.

**Definición 3.5.** Dado un sistema lagrangiano  $(Q, L)$  y una familia de discretizaciones de  $TQ$  de paso de tiempo  $h \neq 0$ ,  $\{\varphi_h^i\}_{i \in I}$ , llamaremos *discretización compuesta del sistema lagrangiano  $(Q, L)$*  a un sistema lagrangiano discreto (MW)  $(Q, L_{d,w^i})$ , tal que

$$L_{d,w^i} := \sum_{i \in I} w^i (L \circ \varphi_h^i), \quad \text{con} \quad \sum_{i \in I} w^i = h. \quad (3.2)$$

**Ejemplo 3.6. Descretización sobre el potencial.** Para el sistema lagrangiano del Ejemplo 3.4 y las discretizaciones de  $TQ$  de paso de tiempo  $h \neq 0$ ,  $\varphi_h^1$  y  $\varphi_h^2$ , donde

$$\begin{aligned} \varphi_h^1 : TQ &\rightarrow Q \times Q / \varphi_h^1(q, \dot{q}) := (q, q + h\dot{q}), \\ \varphi_h^2 : TQ &\rightarrow Q \times Q / \varphi_h^2(q, \dot{q}) := (q - h\dot{q}, q). \end{aligned}$$

### 3.1. Discretización de Sistemas Lagrangianos

---

Una discretización compuesta de  $L$ ,  $(Q, L_{d,\xi h})$ , es

$$\begin{aligned} L_{d,\xi h}(q_0, q_1) &= h\xi(L \circ \varphi_h^1)(q_0, q_1) + h(1 - \xi)(L \circ \varphi_h^2)(q_0, q_1) \\ &= h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^T M \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - \left( \xi V(q_0) + (1 - \xi)V(q_1) \right) \right], \end{aligned}$$

donde  $\xi \in [0, 1]$  es un parámetro libre.

#### Discretización (MW) exacta de sistemas lagrangianos

Si bien la definición de lagrangiano discreto exacto dada en [8], ecuación (1.6.1), está sujeta al Teorema 1.6.1 enunciado en el mismo trabajo (y para cuya demostración citan a [7]). Creemos importante remarcar lo siguiente, pues puede prestarse a confusiones (como sucedió en nuestro caso), el teorema es válido solo en ciertos abiertos de  $Q \times Q$  aunque esto no esté enunciado de manera explícita.

A continuación daremos definiciones más precisas respecto a este tema, buscando aclarar los detalles que mencionamos en el párrafo anterior. Vimos que discretizar un fibrado tangente es el primer paso para luego discretizar un sistema lagrangiano. La siguiente función, como veremos, dará lugar a discretizaciones de paso de tiempo  $h$  que mejor representarán al sistema lagrangiano con tiempo continuo.

**Definición 3.7.** Dado un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , definimos su *exponencial a tiempo  $h$*  como la función  $\exp_h : TQ \rightarrow Q \times Q$ , con  $h \neq 0$  fijo, mediante

$$\exp_h := (\tau_Q \times \tau_Q) \circ (\text{id}_{TQ}, F_h^{X_L}). \quad (3.3)$$

Además, en caso de existir, escribiremos  $\log_h := (\exp_h)^{-1}$ .

Típicamente la función exponencial a tiempo  $h$  no estará definida de manera global, inclusive para lagrangianos hiper-regulares, pues puede suceder que las trayectorias no estén definidas hasta un tiempo  $h$  previamente fijado. En tal caso habrá que restringir su dominio de definición a abiertos de  $TQ$ ; por ejemplo, a aquellos abiertos  $V_h \subset TQ$  tales que, las trayectorias con condiciones iniciales en  $V_h$  viven hasta tiempo  $h$ ; es decir, si  $v \in V_h$ , entonces existe una curva  $q(\cdot) \in \mathcal{C}(Q|[0, h])$  que es trayectoria del sistema  $(Q, L)$ .

Dado  $v \in \text{dom}(\exp_h)$  y definiendo  $q_v(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  mediante  $q_v(t) = \tau_Q(F_t^{X_L}(v))$ , notemos que la función exponencial a tiempo  $h$ ,  $\exp_h(v) = (q_v(0), q_v(h))$ , asigna la posición inicial y final de la trayectoria con condición inicial  $q'_v(0) = v$ .

**Definición 3.8.** Dado un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , llamaremos *abierto  $h$ -admisibles* a un abierto  $\mathcal{U}_h \subset TQ$  tal que

$$\exp_h \Big|_{\mathcal{U}_h} : \mathcal{U}_h \rightarrow Q \times Q / \exp_h \Big|_{\mathcal{U}_h}(v) := \exp_h(v)$$

es un difeomorfismo con su imagen. Además, diremos que el par  $(\exp_h, \mathcal{U}_h)$  es una *discretización (MW) exacta de  $TQ$*  del sistema  $(Q, L)$ .

Sin prestarse a confusión, diremos simplemente que  $\exp_h \equiv (\exp_h, \mathcal{U}_h)$  es una discretización (MW) exacta del sistema lagrangiano  $(Q, L)$ , cuando no sea necesario hacer mención explícita del abierto  $\mathcal{U}_h$ .

Cabe destacar que, si el parámetro  $h$  está fijo, entonces los abiertos  $h$ -admisibles son una condición extra que tenemos que darle al sistema para poder definir un difeomorfismo con la función exponencial, pues pueden existir dos trayectorias (con distintas condiciones iniciales en  $TQ$ ) que coincidan, en  $Q$ , a tiempo  $t = 0$  y  $t = h$  (ver Apéndice B). Sin embargo, se puede ver que para toda condición inicial  $v \in TQ$  existe un abierto  $h$ -admisibles  $\mathcal{U}_h$  (tomando  $h \neq 0$  suficientemente chico), con  $v \in \mathcal{U}_h$ ; es decir, siempre podremos definir una discretización exacta de  $TQ$  en un entorno de cualquier velocidad de interés.

**Definición 3.9.** Sean  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular, y  $(\exp_h, \mathcal{U}_h)$  una discretización (MW) exacta de  $TQ$  del sistema  $(Q, L)$ . Entonces, definimos un *sistema lagrangiano discreto (MW) exacto* como la terna  $(Q, \mathcal{U}_h, L_{d,h}^E) \equiv (Q, L_{d,h}^E)$ , donde  $L_{d,h}^E : \exp_h(\mathcal{U}_h) \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$L_{d,h}^E(q_0, q_1) := \int_0^h (L \circ F_t^{X^E} \circ \log_h)(q_0, q_1) dt,$$

es el *lagrangiano discreto (MW) exacto*.

Notemos que, en efecto,  $(Q, L_{d,h}^E)$  es un sistema lagrangiano discreto (MW); por lo tanto, sus trayectorias se obtendrán de acuerdo a la Definición 2.5. Si denotamos  $q_{01}(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  a la trayectoria, con condición inicial  $q'_{01}(0) \in \mathcal{U}_h$ , definida mediante  $q_{01}(t) := \tau_Q(F_t^{X^L}(v))$ , entonces el lagrangiano discreto (MW) exacto se reescribe como

$$L_{d,h}^E(q_0, q_1) = \int_0^h L(q'_{01}(t)) dt,$$

que es la ecuación (1.6.1) de [8].

Aunque uno esperaría que los sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos posean trayectorias, pues sabemos que sus contrapartes continuas lo cumplen (por ser sistemas lagrangianos regulares), probar esto no es trivial. A continuación enunciamos un teorema que muestra, en efecto, que los sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos, al igual que sus análogos continuos, poseen trayectorias. Pero postergamos su demostración hasta la sección 3.2, pag. 29, porque antes de poder probar el teorema necesitamos de las herramientas provistas por C. Cuell y G. W. Patrick. En lo que sigue, si  $X$  es un conjunto, identificaremos como  $\Delta(X \times X)$  a la diagonal del conjunto  $X \times X$ .

**Teorema 3.10. Existencia de Trayectorias Discretas (MW) Exactas.** *Sea  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular. Luego, para todo  $v_0 \in TQ$  existe  $a > 0$  tal que, para todo  $h \in (0, a)$  existen,*

1.  $\mathcal{V}_h \subset TQ$  abierto  $h$ -admisibles,
2.  $\mathcal{W}'_{a,h} \subset (Q \times Q)$  abierto que contiene a  $\exp_h(v_0)$ , tal que  $\mathcal{W}'_{a,h} \cap \Delta(Q \times Q) \neq \emptyset$ ,  
y
3.  $\mathcal{V}'_h \subset (Q \times Q) \times (Q \times Q)$  abierto que contiene a  $(\exp_h(v_0), \exp_h(v_0))$ ,

tales que, para todo  $(q_0, q_1) \in \mathcal{W}'_{a,h}$ , existe un único  $(q_1, q_2) \in \exp_h(\mathcal{V}_h)$  tal que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in \mathcal{V}'_h$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, L_{d,h}^E)$ .



### 3.1. Discretización de Sistemas Lagrangianos

---

La importancia de los sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos proviene del siguiente teorema (equivalente a Teorema 1.6.4 de [8]), que relaciona las trayectorias discretas con las trayectorias del sistema continuo asociado de una manera muy particular: las primeras corresponden a una visión estroboscópica de las segundas. Al igual que antes, dejamos la demostración para después.

**Teorema 3.11. Correspondencia de Trayectorias Discretas (MW) Exactas.** Sea  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular. Luego, para todo  $v_0 \in TQ$ , en el contexto del Teorema 3.29, para cada  $h \in (0, a)$ , y para todo  $((q_0, q_1), (q_1, q_0)) \in V'_h$ , con  $(q_0, q_1) \in \mathcal{W}'_{a,h}$ , vale que

1.  $(q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{C}_d(Q|2)$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$  si y solo si,
2.  $q_{01}(\cdot) \in \mathcal{C}(Q|[0, 2h])$ , con  $q_{01}(kh) = q_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , es trayectoria del sistema  $(Q, L)$ .

#### 3.1.2. Según C. Cuell y G. W. Patrick

Las definiciones involucradas en los conceptos propuestos por C. Cuell y G. W. Patrick diferencian una discretización de un sistema continuo de un objeto discreto. Los primeros pueden pensarse como familias uniparamétricas de objetos discretos, indexadas por una variable  $h$  que controla la *deformación* del sistema continuo. Si bien en el límite  $h \rightarrow 0$  las discretizaciones recuperan las propiedades del sistema continuo,  $h = 0$  generalmente presenta cierta degeneración.

**Aclaración 3.12.** Para esta sección, un entorno de cierto punto (o subconjunto) contenido en algún espacio ambiente, es un conjunto abierto en el espacio ambiente que contiene a dicho punto (o subconjunto). Además emplearemos la siguiente notación: si  $\{A_h\}_{h \in I}$  es una familia uniparamétrica de algún objeto que depende de un parámetro  $h$ , escribiremos como  $A_*$  a la función definida mediante

$$A_* : h \mapsto A_h.$$

Si el objeto es una función  $f_h : X \rightarrow Y$ , entonces escribiremos

$$f_* : (h, x) \mapsto f_h(x).$$

**Definición 3.13.** (Definition 1 de [4]) Dada una variedad diferencial  $Q$ , una *discretización (CP)* de  $TQ$  es una terna  $(\psi, \alpha^+, \alpha^-)$  donde

1.  $\psi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times TQ \rightarrow Q$  es una función suave y  $U$  es un entorno de  $\{0\} \times \{0\} \times TQ$ ;
2.  $\psi(h, 0, v) = q$  y  $D_2\psi(h, 0, v) = v$ , para todo  $h$  y  $v$ , con  $\tau_Q(v) = q$ , tales que  $(h, 0, v) \in U$ ; y
3.  $\alpha^+ : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $\alpha^- : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ , con  $a > 0$ , son funciones suaves tales que  $\alpha^+(h) - \alpha^-(h) = h$ , para todo  $h : 0 \leq h < a$ .

Además, se definen las *funciones de borde*  $\partial_*^+$  y  $\partial_*^-$  mediante

$$\partial_h^+(v) := \psi(h, \alpha^+(h), v) \quad \text{y} \quad \partial_h^-(v) := \psi(h, \alpha^-(h), v),$$

que son funciones definidas sobre abiertos en  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times TQ$  y suaves en  $(h, v)$ .

**Teorema 3.14.** *Sea  $(\psi, \alpha^+, \alpha^-)$  una discretización (CP) de  $TQ$ , y sea  $Q_0 \subset Q$  un abierto relativamente compacto. Luego, existe  $a > 0$  tal que, para todo  $h \in (0, a)$  existe un abierto  $\mathcal{V}_h \subset TQ$  tal que:*

1. la terna  $(\mathcal{V}_h, \partial_h^+, \partial_h^-)$  es un fibrado tangente discreto de  $Q_0$ ; y
2.  $\partial_h^\mp$  es un difeomorfismo desde  $\mathcal{V}_h$  a un entorno de  $\Delta(Q_0 \times Q_0)$  en  $Q_0 \times Q_0$ .

*Demostración.* Ver Proposición 1 en [4]. □

Para definir una discretización de un sistema lagrangiano que pueda extraer información del sistema continuo, es necesario imponer en la definición del lagrangiano discreto una condición de similitud u *orden de contacto* con el lagrangiano con tiempo continuo. A continuación daremos la versión general de orden de contacto entre funciones definidas sobre variedades diferenciales, luego veremos que se corresponde con la definición que en [8] utilizan para definir orden de contacto entre lagrangianos discretos (MW), por lo tanto con la definición usual para funciones que toman valores reales.

**Definición 3.15.** (Definition 5 en [3]) Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciales,  $h_M : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave que tiene a  $0 \in \mathbb{R}$  como valor regular<sup>1</sup>, y  $f_1, f_2 : M \rightarrow N$  funciones tales que  $f_1(m_0) = f_2(m_0)$  para todo  $m_0 \in h_M^{-1}(0)$ . Entonces, diremos que  $f_1$  y  $f_2$  poseen *orden de contacto*  $r$ , con  $r \geq 0$ , y denotaremos  $f_1 = f_2 + \mathcal{O}(h_M^{r+1})$  si para todo  $m_0 \in h_M^{-1}(0)$ , existe una carta  $\nu$  sobre  $n_0 := f_1(m_0) = f_2(m_0)$ , y una función  $(\delta f)_\nu$  definida en un entorno a  $m_0$  y continua en  $m_0$ , tales que

$$\nu(f_2(m)) - \nu(f_1(m)) = h_M(m)^{r+1}(\delta f)_\nu(m), \quad (3.4)$$

para todo  $m$  en algún entorno de  $m_0$ .

Se puede ver ([3], pag. 593) que la definición anterior no depende de la elección de las cartas coordenadas.

**Ejemplo 3.16. Orden local según J. E. Marsden y M. West.** Sean  $(Q, L_{d,*})$  una discretización (MW) de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , con  $L_{d,*} : \mathbb{R} \times (Q \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$  el lagrangiano discreto (MW) con la dependencia en el parámetro  $h$  expresada explícitamente; la función  $\exp_* : I \times U \subset \mathbb{R} \times TQ \rightarrow Q \times Q$ , definida en un abierto relativamente compacto  $I \times U$ , mediante  $\exp_*(h, v) := \exp_h(v)$  y tal que la exponencial a tiempo  $h \in I$  este bien definida; y

$$S_{d,*} : (h, v) \mapsto \int_0^h (L \circ F_t^{XL})(v) dt,$$

---

<sup>1</sup> $a \in \mathbb{R}$  es valor regular de  $h_M$  si y solo si, para todo  $m_a \in h_M^{-1}(a)$ ,  $h_M$  es una submersión en  $m_a$ .

### 3.1. Discretización de Sistemas Lagrangianos

definida sobre  $I \times U$ . Finalmente tomemos como  $h_{\mathbb{R} \times TQ} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  a la proyección en la primer variable. Luego,  $L_{d,h} \circ \exp_h = S_{d,h} + \mathcal{O}(h^{r+1})$  si para todo  $v_0 \in U$ , existe una función continua  $\delta L$  definida en  $I_0 \times U_0$ , entorno de  $(0, v_0) \in I \times U$ , tal que

$$(L_{d,h} \circ \exp_h)(v) - \int_0^h (L \circ F_t^{XL})(v) = h^{r+1}(\delta L)(h, v),$$

para todo  $(h, v) \in I_0 \times U_0$ . Esta última igualdad se cumple si y solo si existen  $C_0 > 0$  y  $h_0 > 0$  tal que para todo  $h \in (0, h_0)$

$$\left\| (L_{d,h} \circ \exp_h)(v) - \int_0^h (L \circ F_t^{XL})(v) \right\| < C_0 h^{r+1},$$

para todo  $v \in U_0$ . Vemos que la noción de *orden de contacto* entre  $L_{d,h}$  y  $S_{d,h}$  coincide con la definición dada en [8] (sección 2.3.1); es decir,  $L_{d,h}$  es de *orden  $r$*  según [8] si y solo si  $L_{d,h} \circ \exp_h = S_{d,h} + \mathcal{O}(h^{r+1})$ .

**Definición 3.17.** Sean  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular, y  $(\psi, \alpha^+, \alpha^-)$  una discretización (CP) de  $TQ$ . Luego, una terna  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  es una *discretización (CP) del sistema lagrangiano  $(Q, L)$*  si  $\mathfrak{L}_{d,*} : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow Q$  es una función suave en  $(h, v)$  y verifica que  $\mathfrak{L}_{d,h} = hL + \mathcal{O}(h^2)$ .

Además, diremos que  $(h, v, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times \ddot{\mathfrak{D}}_d$  es *punto crítico* de  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  si y solo para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  de  $(v, \tilde{v})$ ,

$$d\mathfrak{L}_{d,h}(v)(\delta v) + d\mathfrak{L}_{d,h}(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) = 0.$$

#### Discretización (CP) exacta de sistemas lagrangianos

Con la misma motivación que nos llevó a la definición de una discretización (MW) exacta de TQ (Definición 3.8) definiremos la *discretización (CP) exacta de TQ*.

**Definición 3.18.** Dado un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , llamaremos *discretización (CP) exacta de TQ* del sistema  $(Q, L)$  a una discretización (CP) de TQ  $(\psi^E, \alpha^{E+}, \alpha^{E-})$  definida mediante  $\alpha^{E+}(h) := h$ ,  $\alpha^{E-}(h) := 0$ , y

$$\psi^E(h, t, v) := (\tau_Q \circ F_t^{XL})(v). \quad (3.5)$$

**Observación 3.19.** Sea  $(\psi^E, \alpha^{E+}, \alpha^{E-})$  una discretización (CP) exacta de  $TQ$ , luego para todo  $v \in TQ$  el Teorema 3.14 nos permite construir (tomando un entorno  $Q_0$  de  $\tau_Q(v)$  relativamente compacto) una familia uniparamétrica de fibrados tangentes discretos  $(\mathcal{V}_*, \partial_*^{E+}, \partial_*^{E-})$ , con el parámetro  $h \in (0, a)$ .

Como las funciones de borde valen

$$\partial_h^{E+}(v) := (\tau_Q \circ F_h^{XL})(v) \quad \text{y} \quad \partial_h^{E-}(v) := \tau_Q(v),$$

entonces, para cada  $h \in (0, a)$ , el par  $(\exp_h, \mathcal{V}_h)$  es una discretización (MW) exacta de  $TQ$ , pues  $\exp_h(v) = (\partial_h^{E-}(v), \partial_h^{E+}(v))$ . Concluimos que el Teorema 3.14 nos provee de una forma de seleccionar un abierto  $h$ -admisibles para cada sistema lagrangiano regular, para cada  $h$  suficientemente chico.

**Definición 3.20.** (Definition 4.1 de [9]) Sea  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular. Una *discretización (CP) exacta del sistema lagrangiano  $(Q, L)$*  es una discretización  $(Q, \psi^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E)$ , donde  $(\psi^E, \alpha^{E+}, \alpha^{E-})$  es una una discretización (CP) exacta de  $TQ$  del sistema  $(Q, L)$ , y

$$\mathfrak{L}_{d,h}^E(v) := \int_0^h (L \circ F_t^{X_L})(v) dt,$$

el lagrangiano discreto (CP) exacto.

**Observación 3.21.** Sean  $\check{L}$ ,  $\check{F}^{X_L}$  y  $\check{\mathfrak{L}}_{d,*}$  las expresiones locales de  $L$ ,  $F^{X_L}$  y  $\mathfrak{L}_{d,*}$ , respectivamente. Entonces, vale que

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{L}}_{d,h}^E(v) &= \int_0^h (\check{L} \circ \check{F}_t^{X_L})(v) dt \\ &= \int_0^h (\check{L} \circ \check{F}^{X_L})(t, v) dt \\ &= 0 + \check{L}(v)h + \frac{1}{2} \frac{\partial(\check{L} \circ \check{F}^{X_L})(h, v)}{\partial h} \Big|_{h=0} h^2 + \dots, \\ \check{\mathfrak{L}}_{d,h}^E(v) - h\check{L}(v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\check{L} \circ \check{F}^{X_L})(h, v)}{\partial h} \Big|_{h=0} h^2 + \dots \end{aligned}$$

Es decir,  $\mathfrak{L}_{d,h}^E = hL + \mathcal{O}(h^2)$ . Lo cual prueba que  $(Q, \psi^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E)$  es, en efecto, una discretización (CP) del sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ .

## 3.2. Existencia de Trayectorias Discretas

Dividimos esta sección en tres: En la primer parte probaremos la existencia de trayectorias de los sistemas lagrangianos discretos (CP). En la segunda parte, usando la equivalencia entre las trayectorias de ambas nociones de sistemas discretos, probaremos la existencia de trayectorias de los sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos, y además demostraremos el teorema de correspondencia entre las trayectorias discretas (MW) exactas y las trayectorias continuas. Finalmente, veremos que del resultado anterior se desprende la existencia de trayectorias de los sistemas lagrangianos discretos (MW) que aproximan a orden  $r$  al lagrangiano discreto (MW) exacto.

### 3.2.1. Sistemas lagrangianos discretos (CP)

Los resultados más importantes que veremos en este trabajo se obtienen a partir del siguiente teorema, probado en [4]. Más adelante extenderemos este resultado al concepto de discretización de sistema lagrangiano con fuerza.

**Teorema 3.22.** Sea  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  una discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ . Luego, existen entornos  $W \subset \mathbb{R} \times TQ$  de  $\{0\} \times TQ$  y  $V \subset \mathbb{R} \times TQ \times TQ$  de  $\{0\} \times \Delta(TQ \times TQ)$  tales que, para todo  $(h, v) \in W$ , con  $h > 0$ , existe un único  $\tilde{v} \in TQ$  tal que  $(h, v, \tilde{v}) \in V$  y  $(h, v, \tilde{v})$  es un punto crítico.

### 3.2. Existencia de Trayectorias Discretas

Más aún,  $V$  y  $W$  pueden ser elegidos tales que  $F : W \rightarrow TQ$  definida mediante

$$\mathfrak{F}_{d,*}(h, v) := \begin{cases} \tilde{v}, & h > 0, \\ v, & h = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

sea suave.

*Demostración.* Ver Teorema 3.7 en [9].  $\square$

**Definición 3.23.** Si  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  es una discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , entonces llamaremos *flujo de una discretización (CP)* a una terna  $(\mathfrak{F}_{d,*}, W, V)$ , donde  $\mathfrak{F}_{d,*}$ ,  $W$  y  $V$  son como en el Teorema 3.22.

Si  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  es una discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , entonces el Teorema 3.14 nos permite pensar a tal discretización como una familia de sistemas lagrangianos discretos (CP),  $(Q, \mathcal{V}_*, \mathfrak{L}_{d,*}) \equiv \{(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h})\}_{h \in (0,a)}$ . En el teorema que sigue probaremos que, para cada  $h \in (0, a)$ , y bajo ciertas condiciones, el sistema lagrangiano discreto  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h})$  posee trayectorias, y son únicas en ciertos abiertos. En concreto probaremos que tanto las condiciones iniciales  $v \in TQ$  como su imagen mediante el flujo de una discretización (CP)  $\mathfrak{F}_{d,h}(v)$  pertenecen a  $\mathcal{V}_h$ .

**Observación 3.24.** En la demostración del Teorema 3.14 se prueba, usando técnicas de [3], la existencia de un abierto  $U \subset \mathbb{R} \times TQ$  que contiene a  $\{0\} \times TQ$ , y tal que la aplicación  $(h, v) \mapsto (h, \partial_h^{\mp}(v))$  es un difeomorfismo desde  $U \setminus (\{0\} \times TQ)$  a un entorno de  $\{0\} \times \Delta(Q \times Q)$ . Luego, a partir de  $U$  y tomando  $a > 0$  suficientemente chico, se construye el fibrado tangente discreto (CP),  $\mathcal{V}_h$ , para cada  $h \in (0, a)$ :

$$\mathcal{V}_h := \{v : (h, v) \in U\} \cap (\partial_h^+)^{-1}(Q_0) \cap (\partial_h^-)^{-1}(Q_0).$$

**Teorema 3.25. Existencia de Trayectorias Discretas (CP).** *Sea  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  una discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ . Luego, para todo  $v_0 \in TQ$ , existen  $a > 0$  y  $\mathcal{V}'_a \subset TQ$  entorno de  $v_0$ , tales que*

$$\forall h \in (0, a) \text{ y } \forall v \in \mathcal{V}'_a \text{ vale que: } v, \mathfrak{F}_{d,h}(v) \in \mathcal{V}_h, \quad (3.7)$$

donde  $(\mathfrak{F}_{d,*}, W, V)$  es un flujo de una discretización (CP) y  $\mathcal{V}_h$  un fibrado tangente discreto (CP). Es decir,  $(v, \mathfrak{F}_{d,h}(v))$  es trayectoria del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h})$ .

Además, si existe  $\tilde{v}$  tal que  $(h, v, \tilde{v}) \in V$  sea punto crítico, entonces  $\tilde{v} = \mathfrak{F}_{d,h}(v)$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.22, existe  $(\mathfrak{F}_{d,*}, W, V)$  flujo de una discretización (CP). Tomamos  $Q_0 \subset Q$  abierto relativamente compacto que contiene a  $\tau_Q(v_0)$ . Entonces, existe  $U \supset \{0\} \times TQ$  como el abierto mencionado en la Observación 3.24. Luego, definimos:

1.  $\tilde{\mathcal{V}} := U \cap (\partial_*^+)^{-1}(Q_0) \cap (\partial_*^-)^{-1}(Q_0)$ , que es abierto relativo a  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times TQ_0$  porque las funciones de borde están definidas en un abierto a  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times TQ$  y son suaves. Además,  $\tilde{\mathcal{V}}$  es no vacío pues el conjunto  $\{0\} \times TQ_0$  está contenido en los tres abiertos que lo definen. Es particular,  $(0, v_0) \in \tilde{\mathcal{V}}$ .
2.  $\tilde{F} : W \rightarrow \mathbb{R} \times TQ$  mediante  $\tilde{F}(h, v) := (h, \mathfrak{F}_{d,h}(v))$ , que es suave como  $\mathfrak{F}_{d,*}$ .

3.  $W' := \tilde{\mathcal{V}} \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{\mathcal{V}})$ , que es abierto relativo a  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times TQ_0$ , y no vacío. Probemos esto últimos: Sea  $v \in TQ_0$ ; entonces, por un lado se cumple que  $(0, v) \in \tilde{\mathcal{V}}$ , y por el otro  $\tilde{F}(0, v) = (0, \mathfrak{S}_{d,0}(v)) = (0, v)$ , es decir  $(0, v) \in \tilde{F}^{-1}(\tilde{\mathcal{V}})$ . Juntando todo vemos que  $W' \supset \{0\} \times TQ_0$ . En particular,  $(0, v_0) \in W'$ .

Finalmente,  $W'$  es abierto relativo a  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times TQ_0$  que contiene a  $(0, v_0)$ . Entonces, existen  $a > 0$  y  $\mathcal{V}'_a \subset TQ_0$ , con  $v_0 \in \mathcal{V}'_a$ , tales que  $[0, a) \times \mathcal{V}'_a \subset W'$ . Por lo tanto, para todo  $h \in (0, a)$  y para todo  $v \in \mathcal{V}'_a$  vale que  $(h, v) \in \tilde{\mathcal{V}}$  y  $\tilde{F}(v) = (h, \mathfrak{S}_{d,h}(v)) \in \tilde{\mathcal{V}}$ . Equivalentemente

$$v \in \mathcal{V}_h \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}_{d,h}(v) \in \mathcal{V}_h,$$

porque, por la Observación 3.24,  $\tilde{\mathcal{V}} \setminus (\{0\} \times TQ) = \{(h, v) \in U / v \in \mathcal{V}_h\}$ .

La segunda parte es inmediata por la unicidad del punto crítico en  $V$ . Es decir, por definición de  $(\mathfrak{S}_{d,*}, W, V)$ , para todo  $(h, v) \in W$ ,  $(h, v, \mathfrak{S}_{d,h}(v))$  es el único punto crítico en  $V$ .  $\square$

A continuación probaremos la correspondencia que existe entre las trayectorias de los sistemas lagrangianos discretos exactos y las trayectorias de los sistemas lagrangianos a tiempo continuo, siguiendo las ideas expuestas en [9].

**Proposición 3.26.** *Sea  $(Q, \psi^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E)$  una discretización (CP) exacta de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ . Supongamos que para todo  $(h, v) \in (\text{dom}(\partial_*^+) \cap \text{dom}(\partial_*^-))$  las trayectorias del sistema lagrangiano están definidas para tiempos en  $[0, 2h]$ . Entonces,  $(h, v, F_h^{XL}(v))$  es punto crítico.*

*Demostración.* Ver su versión con fuerza o Lemma 4.2 en [9].  $\square$

**Teorema 3.27. Correspondencia de Trayectorias Discretas (CP) Exactas**  
*Sea  $(Q, \psi^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E)$  una discretización (CP) exacta de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ . Entonces, para todo  $v_0 \in TQ$ , en el contexto del Teorema 3.25, y para todo  $(h, v, \tilde{v}) \in V$ , con  $(h, v) \in (0, a) \times \mathcal{V}'_a$ , vale que:*

1.  $\tilde{v} = F_h^{XL}(v)$ , si y solo si
2.  $(v, \tilde{v})$  es trayectoria del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h}^E)$ .

*Demostración.* Podemos considerar que, posiblemente achicando los abiertos, para todo  $(h, v) \in (0, a) \times \mathcal{V}'_a$  las trayectorias del sistema lagrangiano están definidas para tiempos en  $[0, 2h]$  y  $(h, v, F_h^{XL}(v)) \in V$ .

$(1 \Rightarrow 2)$  Si  $(h, v) \in (0, a) \times \mathcal{V}'_a$ , por la Proposición 3.26,  $(h, v, F_h^{XL}(v))$  es punto crítico, es decir  $(h, v, \tilde{v})$  es punto crítico, pues  $\tilde{v} = F_h^{XL}(v)$ . Luego, por el Teorema 3.25,  $(v, \tilde{v})$  es trayectoria del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h}^E)$ .

$(2 \Rightarrow 1)$  Si  $(v, \tilde{v})$  es trayectoria del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h}^E)$ , en particular  $(h, v, \tilde{v}) \in V$  es punto crítico. Pero, por la Proposición 3.26,  $(h, v, F_h^{XL}(v)) \in V$  también es punto crítico; entonces, por la unicidad del punto crítico en  $V$  vale que  $\tilde{v} = F_h^{XL}(v)$ .  $\square$

Los resultados de los teoremas que vimos dependen de la elección de ciertos abiertos. En principio, no existe ninguna elección que sea mejor o esté privilegiada respecto a las otras; por lo tanto, podríamos preguntarnos si los resultados son consistentes respecto a distintas elecciones de tales abiertos, mientras tengan intersección no nula ya que, por ejemplo, contienen a un mismo elemento  $v \in TQ$ . En la siguiente proposición veremos que, para el caso del Teorema 3.25, las soluciones son compatibles en una región dentro de tal intersección.

### 3.2. Existencia de Trayectorias Discretas

**Proposición 3.28.** Sean  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*})$  una discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ . Luego, para todo  $v_0 \in TQ$ , si  $a_1, a_2 > 0$  y  $\mathcal{V}'_{a_1}, \mathcal{V}'_{a_2} \subset TQ$  son tales que cumplen la tesis del Teorema 3.25 y  $v_0 \in \mathcal{V}'_{a_1} \cap \mathcal{V}'_{a_2}$ , entonces existen  $\hat{a} > 0$  y  $\mathcal{V}'_{\hat{a}}$  entorno de  $v_0$  tales que

$$\forall h \in [0, \hat{a}) \text{ y } \forall v \in \mathcal{V}'_{\hat{a}} \text{ vale que: } \mathfrak{S}_{d,h}^{(1)}(v) = \mathfrak{S}_{d,h}^{(2)}(v),$$

donde  $(\mathfrak{S}_{d,h}^{(i)}, W_i, V_i)$ , con  $W_i \supset [0, a_i) \times \mathcal{V}'_{a_i}$ , es un flujo lagrangiano discreto suave,  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}_i : W_i \rightarrow V_i$  definida mediante  $\mathcal{F}_i(h, v) := (h, v, \mathfrak{S}_{d,h}^{(i)}(v))$ , la aplicación suave que cumple que  $(h, v, \mathfrak{S}_{d,h}^{(i)}(v))$  es el único punto crítico perteneciente  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ . Luego, definimos

1.  $\hat{V} := V_1 \cap V_2$ , que es abierto y no vacío pues  $V_i \supset \{0\} \times \Delta(TQ \times TQ)$ ,  $i = 1, 2$ .
2.  $\hat{W} := \mathcal{F}_1^{-1}(\hat{V}) \cap \mathcal{F}_2^{-1}(\hat{V}) \cap ([0, a_1) \times \mathcal{V}'_{a_1}) \cap ([0, a_2) \times \mathcal{V}'_{a_2})$ , que también es un abierto relativo a  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times TQ$ , y no vacío pues contiene a  $\{0\} \times (\mathcal{V}'_{a_1} \cap \mathcal{V}'_{a_2})$ .

Por construcción, podemos asegurar que para todo  $(h, v) \in \hat{W}$ , con  $h > 0$ , vale que  $\mathcal{F}_1(h, v) \in \hat{V}$  y  $\mathcal{F}_2(h, v) \in \hat{V}$ . Además, por la unicidad del punto crítico en  $\hat{V}$  vale que  $\mathcal{F}_1(h, v) = \mathcal{F}_2(h, v)$ . Finalmente, por ser  $\hat{W}$  un entorno de  $(0, v_0)$ , existen  $\hat{a} \leq \min\{a_1, a_2\}$  y  $\mathcal{V}'_{\hat{a}} \subset (\mathcal{V}'_{a_1} \cap \mathcal{V}'_{a_2})$  entorno de  $v_0$ , tales que  $[0, \hat{a}) \times \mathcal{V}'_{\hat{a}} \subset \hat{W}$ .  $\square$

#### 3.2.2. Sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos

Fijemos un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$ , y una condición inicial  $v_0 \in TQ$ . Sea  $(Q, \mathcal{V}_*, \mathfrak{L}_{d,*}^E) \equiv \{(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h}^E)\}_{h \in (0,a)}$  la familia uniparamétrica de sistemas lagrangianos discretos (CP) exactos dada por el Teorema 3.25. De acuerdo a la Observación 3.19, para cada  $h \in (0, a)$ , el par  $(\exp_h, \mathcal{V}_h)$  es una discretización (MW) exacta de  $TQ$ .

Para cada  $h \in (0, a)$  definimos  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$  como el lagrangiano discreto (MW) exacto asociado a los entornos  $h$ -admisibles mencionados arriba. Notemos que, por definición de lagrangiano discreto exacto (MW) y (CP) vale que

$$\begin{aligned} L_{d,h}^E(q_0, q_1) &= \int_0^h (L \circ F_t^{XE} \circ \log_h)(q_0, q_1) dt, \\ &= \int_0^h (L \circ F_t^{XE})(\log_h(q_0, q_1)) dt, \\ &= \mathfrak{L}_{d,h}^E(\log_h(q_0, q_1)), \\ &= (\mathfrak{L}_{d,h}^E \circ \log_h)(q_0, q_1), \end{aligned}$$

para todo  $(q_0, q_1) \in \exp_h(\mathcal{V}_h)$ . Es decir,  $L_{d,h}^E = \mathfrak{L}_{d,h}^E \circ \log_h$ . Por lo tanto,  $\mathfrak{L}_{d,h}^E = L_{d,h}^E \circ \exp_h$ , pues  $(\exp_h, \mathcal{V}_h)$  es un difeomorfismo. Finalmente, según el Teorema 2.27, las trayectorias discretas de ambos sistemas discretos están unívocamente relacionadas mediante la función  $\partial^{\mathcal{C}^d} : \mathfrak{Q}_d \rightarrow \ddot{Q}_d$ , que en nuestro caso vale  $\partial^{\mathcal{C}^d} = (\exp_h \times \exp_h)|_{\mathfrak{Q}_d}$ .

**Teorema 3.29. Existencia de Trayectorias Discretas (MW) Exactas.** Sea  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular. Luego, para todo  $v_0 \in TQ$  existe  $a > 0$  tal que, para todo  $h \in (0, a)$  existen,

1.  $\mathcal{V}_h \subset TQ$  abierto  $h$ -admisibles,
2.  $\mathcal{W}'_{a,h} \subset (Q \times Q)$  entorno de  $\exp_h(v_0)$ , tal que  $\mathcal{W}'_{a,h} \cap \Delta(Q \times Q) \neq \emptyset$ , y
3.  $V'_h \subset (Q \times Q) \times (Q \times Q)$  entorno de  $(\exp_h(v_0), \exp_h(v_0))$ ,

tales que, para todo  $(q_0, q_1) \in \mathcal{W}'_{a,h}$ , existe un único  $(q_1, q_2) \in \exp_h(\mathcal{V}_h)$  tal que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in V'_h$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, L_{d,h}^E)$ .

*Demostración.* Por los argumentos de arriba, existen  $a > 0$  que cumple con (3.7) y  $\mathcal{V}_h$  abiertos  $h$ -admisibles. Trabajando en el contexto del Teorema 3.25, definimos:

- $\mathcal{W}'_{a,h} := \exp_h(\mathcal{V}_h)$ , que es un entorno de  $\exp_h(v_0)$ , pues  $V_h$  es un entorno de  $v_0$ .
- $V'_h := p_{23} \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \exp_h \times \exp_h)(V)$ , donde  $p_{23} : \mathbb{R} \times (Q \times Q) \times (Q \times Q) \rightarrow (Q \times Q) \times (Q \times Q)$  es la proyección en la segunda y tercera componente, y  $V$  es el entorno de  $\{0\} \times \Delta(TQ \times TQ)$  asociado a un flujo  $\mathfrak{F}_{d,h}$ ;  $V'_h$  es un entorno de  $(\exp_h(v_0), \exp_h(v_0))$  pues  $(0, v_0, v_0) \in V$ .

Para cada  $h \in (0, a)$  y  $(q_0, q_1) \in \exp_h(\mathcal{V}'_a)$  definimos, además,  $v := \log_h(q_0, q_1) \in \mathcal{V}_h$ . Luego, por el Teorema 3.25  $(v, \mathfrak{F}_{d,h}(v)) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$  es trayectoria discreta (CP) del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h})$ . Entonces, por el Teorema 2.27 (y las comentarios expuestos arriba),  $(\exp_h(v), \exp_h(\mathfrak{F}_{d,h}(v)))$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, L_{d,h}^E)$ . Lo que prueba la existencia.

Recordemos que, si  $(v, \mathfrak{F}_{d,h}(v)) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$  es trayectoria discreta (CP), entonces  $(h, v, \mathfrak{F}_{d,h}(v))$  es el único punto crítico en  $V$ . Luego, sea  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in V'_h$  una trayectoria discreta (MW) entonces, por el Teorema 2.27,  $(\log_h(q_0, q_1), \log_h(q_1, q_2))$  es una trayectoria discreta (CP). Por lo tanto,  $(h, \log_h(q_0, q_1), \log_h(q_1, q_2))$  es un punto crítico que pertenece a  $V$ . Finalmente, por la unicidad del punto crítico vale que  $\log_h(q_1, q_2) = \mathfrak{F}_{d,h}(v)$ ; es decir  $(q_1, q_2) = \log_h(\mathfrak{F}_{d,h}(v))$  es único.  $\square$

La importancia de los sistemas lagrangianos discretos (MW) exactos proviene del siguiente teorema (equivalente a Teorema 1.6.4 de [8]), que relaciona las trayectorias discretas con las trayectorias del sistema continuo asociado de una manera muy particular: las primeras corresponden a una visión estroboscópica de las segundas. Al igual que antes, dejamos la demostración para después.

**Teorema 3.30. Correspondencia de Trayectorias Discretas (MW) Exactas.**

Sea  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular. Luego, para todo  $v_0 \in TQ$ , en el contexto del Teorema 3.29, para cada  $h \in (0, a)$ , y para todo  $((q_0, q_1), (q_1, q_0)) \in V'_h$ , con  $(q_0, q_1) \in \mathcal{W}'_{a,h}$ , vale que

1.  $(q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{C}_d(Q|2)$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$  si y solo si,
2.  $q_{01}(\cdot) \in \mathcal{C}(Q|[0, 2h])$ , con  $q_{01}(kh) = q_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , es trayectoria del sistema  $(Q, L)$ .

*Demostración.* (1 $\Rightarrow$ 2) Si  $(q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{C}_d(Q)$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$ , entonces por la Observación 2.6,  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in \check{Q}_d$  es trayectoria discreta (MW), de primer orden, del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$ . Luego, por el



### 3.2. Existencia de Trayectorias Discretas

Teorema 2.27,  $(\log_h(q_0, q_1), \log_h(q_1, q_2))$  es trayectoria discreta (CP) de  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h}^E)$ . Utilizando el Teorema 3.27 vemos que  $\log_h(q_1, q_2) = F_h^{XL}(\log_h(q_0, q_1))$ . Es decir, las trayectorias  $q_{01}(\cdot) : q_{01}(t) := F_t^{XL}(\log_h(q_0, q_1))$  y  $q_{12}(\cdot) : q_{12}(t) := F_t^{XL}(\log_h(q_1, q_2))$  se tocan en un punto:  $q'_{01}(h) = q'_{12}(0)$ .

Definamos la curva  $\gamma_{01}(\cdot) : [0, 2h] \rightarrow Q$  mediante

$$\gamma_{01}(t) = \begin{cases} q_{01}(t), & t \in [0, h], \\ q_{02}(t - h), & t \in [h, 2h]. \end{cases}$$

Por construcción  $\gamma_{01}(\cdot)$  cumple que  $\gamma_{01}(kh) = q_k$ , con  $k = 0, 1, 2$ ; es  $C^1$  en  $(0, 2h)$  y  $C^2$  en  $(0, h) \cup (h, 2h)$ . Finalmente, por ser el sistema lagrangiano  $(Q, L)$  regular, entonces puede verse (por ejemplo en [8], pag. 389) que  $\gamma_{01}(\cdot)$  es  $C^2$  en  $(0, 2h)$  y satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para todo  $t \in (0, 2h)$ . Es decir  $\gamma_{01}$  es una trayectoria del sistema  $(Q, L)$ ; en particular, es la extensión de la trayectoria  $q_{01}$  para tiempos mayores.

( $2 \Rightarrow 1$ ) Si  $q_{01}(\cdot) \in \mathcal{C}(Q|[0, 2h])$  es trayectoria del sistema  $(Q, L)$ , con  $q_{01}(kh) = q_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Entonces  $q'_{01}(0) = \log_h(q_0, q_1) \in \log_h(W'_{h,a}) \subset V'_a$ , y  $(h, q'_{01}(0), q'_{01}(h)) \in V$ . Como  $q'_{01}(h) = F_h^{XL}(q'_{01}(0))$ , por el Teorema 3.27, vale que  $(q'_{01}(0), q'_{01}(h))$  es trayectoria del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, \mathfrak{L}_{d,h}^E)$ . Finalmente, por el Teorema 2.27,

$$\begin{aligned} (\exp_h(q'_{01}(0)), \exp_h(q'_{01}(h))) &= ((\exp_h(\log_h(q_0, q_1)), \exp_h(F_h^{XL}(\log_h(q_0, q_1)))), \\ &= ((q_{01}(0), q_{01}(h)), (q_{01}(h), q_{01}(2h))), \\ &= ((q_0, q_1), (q_1, q_2)), \end{aligned}$$

es trayectoria del sistema  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$ . □

#### 3.2.3. Sistemas lagrangianos discretos (MW) de orden $r$

El siguiente resultado muestra como es posible construir lagrangianos discretos (MW) tales que posean trayectorias de por lo menos un paso, con condiciones iniciales vinculadas a vectores tangentes cercanos a una velocidad  $v_0 \in TQ$  dada.

Recordemos que la definición que dan en [8] respecto a *orden* entre sistemas lagrangianos es equivalente a la definición de orden de contacto que, que dan en [3]; ver el Ejemplo 3.16. Fijemos un sistema lagrangiano regular  $(Q, L)$  y  $v_0 \in TQ$ . Sea  $(Q, L_{d,h})$  un sistema lagrangiano discreto de orden  $r$ ; entonces, por el ejemplo mencionado, vale que

$$L_{d,h} \circ \exp_h = S_{d,h} + \mathcal{O}(h^{r+1}).$$

Por otro lado, tomemos un entorno relativamente compacto  $Q_0 \subset Q$  con  $\tau_Q(v_0) \in Q_0$ . Sea  $\{(\mathcal{V}_h, \partial_h^{E+}, \partial_h^{E-})\}_{h \in (0,a)}$  una familia de fibrados tangentes discretos de  $Q_0$  obtenidas a partir del Teorema 3.14. Vimos que, para cada  $h \in (0, a)$  el abierto  $\mathcal{V}_h$  es  $h$ -admisibles. Con esta información y usando que  $S_{d,h}(v) = \mathfrak{L}_{d,h}^E(v)$  para todo  $v \in \mathcal{V}_h$ , se puede ver que

$$L_{d,h} \circ \exp_h = hL_{d,h} + \mathcal{O}(h^2),$$

es decir,  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h} \circ \exp_h)$  es un sistema lagrangiano discreto (CP).

Con todo esto, podemos asegurar, usando el Teorema de Existencia de Trayec-

torias Discretas (CP), que los sistemas lagrangianos discretos (MW) de orden  $r$  también van a tener trayectorias, y serán únicas en algún abierto de la diagonal en  $Q \times Q$ .

**Teorema 3.31. Existencia de Trayectorias Discretas (MW) de orden  $r$**  Sea  $(Q, L)$  un sistema lagrangiano regular y  $(Q, L_{d,h})$  un sistema lagrangiano discreto (MW) de orden  $r$ . Luego, para todo  $v_0 \in TQ$  existe  $a > 0$  tal que, para todo  $h \in (0, a)$  existen,

1.  $\mathcal{V}_h \subset TQ$  abierto  $h$ -admisibles,
2.  $\mathcal{W}'_{a,h} \subset (Q \times Q)$  entorno de  $\exp_h(v_0)$ , tal que  $\mathcal{W}'_{a,h} \cap \Delta(Q \times Q) \neq \emptyset$ , y
3.  $V'_h \subset (Q \times Q) \times (Q \times Q)$  entorno de  $(\exp_h(v_0), \exp_h(v_0))$ ,

tales que, para todo  $(q_0, q_1) \in \mathcal{W}'_{a,h}$ , existe un único  $(q_1, q_2) \in \exp_h(\mathcal{V}_h)$  tal que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in V'_h$  es trayectoria discreta (MW) del sistema  $(Q, L_{d,h})$ .

*Demostración.* La demostración es idéntica al Teorema 3.29, cambiando el sistema lagrangiano discreto (MW) exacto  $(Q, \mathcal{V}_h, L_{d,h}^E)$ , por el sistema lagrangiano discreto (MW) dado como hipótesis.  $\square$

**Observación 3.32. Un caso problemático: comentarios.** Si definimos el sistema lagrangiano  $(\mathbb{R}, L)$ , con

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{3}Kq^3.$$

Entonces, se puede que la discretización (MW) del sistema lagrangiano  $(\mathbb{R}, L_{d,h})$  tal que

$$L_{d,h}(q_0, q_1) := \frac{1}{2h}(q_1 - q_0)^2 - \frac{1}{3}hK(q_1 + q_0)^3,$$

es un sistema lagrangiano discreto (MW) de orden 2. Por lo tanto, el Teorema 3.31 nos asegura que existen trayectorias discretas, para  $h$  suficientemente chico, asociadas a una condición inicial  $v_0 \in T\mathbb{R}$ .

Este resultado no entra en contradicción con lo que obtuvimos en el Ejemplo 2.14 pues, en aquel ejemplo, en primera instancia fijamos  $h$  y luego vimos que existen condiciones iniciales  $(q_0, q_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que no poseen trayectorias. Más aún, el Teorema 3.31 corrige tal inconveniente en el siguiente sentido: si para el lagrangiano discreto (MW) que construimos, con  $h$  fijo, hallamos que la condición inicial  $(q_0, q_1)$  no posee trayectorias, entonces podemos decir que no tomamos  $h$  lo suficientemente chico y asegurar que va a existir un  $\tilde{h} < h$  tal que  $(q_0, q_1)$  va a poseer una trayectoria, respecto a un nuevo lagrangiano discreto (MW) construido a partir de  $\tilde{h}$ .

# Capítulo 4

## Sistemas Lagrangianos Discretos con fuerza

Una extensión natural del concepto de sistema lagrangiano discreto, pensando en lo que sucede con los sistemas lagrangianos continuos, se obtiene agregando un análogo discreto a la fuerza. Presentaremos los resultados siguiendo un esquema similar, pero reducido, de los últimos dos capítulos: Veremos la definición usual, según J. E. Marsden y M. West, e introduciremos una formulación alternativa razonando a la C. Cuell y G. W. Patrick. Finalmente, mostraremos que, al igual que para los sistemas discretos sin fuerza, ambos tipos de esquemas son equivalentes y probaremos teoremas análogos a los mencionados en los capítulos anteriores. Cabe mencionar que, la noción de sistema lagrangiano discreto con fuerza generaliza la de sistema lagrangiano discreto; es decir, los sistemas lagrangianos discretos pueden ser vistos como sistemas lagrangianos discretos con fuerza nula.

### 4.1. Según J. E. Marsden y M. West

**Definición 4.1.** Un *sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza* es una terna  $(Q, L_d, f_d)$ , donde  $(Q, L_d)$  es un sistema lagrangiano discreto (MW) y  $f_d : Q \times Q \rightarrow T^*(Q \times Q)$  es una 1-forma suave que preserva las fibras<sup>1</sup>, el *campo de fuerzas discreto*.

Diremos que  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  es una *trayectoria discreta* del sistema  $(Q, L_d, f_d)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta q_*$  de  $q_*$ ,

$$d\mathcal{S}_d(q_*)(\delta q_*) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = 0.$$

Llamaremos *fuerza discreta a derecha* y *fuerza discreta a izquierda* a las funciones suaves  $f_d^+, f_d^- : Q \times Q \rightarrow T^*Q$ , respectivamente, tales que  $f_d^+(q_0, q_1) \in T_{q_1}^*Q$  y  $f_d^-(q_0, q_1) \in T_{q_0}^*Q$  y satisfacen

$$f_d(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) = f_d^-(q_0, q_1)(\delta q_0) + f_d^+(q_0, q_1)(\delta q_1). \quad (4.1)$$

**Observación 4.2.** Dado  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$ , se puede ver que  $q_*$  es una trayectoria discreta del sistema  $(Q, L_d, f_d)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos

---

<sup>1</sup>  $f_d(q_0, q_1) \in T_{(q_0, q_1)}^*(Q \times Q) \simeq T_{q_0}^*Q \times T_{q_1}^*Q$ .

$\delta u_*$  de  $u(q_*)$ ,  $\sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{d}L_d(u(q_k))(\delta u_k) + f_d(u(q_k))(\delta u_k)) = 0$ , donde  $u(q_*) \in \dot{\mathcal{C}}_d(Q)$  es el camino de primer orden discreto asociado a  $q_*$ .

Recordemos que la acción discreta de  $L_d$  se escribe como,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathcal{S}_d(q_*)(\delta q_*) &= \sum_{k=1}^{N-1} D_{\text{DEL}}L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1}))(\delta q_k) \\ &\quad + D_2L_d(q_{N-1}, q_N)(\delta q_N) + D_1L_d(q_0, q_1)(\delta q_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta q_*$  de  $q_*$ , la expresión

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}\mathcal{S}_d(q_*)(\delta q_*) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}), \\ &= \mathbf{d}\mathcal{S}_d(q_*)(\delta q_*) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d^-(q_k, q_{k+1})(\delta q_k) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d^+(q_k, q_{k+1})(\delta q_{k+1}), \end{aligned}$$

se reescribe, usando el operador de Euler-Lagrange discreto, como

$$D_{\text{DEL}}L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})) + f_d^+(q_{k-1}, q_k) + f_d^-(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad (4.2)$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ . Más explícitamente,

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}) + f_d^+(q_{k-1}, q_k) + f_d^-(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad (4.3)$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ . Sistemas de ecuaciones algebraicas llamadas en [8] *ecuaciones de Euler-Lagrange discretas con fuerza*.

**Ejemplo 4.3. Sistema Mecánico Discreto con Fuerza.** Sea  $(\mathbb{R}^d, L_d, f_d)$  un sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza, con  $(\mathbb{R}^d, L_d)$  un sistema mecánico discreto (ver Ejemplo 2.8). Si  $f_d^+, f_d^- : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  son la descomposición de  $f_d$ , ecuación (4.1), entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas con fuerza se convierten en

$$M(q_2 - 2q_1 + q_0) = -h^2 \nabla V(q_1) + h^2 (f_d^+(q_0, q_1) + f_d^-(q_1, q_2)).$$

Si además  $f_d^-(q_0, q_1) = f(q_0)$  y  $f_d^+(q_0, q_1) = 0$  para todo  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ , donde  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  es alguna función suave, obtenemos

$$M(q_2 - 2q_1 + q_0) = -h^2 \nabla V(q_1) + h^2 f(q_1),$$

que es el algoritmo de Störmer-Verlet (ver [5]) usado para resolver las ecuaciones de Newton  $M\ddot{q} = -\nabla V(q) + f(q)$ .

**Ejemplo 4.4. Oscilador Armónico Discreto Amortiguado.** Terminamos con la serie de ejemplos relacionadas con el oscilador armónico considerando un análogo discreto al oscilador armónico amortiguado. Consideremos el sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza  $(\mathbb{R}, L_d, f_d)$  para el cual el lagrangiano y el campo de

fuerzas discreta se definen mediante

$$L_d(q_0, q_1) := h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} q_0^2 \right], \quad (4.4)$$

$$f_d(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) := -\mu \frac{q_1 - q_0}{h} \delta q_0, \quad (4.5)$$

con  $h \in (0, \sqrt{2})$  y  $\mu : h^2 \leq \mu \leq 4 - h^2$ , parámetros fijos. Las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas discretas definen el sistema de ecuaciones algebraicas  $(q_2 - 2q_1 + q_0) + h^2 q_1 + \mu(q_2 - q_1) = 0$ ; cuyas soluciones son (ver Apéndice A), en función de la condición inicial  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ ,

$$q_k = e^{-k \ln(1+\mu)} \left( (1+\mu) \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta} q_1 - \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin \theta} q_0 \right), \quad (4.6)$$

donde  $\theta$  es tal que  $\cos \theta = 1 - h^2/2 + \mu/2$ .

**Definición 4.5.** Dado un sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza  $(Q, L_d, f_d)$ , diremos que una función  $F_d^f : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$  es un *flujo lagrangiano discreto (MW) con fuerza* si satisface que  $((q_{k-1}, q_k), F_d^f(q_{k-1}, q_k))$  es una trayectoria discreta.

Vemos que  $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in \ddot{Q}_d$  va a ser una trayectoria discreta de  $(Q, L_d, f_d)$  si y solo si existe un flujo lagrangiano discreto con fuerza  $F_d^f$  definido sobre un abierto que contiene a  $(q_0, q_1)$ ; en tal caso vale que  $F_d^f(q_0, q_1) = (q_1, q_2)$ . Al igual que en el caso sin fuerza, el flujo lagrangiano discreto (MW) con fuerza puede no estar definido globalmente, y más aún, puede no existir.

**Definición 4.6.** Dado un sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza  $(Q, L_d, f_d)$ , definimos, al igual que en [8], las *transformadas de Legendre discretas (MW) con fuerza* de  $L_d$  como las funciones  $\mathbb{F}^{f^+} L_d, \mathbb{F}^{f^-} L_d : Q \times Q \rightarrow T^*Q$ , con

$$\mathbb{F}^{f^+} L_d(q_0, q_1) := D_2 L_d(q_0, q_1) + f_d^+(q_0, q_1), \quad (4.7)$$

$$\mathbb{F}^{f^-} L_d(q_0, q_1) := -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_d^-(q_0, q_1). \quad (4.8)$$

Diremos que el sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza  $(Q, L_d, f_d)$  es *regular (hiper-regular)*, si las transformadas de Legendre discretas con fuerza de  $L_d$ ,  $\mathbb{F}^{f^+} L_d$  y  $\mathbb{F}^{f^-} L_d$ , son un difeomorfismo local (difeomorfismo global).

Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange Discretas con fuerza se reescriben en término de las transformadas de Legendre discretas con fuerza como

$$\mathbb{F}^{f^+} L_d(q_0, q_1) = \mathbb{F}^{f^-} L_d(q_1, q_2). \quad (4.9)$$

Por lo tanto, podremos hallar  $q_{k+1}$  como función de  $q_{k-1}$  y  $q_k$  si  $D_2 \mathbb{F}^{f^+} L_d(q_k, q_{k+1})$  es invertible, y  $(\mathbb{F}^- L_d)^{-1}(q_k, q_{k+1}) \neq \emptyset$ . En tal caso podremos garantizar la existencia y unicidad de trayectorias; al menos, la existencia de un paso más  $q_{k+1}$ .

**Teorema 4.7.** *Sea  $(Q, L_d, f_d)$  un sistema lagrangiano discreto (MW) regular con fuerza. Luego, para todo  $(q_1, q_2) \in Q \times Q$  existen abiertos  $U \subset Q \times Q$  y  $V \subset T^*Q$ , con  $(q_1, q_2) \in U$  y  $\mathbb{F}^{f^-} L_d(q_1, q_2) \in V$ , tales que, si  $(\mathbb{F}^{f^+} L_d)^{-1}(V) \neq \emptyset$  entonces, para todo  $(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1) \in (\mathbb{F}^{f^+} L_d)^{-1}(V)$  las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas tienen una única solución  $((\tilde{q}_0, \tilde{q}_1), (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2))$ , con  $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \in U$ .*

*Demostración.* La demostración es inmediata a partir de la Observación 2.16, que surge del teorema 2.13, reemplazando las transformadas de Legendre discretas por su versión con fuerza. Esto es así pues las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas con fuerza, en términos de las transformadas de Legendre discretas con fuerza, son idénticas al caso sin fuerza.  $\square$

## 4.2. A la C. Cuell y G. W. Patrick

**Definición 4.8.** Un *sistema lagrangiano discreto (CP) con fuerza* es una 4-upla  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d, \mathbf{f}_d)$ , donde  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d)$  es un sistema lagrangiano discreto (CP) y  $\mathbf{f}_d : \mathcal{V} \rightarrow T^*\mathcal{V}$  una 1-forma suave que preserva la fibra, el *campo de fuerzas discreto*.

Diremos que  $v_* \in \dot{\mathfrak{C}}_d(Q)$  es una *trayectoria discreta* del sistema  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d, \mathbf{f}_d)$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta v_*$  de  $v_*$ ,

$$d\mathfrak{S}_d(v_*)(\delta v_*) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_d(v_k)(\delta v_k) = 0.$$

En la siguiente proposición probaremos que la familia de sistemas lagrangianos discretos (MW) con fuerza está contenida en la familia de sistemas lagrangianos discretos (CP) con fuerza.

**Proposición 4.9.** Sean  $(Q, L_d, f_d)$  y  $(Q, \mathcal{V}^{Q \times Q}, \mathfrak{L}_d^{Q \times Q}, \mathbf{f}_d)$  sistemas lagrangiano discretos (MW) y (CP), respectivamente, con  $\mathfrak{L}_d^{Q \times Q} := L_d$  y  $\mathbf{f}_d := f_d$ . Entonces,  $q_* \in \mathcal{C}_d(Q)$  es trayectoria discreta de  $(Q, L_d, f_d)$  si y solo si  $u(q_*) \in \dot{\mathfrak{C}}_d^{Q \times Q}(Q)$  es trayectoria discreta de primer orden de  $(Q, \mathcal{V}^{Q \times Q}, \mathfrak{L}_d^{Q \times Q}, \mathbf{f}_d)$ .

*Demostración.* La demostración es idéntica a la del Teorema 2.22, agregando la contribución de la fuerza. Esto último no cambia el resultado pues, por hipótesis  $\sum_{k=0}^{N-1} f_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = \sum_{k=0}^{N-1} f_d(v(q_k))(\delta v_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_d(v(q_k))(\delta v_k)$ .  $\square$

**Definición 4.10.** Sea  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d, \mathbf{f}_d)$  un sistema lagrangiano discreto (CP) con fuerza, entonces diremos que una función  $\mathfrak{F}_d^f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  es un *flujo lagrangiano discreto (CP) con fuerza* si satisface que  $(v, \mathfrak{F}_d^f(v))$  es una trayectoria discreta.

Escribiremos  $\mathfrak{F}_d$  en lugar de  $\mathfrak{F}_d^f$ , y el contexto nos dirá cuál flujo discreto (CP) estamos usando. Con esta definición, el par  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$  va a ser una trayectoria discreta de  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d, \mathbf{f}_d)$  si y solo si existe un flujo lagrangiano discreto (CP)  $\mathfrak{F}_d^f$  definido en un abierto que contenga a  $v$ ; en tal caso, vale que  $(v, \tilde{v}) = (v, \mathfrak{F}_d^f(v))$ .

El siguiente teorema es un resultado, con hipótesis más débiles que la Proposición 4.9, que muestra la equivalencia entre sistemas lagrangianos discretos con fuerza según (MW) y a la (CP).

**Aclaración 4.11.** Para resumir notación, en la demostración del siguiente teorema escribiremos a una variación infinitesimal de  $m \in M$  como un elemento del fibrado tangente  $\delta m \in TM$ , tal que  $\tau_M(\delta m) = m$ , con  $M = \ddot{\mathfrak{O}}_d$  ó  $\ddot{Q}_d$ . En otras palabras, omitiremos la escritura explícita de los puntos base de los elementos del fibrado tangente.

### 4.3. Discretización de Sistemas Lagrangianos con Fuerza

**Teorema 4.12.** Sean  $(Q, L_d, f_d)$  un sistema lagrangiano discreto con fuerza (MW),  $(Q, \mathcal{V}, \mathfrak{L}_d, \mathfrak{f}_d)$  un sistema lagrangiano discreto con fuerza (CP) tales que  $\mathfrak{L}_d = L_d \circ \partial^\mp$  y  $\mathfrak{f}_d = (\partial^\mp)^* f_d$ . Luego:

1. Si  $(v, \tilde{v}) \in \ddot{\mathfrak{O}}_d$  es trayectoria discreta de  $\mathfrak{L}_d$ ; entonces,  $\partial^{\mathcal{C}^d}(v, \tilde{v}) \in \ddot{Q}_d$  es trayectoria discreta de  $L_d$ .
2. Inversamente, si  $(v, \tilde{v})$  es tal que  $\partial^{\mathcal{C}^d}(v, \tilde{v})$  es trayectoria discreta de  $L_d$ , entonces  $(v, \tilde{v})$  es trayectoria discreta de  $\mathfrak{L}_d$ .

*Demostración.* Para la primera parte: por un lado, por la Observación 2.26, toda variación infinitesimal a extremos fijos de  $\partial^{\mathcal{C}^d}(v, \tilde{v})$  es de la forma  $\mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(\delta v, \delta \tilde{v})$ , para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  de  $(v, \tilde{v})$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbf{d}L_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta v)) &= \mathbf{d}(L_d \circ \partial^\mp)(\delta v) = \mathbf{d}\mathfrak{L}_d(\delta v), \text{ y} \\ f_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta v)) &= (\partial^\mp)^* f_d(\delta v) = \mathfrak{f}_d(\delta v). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}S_d(\mathbf{d}\partial^{\mathcal{C}^d}(\delta v, \delta \tilde{v})) + f_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta v)) + f_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta \tilde{v})) &= \\ &= \mathbf{d}L_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta v)) + \mathbf{d}L_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta \tilde{v})) + f_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta v)) + f_d(\mathbf{d}\partial^\mp(\delta \tilde{v})), \\ &= \mathbf{d}\mathfrak{L}_d(\delta v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_d(\delta \tilde{v}) + \mathfrak{f}_d(\delta v) + \mathfrak{f}_d(\delta \tilde{v}), \\ &= \mathbf{d}\mathfrak{S}_d(\delta v, \delta \tilde{v}) + \mathfrak{f}_d(\delta v) + \mathfrak{f}_d(\delta \tilde{v}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\partial^{\mathcal{C}^d}(v, \tilde{v})$  es trayectoria discreta del sistema lagrangiano  $(Q, L_d, f_d)$ . La segunda parte se demuestra de manera análoga.  $\square$

### 4.3. Discretización de Sistemas Lagrangianos con Fuerza

Comenzaremos presentando las definiciones según J. E. Marsden y M. West (que pueden verse en [8], sección 3.2) pero, siendo más cuidadosos con las mismas pues, en algunos casos, los objetos necesitan restringirse a ciertos abiertos para que estén bien definidos. Luego, introduciremos una nueva noción de discretización de sistemas lagrangianos con fuerza, siguiendo las ideas de C. Cuell y G. W. Patrick.

**Observación 4.13.** Dado un sistema lagrangiano con fuerza  $(Q, L, f)$  identificaremos como  $\check{f}$  a la 1-forma sobre  $TQ$  definida mediante

$$\check{f}(v, w_v) := f(v)(\mathbf{d}\tau_Q(v, w_v)),$$

para todo  $w_v \in T_v TQ$  (ver Proposición 7.8.2 de [7]). Para las definiciones que presentaremos a continuación estaremos interesados en la 1-forma  $\check{f}$  inducida por el campo de fuerzas  $f$ , más que en el campo de fuerzas en si; por lo tanto, escribiremos simplemente  $\check{f} \equiv f$ .

### 4.3.1. Según J. E. Marsden y M. West

**Definición 4.14.** Dado un sistema lagrangiano con fuerza  $(Q, L, f)$  y una discretización de TQ de paso de tiempo  $h \neq 0$ ,  $\varphi_h$ , una *discretización* (MW) del sistema lagrangiano con fuerza  $(Q, L, f)$  es un sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza  $(Q, L_{d,h}, f_{d,h})$  tal que:

$$L_{d,h} := h(L \circ \varphi_h^{-1}), \quad (4.10)$$

$$f_{d,h} := (\varphi_h^{-1})^* f. \quad (4.11)$$

**Ejemplo 4.15. Discretización de un sistema mecánico forzado.** Sea el sistema lagrangiano  $(\mathbb{R}^d, L, f)$ , con

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q),$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  es una matriz definida positiva,  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, y  $f$  tal que existe  $\tilde{f} : Q \rightarrow T^*Q$  una 1-forma suave, sobre  $Q$ , que satisface

$$f(q, \dot{q})(\delta q, \delta \dot{q}) = \tilde{f}(q)(\delta q).$$

Consideremos la discretización  $\varphi_h : T\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  tal que  $\varphi_h(q, \dot{q}) := (q, q + \dot{q}h)$ , con  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Luego, usando que  $\mathbf{d}\varphi_h(\delta q, \delta \dot{q}) = (\delta q, \delta q + h\delta \dot{q})$ , el sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza asociado,  $(Q, L_{d,h}, f_{d,h})$ , queda determinado por

$$L_{d,h}(q_0, q_1) = h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^T M \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - V(q_0) \right],$$

$$f_{d,h}(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) = \tilde{f}(q_0)(\delta q_0).$$

Notemos que la descomposición de  $f_{d,h}$  da lugar a las funciones  $f_{d,h}^+(q_0, q_1) = 0$  y  $f_{d,h}^-(q_0, q_1) = \tilde{f}(q_0)$ . Es decir, obtenemos el sistema mecánico discreto con fuerza que estudiamos en el Ejemplo 4.3.

### Discretización (MW) exacta de sistemas lagrangianos con fuerza

**Definición 4.16.** Dado un sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ , definimos su *exponencial con fuerza a tiempo  $h$*  como la función  $\exp_h^f : TQ \rightarrow Q \times Q$ , con  $h \neq 0$  fijo, mediante

$$\exp_h^f := (\tau_Q \times \tau_Q) \circ (\text{id}_{TQ}, F_h^{X_{L^f}}). \quad (4.12)$$

Además, en caso de existir, escribiremos  $\log_h^f := (\exp_h^f)^{-1}$ .

Usualmente escribiremos  $\exp_h$  en lugar de  $\exp_h^f$ , y el contexto nos dirá cuál exponencial estamos usando.

Al igual que el caso sin fuerza, la función exponencial con fuerza a tiempo  $h$  típicamente no estará definida de manera global, inclusive para lagrangianos hiperregulares. Esto es así porque pueden existir trayectorias que no estén definidas para un tiempo  $h$  previamente fijado.



### 4.3. Discretización de Sistemas Lagrangianos con Fuerza

**Definición 4.17.** Dado un sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ , llamaremos *abierto  $h$ -admisibles* a un abierto  $\mathcal{U}_h \subset TQ$  tal que

$$\exp_h^f \big|_{\mathcal{U}_h} : \mathcal{U}_h \rightarrow Q \times Q / \exp_h^f \big|_{\mathcal{U}_h}(v) := \exp_h^f(v)$$

es un difeomorfismo con su imagen. Además, diremos que el par  $(\exp_h^f, \mathcal{U}_h)$  es una *discretización (MW) exacta con fuerza de  $TQ$*  del sistema  $(Q, L, f)$ .

Remarcamos los comentario que hicimos en el capítulo anterior, adaptándolos al caso con fuerza:

- Los abiertos  $h$ -admisibles son una condición extra que tenemos que darle al sistema, pues pueden existir dos trayectorias (con distintas condiciones iniciales en  $TQ$ ) que coincidan, en  $Q$ , a tiempo  $t = 0$  y  $t = h$ .
- Siempre podremos definir una discretización (MW) exacta con fuerza de  $TQ$  en un entorno de cualquier velocidad de interés, tomando  $h$  suficientemente chico.

**Definición 4.18.** Sea  $(Q, L, f)$  un sistema lagrangiano regular con fuerza, y sea  $(\exp_h, \mathcal{U}_h)$  una discretización (MW) exacta con fuerza de  $TQ$  del sistema  $(Q, L)$ . Entonces, definimos como *sistema lagrangiano discreto (MW) exacto con fuerza* a la 4-upla  $(Q, \mathcal{U}_h, L_{d,h}^E, f_{d,h}^E) \equiv (Q, L_{d,h}^E, f_{d,h}^E)$  tal que  $L_{d,h}^E : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  (el *lagrangiano discreto (MW) exacto*) y  $f_{d,h}^E : Q \times Q \rightarrow T^*(Q \times Q)$  (la *fuerza discreta (MW) exacta*) valen, escribiendo  $(q_0, q_1) = u(q_0)$ ,

$$L_{d,h}^E(u(q_0)) := \int_0^h (L \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(u(q_0)) dt,$$

$$f_{d,h}^E(u(q_0))(\delta u_0) := \int_0^h (f \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(u(q_0)) \left( \mathbf{d}(\tau_Q \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(u(q_0))(\delta u_0) \right) dt.$$

**Observación 4.19.** Se puede ver que la descomposición de la fuerza discreta (MW) exacta en las fuerzas a izquierda y derecha es

$$f_{d,h}^{E+}(q_0, q_1)(\delta q_0) = \int_0^h (f \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(q_0, q_1) \left( D_2(\tau_Q \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(q_0, q_1)(\delta q_1) \right) dt,$$

$$f_{d,h}^{E-}(q_0, q_1)(\delta q_0) = \int_0^h (f \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(q_0, q_1) \left( D_1(\tau_Q \circ F_t^{X_{L^f}} \circ \log_h)(q_0, q_1)(\delta q_0) \right) dt,$$

donde  $f_{d,h}^E(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) = f_{d,h}^{E-}(q_0, q_1)(\delta q_0) + f_{d,h}^{E+}(q_0, q_1)(\delta q_1)$ .

Las definiciones de lagrangiano discreto exacto y fuerza discreta exacta dadas en [8] lucen diferentes, pero representan los mismos objetos. En aquel trabajo se definen las fuerzas discretas a derecha y a izquierda, localmente, como

$$\check{f}_{d,h}^{E+}(q_0, q_1)(\delta q_1) = \int_0^h \check{f}(q'_{01}(t)) \frac{\partial q_{01}}{\partial q_1}(t) dt, \quad (4.13)$$

$$\check{f}_{d,h}^{E-}(q_0, q_1)(\delta q_0) = \int_0^h \check{f}(q'_{01}(t)) \frac{\partial q_{01}}{\partial q_0}(t) dt, \quad (4.14)$$

respectivamente; donde  $q_{01}(t)$  debiera ser la única trayectoria del sistema lagrangiano

con fuerza  $(Q, L, f)$  que satisface que  $q_{01}(0) = q_0$  y  $q_{01}(h) = q_1^2$ . Comparando con la definición de más arriba, vemos que (4.13) y (4.14) son la expresión local de la descomposición de la fuerza discreta (MW) exacta.

### 4.3.2. A la C. Cuell y G. W. Patrick

**Definición 4.20.** Sea  $(Q, L, f)$  un sistema lagrangiano regular con fuerza, y sea  $(\psi, \alpha^+, \alpha^-)$  una discretización (CP) de  $TQ$ . Luego, una 4-upla  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*}, \mathfrak{f}_{d,*})$  es una *discretización (CP) del sistema lagrangiano con fuerza*  $(Q, L, f)$  si

1.  $\mathfrak{L}_{d,*} : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow Q$  es suave en  $(h, v)$  y verifica que  $\mathfrak{L}_{d,h} = hL + \mathcal{O}(h^2)$ , y
2.  $\mathfrak{f}_{d,*} : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow T^*(TQ)$  es suaves en  $(h, v)$  y verifica que  $\mathfrak{f}_{d,h} = hf + \mathcal{O}(h^2)$ .

Además, diremos que  $(h, v, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times \ddot{\mathfrak{O}}_d$  es *punto crítico* de  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*}, \mathfrak{f}_{d,*})$  si y solo si para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  de  $(v, \tilde{v})$ ,

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}(v)(\delta v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) + \mathfrak{f}_{d,h}(v)(\delta v) + \mathfrak{f}_{d,h}(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) = 0$$

### Discretización (CP) exacta de sistemas lagrangianos con fuerza

**Definición 4.21.** Dado un sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ , llamaremos *discretización (CP) exacta con fuerza* de  $TQ$  a una discretización (CP) de  $TQ$   $(\psi_f^E, \alpha^{E+}, \alpha^{E-})$  tal que  $\alpha^{E+}(h) := h$ ,  $\alpha^{E-}(h) := 0$ , y

$$\psi^{Ef}(h, t, v) := (\tau_Q \circ F_t^{X_{L^f}})(v), \quad (4.15)$$

donde  $X_{L^f}$  es el campo lagrangiano con fuerza asociado al sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ , ver Definición 1.15.

Escribiremos  $\psi^E$  en lugar de  $\psi_f^E$ , y el contexto nos dirá cuál discretización exacta estamos usando.

**Definición 4.22.** Sea  $(Q, L, f)$  un sistema lagrangiano regular con fuerza. Una *discretización (CP) exacta del sistema*  $(Q, L, f)$  es una discretización  $(Q, \psi_f^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E, \mathfrak{f}_{d,*}^E)$ , donde  $(\psi_f^E, \alpha^{E+}, \alpha^{E-})$  es una discretización (CP) exacta con fuerza de  $TQ$  y

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{d,h}^E(v) &:= \int_0^h (L \circ F_t^{X_{L^f}})(v) dt, \\ \mathfrak{f}_{d,h}^E(v)(\delta v) &:= \int_0^h (f \circ F_t^{X_{L^f}})(v) \left( \mathbf{d}(\tau_Q \circ F_t^{X_{L^f}})(v)(\delta v) \right) dt, \end{aligned}$$

son el *lagrangiano discreto (CP) exacto* y la *fuerza discreta (CP) exacta*, respectivamente.

**Observación 4.23.** Puede verse, trabajando de manera análoga a la Observación 3.21, que tanto  $\mathfrak{L}_{d,*}^E$  como  $\mathfrak{f}_{d,*}^E$  verifican que  $\mathfrak{L}_{d,h}^E = hL + \mathcal{O}(h^2)$  y  $\mathfrak{f}_{d,h}^E = hf + \mathcal{O}(h^2)$ ,

---

<sup>2</sup>Sabemos que esto no es cierto (por ejemplo una partícula libre en un círculo puede satisfacer tales condiciones, tomando distintas velocidades iniciales), por esto introdujimos la noción de entorno  $h$ -admisibles.

### 4.3. Discretización de Sistemas Lagrangianos con Fuerza

respectivamente. Es decir,  $(Q, \psi_f^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E, \mathfrak{f}_{d,*}^E)$  es una discretización (CP) del sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ .

Además, dado un entorno  $Q_0 \subset Q$  relativamente compacto, si comparamos esta definición con la que vimos para una discretización (MW) exacta (Definición 4.18), vemos que  $L_{d,h}^E = \mathfrak{L}_{d,h}^E \circ \log_h$  y  $f_{d,h}^E = (\log_h)^* \mathfrak{f}_{d,h}^E$  vale para toda discretización (MW) exacta con fuerza de  $TQ$  asociada un abierto  $h$ -admisibile  $\mathcal{V}_h$ , donde  $\mathcal{V}_h$  se obtiene a partir de  $(\psi_f^E, \alpha^{E+}, \alpha^{E-})$  y del Teorema 3.14.

#### Existencia de Trayectorias Dcretas (CP) con fuerza

**Teorema 4.24.** *Sea  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*}, \mathfrak{f}_{d,*})$  una discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ . Luego, existen entornos  $W \subset \mathbb{R} \times TQ$  de  $\{0\} \times TQ$  y  $V \subset \mathbb{R} \times TQ \times TQ$  de  $\{0\} \times \Delta(TQ \times TQ)$  tales que, para todo  $(h, v) \in W$ , con  $h > 0$ , existe un único  $\tilde{v} \in TQ$  tal que  $(h, v, \tilde{v}) \in V$  y  $(h, v, \tilde{v})$  es un punto crítico.*

Más aún,  $V$  y  $W$  pueden ser elegidos tales que  $\mathfrak{S}_{d,*} : W \rightarrow TQ$  definida mediante

$$\mathfrak{S}_{d,h}(v) := \begin{cases} \tilde{v}, & h > 0, \\ v, & h = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

sea suave.

*Demostración.* Para no extendernos demasiado, pues habría que definir nuevos conceptos y agregar nuevos resultados que podrían desviar la atención de la línea principal de este trabajo, creemos conveniente presentar sólo una idea de la demostración. Por otro lado, la demostración es muy similar a su versión sin fuerzas, ver Teorema 3.7 en [9].

Definamos:

- $\mathcal{C} := \left\{ (h, v, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times \ddot{\mathfrak{O}}_d / (h, v), (h, \tilde{v}) \in (\text{dom}(\partial_*^+) \cap \text{dom}(\partial_*^-)) \right\}$ ,
- $\sigma$  tal que  $\sigma(h, v, \tilde{v}) := \mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}(v) + \mathfrak{f}_{d,h}(v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}(\tilde{v}) + \mathfrak{f}_{d,h}(\tilde{v})$ ,
- $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} \times (Q \times Q)$  mediante  $g(h, v, \tilde{v}) := (h, \partial_h^-(v), \partial_h^+(\tilde{v}))$ .

Si  $(h, v, \tilde{v}) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \ddot{\mathfrak{O}}_d$  es punto crítico de  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*}, \mathfrak{f}_{d,*})$ , entonces para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  de  $(v, \tilde{v})$ ,

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}(v)(\delta v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) + \mathfrak{f}_{d,h}(v)(\delta v) + \mathfrak{f}_{d,h}(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) = 0.$$

Esto último es equivalente a pedir que  $\sigma(h, v, \tilde{v})(\delta h, \delta v, \delta \tilde{v}) = 0$  valga para todo  $(\delta h, \delta v, \delta \tilde{v}) \in \ker(\mathbf{d}g(h, v, \tilde{v}))^3$ . Es decir, estaremos interesados en hallar los puntos  $(h, v, \tilde{v}) \in \mathcal{C}$  tales que

$$\begin{cases} \sigma(h, v, \tilde{v})(\delta h, \delta v, \delta \tilde{v}) = 0, & \text{para todo } (\delta h, \delta v, \delta \tilde{v}) \in \ker(\mathbf{d}g(h, v, \tilde{v})), \\ g(h, v, \tilde{v}) = (h, \partial_h^-(v), \partial_h^+(\tilde{v})). \end{cases} \quad (4.17)$$

De acuerdo a [3], el punto  $(h, v, \tilde{v}) \in \mathcal{C}$  que satisface (4.17) es un *punto crítico sesgado* del *problema crítico sesgado*  $(\sigma, \ker(\mathbf{d}g), g)$ , con *valor*  $g(h, v, \tilde{v})$ . A continuación mencionaremos los tres puntos que constituyen el núcleo de la demostración

<sup>3</sup>Notar que, si  $(\delta h, \delta v, \delta \tilde{v})$  pertenece a  $\ker(\mathbf{d}g(h, v, \tilde{v}))$ , entonces  $\delta h = 0$  y  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  es una variación infinitesimal a extremos fijos de  $(v, \tilde{v})$ .

del Teorema 3.7 de [9], y veremos que siguen valiendo aún cuando agregamos la contribución de la fuerza.

(1) Notemos que para  $h = 0$  el problema crítico (4.17) es degenerado, pues  $\sigma$  es una 1-forma nula. Además, la función  $g$  deja de ser una submersión; por lo tanto, de acuerdo a la Definición 1 de [3],  $(\sigma, \ker(\mathbf{d}g), g)$  deja de ser un problema crítico sesgado. Para solucionar esto vamos a *parchar*<sup>4</sup> el problema crítico: al igual que la demostración del caso sin fuerzas, tomamos  $E := \{(v, -v) / v \in TQ\}$ , un fibrado vectorial sobre  $Q$ , y  $\zeta : W^E \subset E \rightarrow W^{Q \times Q} \subset Q \times Q$  el difeomorfismo asociado a un *entorno tubular* de  $\Delta(Q \times Q)$  en  $Q \times Q$ , tal que la función parchada  $\hat{\phi}$  de  $\phi : g^{-1}(\mathbb{R} \times W^{Q \times Q}) \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} \times E$ , definida mediante

$$\phi(h, v, \tilde{v}) := (h, \zeta^{-1}(\partial_h^+(\tilde{v}), \partial_h^-(v))),$$

valga

$$\hat{\phi}(h, v, \tilde{v}) := \begin{cases} (h, \frac{1}{h}\zeta^{-1}(\partial_h^+(\tilde{v}), \partial_h^-(v))), & \text{si } h \neq 0, \\ (0, \frac{1}{2}(v + \tilde{v}), -\frac{1}{2}(v + \tilde{v})), & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

y sea suave. Utilizando la Proposición 1 de [3], y por definición de discretización (CP) de un sistema lagrangiano regular con fuerza, puede verse que la función lagrangiano discreto parchado es suave y vale

$$\hat{\mathbf{g}}_{d,h}(v, \tilde{v}) := \begin{cases} \frac{1}{h}\mathbf{g}_{d,h}(v), & \text{si } h \neq 0, \\ L(v), & \text{si } h = 0; \end{cases}$$

análogamente, la función fuerza discreta parchada es suave y vale

$$\hat{\mathbf{f}}_{d,h}(v, \tilde{v}) := \begin{cases} \frac{1}{h}\mathbf{f}_{d,h}(v), & \text{si } h \neq 0, \\ f(v), & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

(2) Para todo  $h \neq 0$ , por ser  $\phi$  un difeomorfismo con su imagen,  $(h, v, \tilde{v}) \in \mathcal{C}$  es un punto crítico sesgado del problema crítico  $(\sigma, \ker(\mathbf{d}g), g)$  con valor  $g(h, v, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times W^{Q \times Q}$  si y solo si  $(h, v, \tilde{v})$  es punto crítico sesgado del problema crítico  $(\sigma, \ker(\mathbf{d}\phi), \phi)$  con valor  $\phi(h, v, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times W^E$ . De igual manera, para todo  $h \neq 0$ , puede verse que existe una correspondencia entre los puntos críticos del problema crítico  $(\sigma, \ker(\mathbf{d}\phi), \phi)$ , con los puntos críticos del problema crítico parchado  $(\hat{\sigma}, \ker(\mathbf{d}\hat{\phi}), \hat{\phi})$ , donde

$$\hat{\sigma}(h, v, \tilde{v}) := \mathbf{d}\hat{\mathbf{g}}_{d,h}(v) + \hat{\mathbf{f}}_{d,h}(v) + \mathbf{d}\hat{\mathbf{g}}_{d,h}(\tilde{v}) + \hat{\mathbf{f}}_{d,h}(\tilde{v}).$$

(3) Si  $h = 0$ , veamos que el problema crítico parchado tiene puntos críticos, y son no degenerados. Consideremos puntos  $(0, v, \tilde{v})$  tales que  $\tau_Q(v) = \tau_Q(\tilde{v})$ , luego  $\hat{\phi}(0, v, \tilde{v}) = (0, z, -z)$ , con  $z := (v + \tilde{v})/2$ . Por otro lado, por ser  $\hat{\phi}$  una submersión, y  $Z := \hat{\phi}^{-1}(0, z, -z) = \{(0, v, \tilde{v}) / v = 2z - \tilde{v}\}$ , entonces vale que

$$\ker(\mathbf{d}\hat{\phi}(0, v, \tilde{v})) = T_{(0,v,\tilde{v})}Z = \{(0, \delta v, \delta \tilde{v}) / \delta v = -\delta \tilde{v}\}.$$

<sup>4</sup>C. Cuell y G. W. Patrick llaman *blow-up* a esta construcción.

### 4.3. Discretización de Sistemas Lagrangianos con Fuerza

Es decir,  $(0, v, \tilde{v}) \in Z$  es un punto crítico sesgado del problema parchado si y solo si, para todo  $(0, \delta v, \delta \tilde{v}) \in T_{(0, v, \tilde{v})}Z$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(0, v, \tilde{v})(0, \delta v, \delta \tilde{v}) &= 0, \\ \mathbf{d}L(v)(\delta v) + \mathbf{d}L(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) + f(v)(\delta v) + f(\tilde{v})(\delta \tilde{v}) &= 0, \\ \mathbf{d}L(v)(\delta v) - \mathbf{d}L(\tilde{v})(\delta v) + f(v)(\delta v) - f(\tilde{v})(\delta v) &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Vemos que  $v = \tilde{v}$  es solución de (4.18), por lo tanto  $(0, z, z)$  es un punto crítico sesgado del problema parchado con valor  $(0, z, -z)$ . Aunque la definición de ser punto crítico no degenerado presentada en [3] no es la usual, puede verse que para el problema crítico parchado  $(\hat{\sigma}, \ker(\mathbf{d}\hat{\phi}), \hat{\phi})$  el punto crítico  $(0, z, z)$  es no degenerado, según la Definición 3 de [3], usando las hipótesis de regularidad impuestas al sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ .

Finalmente, el resto de la demostración se sigue de igual manera al caso sin fuerza: usando el Teorema 2 de [3] se prueba la existencia de  $W \subset \mathbb{R} \times TQ$  que es un entorno de  $\{0\} \times TQ$  y  $V \subset \mathbb{R} \times TQ \times TQ$  un entorno de  $\{0\} \times \Delta(TQ \times TQ)$ , usando además la Proposición 5 de [3] se prueba la existencia de la función  $\mathfrak{F}_{d,*}$ .  $\square$

**Definición 4.25.** Si  $(Q, \psi, \mathfrak{L}_{d,*}, \mathfrak{f}_{d,*})$  es una discretización (CP) del sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ , entonces llamaremos *flujo de una discretización (CP) con fuerza* a una terna  $(\mathfrak{F}_{d,*}, W, V)$ , donde  $\mathfrak{F}_{d,*}$ ,  $W$  y  $V$  son como en el Teorema 4.24.

A partir del Teorema 4.24 puede probarse que los resultados que derivamos para los sistemas discretos sin fuerzas, como consecuencia del Teorema 3.22, siguen valiendo (pues son formalmente iguales); es decir, valen resultados análogos a los Teoremas 3.25, 3.29 y 3.31, lo cual prueba la existencia de trayectorias discretas (CP) con fuerza, (MW) exactas con fuerza, y (MW) exactas de orden  $r$  con fuerza<sup>5</sup>, respectivamente. A continuación probaremos la versión con fuerza de la Proposición 3.26.

**Proposición 4.26.** *Sea  $(Q, \psi^E, \mathfrak{L}_{d,*}^E, \mathfrak{f}_{d,*}^E)$  una discretización (CP) exacta de un sistema lagrangiano regular con fuerza  $(Q, L, f)$ . Supongamos que para todo  $(h, v) \in (\text{dom}(\partial_*^+) \cap \text{dom}(\partial_*^-))$  las trayectorias del sistema lagrangiano están definidas para tiempos en  $[0, 2h]$ . Entonces,  $(h, v, F_h^{X_{L^f}}(v))$  es punto crítico.*

*Demostración.* Sean  $q_v(\cdot) \in \mathcal{C}(Q)$  tal que  $q'_v(t) = F_t^{X_{L^f}}(v)$ ,  $(v, \tilde{v}) := (v, F_h^{X_{L^f}}(v))$ , y  $(\delta v, \delta \tilde{v})$  variación infinitesimal a extremos fijos de  $(v, \tilde{v})$ . Luego, a partir de (1.1), la diferencial de la acción de  $L$  se escribe como

$$\int_0^h \mathbf{d}L(q'(t))(\delta q'(t)) dt = \int_0^h D_{\text{EL}}L(q''(t))(\delta q(t)) dt + \mathbb{F}L(q'(t))(\delta q(t)) \Big|_0^h.$$

Particularizando para una trayectoria  $q'_v(\cdot)$ , sumando miembro a miembro el término de la fuerza  $\int_0^h f(q'_v(t))(\delta q(t)) dt$ , y utilizando que el término correspondiente a las

<sup>5</sup>Diremos que un sistema lagrangiano discreto (MW) con fuerza es de orden  $r$  si

$$L_{d,h} \circ \exp_h = \mathfrak{L}_{d,h}^E + \mathcal{O}(h^{r+1}) \quad \text{y} \quad (\exp_h)^* f_{d,h} = \mathfrak{f}_{d,h}^E + \mathcal{O}(h^{r+1}).$$

ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerza,  $D_{\text{ELL}}(q_v''(t)) + f(q_v'(t))$ , se anula para todo  $t \in [0, h]$ , obtenemos la siguiente expresión

$$\int_0^h \mathbf{d}L(q_v'(t))(\delta q'(t)) dt + \int_0^h f(q_v'(t))(\delta q(t)) dt = \mathbb{F}L(q_v'(t))(\delta q(t)) \Big|_0^h,$$

que vale para toda variación infinitesimal  $\delta q(\cdot)$ . En particular, vale para la variación infinitesimal  $\delta q_v(t) := \mathbf{d}(\tau_Q \circ F_t^{X_{L^f}})(v)(\delta v)$ , es decir

$$\int_0^h \mathbf{d}L(q_v'(t))(\delta q_v'(t)) dt + \int_0^h f(q_v'(t))(\delta q_v(t)) dt = \mathbb{F}L(q_v'(t))(\delta q_v(t)) \Big|_0^h.$$

Comparando con la definición de lagrangiano discreto (CP) exacto y fuerza discreta (CP) exacta, vemos que la expresión anterior se reescribe como

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(v)(\delta v) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(v)(\delta v) = \mathbb{F}L(q_v'(t))(\delta q_v(t)) \Big|_0^h.$$

Finalmente, usando que  $\delta q_v(0) = \mathbf{d}(\tau_Q)(v)(\delta v) = \mathbf{d}\partial_0^{E^-}(v)(\delta v) = 0$ , obtenemos

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(v)(\delta v) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(v)(\delta v) = \mathbb{F}L(q_v'(h))(\delta q_v(h)). \quad (4.19)$$

Por otro lado, trabajando de manera análoga para  $\tilde{v}$  y  $\delta\tilde{v}$ ,

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) = \mathbb{F}L(q_{\tilde{v}}'(0))(\delta q_{\tilde{v}}(0)). \quad (4.20)$$

Sumando (4.19) y (4.20) miembro a miembro:

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(v)(\delta v) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(v)(\delta v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) = \mathbb{F}L(q_v'(h))(\delta q_v(h)) + \mathbb{F}L(q_{\tilde{v}}'(0))(\delta q_{\tilde{v}}(0)).$$

Pero  $\mathbb{F}L(q_v'(h))(\delta q_v(h)) + \mathbb{F}L(q_{\tilde{v}}'(0))(\delta q_{\tilde{v}}(0)) = 0$ , pues  $q_v'(h) = F_h^{X_{L^f}}(v) = q_{\tilde{v}}'(0)$  y, además,  $\delta q_v(h) = \mathbf{d}\partial_h^{E^+}(v)(\delta v) = \mathbf{d}\partial_0^{E^-}(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) = \delta q_{\tilde{v}}(0)$ ; por lo tanto,

$$\mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(v)(\delta v) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(v)(\delta v) + \mathbf{d}\mathfrak{L}_{d,h}^E(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) + \mathfrak{f}_{d,h}^E(\tilde{v})(\delta\tilde{v}) = 0,$$

para toda variación infinitesimal a extremos fijos  $(\delta v, \delta\tilde{v})$  de  $(v, \tilde{v}) = (v, F_h^{X_{L^f}}(v))$ , es decir  $(h, v, F_h^{X_{L^f}}(v))$  es un punto crítico.  $\square$

A partir de la proposición que acabamos de demostrar se puede ver que valen las versiones con fuerza de los Teoremas 3.27 y 3.30, ya que, como mencionamos más arriba para el caso de los Teoremas de Existencia de Trayectorias, las demostraciones son formalmente idénticas. Como comentario final mencionamos que estos resultados justifican el nombre de discretización (CP) exacta con fuerza, pues mostramos que una tal discretización permite capturar la visión estroboscópica del sistema lagrangiano con fuerza  $(Q, L, f)$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

En el presente trabajo mostramos que un sistema lagrangiano discreto general no tiene por qué poseer trayectorias, analizamos un ejemplo en concreto, y dimos condiciones suficientes para asegurar la existencia de trayectorias contenidas en un entorno de una trayectoria previamente conocida. Luego, vimos que los sistemas lagrangianos exactos necesitan ser definidos en un entorno a una velocidad de interés, y asociado a tal abierto probamos teoremas de existencia y unicidad de trayectorias. Además probamos que los sistemas que aproximan a orden  $r$  al exacto también poseen trayectorias, y son únicas en ciertos abiertos.

Para probar estos últimos dos teoremas tuvimos que trabajar con una nueva noción de sistema discreto y probar la equivalencia entre ellos. También probamos la existencia y unicidad de las trayectorias desde este punto de vista.

Finalmente, introdujimos la noción de sistema lagrangiano discreto con fuerza en el contexto de C. Cuell y G. W. Patrick, y probamos resultados análogos a los que obtuvimos para el caso sin fuerza.





# Apéndice A

## Oscilador Armónico Discreto

A continuación veremos cómo puede resolverse la relación de recurrencia, en forma genérica, que obtuvimos cuando plantemos las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas de un Oscilador Armónico Discreto, en sus diferentes versiones.

Consideremos la siguiente relación de recurrencia

$$q_{k+1} = Tq_k - Dq_{k-1}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $q_k \in \mathbb{C}$  para todo  $k$ , y  $D, T \in \mathbb{R}$ , con  $D \geq (T/2)^2 \geq 0$ . Si proponemos como solución particular  $q_k = x^k$ , entonces la *ecuación característica* asociada es  $x^2 - Tx + D = 0$ , y cuyas soluciones son

$$x_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D}.$$

Supongamos que Como  $D \geq (T/2)^2 \geq 0$ , entonces podemos describir a las raíces como los números complejos  $z$ , de módulo  $D$ ,

$$x_1 = z = \frac{T}{2} + i\sqrt{D - \left(\frac{T}{2}\right)^2}, \quad y \quad x_2 = \bar{z} = \frac{T}{2} - i\sqrt{D - \left(\frac{T}{2}\right)^2}.$$

Luego, una solución general de (A.1) será de la forma  $q_k = Az^k + B\bar{z}^k$ , con  $A$  y  $B$  constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales. Fijemos  $q_0$  y  $q_1$  como datos iniciales, entonces

$$\begin{cases} q_0 = A + B, \\ q_1 = Az + B\bar{z}. \end{cases}$$

Despejando las constantes obtenemos que

$$\begin{cases} q_0z - q_1 = B(z - \bar{z}), \\ q_1 - q_0\bar{z} = A(z - \bar{z}). \end{cases}$$

Finalmente, juntando todo en la solución general,

$$\begin{aligned} q_k(z - \bar{z}) &= (q_1 - q_0\bar{z})z^k + (q_0z - q_1)\bar{z}^k, \\ q_k(z - \bar{z}) &= q_1(z^k - \bar{z}^k) - q_0(\bar{z}z^k - z\bar{z}^k), \\ q_k 2i|z| \sin \theta &= q_1 2i|z|^k \sin(k\theta) - q_0 2i|z|^{k+1} \sin((k-1)\theta), \end{aligned}$$

donde utilizamos que  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$ ; por lo tanto,  $\bar{z}z^k = |z|^{k+1}e^{i(k-1)\theta}$ . Finalmente, teniendo en cuenta que  $|z| = D$ ,

$$q_k = q_1 D^{k-1} \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta} - q_0 D^k \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin \theta}, \quad (\text{A.2})$$

con  $\theta$  tal que  $\cos \theta = T/2D$ .

# Apéndice B

## Partícula en un círculo

Consideremos el caso de una partícula puntual que se mueve, libremente, sobre una circunferencia unitaria. Tomemos como espacio de configuración  $Q = S^1 \subset \mathbb{C}$  y el lagrangiano adimensional

$$L : TS^1 \longrightarrow \mathbb{R} / L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} \|\dot{q}\|^2. \quad (\text{B.1})$$

**Observación B.1.** (caracterización del espacio tangente).

$$T_q S^1 = \{iqv \in \mathbb{C} / v \in \mathbb{R}\},$$

además  $\|iqv\| = |v|$ , el valor absoluto en  $\mathbb{R}$ .

### B.0.3. Entorno $h$ -admisibles

Dado  $h > 0$ , consideremos la función exponencial:

$$\exp_h : TS^1 \longrightarrow S^1 \times S^1 / \exp_h := (\tau_Q \times \tau_Q) \circ (id_{TS^1}, F_h^{XL}), \quad (\text{B.2})$$

donde

$$F_h^{XL} : TS^1 \longrightarrow TS^1 / F_h^{XL}(q, iqv) = (qe^{ivh}, iqe^{ivh}v)$$

es el flujo lagrangiano, y  $\tau_Q$  la proyección canónica. La condición faltante para que la función  $\exp_h$  sea una discretización es la inyectividad. Para ello consideremos el abierto

$$\mathcal{U}_a^h := \left\{ (q, iqv) \in TS^1 \setminus T_{-1}S^1 \middle/ v \in \left( \frac{a - \pi}{h}, \frac{a + \pi}{h} \right) \right\}^1, \quad (\text{B.3})$$

a partir del cual definimos el siguiente conjunto de abiertos:  $U_n := \mathcal{U}_{2\pi n}^h$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Podemos ver que  $\exp_h$  restringida al abierto  $\mathcal{U}_a^h$  es un difeomorfismo con su imagen; por lo tanto, restringida a cada  $U_n$  también lo será. Definamos las siguientes

---

<sup>1</sup>Notación: dados dos subconjuntos  $A, B \subset S$ , definimos el complemento de  $B$  relativo a  $A$  como

$$A \setminus B := A \cap B^C,$$

donde  $B^C$  es el complemento de  $B$  en  $S$ . Notar que, si  $B \subset A$ , entonces  $A \setminus B = A - B$ .

discretizaciones:

$$\exp_n : U_n \longrightarrow \exp_n(U_n) / \exp_n := \exp_h \Big|_{U_n}, \quad (\text{B.4})$$

y observemos que, si  $(q, iqv) \in U_0$  entonces  $(q, iq(v + \frac{2n\pi}{h})) \in U_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Además,

$$\exp_n(q, iq(v + \frac{2n\pi}{h})) = \exp_m(q, iq(v + \frac{2m\pi}{h})) = (q, qe^{ivh}), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos que la imagen de todos los difeomorfismos es la misma, es decir:

$$\exp_n(U_n) = \exp_m(U_m) =: W_0, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

#### B.0.4. Lagrangiano discreto exacto

Finalmente, los lagrangianos discretos exactos asociados al lagrangiano (B.1) y a los difeomorfismos  $\exp_n$  son:

$$L_{d,n}^E : W_0 \longrightarrow \mathbb{R} / L_{d,n}^E(q_0, q_1) := \int_0^h (L \circ F_t \circ \log_n)(q_0, q_1) dt, \quad (\text{B.5})$$

donde  $\log_n$  es la función inversa de  $\exp_n$ . Por un lado, podemos ver que:

$$\log_n(q_0, q_1) = \left( q_0, iq_0 \frac{\text{Arg}(q_1/q_0) + 2n\pi}{h} \right),$$

donde  $\text{Arg}$  es tal que  $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$  es el argumento principal de  $z \in \mathbb{C}$ . Por otro lado,

$$F_t(q, iqv) = (qe^{ivt}, iqe^{ivt}v),$$

y además  $\|iqe^{ivt}v\| = |v|$ . Luego, juntando estas últimas expresiones podemos evaluar el lagrangiano discreto exacto en  $(q_0, q_1) \in U_n$ :

$$\begin{aligned} L_{d,n}^E(q_0, q_1) &= \int_0^h L(F_t(\log_n(q_0, q_1))) dt, \\ &= \int_0^h \frac{1}{2} \left| \frac{\text{Arg}(q_1/q_0) + 2n\pi}{h} \right|^2 dt, \\ &= \frac{1}{2h^2} (\text{Arg}(q_1/q_0) + 2n\pi)^2 \int_0^h dt, \\ &= \frac{1}{2h} (\text{Arg}(q_1/q_0) + 2n\pi)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

#### B.0.5. Trayectoria discreta

Para determinar las trayectorias discretas primero tomaremos cartas coordenadas sobre la variedad  $S^1$  y luego analizaremos el lagrangiano discreto exacto en su expresión local. En concreto, para todo  $q_0 \in S^1 - \{-1\}$  tomamos la carta  $(S^1 - \{-1\}, \varphi)$ , donde

$$\varphi : S^1 - \{-1\} \longrightarrow (-\pi, \pi) / \varphi(q) := \text{Arg}(q), \quad (\text{B.7})$$

cuya inversa es  $\varphi^{-1}(\theta_0) = \exp(i\theta_0)$ , y para  $q_0 = -1$  tomamos  $(S^1 - 1, \chi)$ , donde

$$\chi : S^1 - \{1\} \longrightarrow (0, 2\pi) / \chi(q) := \text{Arg}(qe^{i\pi}). \quad (\text{B.8})$$

**Aclaración B.2.** Desde ahora centraremos nuestra atención al abierto coordinado  $S^1 - \{-1\}$  con  $\varphi$ .

**Observación B.3.** Dada una carta coordinada de  $S^1$ , una carta coordinada de  $TS^1$  se obtiene *levantando* la primera. Notemos que  $d\varphi^{-1} : T\mathbb{R} \longrightarrow TS^1 / d\varphi^{-1}(\theta, v) := (\varphi^{-1}(\theta), d\varphi^{-1}(\theta) \cdot v)$ , donde

$$\begin{aligned} d\varphi^{-1}(\theta) \cdot v &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^{-1}(\theta + vt), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(i(\theta + vt)), \\ &= i \exp(i\theta)v, \\ &= i\varphi^{-1}(\theta)v. \end{aligned}$$

Es fácil ver que su inversa  $d\varphi$  es la asignación  $(q, iqv) \in TS^1 \longmapsto (\varphi(q), v) \in T\mathbb{R}$ . Por lo tanto  $(d\varphi, TS^1 \setminus T_{-1}S^1)$  es una carta coordinada de  $TS^1$ .

Luego, la expresión local de los lagrangianos discretos exactos (B.6) es  $\widehat{L}_{d,n}^E$ , donde

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{d,n}^E(\theta_0, \theta_1) &= (L_{d,n}^E \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1}))(\theta_0, \theta_1), \\ &= L_{d,n}^E(\varphi^{-1}(\theta_0), \varphi^{-1}(\theta_1)), \\ &= L_{d,n}^E(\exp(i\theta_0), \exp(i\theta_1)), \\ &= \frac{1}{2h} (\text{Arg}(\exp(i\theta_1)/\exp(i\theta_0)) + 2n\pi)^2, \\ &= \frac{1}{2h} (\text{Arg}(\exp(i(\theta_1 - \theta_0)) + 2n\pi)^2, \\ &= \frac{1}{2h} ((\theta_1 - \theta_0 + 2\delta_{01}\pi) + 2n\pi)^2, \\ &= \frac{1}{2h} (\theta_1 - \theta_0 + 2n(\pi + \delta_{01}))^2, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

cuando calculamos el argumento principal de  $\exp(i(\theta_1 - \theta_0))$ , si queremos escribir dicho valor en términos de  $\theta_0$  y  $\theta_1$  tenemos que considerar tres casos, que dependen de su diferencia. Por ello, en el penúltimo paso, agregamos el término  $2\delta_{01}\pi$ ; el parámetro  $\delta_{01}$  está definido de la siguiente manera:

$$\delta_{01} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \theta_1 - \theta_0 < -\pi, \\ 0 & , \text{ si } -\pi < \theta_1 - \theta_0 < \pi, \\ -1 & , \text{ si } \theta_1 - \theta_0 > \pi. \end{cases}$$

Finalmente, si queremos conocer las trayectorias discretas, debemos calcular

$$D_1 \widehat{L}_{d,n}^E(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{h} (\theta_2 - \theta_1 + 2(n + \delta_{12})\pi)(-1),$$

y

$$D_2 \widehat{L}_{d,n}^E(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{h}(\theta_1 - \theta_0 + 2(n + \delta_{01})\pi)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos que

$$\begin{aligned} D_2 \widehat{L}_{d,n}^E(\theta_0, \theta_1) &= -D_1 \widehat{L}_{d,n}^E(\theta_1, \theta_2), \\ \theta_1 - \theta_0 + 2(n + \delta_{01})\pi &= \theta_2 - \theta_1 + 2(n + \delta_{12})\pi, \\ \theta_1 - \theta_0 + 2\delta_{01}\pi &= \theta_2 - \theta_1 + 2\delta_{12}\pi, \\ \theta_2 &= 2\theta_1 - \theta_0 + 2(\delta_{01} - \delta_{12})\pi. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Aplicando la función de parametrización  $\varphi^{-1}$  obtenemos que las trayectorias discretas sobre la variedad son:

$$\begin{aligned} q_2 &= \exp(i\theta_2), \\ &= \exp(i(2\theta_1 - \theta_0 + 2(\delta_{01} - \delta_{12})\pi)), \\ &= \exp(i(2\theta_1 - \theta_0)), \\ &= (\exp(i\theta_1))^2 / \exp(i\theta_0), \\ &= q_1^2 / q_0. \end{aligned} \tag{B.11}$$

# Agradecimientos

A Javier y Sergio, porque me guiaron y acompañaron desde el primer día que empezamos con este proyecto.

A todos mis compañeros (de aquí y de allá), amigos (de aquí y de allá), y familiares (de allá y de más allá), porque siempre estuvieron presentes.

Al Instituto Balseiro y a la Comisión Nacional de Energía Atómica, por el pan de cada día.





# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, 2nd edition (1978).
- [2] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc. (1986).
- [3] C. Cuell, G. W. Patrick. *Skew Critical Problems*. Regular and Chaotic Dynamics **12** (2007), No. 6, 589-601.
- [4] C. Cuell, G. W. Patrick. *Geometric discrete analogues of tangent bundles and constrained Lagrangian systems*. Journal of Geometry and Physics **59** (2009) 976-997.
- [5] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. *Geometric Numerical Integration*. Springer, 2nd edition (2005).
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Mechanics*. Reed Ed. and Prof. Publishing Ltd, 3rd edition (1993).
- [7] J. E. Marsden, T. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. 2nd edition (1998).
- [8] J. E. Marsden, M. West. *Discrete mechanics and variational integrators*. Acta Numerica **10** (2001) 357-514.
- [9] G. W. Patrick, C. Cuell. *Error analysis of variational integrators of unconstrained Lagrangian systems*. Numer. Math. **113** (2009) 243-264.