TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI Y LA INTEGRABILIDAD DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

Marco S. Amelio
Maestrando

Dr. Sergio Grillo
Director

Miembros del Jurado
Dr. Damián Zanette (Instituto Balseiro)
Dra. Marcela Zuccalli (Universidad Nacional de La Plata)
Dr. Marcelo Kuperman (Instituto Balseiro)

9 de Diciembre de 2018

Física Estadística e Interdisciplinaria

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mi familia

A mis amigos

A todo aquel que hizo posible este trabajo

Índice de contenidos

Resumen

La integrabilidad por cuadraturas de los sistemas hamiltonianos es uno de los temas más estudiados en el campo de la Mecánica Clásica. En este contexto, se entiende por *integrabilidad por cuadraturas* o *solubilidad exacta* de un sistema dinámico a la posibilidad de encontrar, a través de una serie de procedimientos, fórmulas explícitas para las trayectorias del sistema.

Una de las herramientas más importantes a la hora de analizar la solubilidad exacta de los sistemas hamiltonianos es la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica. En particular, es bien sabido que, si se tiene una familia suficientemente grande de soluciones de esta ecuación, existe un procedimiento para obtener a partir de ellas cualquier trayectoria del sistema, sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial.

Recientemente se ha desarrollado una nueva versión de la ecuación de Hamilton-Jacobi [1] que pone de manifiesto una serie de propiedades geométricas de sus soluciones. Esta nueva versión, a la cual se hará referencia como ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada, abre la posibilidad a su utilización en otro tipo de sistemas dinámicos.

En este trabajo se estudia la integrabilidad de sistemas dinámicos principalmente desde el punto de vista de esta nueva versión de la ecuación. En primer lugar, se define y se analiza el concepto de criterio de integrabilidad para un sistema dinámico. Luego, se observa que, de manera similar a lo que ocurre con la versión clásica, existe una relación clara entre conocer una familia suficientemente grande de soluciones de la ecuación (con algunas características adicionales) y conocer las trayectorias del sistema, lo que permite enunciar nuevos criterios de integrabilidad basados en esta ecuación para sistemas dinámicos en general. Uno de los objetivos de esta tesis fue analizar desde un punto de vista teórico estos nuevos criterios.

Además, a lo largo de este escrito se presentan resultados de la teoría de Hamilton-Jacobi, anteriormente conocidos y formulados en el lenguaje de la geometría diferencial, en el lenguaje del cálculo multivariable y el álgebra lineal, hecho que también constituyó uno de los objetivos del trabajo.

Palabras clave: HAMILTON-JACOBI, SISTEMAS DINÁMICOS, SOLUBILIDAD EXACTA, CONSTANTES DE MOVIMIENTO

Abstract

The integrability by quadratures in hamiltonian systems is one of the most widely studied topics in Classical Mechanics. In this context, by *integrability by quadratures* or *exact solvability* of a dynamical system it is understood the possibility of finding, through a series of procedures, explicit formulas for the trajectories of the system.

One of the most important tools used to analize the exact solvability of a hamiltonian system is the classical Hamilton-Jacobi equation. In particular, it is well known that, if a big enough family of solutions of the equation is known, such a procedure to obtain through them any trajectory of the system exists, with no need of solving any differential equation.

Recently, a new version of the Hamilton-Jacobi equation has been developed [1], showing a series of geometric properties of its solutions. This new version, which will be referred to as the generalized Hamilton-Jacobi equation, can be used in dynamical systems other than hamiltonian systems.

In this work the integrability by quadratures of dynamical systems is studied, mainly through the point of view of this new version of the Hamilton-Jacobi equation. First, the concept of an integrability criterion for a dynamical system is defined and analyzed. Then, it is shown that, in a similar manner to the classical version of the equation, a clear relation between knowing a big enough family of solutions of the generalized Hamilton-Jacobi equation and knowing the trajectories of the system exists, enunciating then some new integrability criteria based on the Hamilton-Jacobi equation for general dynamical systems. One of the objectives of this thesis was to analyze from a theoretical point of view this new criteria.

Also, throughout this text some results of the Hamilton-Jacobi theory, previously known and formulated using the language of differential geometry, are presented using the language of multivariable calculus, which constituted an objective of this work itself.

Keywords: HAMILTON-JACOBI, DYNAMICAL SYSTEMS, EXACT SOLVABILITY, CONSTANTS OF MOTION

Introducción

El estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias resulta de gran relevancia para distintas áreas de la ciencia en general. El comportamiento de muchos sistemas (en particular, su evolución temporal) es modelado a través de este tipo de ecuaciones, no solamente en la Física, sino también en la Biología y la Economía entre otros.

La existencia de soluciones en el caso de que el sistema de ecuaciones esté en su forma normal (en cuyo caso, de aquí en más, se dirá que es un sistema dinámico) puede ser garantizada con requisitos relativamente débiles. Sin embargo, el problema de hallar fórmulas explícitas (al menos hasta cierto punto) para estas soluciones no está resuelto en general. En este punto surgen los criterios de solubilidad exacta de sistemas dinámicos. De manera cualitativa puede decirse que un criterio de solubilidad exacta "pide" alguna información sobre el sistema, y a partir de ella "provee" un procedimiento con el que pueden construirse sus trayectorias. Es decir, un criterio de solubilidad exacta resuelve el problema de encontrar una expresión de las soluciones del sistema *si se conoce la información requerida*.

En el caso particular de que el sistema dinámico sea un sistema hamiltoniano, uno de los criterios de solubilidad exacta que existen para ellos está basado en la llamada ecuación de Hamilton-Jacobi clásica. Ésta es una ecuación en derivadas parciales para la función principal de Hamilton S, y el criterio de solubilidad exacta asociado dice que, si se conoce una familia suficientemente grande de soluciones de tal ecuación, puede construirse un cambio de coordenadas que permite encontrar fácilmente las trayectorias del sistema. Además, las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica están íntimamente relacionadas con las constantes de movimiento del sistema hamiltoniano.

Inspirándose en diversas extensiones de la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica [2] [3] [4] [5], en [1] se ha desarrollado una nueva versión de la ecuación de Hamilton-Jacobi, a la cual se le llamará de aquí en más ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada, que es aplicable no solamente a los sistemas hamiltonianos sino también a cualquier tipo de sistema dinámico. Dado el éxito que tuvo la versión clásica al generar un criterio de solubilidad exacta para sistemas hamiltonianos, resulta natural intentar utilizar la versión generalizada para buscar criterios de solubilidad exacta para sistemas dinámicos en general.

En este trabajo se busca, en primer lugar, proveer una forma cualitativa de evaluar y comparar desde un punto de vista teórico distintos criterios de solubilidad exacta potencialmente aplicables al mismo tipo de sistemas. En segundo lugar, se pretende formular y estudiar criterios de solubilidad exacta para sistemas dinámicos en general basados en la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada.

Por otra parte, casi la totalidad de las definiciones y los resultados de este escrito se presentan utilizando técnicas de álgebra lineal y análisis multivariable. Ello constituyó en sí otro de los objetivos del trabajo, ya que la mayor parte de la bibliografía sobre el tema utiliza el lenguaje (en principio menos accesible) de la geometría diferencial. Ésto provoca, sin embargo, que algunas de las demostraciones involucradas deban ser omitidas o tratadas sin una rigurosidad completa.

Aclaraciones preliminares y notación

Antes de comenzar con los contenidos de este escrito, es importante realizar algunas aclaraciones. En primer lugar, el estudio llevado adelante en este trabajo se limita exclusivamente a las funciones de clase C^∞ (también llamadas funciones suaves), es decir, funciones infinitamente derivables. Como es usual, dado un conjunto $U \subseteq \mathcal{R}^r$, se denotará por $C^\infty(U)$ al conjunto de las funciones suaves en U.

Además, por simplicidad, muchas veces se utilizarán notaciones matriciales simplificadas que se aclaran a continuación.

- Dada una función $F : Q \to I$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$,$I \subseteq \mathcal{R}$, se escribirá indistintamente $\frac{\partial F}{\partial q}(q)$ o $\nabla F(q)$, es decir,

$$(\frac{\partial F}{\partial q}(q))_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(q), \quad i = 1, ..., r. \tag{1}$$

- Dada una función $F : Q \to P$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$,$P \subseteq \mathcal{R}^k$, se denotará con $DF(q)$ a su matriz diferencial, es decir,

$$(DF(q))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q), \quad i = 1, ..., k, \quad j = 1, ..., r \tag{2}$$

- Por último, dada una función $F : Q \times \mathcal{R}^r \to I$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$,$I \subseteq \mathcal{R}$, se define su matriz de derivadas segundas $\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}$ de modo que

$$(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(q, p))_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j}(q, p), \quad i, j = 1, ..., r. \tag{3}$$

Capítulo 1

Criterios de solubilidad exacta de sistemas dinámicos

El objetivo de este capítulo es analizar qué significa que un sistema dinámico sea exactamente soluble, decir en qué consiste un *criterio de solubilidad exacta* (equivalentemente, un *criterio de integrabilidad por cuadraturas* o *criterio de integrabilidad* a secas), y proporcionar algunas pautas que permitan analizar cualitativamente tales criterios. Se presentarán además distintos ejemplos de criterios de solubilidad exacta, algunos de ellos serán abordados con mayor precisión y profundidad en los capítulos siguientes.

1.1. Solubilidad exacta de ecuaciones diferenciales

Considérese una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \tag{1.1}$$

con $f : I \times U \to \mathcal{R}$, $I, U \subseteq \mathcal{R}$ como dato e $y : I \to U$ como incógnita. Los teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias permiten afirmar que, si f es continua en algún abierto $V \subseteq I \times U$, entonces, para cada punto $(t_0, y_0) \in V$ existe una solución que pasa por (t_0, y_0) [6]. Sin embargo, nada dicen estos teoremas acerca de la expresión de cada una de estas soluciones. El problema de encontrar una forma explícita para las soluciones no está resuelto de manera general, aunque sí pueden hallarse expresiones para ellas en algunos casos particulares.

Ejemplo 1.1. *Si la ecuación diferencial* (1.1) *es tal que la función continua f puede escribirse $f(t, y) = \frac{g(t)}{h(y)}$, entonces una solución que pasa por (t_0, y_0) viene dada por*

$$F(y(t), t) := \int_{y_0}^{y(t)} h(s)ds - \int_{t_0}^{t} g(u)du = 0. \tag{1.2}$$

Ahora bien, como consecuencia de la continuidad de f, $\frac{\partial F}{\partial y} = h(y) \neq 0$, y por ende, el teorema de la función implícita asegura que la ecuación (1.2) puede resolverse unívocamente para $y(t)$.

Ejemplo 1.2. *Si la ecuación diferencial (1.1) es tal que la función continua f puede escribirse $f(t, y) = g(t)y + h(t)$, entonces una solución que pasa por (t_0, y_0) viene dada por*

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} g(u)du}[y_0 + \int_{t_0}^{t} h(u)\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{u} g(x)dx}\, du]. \tag{1.3}$$

En el Ejemplo 1.1, el problema de resolver la ecuación diferencial ordinaria se transformó en el de resolver la ecuación algebraica (1.2) (en el caso del Ejemplo 1.2 puede pensarse que ocurre lo mismo, solo que allí tal ecuación algebraica es trivial). En la práctica, ésto suele ser lo mejor que se puede hacer a la hora de resolver una de estas ecuaciones. En tal caso, se dice que la ecuación diferencial es **exactamente soluble**, ya que no queda nada por integrar: la nueva ecuación no involucra derivadas de la incógnita. Si la información de la ecuación algebraica está dada en términos de integrales de funciones conocidas, tal como ocurre en el Ejemplo 1.2, se dice que la ecuación diferencial es **integrable por cuadraturas**. Como este último caso es el más frecuente, se utilizarán los términos "exactamente soluble" e "integrable por cuadraturas" como sinónimos.

Considerando ahora, en lugar de una ecuación, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, si los datos que definen al sistema son funciones continuas en algún abierto, entonces puede asegurarse la existencia de soluciones pasando por cada punto de tal abierto, pero, al igual que ocurría para una única ecuación, el problema de encontrar una expresión para tales soluciones no está resuelto en general.

En este trabajo se considerará un tipo particular de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, a los que llamaremos *sistemas dinámicos*.

Definición 1.1. *Sea $U \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto.*

- *Un* ***sistema dinámico*** *en U es un campo definido en U, o sea, una función suave $X : U \to U \times \mathcal{R}^r$ tal que $X(x) = (x, \hat{X}(x)) \quad \forall x \in U$.*

- *Al espacio vectorial real formado por los campos en U, con la suma definida como $(X+Y)(x) = (x, \hat{X}(x)+\hat{Y}(x))$ y el producto por un escalar $(cX)(x) = (x, c\hat{X}(x))$, se lo denotará por $\mathfrak{X}(U)$. Asimismo, se denotará con 0 al campo idénticamente nulo, es decir, al elemento neutro de la suma en $\mathfrak{X}(U)$.*

- *Una* ***solución*** *o* ***trayectoria*** *de un sistema dinámico es una curva integral del* *campo X, es decir, una función $f : I \to U$, con $I \subseteq \mathcal{R}$, que satisface*

$$\frac{df}{dt}(t) = \hat{X}(f(t)) \quad \forall t \in I. \tag{1.4}$$

Nota 1.1. *Como es usual, de aquí en adelante se identificará a un sistema dinámico con su sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado.*

Definición 1.2. *Dado un campo X en U, se dice que una función $f : U \to \mathcal{R}$ es una* ***constante de movimiento*** *o* ***integral primera*** *de X si*

$$\hat{X}_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0. \tag{1.5}$$

Para esta ecuación se adoptó la convención de suma sobre índices repetidos y se la mantendrá por lo que resta del escrito.

Nota 1.2. *Es posible mostrar que la Definición 1.2 coincide con la definición usual de constante de movimiento, es decir, una cantidad que se mantiene constante a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico.*

Definición 1.3. *Sea $U \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto.*

- *Dados X e Y dos campos en U, su* ***corchete de Lie*** *es otro campo en U denotado por $[X, Y]$ tal que*

$$\widehat{[X,Y]}_i(x) = \hat{X}_j(x)\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_j}(x) - \hat{Y}_j(x)\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial x_j}(x), \quad i = 1, ..., r. \tag{1.6}$$

- *Se dice que dos campos X e Y en U conmutan si su corchete de Lie se anula en todo U, es decir, $[X, Y] = 0$.*

Ejemplo 1.3. *Un* ***sistema hamiltoniano*** *es un sistema dinámico definido en $U = Q \times \mathcal{R}^r$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, caracterizado por una función llamada hamiltoniano $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ y cuyo campo es la aplicación $X_H : Q \times \mathcal{R}^r \to Q \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^r$ tal que $X_H(q,p) = (q, p, \frac{\partial H}{\partial p}(q,p), -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p))$, conocido como* ***campo hamiltoniano****. Las ecuaciones que definen las trayectorias del sistema hamiltoniano son conocidas como las* ***ecuaciones de Hamilton****, y se escriben:*

$$\frac{dq_i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad i = 1, ..., r; \tag{1.7}$$

$$\frac{dp_j}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t), p(t)), \quad j = 1, ..., r. \tag{1.8}$$

Definición 1.4. *En el contexto de este trabajo, por analogía con lo presentado para ecuaciones diferenciales ordinarias, se dirá que un sistema dinámico es* ***exactamente soluble*** *o* ***integrable por cuadraturas*** *cuando sea posible transformar las ecuaciones diferenciales del sistema 1.4 en ecuaciones algebraicas con igual conjunto de soluciones.*

Nota 1.3. *Es importante resaltar en este punto que lo que se requiere es tener una fórmula* ***explícita*** *para las funciones $f(t)$ de la ecuación (1.4) a menos de cuadraturas, es decir, inversas e integrales de funciones conocidas; no basta con saber que* ***existen*** *funciones que cumplan con tal ecuación.*

Ejemplo 1.4. *Un sistema dinámico lineal es aquel que está definido en $U = \mathcal{R}^r$ por un campo con $\hat{X}(x) = Ax + g$, es decir, un sistema cuyas trayectorias satisfacen la ecuación*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g, \tag{1.9}$$

con $A \in Mat(\mathcal{R}, r)$ y $g \in \mathcal{R}^r$, donde por $Mat(\mathcal{R}, r)$ se denota el espacio de matrices con coeficientes reales de dimensión $r \times r$.

Es sabido que este tipo de sistemas tiene una solución única que pasa por cada punto $(t_0, x_0) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^r$ de la forma [6]

$$f(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\, x_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-u)}\, du\right) g; \tag{1.10}$$

donde las matrices $\mathrm{e}^{A(t-t_0)}$ y $\mathrm{e}^{A(t-u)}$ pueden encontrarse explícitamente si se conoce la base de Jordan y la forma normal de Jordan para la matriz A.

Para el sistema lineal presentado en el ejemplo anterior ocurre algo similar al caso de la ecuación diferencial ordinaria del Ejemplo 1.1. Ahora, el problema de resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema dinámico se transformó en el de resolver ecuaciones algebraicas para encontrar la forma normal de Jordan y la base de Jordan (como por ejemplo la ecuación de autovalores, $det(c\mathcal{I}_{r\times r} - A) = 0$, con $\mathcal{I}_{r\times r}$ la matriz identidad de $r \times r$), y luego resolver las integrales involucradas en la ecuación (1.10). Así, puede decirse que los sistemas dinámicos lineales son integrables por cuadraturas.

1.2. Criterios de solubilidad exacta

Más allá de los ejemplos concretos mencionados anteriormente, es válido preguntarse, ¿cuándo puede asegurarse que un sistema dinámico es exactamente soluble?; o más específicamente, dado un sistema dinámico concreto, ¿qué tipo de información sobre él se necesita conocer para poder asegurar su solubilidad exacta? Es aquí cuando surgen los criterios de solubilidad exacta de los sistemas dinámicos.

Un tal criterio suele presentarse como un teorema, en el que se enuncia:

- Como *hipótesis* una subclase de sistemas dinámicos y cierta *información* sobre el sistema que debe conocerse.
- Como *tesis* la integrabilidad por cuadraturas del sistema dinámico en cuestión.
- Como *demostración* el procedimiento con el cual, a partir de la información sobre el sistema requerida en la hipótesis, se construyen sus trayectorias.

Vale mencionar que suele hacerse referencia a un criterio a través de sus hipótesis solamente.

A continuación se presentarán distintos criterios de solubilidad exacta para sistemas dinámicos. Los primeros criterios se aplican a sistemas hamiltonianos. Para enunciarlos, es necesario antes introducir algunos conceptos relacionados al *corchete de Poisson* y a las constantes de movimiento de estos sistemas.

Definición 1.5. *Sean $f, g : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ dos funciones dadas. El corchete de Poisson entre f y g es la función $\{f, g\} : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ tal que*

$$\{f,g\}(q,p) = \frac{\partial f}{\partial q_i}(q,p)\frac{\partial g}{\partial p_i}(q,p) - \frac{\partial f}{\partial p_i}(q,p)\frac{\partial g}{\partial q_i}(q,p). \tag{1.11}$$

Es importante resaltar que para cualquier función $f : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ evaluada sobre una trayectoria del sistema hamiltoniano $(q(t), p(t))$ vale que [7]

$$\frac{df}{dt}(q(t),p(t)) = \{f, H\}(q(t),p(t)). \tag{1.12}$$

Definición 1.6. *Se dice que dos funciones $f, g : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ están en* ***involución*** *si $\{f, g\} = 0$.*

En particular, si una tal función f está en involución con el hamiltoniano, es inmediato ver que será una constante de movimiento del sistema.

Ahora sí, se presentan algunos criterios de solubilidad exacta para sistemas hamiltonianos.

Ejemplo 1.5. *El teorema de Liouville-Arnold o criterio de integrabilidad conmutativa se enuncia de la siguiente manera:*

Para un sistema hamiltoniano definido en un espacio de fases $Q \times \mathcal{R}^r$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, y por un hamiltoniano $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$, si se conocen funciones suaves $f_i : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}, \quad i = 1, ..., r$, tales que:

- *el rango de la matriz jacobiana de* $f = (f_1, ..., f_r)$ *es* r*, o equivalentemente, el conjunto* $\{\nabla f_i(q,p)\}_{i=1,...,r}$ *es linealmente independiente* $\forall (q,p) \in Q \times \mathcal{R}^r$*,*
- *las funciones* f_i *son constantes de movimiento del sistema,*
- *las funciones* f_i *están en involución entre sí, es decir,*

$$\{f_i, f_j\} = 0, \quad i,j = 1,...,r, \tag{1.13}$$

entonces el sistema hamiltoniano es integrable por cuadraturas. En tal caso, se dice que el sistema es integrable conmutativo.

En la hipótesis del criterio se requiere como subclase que el sistema sea hamiltoniano; como información, se requiere conocer funciones f_i *que sean suaves y que cumplan las tres condiciones mencionadas. La construcción de las soluciones que sirve de demostración al teorema utiliza a su vez la demostración del Teorema de Lie sobre superficies de nivel (ver Apéndice A).*

Ejemplo 1.6. *El teorema de Mischenko-Fomenko o criterio de integrabilidad no conmutativa, se enuncia de la siguiente manera:*

Para un sistema hamiltoniano definido en un espacio de fases $Q \times \mathcal{R}^r$*, con* $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ *un abierto, y por un hamiltoniano* $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$*, si se conocen funciones suaves* $F_i : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}, \quad i = 1, ..., l$*, tales que:*

- *el rango de la matriz jacobiana de* $F = (F_1, ..., F_l)$ *es* l*, o equivalentemente, el conjunto* $\{\nabla F_i(q,p)\}_{i=1,...,l}$ *es linealmente independiente* $\forall (q,p) \in Q \times \mathcal{R}^r$*,*
- *las funciones* F_i *son constantes de movimiento del sistema,*
- *la función* F *es* ***isotrópica****, es decir, la matriz con coeficientes* $\{F_i, F_j\}$ *tiene nulidad* $2r - l$*,*
- *las funciones* F_i *cumplen con la propiedad de* ***clausura****, es decir, para cada* $i, j = 1, ..., l$*, existe una función* $P_{ij} : Im(F) \to \mathcal{R}$ *tal que* $\{F_i, F_j\} = P_{ij} \circ F$*,*

entonces el sistema hamiltoniano es integrable por cuadraturas. En tal caso, se dice que el sistema es integrable no conmutativo.

En la hipótesis, nuevamente la subclase de sistemas dinámicos analizados son los sistemas hamiltonianos; la información sobre el sistema requerida son las funciones suaves F_i *cumpliendo las condiciones presentadas anteriormente. La construcción de las soluciones se hace también a partir de la demostración del Teorema de Lie sobre superficies de nivel.*

Es fácil ver que, en el caso $l = r$*, el criterio de integrabilidad no conmutativa se reduce al de integrabilidad conmutativa. Así, si un sistema hamiltoniano es integrable conmutativo, entonces también es integrable no conmutativo.*

Nota 1.4. *En los ejemplos previos, para poder asegurar la solubilidad exacta del sistema, no es estrictamente necesario que las cantidades estén definidas globalmente. Basta con que estén definidas localmente, o sea, que alrededor de cada punto de $Q \times \mathcal{R}^r$ puedan definirse funciones con las propiedades mencionadas.*

Nota 1.5. *En parte de la literatura, es posible encontrar que la definición de sistemas integrables conmutativos y no conmutativos pide únicamente la existencia global de las magnitudes $f_1, ..., f_r$ y $F_1, ..., F_l$ respectivamente. Ello se debe a que en tales trabajos se busca asegurar ciertos aspectos cualitativos y propiedades geométricas del sistema. Sin embargo, en esta tesis se requiere conocer una expresión de estas cantidades, al menos localmente. Es ésto lo que permite asegurar la solubilidad exacta del sistema.*

Ejemplo 1.7. *El criterio de integrabilidad de Hamilton-Jacobi puede enunciarse de la siguiente manera:*

Para un sistema hamiltoniano definido en un espacio de fases $Q \times \mathcal{R}^r$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, y por un hamiltoniano $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$, si se conocen funciones suaves $W : Q \times \Lambda \to \mathcal{R}$ y $E : \Lambda \to \mathcal{R}$, con $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, tales que

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, \lambda)) = E(\lambda), \tag{1.14}$$

y

$$det(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \lambda}(q, \lambda)) \neq 0 \forall (q, \lambda) \in Q \times \Lambda, \tag{1.15}$$

entonces el sistema hamiltoniano es integrable por cuadraturas.

Otra vez, la subclase de sistemas dinámicos analizados en este ejemplo son los sistemas hamiltonianos; la información requerida sobre el sistema son funciones W y E que cumplan con las ecuaciones (1.14) y (1.15). El procedimiento de construcción de las soluciones utilizado para mostrar la integrabilidad por cuadraturas será discutido en detalle en el capítulo posterior.

Para sistemas dinámicos generales se presentan a continuación algunos de los criterios de solubilidad exacta más conocidos.

Ejemplo 1.8. *Dado un sistema dinámico X^0 definido en un abierto $U \subseteq \mathcal{R}^r$, si se conocen campos $X^1, ..., X^k$ en U y funciones suaves e independientes $f_j : U \to \mathcal{R}, \quad j = 1, ..., l$, tales que:*

- $l + k = r$,
- *los campos $X^1, ..., X^k$ son linealmente independientes en U, o sea, el conjunto $\{\hat{X}^1(x), ..., \hat{X}^k(x)\}$ es linealmente independiente $\forall x \in U$,*
- *los campos $X^0, ..., X^k$ conmutan,*

- *las funciones* $f_1, ..., f_l$ *son integrales primeras de los campos* $X^0, ..., X^k$,

entonces el sistema es integrable por cuadraturas.

En este caso, no se requiere ninguna subclase de sistemas dinámicos en particular en la hipótesis, es decir, este criterio es aplicable a todo sistema dinámico. La información requerida son los campos $X^1, ..., X^k$ *y las funciones* $f_1, ..., f_l$ *con las propiedades listadas anteriormente. El procedimiento de construcción de las soluciones se realiza a partir de la demostración del Teorema de Lie sobre superficies de nivel.*

Ejemplo 1.9. *Otro criterio de integrabilidad para sistemas dinámicos generales es el siguiente:*

Dado un sistema dinámico X *definido en un abierto* $U \subseteq \mathcal{R}^r$, *si se conocen funciones suaves e independientes* $f_j : U \to \mathcal{R}, \quad j = 1, ..., r-1$ *que sean constantes de movimiento de* X, *es decir,*

$$\hat{X}_n(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) = 0, \quad j = 1, ..., r-1, \tag{1.16}$$

entonces el sistema es integrable por cuadraturas.

Al igual que en el ejemplo anterior, el criterio es aplicable a cualquier sistema dinámico. La información que se requiere conocer son las funciones $f_1, ..., f_{r-1}$ *cumpliendo con la ecuación* (1.16).

Para construir las trayectorias, nótese que se puede construir a través de manipulaciones algebraicas una función $f_r : U \to \mathcal{R}$ *tal que el conjunto* $\{f_1, ..., f_r\}$ *es independiente en todo* U. *Así, puede definirse un nuevo sistema de coordenadas (curvilíneas) para* U *dado por*

$$y_j = f_j(x), \quad j = 1, ..., r. \tag{1.17}$$

En estas coordenadas, las ecuaciones del sistema dinámico quedan (alrededor de cada punto no crítico del sistema, es decir, $X(x) \neq 0$*)*

$$\frac{dy_j}{dt}(t) = 0, \quad j = 1, ..., r-1 \tag{1.18}$$

y

$$\frac{dy_r}{dt}(t) = g(y_1(t), ..., y_r(t)), \tag{1.19}$$

para alguna función g *que puede construirse. Ahora bien, las ecuaciones* (1.18) *dan* $y_j(t)$ *constante para* $j = 1, ..., r-1$, *y por lo tanto, la ecuación* (1.19) *adopta la forma del Ejemplo 1.2, con lo que puede integrarse por cuadraturas. Con todo lo anterior, se construyeron las trayectorias del sistema dinámico y se mostró su solubilidad exacta.*

Nota 1.6. *Es posible mostrar que también vale la implicación recíproca al teorema del Ejemplo 1.9, o más explícitamente:*

Sea X un sistema dinámico definido en un abierto U, si tal sistema es integrable por cuadraturas (es decir, se conocen sus trayectorias a menos de cuadraturas), entonces pueden construirse (a menos de cuadraturas) funciones suaves e independientes $f_j : U \to \mathcal{R} \quad j = 1, ..., r-1$ que sean integrales primeras de X. Este resultado es conocido como Teorema de rectificación de un campo [8].

Debe destacarse el hecho de que las magnitudes requeridas como información sobre el sistema por los criterios de arriba deben conocese de manera explícita (a menos de cuadraturas); no alcanza con poder asegurar su existencia, ya que dichas magnitudes son utilizadas en el proceso de construcción de la expresión de las trayectorias.

1.3. Análisis de criterios de solubilidad exacta

Dado un criterio de solubilidad exacta para sistemas dinámicos, vale preguntarse cómo se puede evaluar la potencial utilidad del mismo. A continuación se presentan una serie de cualidades que pdría considerarse deseable que un criterio tenga.

1) **Plausible.** En primer lugar, un aspecto a considerar es la existencia de las magnitudes que el criterio requiere conocer. Se dirá en tal caso que el criterio es plausible. Si bien, como se dijo anteriormente, no alcanza con poder asegurar la existencia de tales magnitudes, sino que deben tenerse expresiones explícitas para ellas, el poder hacerlo es un buen punto de partida para intentar buscar las expresiones de las mismas.

2) **Maximal.** En segundo lugar, supóngase que se conocen las trayectorias de un dado sistema dinámico. Sería deseable que en tal caso, el sistema cumpla el criterio de solubilidad exacta en cuestión. Es decir, sería bueno poder asegurar que si un sistema (dentro de la subclase de sistemas dinámicos alcanzada por el criterio) es exactamente soluble, entonces el sistema cumple con el criterio. Se dirá en tal caso que el criterio es maximal, ya que ello diría que contiene a todos los sistemas integrables por cuadraturas de la subclase.

3) **Minimal.** En tercer lugar, es razonable esperar que la información requerida por el criterio sea la mínima posible. Es decir, que las condiciones sobre las magnitudes que deben conocerse no puedan debilitarse sin dejar de asegurar la integrabilidad por cuadraturas del sistema dinámico. Se dirá en tal caso que el criterio es minimal, ya que de lo contrario podría enunciarse un nuevo criterio dejando de lado las condiciones prescindibles.

Pueden utilizarse los puntos presentados anteriormente para evaluar los criterios de integrabilidad conmutativa y no conmutativa (ver Ejemplos 1.5 y 1.6). En este sentido, es posible mostrar que, alrededor de todos los puntos no críticos del sistema hamiltoniano (es decir, los puntos donde $\hat{X}_H(x)$ no se anula) existen funciones que satisfacen las condiciones requeridas por dichos criterios (es una consecuencia inmediata del Teorema de Caratheodory-Jacobi-Lie [9]), con lo que ambos son plausibles. También, conocidas las trayectorias de un sistema hamiltoniano, es posible construir (a menos de cuadraturas) funciones que cumplan el criterio de integrabilidad no conmutativa. Ello se debe a que, según la Nota 1.6, podrán construirse $2r-1$ constantes de movimiento independientes, que, por motivos dimensionales, cumplirán automáticamente las últimas dos condiciones del Ejemplo 1.6, y por lo tanto tal criterio es maximal. Por otra parte, no se tiene conocimiento de un resultado que permita realizar una construcción análoga para el criterio de integrabilidad conmutativa. En cuanto al tercer punto, es posible mostrar que la propiedad de clausura no es necesaria en el criterio de integrabilidad no conmutativa para asegurar la solubilidad exacta del sistema hamiltoniano [10], con lo que este no es minimal.

Nota 1.7. *El hecho de que, en el criterio de integrabilidad no conmutativa, la propiedad de clausura pueda dejarse de lado y aún así asegurar la integrabilidad del sistema da lugar a un nuevo criterio de solubilidad exacta, en cuya hipótesis se requiere que el sistema sea hamiltoniano y que las funciones F_i cumplan únicamente las primeras tres condiciones mostradas en el Ejemplo 1.6. De aquí en adelante, se resguradará el término "integrable no conmutativo" para los sistemas que cumplen con este nuevo criterio.*

La propiedad de maximalidad puede expresarse en términos de las siguientes nociones de **equivalencia** de criterios y de **orden parcial** entre criterios.

Definición 1.7. *Dados dos criterios de solubilidad exacta A y B, se dirá que tales criterios son equivalentes si las hipótesis del criterio A se cumplen si y sólo si se cumplen también las del criterio B. Se escribirá en tal caso $A \simeq B$*

Considérense ahora las clases de criterios definidas por la relación de equivalencia anterior.

Definición 1.8. *Se dirá que una clase de criterios representada por un criterio A está contenida en otra clase representada por un criterio B si, cada vez que se cumplen las hipótesis requeridas por la clase de criterios A, también se cumplen las de B. Se escribirá en tal caso $[A] \subseteq [B]$ o simplemente $A \subseteq B$ (ya que se sobreentiende que la relación de orden se aplica a las clases de los criterios A y B).*

Nota 1.8. *Es inmediato ver de lo discutido en el Ejemplo 1.6 que el criterio de integrabilidad no conmutativa contiene al de integrabilidad conmutativa.*

Nota 1.9. *Si un criterio de solubilidad exacta A es maximal, entonces, si se cumplen las hipótesis de otro criterio B, podrán construirse las trayectorias del sistema, y a partir de ellas la información requerida por la hipótesis del criterio A, con lo que $B \subseteq A$. De este modo, un criterio de solubilidad exacta maximal contiene a todos los demás criterios.*

El punto 2) tratado en esta sección pone de manifiesto un hecho crucial a la hora de estudiar criterios de solubilidad exacta de sistemas dinámicos: dos criterios diferentes no necesariamente darán lugar a sistemas dinámicos exactamente solubles distintos. Por el contrario, todos los criterios maximales darán lugar a exactamente los mismos sistemas dinámicos integrables. Para clarificar lo anterior, consíderese que se tienen dos criterios de solubilidad exacta maximales A y B. Si se encuentra un sistema dinámico que satisface el criterio A, podrán construirse sus trayectorias, y a partir de ellas la información requerida por el criterio B (pues el criterio B es maximal), con lo que el sistema también satisfará el criterio B. Análogamente, si se encuentra un sistema dinámico que satisface el criterio B, podrán construirse sus trayectorias, y a partir de ellas la información requerida por el criterio A (pues el criterio A es maximal), con lo que el sistema también satisfará el criterio A. Así, dos criterios maximales serán equivalentes y darán lugar a los mismos sistemas dinámicos integrables.

Ahora bien, es necesario resaltar el hecho de que, por más que un nuevo criterio de solubilidad exacta no dé lugar a nuevos sistemas integrables, ello no quiere decir que no tenga utilidad alguna, ya que aporta una herramienta diferente con la que analizar la integrabilidad de los sistemas de la subclase a la que refiere.

Para clarificar lo anterior, puede considerarse el siguiente ejemplo. Supóngase que se conocen los criterios de solubilidad exacta presentados en los Ejemplos 1.5 y 1.9, pero no se conoce el teorema de Mischenko-Fomenko. Luego, si se tiene un sistema hamiltoniano para el cual se conocen funciones $F_1, ..., F_l$ que cumplen con las condiciones impuestas en el Ejemplo 1.6, no se podrá asegurar en general su integrabilidad por cuadraturas, ya que no se sabe construir a partir de las funciones $F_1, ..., F_l$ una clase de funciones que cumpla con las condiciones del Ejemplo 1.5 o 1.9.

Capítulo 2

La ecuación de Hamilton-Jacobi clásica

El objetivo de este capítulo es estudiar con mayor detenimiento el criterio de integrabilidad de sistemas hamiltonianos que provee la ecuación de Hamilton-Jacobi, que permitirá más adelante introducir criterios relacionados para sistemas dinámicos más generales. En particular, se presentará la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica, y se introducirá el concepto de solución completa de tal ecuación para relacionarlo con la solubilidad exacta del sistema hamiltoniano.

2.1. Soluciones parciales

Para un sistema hamiltoniano caracterizado por una función $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica es una ecuación en derivadas parciales para $S : Q \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, conocida como *función principal de Hamilton*, y se escribe [7]:

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,t) = 0. \tag{2.1}$$

Dado que el hamiltoniano del sistema no depende explícitamente del tiempo, puede proponerse $S(q,t) = -Et + W(q)$, con E una constante independiente del tiempo y las coordenadas, y $W : Q \to \mathcal{R}$ una función, llamada *función característica de Hamilton*, que debe satisfacer la ecuación

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q)) = E. \tag{2.2}$$

Como la cantidad E es independiente de las coordenadas, la ecuación para W equivale a que las derivadas del primer miembro de la ecuación (2.2) se anulen, es decir, equivale al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q)) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q))\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q)) = 0, \quad i = 1, .., r. \tag{2.3}$$

Conocer una solución de la ecuación (2.2) permite reducir a la mitad el número de ecuaciones a resolver para encontrar las trayectorias del sistema según se enuncia en el siguiente resultado [7].

Proposición 2.1. *Sea $W : Q \to \mathcal{R}$ una solución de la ecuación (2.2). Entonces,*

$$(q(t), \frac{\partial W}{\partial q}(q(t)))$$

es solución de las ecuaciones de Hamilton (1.7) y (1.8) si y sólo si $q(t)$ es solución de

$$\frac{dq_i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), \frac{\partial W}{\partial q}(q(t))), \quad i = 1, ..., r. \tag{2.4}$$

2.2. Criterio de integrabilidad por cuadraturas de Hamilton-Jacobi clásico

La ecuación de Hamilton-Jacobi clásica permite introducir un criterio de integrabilidad por cuadraturas para sistemas hamiltonianos. Para poder enunciarlo, deben estudiarse en primer lugar las *soluciones completas* de dicha ecuación.

Definición 2.1. *Una familia de soluciones $\{W^\lambda\}$ de la ecuación (2.2),*

$$H(q, \frac{\partial W^\lambda}{\partial q}(q)) = E(\lambda), \tag{2.5}$$

tal que

$$det(\frac{\partial^2 W^\lambda}{\partial q \partial \lambda}(q)) \neq 0, \quad \forall q \in Q, \tag{2.6}$$

es una solución completa, con $E : \Lambda \to \mathcal{R}$, $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto.

Con una tal familia de soluciones, puede introducirse un cambio de coordenadas que simplifica notablemente las ecuaciones de movimiento del sistema. Para ello, a partir de las coordenadas originales (q, p) se define un nuevo conjunto de coordenadas $(Q, \lambda = P)$ con las relaciones

$$Q_i = \frac{\partial W^\lambda}{\partial \lambda_i}(q), \quad i = 1, ..., r, \tag{2.7}$$

$$p_i = \frac{\partial W^\lambda}{\partial q_i}(q), \quad i = 1, ..., r. \tag{2.8}$$

Se define también un hamiltoniano $K : \mathcal{R}^r \times \Lambda \to \mathcal{R}/$

$$K(Q, P) = E(P). \tag{2.9}$$

Proposición 2.2. *Una función $(q(t), p(t))$ es solución del sistema hamiltoniano asociado a H si y sólo si $(Q(t), P(t))$ es solución del sistema asociado a K, con las coordenadas (q, p) relacionadas con las coordenadas (Q, P) mediante las ecuaciones (2.7) y (2.8).*

La forma simple del hamiltoniano K, en particular, su independencia de Q, hace que las trayectorias $(Q(t), P(t))$ de su sistema asociado tengan una forma sencilla,

$$Q_i(t) = \frac{\partial E}{\partial \lambda_i}(\lambda)t + \eta_i, \quad i = 1, ..., r, \tag{2.10}$$

$$P_i(t) = \lambda_i, \quad i = 1, ..., r; \tag{2.11}$$

con η_i constantes.

De este modo, combinando las ecuaciones (2.7) y (2.10) con la Proposición 2.1, se obtiene el siguiente resultado [7]:

Proposición 2.3. *Sea $\{W^\lambda\}$ una solución completa (solución de las ecuaciones (2.5) y (2.6)) de un sistema caracterizado por un hamiltoniano H. En estas condiciones, todas las trayectorias del sistema son de la forma $(q(t), \frac{\partial W^\lambda}{\partial q}(q(t)))$, con $q(t)$ solución de*

$$\frac{\partial W^\lambda}{\partial \lambda_i}(q(t)) = \frac{\partial E}{\partial \lambda_i}(\lambda)t + \eta_i, \quad i = 1, ..., r, \tag{2.12}$$

para η_i constantes.

Es importante notar que las ecuaciones (2.12) son ecuaciones algebraicas. Con ello, una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi permite encontrar todas las trayectorias del sistema sin resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ya que $q(t)$ puede despejarse de la ecuación (2.12) gracias a la condición impuesta en la ecuación (2.6)), por lo que este desarrollo sirve para enunciar el siguiente teorema, cuyas hipótesis dan lugar al criterio de integrabilidad de Hamilton-Jacobi clásico.

Teorema 2.1. *Para un sistema hamiltoniano definido por un hamiltoniano H, si se conocen funciones suaves $W : Q \times \Lambda \to \mathcal{R}$ y $E : \Lambda \to \mathcal{R}$, con $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, tales que*

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, \lambda)) = E(\lambda), \tag{2.13}$$

$$det(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \lambda}(q, \lambda)) \neq 0, \quad \forall q \in Q, \tag{2.14}$$

entonces el sistema es integrable por cuadraturas.

En cuanto a la evaluación de este criterio de solubilidad exacta en el sentido de la Sección 1.3, puede asegurarse que el mismo es plausible, es decir, es posible mostrar la existencia de soluciones completas locales de la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica [11].

En relación a la comparación con otros criterios, también tratada en la Sección 1.3, pueden enunciarse los siguientes resultados [12].

Proposición 2.4. *Dado un sistema hamiltoniano caracterizado por $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$, si se tiene una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, entonces, pueden encontrarse r constantes de movimiento independientes y en involución, es decir, el sistema es integrable conmutativo.*

Proposición 2.5. *Dado un sistema hamiltoniano caracterizado por $H : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$, si se tienen r constantes de movimiento $f_1, ..., f_r$ en involución y verticalmente independientes, es decir, tales que el conjunto*

$$\{(0, ..., 0, \frac{\partial f_i}{\partial p}(q, p))\}_{i=1,...,r} \subset \mathcal{R}^{2r} \tag{2.15}$$

es linealmente independiente en todo punto, entonces puede encontrarse una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi resolviendo un sistema de ecuaciones algebraicas.

Estos últimos dos resultados permiten comparar los criterios de Hamilton-Jacobi clásico y el de integrabilidad conmutativa en términos de la relación de orden entre criterios. De la Proposición 2.4, resulta evidente que el criterio de integrabilidad conmutativa contiene al de Hamilton-Jacobi clásico. Sin embargo, de la Proposición 2.5, se extrae que la situación recíproca no se da, ya que no alcanza con tener r constantes de movimiento independientes y en involución para construir una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, sino que es necesario también que tales constantes sean *verticalmente* independientes. De todo lo anterior se desprende el siguiente resultado.

Proposición 2.6. *El criterio de integrabilidad de Hamilton-Jacobi clásico está contenido en el criterio de integrabilidad conmutativa.*

Capítulo 3

La ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada

En este capítulo se estudia una nueva versión de la ecuación de Hamilton-Jacobi, llamada ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada. Se comienza introduciendo una serie de conceptos necesarios para comprender esta nueva versión de la ecuación, como los de espacio tangente y espacio cotangente, y algunas funciones particulares, como las fibraciones y las secciones de una fibración. Luego, se presenta la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada, y finalmente se relacionan las soluciones completas de la ecuación con las integrales primeras del sistema.

3.1. Conceptos matemáticos preliminares

Para escribir la mayor parte de los resultados que se presentan en este capítulo es conveniente introducir los conceptos de *espacio tangente* y *espacio cotangente*, *aplicación tangente* a una aplicación dada, *fibración* y *sección* de una fibración dada.

Definición 3.1. *Sea $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un conjunto abierto. El* ***espacio tangente*** *a Q se denota TQ y es $TQ := Q \times \mathcal{R}^r$. El* ***espacio cotangente*** *a Q se denota T^*Q y es $T^*Q := Q \times (\mathcal{R}^r)^*$, donde se utiliza * para indicar el espacio dual a un espacio vectorial dado.*

Nota 3.1. *En el contexto de este trabajo, se identifica a un espacio vectorial con su espacio dual, con lo que se considerará que $T^*Q = Q \times \mathcal{R}^r$. Así, se utilizará en ocasiones $Q \times \mathcal{R}^r$ en vez de TQ o T^*Q.*

Nota 3.2. *Es importante destacar que, para poder identificar a un espacio vectorial con su dual, debe haber un producto interno definido en él. En este trabajo se hará tal identificación a través del producto interno canónico en $\mathcal{R}^r$.*

Definición 3.2. *Sea $S \subseteq \mathcal{R}^r$ un subconjunto cualquiera y $s \in S$ un punto arbitrario. Se denota Γ_s al conjunto de todas las curvas contenidas en S que pasan por s, es decir, al conjunto de todas las funciones $\gamma : I_\gamma \to S$ tales que $\exists t_s \in I_\gamma / \gamma(t_s) = s$, con $I_\gamma \subseteq \mathcal{R}$. Se define el* ***vector tangente*** *a una tal curva en el punto s como $\frac{d\gamma}{dt}(t)|_{t=t_s}$. El espacio tangente al conjunto S en el punto s se denota T_sS y se define como el espacio generado por los vectores tangentes a las curvas de Γ_s en el punto s, es decir, el conjunto $< \{\frac{d\gamma}{dt}(t)|_{t=t_s} / \gamma \in \Gamma_s\} >$. El* ***espacio tangente*** *al conjunto S se denota TS y se define como $TS = \bigcup_{s \in S} T_sS$. El* ***espacio cotangente*** *al conjunto S se denota T^*S y se define como $T^*S = \bigcup_{s \in S} (T_sS)^*$*

Nota 3.3. *En la Definición 3.2 suele requerirse que el subconjunto S sea suave, es decir, que esté definido por una ecuación $F(x) = 0$, con $F : \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}^k$ suave. En este trabajo se considerará de aquí en más que todos los subconjuntos son suaves. Es fácil ver que, en estas condiciones, la dimensión de T_sS es k, $\forall s \in S$. Se dice en tal caso que el subconjunto S tiene dimensión k.*

Nota 3.4. *Es necesario notar que, en el caso de que el subconjunto S de la Definición 3.2 sea un abierto de $\mathcal{R}^r$, las definiciones de espacio tangente y espacio cotangente a S dadas por 3.2 coinciden en esencia con las definiciones dadas por 3.1.*

Nota 3.5. *De la Definición 3.1, es posible notar que los elementos η de T^*Q pueden interpretarse alternativamente como funciones suaves $\eta' : TQ \to C^\infty(U)$ tales que*

$$(\eta'(X))(q) = (\hat{\eta}(q))^t \hat{X}(q) \quad \forall q \in Q, X \in \mathfrak{X}(U). \tag{3.1}$$

Definición 3.3. *Dada una función $F : Q \to P$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ y $P \subseteq \mathcal{R}^k$ abiertos, la* ***aplicación tangente*** *a F se denota F_* y es $F_* : Q \times \mathcal{R}^r \to P \times \mathcal{R}^k / F_*(x, v) = (F(x), DF(x)v)$.*

Definición 3.4. *Sean $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ y $P \subseteq \mathcal{R}^k$ abiertos. Se dice que una función $\Pi : Q \to P$ es una* ***fibración*** *si es sobreyectiva y tiene aplicación tangente sobreyectiva. Una función $\sigma : P \to Q$ es una* ***sección*** *de la fibración Π si es una inversa a derecha de Π, es decir, si $\Pi \circ \sigma = id_P$.*

Ejemplo 3.1. *Se llama proyección canónica del espacio cotangente a la función $\pi : T^*Q \to Q / \pi(q, p) = q$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto. Su aplicación tangente será una función $\pi_* : T(T^*Q) \to TQ$; según la Definición 3.3 se tiene que $\pi_*(q, p, u) = (\pi(q, p), D\pi(q, p)u)$. De este modo, debe calcularse la matriz $D\pi(q, p)$ (donde x representa a todas las coordenadas del dominio, es decir, a q y p), se obtiene $D\pi(q, p) = (\,\mathcal{I}_{r\times r}\ \mathcal{O}_{r\times r}\,)$, con $\mathcal{I}_{r\times r}$ y $\mathcal{O}_{r\times r}$ la matriz identidad y la matriz nula de $r \times r$, respectivamente. Ahora, se considera*

$u = (v, w)$, donde v recoge las primeras r componentes de u y w las r siguientes. Con ello, se obtiene que $D\pi(q,p)(v,w) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{r\times r} & \mathcal{O}_{r\times r} \end{pmatrix} (v,w)^t = v$, con el superíndice t indicando la transposición de matrices usual. Finalmente, resulta que $\pi_*(q,p,v,w) = (q,v)$.

Es sencillo ver de esta última expresión que la proyección canónica es efectivamente una fibración según la Definición 3.4.

Ejemplo 3.2. *Las secciones de la proyección canónica son funciones de la forma $\sigma : Q \to T^*Q/\sigma(q) = (q, \hat{\sigma}(q))$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto. La aplicación tangente a una tal sección será una función $\sigma_* : TQ \to T(T^*Q)$. De manera similar a lo que se hizo en el Ejemplo 3.1, puede dividirse la imagen de σ_* en componentes de dimensión r. Así, por la Definición 3.3, se tiene que $\sigma_*(q,v) = (\sigma(q), D\sigma(q)v)$. Por otro lado, como $D\sigma(q) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{r\times r} \\ D\hat{\sigma}(q) \end{pmatrix}$, donde $\mathcal{I}_{r\times r}$ y $D\hat{\sigma}(q)$ son matrices de $r \times r$, resulta que $\sigma_*(q,v) = (q, \hat{\sigma}(q), v, D\hat{\sigma}(q)v)$.*

Ejemplo 3.3. *Se llama proyección canónica del espacio tangente a la función $\tau : TQ \to Q/\tau(q,p) = q$, con $Q \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto. Puede verse que τ es una fibración de manera completamente análoga al Ejemplo 3.1.*

Nota 3.6. *Es inmediato notar del ejemplo anterior y de la Definición 1.1 que un campo en Q es una sección de la proyección canónica del espacio tangente τ.*

Nota 3.7. *A partir de aquí, se reservará el término proyección canónica para hacer referencia a la proyección canónica del espacio cotangente π definida en el Ejemplo 3.1. Cuando se quiera hacer referencia a la proyección canónica del espacio tangente τ, se lo indicará explícitamente.*

Definición 3.5. *Sea X un campo en Q. Se dice que un subconjunto $S \subseteq Q$ es X-invariante si $Im(X|_S) \subseteq TS$. Alternativamente, se dirá que el campo X es tangente al subconjunto S, o que el subconjunto S es tangente al campo X.*

Nota 3.8. *La condición de que un campo X sea tangente a un subconjunto S puede escribirse en términos de la función F que define al subconjunto (ver Nota 3.3) como*

$$\hat{X}_i(x)\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \forall x \in S, j = 1, ..., k. \tag{3.2}$$

Con todas las definiciones anteriores, puede presentarse ahora un resultado importante asociado a los conjuntos X-invariantes.

Proposición 3.1. *Sea X un sistema dinámico en Q, $\gamma(t)$ una trayectoria de X, $S \subseteq Q$ un conjunto cerrado X-invariante. Luego, si $Im(\gamma) \bigcap S$ es no vacío, entonces $Im(\gamma) \subseteq S$.*

3.2. La ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada

3.2.1. Soluciones parciales

La ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada puede motivarse reescribiendo la versión clásica en términos del campo hamiltoniano y la proyección canónica.

Para ello, en primer lugar puede notarse que, definiendo $\hat{\sigma}: Q \to \mathcal{R}^r$ como $\hat{\sigma}_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$, la ecuación (2.3) queda

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, \hat{\sigma}(q)) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, \hat{\sigma}(q)) \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial q_j}(q) = 0, \quad i = 1, ..., r, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial q_j}(q) - \frac{\partial \hat{\sigma}_j}{\partial q_i}(q) = 0, \quad i, j = 1, ..., r. \tag{3.4}$$

Definiendo una nueva función $\sigma : Q \to Q \times \mathcal{R}^r$ tal que $\sigma(q) = (q, \hat{\sigma}(q))$, la ecuación (3.3) puede reescribirse como

$$\frac{\partial (H \circ \sigma)}{\partial q}(q) = 0. \tag{3.5}$$

Con todo lo anterior, puede enunciarse el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Sea π la proyección canónica definida en el Ejemplo 3.1. Entonces, $\hat{\sigma}(q)$ cumple con la ecuación (3.3) para un hamiltoniano H sí y sólo sí la sección σ de Π dada por $\sigma(q) = (q, \hat{\sigma}(q))$ cumple la ecuación*

$$\sigma_* \circ \pi_* \circ X_H \circ \sigma = X_H \circ \sigma, \tag{3.6}$$

donde X_H es el campo hamiltoniano asociado a H.

Demostración. Para mostrar la equivalencia, pueden aplicarse ambos miembros de la igualdad de la ecuación (3.6) a un punto arbitrario del dominio q. Como σ es de la forma $\sigma(q) = (q, \hat{\sigma}(q))$, por la Definición 1.3 se tiene que

$$X_H \circ \sigma(q) = (q, \hat{\sigma}(q), \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q)), -\frac{\partial H}{\partial q}(q, \hat{\sigma}(q))). \tag{3.7}$$

Con ello, según el Ejemplo 3.1, $\pi_* \circ X_H \circ \sigma(q) = (q, \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q)))$. Por último, de lo calculado en el Ejemplo 3.2 se obtiene

$$\sigma_* \circ \pi_* \circ X_H \circ \sigma(q) = (q, \hat{\sigma}(q), \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q)), D\hat{\sigma}(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q))). \tag{3.8}$$

De lo anterior se extrae

$$(q, \hat{\sigma}(q), \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q)), -\frac{\partial H}{\partial q}(q, \hat{\sigma}(q))) = (q, \hat{\sigma}(q), \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q)), D\hat{\sigma}(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, \hat{\sigma}(q))). \tag{3.9}$$

Puede observarse que las primeras cuatro componentes a ambos lados de la igualdad son trivialmente idénticas, con lo que la igualdad anterior se reduce a que se cumpla

$$D\hat{\sigma}(q)\frac{\partial H}{\partial p}(q,\hat{\sigma}(q)) + \frac{\partial H}{\partial q}(q,\hat{\sigma}(q)) = 0. \tag{3.10}$$

Ahora bien, el primer término del miembro izquierdo de la ecuación (3.9) puede reescribirse componente a componente como $(D\hat{\sigma}(q)\frac{\partial H}{\partial p}(q,\hat{\sigma}(q)))_i = \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial q_j}(q)\frac{\partial H}{\partial p_j}(q,\hat{\sigma}(q))$, con lo que tal ecuación puede reescribirse como $\frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial q_j}(q)\frac{\partial H}{\partial p_j}(q,\hat{\sigma}(q)) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(q,\hat{\sigma}(q)) = 0$, que es precisamente la ecuación (3.3). Con ello, se probó la equivalencia entre las ecuaciones (3.3) y (3.6). □

Nota 3.9. *Es importante destacar que la ecuación (3.6) tiene una interpretación geométrica: las secciones σ de la proyección π que son soluciones de tal ecuación tienen una imagen X_H-invariante, es decir, $Im(X_H|_{Im(\sigma)}) \subseteq TIm(\sigma)$. Así, si bien la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica (3.3) y la ecuación (3.6) son equivalentes, en esta última es evidente el significado geométrico de las soluciones.*

La interpretación geométrica del resultado anterior motiva a definir la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un campo X y una fibración Π cualesquiera.

Definición 3.6. *Sean $M \subseteq \mathcal{R}^d$ y $N \subseteq \mathcal{R}^k$ abiertos cualesquiera, sea X un campo en M y $\Pi : M \to N$ una fibración. Tener una **solución parcial** de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada es tener una sección $\sigma : N \to M$ de la fibración Π que cumpla*

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma. \tag{3.11}$$

Nota 3.10. *Definiendo la función $X^\sigma = \Pi_* \circ X \circ \sigma$, que resulta ser un campo en N, es claro que en términos de este campo la ecuación (3.11) se escribe*

$$\sigma_* \circ X^\sigma = X \circ \sigma. \tag{3.12}$$

Nota 3.11. *Sea X un sistema dinámico en un abierto cualquiera, y σ una solución parcial de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y una fibración Π cualquiera. Es útil notar que, si $n(t)$ es una trayectoria de X^σ, entonces, $\sigma(n(t))$ es a su vez una trayectoria de X, es decir, si $n(t)$ es tal que*

$$\frac{dn}{dt}(t) = \hat{X}^\sigma(n(t)), \tag{3.13}$$

entonces,

$$\frac{d\sigma}{dt}(n(t)) = \hat{X}(\sigma(n(t))). \tag{3.14}$$

Para el caso de un sistema hamiltoniano y la proyección canónica como fibración, puede verse que se reobtiene la Proposición 2.1.

3.2.2. Soluciones completas

Definición 3.7. *Sea $M \subseteq \mathcal{R}^d$ un abierto cualquiera, sea X un campo en M y $\Pi : M \to N$ una fibración, con $N \subseteq \mathcal{R}^k$ un abierto. Tener una* ***solución completa*** *de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y la fibración Π es tener un abierto $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^l$ y $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ que cumpla:*

$$\Pi \circ \Sigma = p_N \tag{3.15}$$

$$\Sigma_* \circ X^\Sigma = X \circ \Sigma \tag{3.16}$$

$$det(D\Sigma(n, \lambda)) \neq 0 \tag{3.17}$$

donde $p_N : N \times \Lambda \to N / p_N(n, \lambda) = n$, $\sigma_\lambda : N \to M / \sigma_\lambda(n) = \Sigma(n, \lambda)$, X^Σ un campo en $N \times \Lambda$ tal que $X^\Sigma(n, \lambda) = (n, \lambda, \hat{X}^\Sigma(n, \lambda))$, con $\hat{X}^\Sigma(n, \lambda) = (\hat{X}^{\sigma_\lambda}(n), 0)$. Análogamente, pueden definirse $p_\Lambda : N \times \Lambda \to \Lambda / p_\Lambda(n, \lambda) = \lambda$ y $\sigma_n : \Lambda \to M / \sigma_n(\lambda) = \Sigma(n, \lambda)$.

Nota 3.12. *La inecuación (3.17) equivale a la condición de que la función Σ sea localmente invertible, lo cual implica que necesariamente debe cumplirse $d = k + l$.*

Nota 3.13. *Puede verse que, análogamente al caso de la Nota 3.11, si $(n(t), \lambda(t))$ es una trayectoria de X^Σ, es decir,*

$$\frac{dn}{dt}(t) = \hat{X}^{\sigma_\lambda}(n(t)), \tag{3.18}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0, \tag{3.19}$$

entonces, $\Sigma(n(t), \lambda)$ es una trayectoria de X, es decir,

$$\frac{d\Sigma}{dt}(n(t), \lambda) = \hat{X}(\Sigma(n(t), \lambda)). \tag{3.20}$$

Proposición 3.3. *La ecuación (3.15) equivale a la condición de que σ_λ sea sección de la fibración Π $\forall \lambda \in \Lambda$.*

Demostración. El hecho de que que σ_λ sea sección de la fibración Π $\forall \lambda \in \Lambda$ equivale a que $\Pi \circ \sigma_\lambda = id \quad \forall \lambda \in \Lambda$, aplicado a un punto arbitrario del dominio da $\Pi \circ \sigma_\lambda(n) =$

$n \quad \forall \lambda \in \Lambda$; según la definición introducida en 3.7, ello es $\Pi \circ \Sigma(n, \lambda) = n$. Ahora bien, se tiene también que $p_N(n, \lambda) = n$, con lo que $\Pi \circ \Sigma = p_N$, que es precisamente (3.15). $\square$

Proposición 3.4. *La ecuación* (3.16) *equivale a la condición de que se cumpla la ecuación* (3.12)*, con secciones* σ_λ*,* $\forall \lambda \in \Lambda$*.*

Demostración. Puede verse de manera inmediata a partir de la definición de σ_λ introducida en la Definición 3.7 que el miembro derecho de la igualdad de la ecuación (3.16) equivale al miembro derecho de la igualdad de la ecuación (3.12) $\forall \lambda \in \Lambda$. Para analizar el miembro izquierdo de la igualdad de la ecuación (3.16), debe calcularse la aplicación tangente a Σ, que es la función $\Sigma_* : TN \times T\Lambda \to TM / \Sigma_*(n, u, \lambda, v) = (\Sigma(n, \lambda), D_n\Sigma(n, \lambda)u + D_\lambda\Sigma(n, \lambda)v)$, donde

$$(D_n\Sigma(n, \lambda))_{ij} = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial n_j}(n, \lambda), \quad i = 1, ..., d, \quad j = 1, ..., k, \tag{3.21}$$

$$(D_\lambda\Sigma(n, \lambda))_{ij} = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \lambda_j}(n, \lambda), \quad i = 1, ..., d, \quad j = 1, ..., l. \tag{3.22}$$

Se observa fácilmente que $D_n\Sigma(n, \lambda) = D\sigma_\lambda(n)$. Con ello, se obtiene que $\Sigma_* \circ X^\Sigma(n, \lambda) = \Sigma_*(n, \lambda, \hat{X}^{\sigma_\lambda}(n), 0)$, y así,

$$\Sigma_* \circ X^\Sigma(n, \lambda) = (\sigma_\lambda(n), D\sigma_\lambda(n)\hat{X}^{\sigma_\lambda}(n)). \tag{3.23}$$

Por otra parte, la aplicación tangente a σ_λ es la función $\sigma_{\lambda *} : TN \to TM / \sigma_{\lambda *}(n, v) = (\sigma_\lambda(n), D\sigma_\lambda(n)v)$, con lo que $\sigma_{\lambda *} \circ X^{\sigma_\lambda}(n) = \sigma_{\lambda *}(n, \hat{X}^{\sigma_\lambda}(n))$, y así,

$$\sigma_{\lambda *} \circ X^{\sigma_\lambda}(n) = (\sigma_\lambda(n), D\sigma_\lambda(n)\hat{X}^{\sigma_\lambda}(n)). \tag{3.24}$$

Con todo lo anterior se probó que el miembro izquierdo de la ecuación (3.16) equivale al miembro izquierdo de la ecuación (3.12) $\forall \lambda \in \Lambda$, con lo que se probó la proposición. $\square$

Nota 3.14. *De las Proposiciones 3.3 y 3.4 se obtiene que, si* $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ *es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema para la fibración* Π*, entonces, las funciones* $\sigma_\lambda : N \to M$ *definidas por* Σ *son soluciones parciales de tal ecuación.*

Es posbile encontrar una condición más explícita equivalente a (3.17) teniendo en cuenta que σ_λ debe ser una sección de la fibración Π, y con ello, puede escribirse que $\Sigma(n, \lambda) = \sigma_\lambda(n) = (n, \hat{\sigma}_\lambda(n))$. Se obtiene que

$$D\Sigma(n, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{k\times k} & \mathcal{O}_{k\times l} \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

donde A es una matriz de $l \times k$, y B es una matriz de $l \times l$ que se define elemento a elemento como

$$(B)_{ij} = \frac{\partial \hat{\sigma}_{\lambda i}}{\partial \lambda_j}. \tag{3.26}$$

Una simple reducción por filas de $det(D\Sigma(n, \lambda))$ permite encontrar que $det(D\Sigma(n, \lambda)) = det(B)$, con lo que la condición (3.17) se simplifica a $det(B) \neq 0$.

3.3. La ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada en sistemas lineales

Considérse un sistema dinámico lineal de dimensión r

$$\dot{x}(t) = Ax + g, \tag{3.27}$$

cuya matriz A tiene todos sus autovalores reales, y al menos uno de ellos no nulo.

Se toma a la matriz A en su forma normal de Jordan (en caso contrario, se cambian las coordenadas del sistema de modo de llevar la matriz A a tal forma), dada por m bloques de dimensión r_i. Se representa cada uno de estos bloques como A_ν. Los elementos de este bloque son $(A_\nu)_{jk} = c_\nu \delta_{j,k} + \delta_{j,k+1}$, donde por c_ν se denota el autovalor correspondiente al bloque A_ν. Se eligen las coordenadas del sistema de modo de que el último bloque no tenga autovalor nulo.

Para poder escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi del sistema, se toma como fibración a la proyección en la última coordenada, es decir, $\Pi : \mathcal{R}^r \to \mathcal{R} / \Pi(x_1, ..., x_r) = x_r$. Es claro que sus secciones son funciones $\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^r / \sigma(x_r) = (\hat{\sigma}_1(x_r), ..., \hat{\sigma}_{r-1}(x_r), x_r)$. Así, se tiene que

$$X \circ \sigma(x_r) = (\sigma(x_r), A\sigma(x_r) + g), \tag{3.28}$$

además, $\Pi_* \circ X \circ \sigma(x_r) = (x_r, c_m x_r + g_r)$, de donde se sigue que

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma(x_r) = (\sigma(x_r), (c_m x_r + g_r)\frac{d\hat{\sigma}_1}{dx_r}(x_r), ..., (c_m x_r + g_r)\frac{d\hat{\sigma}_{r-1}}{dx_r}(x_r), c_m x_r + g_r). \tag{3.29}$$

Luego, se obtiene que las ecuaciones para la función σ tienen la forma

$$(c_m x_r + g_r)\frac{d\hat{\sigma}_i}{dx_r}(x_r) = c_{(i)}\hat{\sigma}_i(x_r) + \delta_{(i)}\hat{\sigma}_{i+1}(x_r) + g_i, \quad i = 1, ..., r-2, \tag{3.30}$$

$$(c_m x_r + g_r)\frac{d\hat{\sigma}_{r-1}}{dx_r}(x_r) = c_{(r-1)}\hat{\sigma}_{r-1}(x_r) + \delta_{(r-1)}x_r + g_{n-1}. \tag{3.31}$$

Por $c_{(i)}$ se denota el autovalor en la i-ésima fila de A y $\delta_{(i)}$ es el elemento a la derecha de la diagonal en esa fila. De lo anterior se observa claramente que las ecuaciones se desacoplan bloque a bloque, con lo que la solución puede darse para cada bloque por separado. Por simplicidad, se define $R_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$. Con ello, denotando con λ_i la constante de integración producto de resolver la i-ésima ecuación diferencial, las soluciones para el último bloque de Jordan son

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{R_{m-1}+j} = (&\sum_{l=0}^{r_m-j-1} \frac{\lambda_{R_{m-1}+l}}{l! c_m^{l+1}} (c_m x_r + g_r) \ln^l (c_m x_r + g_r)) + \\ &+ \frac{1}{(r_m - j)! c_m^{r_m-j+1}} (c_m x_r + g_r) \ln^{r_m-j} (c_m x_r + g_r) + \\ &+ (\sum_{b=1}^{n_m-j} (-1)^b \frac{g_{R_{m-1}+b}}{c_m^b}), \quad j = 1, ..., r_m - 1, \end{aligned} \tag{3.32}$$

mientras que para los demás bloques son

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{R_{k-1}+j}(x_r) = (&\sum_{l=0}^{r_k-j-1} \frac{\lambda_{R_{k-1}+l+1}}{l! c_m^{l+1}} (c_m x_r + g_r)^{c_k/c_m} \ln^l (c_m x_r + g_r)) + \\ &+ (\sum_{b=1}^{r_k-j} (-1)^b \frac{g_{R_k+b}}{c_k^b}), \quad j = 1, ..., r_k - 1 \end{aligned} \tag{3.33}$$

si $c_k \neq 0$, o bien

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{R_{k-1}+j}(x_r) = (&\sum_{l=0}^{r_k-j-1} \frac{\lambda_{R_{k-1}+l+1}}{l! c_m^{l+1}} \ln^l (c_m x_r + g_r)) + \\ &+ (\sum_{b=1}^{r_k-j} \frac{g_{R_k+b}}{b! c_m^b} \ln^b (c_m x_r + g_r)), \quad j = 1, ..., r_k - 1 \end{aligned} \tag{3.34}$$

si $c_k = 0$. Así, puede verse que las secciones de Π están definidas para $U = \{x_r \in \mathcal{R}/x_r > \frac{-g_r}{c_m}\}$, que es un abierto de $\mathcal{R}$. Si se interpretan las constantes de integración $\lambda_i, \quad i = 1, ..., r-1$ como argumentos de una función $\Sigma : U \times \mathcal{R}^{r-1} \to \mathcal{R}^r$, resulta de un cálculo inmediato ver que $det(D\Sigma)$ no se anula en ningún punto del dominio de Σ, y que por lo tanto esta última es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema.

Nota 3.15. *En el caso de que la matriz A tuviera algún autovalor complejo se podría proceder de manera similar, pero considerando su forma canónica real.*

3.4. Soluciones completas y constantes de movimiento

A continuación se enuncian dos resultados que relacionan la existencia de soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un sistema dinámico con las constantes de movimiento del sistema.

Proposición 3.5. *Sea X un sistema dinámico en M, $m \in M$ un punto arbitrario, $\Pi : M \to N$ una proyección cualquiera, $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y la fibración Π. Considérese $V \subseteq M$ un abierto que contiene a m en el que está definida Σ^{-1}. Bajo estas condiciones, la función $F : V \to \Lambda / F = (F_1, ..., F_l) = p_\Lambda \circ \Sigma^{-1}$ define l constantes de movimiento de X independientes en V.*

Demostración. Para ver la independencia de las l funciones definidas, nótese primero que, para un punto arbitrario $m_0 \in V$ y denotando $(n_0, \lambda_0) = \Sigma^{-1}(m_0)$,

$$D(p_\Lambda \circ \Sigma^{-1})(m_0) = Dp_\Lambda(\Sigma^{-1}(m_0))(D\Sigma(n_0, \lambda_0))^{-1}. \tag{3.35}$$

Ahora bien, $Dp_\Lambda(n, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{l\times k} & \mathcal{I}_{l\times l} \end{pmatrix}$, con lo que tiene rango l en todo $\Sigma^{-1}(V)$, y, dado que Σ es invertible en todo V, entonces el rango de $D(p_\Lambda \circ \Sigma^{-1})$ también es l en todo $\Sigma^{-1}(V)$. Así, las l funciones F_i son independientes.

El hecho de que son constantes de movimiento proviene de que, evaluando F en una trayectoria del sistema X,

$$\frac{d}{dt}F(m(t)) = \frac{d}{dt}(p_\Lambda(\Sigma^{-1}(m(t)))) = Dp_\Lambda(\Sigma^{-1}(m(t)))\frac{d}{dt}\Sigma^{-1}(m(t)). \tag{3.36}$$

Ahora, por la Nota 3.13, $\frac{d}{dt}\Sigma^{-1}(m(t)) = \begin{pmatrix} \frac{dn}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo cual $\frac{d}{dt}F(m(t)) = 0$, y por ende las funciones F_i son constantes de movimiento del sistema. □

Proposición 3.6. *Sea X un sistema dinámico en M, $m \in M$ un punto arbitrario, considérense l constantes de movimiento de X definidas localmente alrededor de m, es decir, un abierto $V \subseteq M$ y una función $F = (F_1, ..., F_l) : V \to \Lambda$, con $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^l$ un abierto, tal que las funciones F_i son constantes de movimiento. En estas condiciones, pueden construirse funciones $\Pi : V \to N$ y $\Sigma : N \times \Lambda \to V$, con $N \subseteq \mathcal{R}^{d-l}$ un abierto, tales que*

- *Π es una fibración.*
- *Σ es solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema X para la fibración Π [1].*

Estos resultados ponen de manifiesto la estrecha relación que existe localmente entre las soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada y las constantes de movimiento del sistema dinámico. Para ser más precisos, puede decirse que, al menos localmente, es en esencia lo mismo tener una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para una fibración con espacio de llegada de dimensión $d-l$ que tener l constantes de movimiento independientes.

Capítulo 4

La ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada en sistemas hamiltonianos

El objetivo de este capítulo es estudiar la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada (3.11) en el caso de que el sistema dinámico a considerar sea un sistema hamiltoniano. En particular, se introduce el concepto de solución isotrópica de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para luego analizar la relación entre este tipo de soluciones con la integrabilidad por cuadraturas y la integrabilidad no conmutativa del sistema hamiltoniano.

4.1. Conceptos matemáticos preliminares

Para definir de manera precisa algunos de los resultados presentados en este capítulo, es necesario introducir los conceptos de *1-forma*, *2-forma* y *forma simpléctica* en un subconjunto abierto de $\mathcal{R}^d$.

Definición 4.1. *Sea $U \subseteq \mathcal{R}^d$ un abierto, una* ***1-forma*** *en U es una función lineal suave $\theta : \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$, tal que $\theta(X)(x)$ depende sólo del valor de $\hat{X}(x)$, $\forall x \in U, \quad X \in \mathfrak{X}(U)$.*

Nota 4.1. *Dado que se requiere que una 1-forma en U sea una función lineal, puede pensársela alternativamente como una función suave $\theta' : U \to T^*U$ tal que $(\theta(X))(x) = (\hat{\theta}'(x))^t \hat{X}(x)$. De aquí en adelante se entenderá a una 1-forma según esta segunda interpretación, a menos que se indique lo contrario.*

Definición 4.2. *Sea $U \subseteq \mathcal{R}^d$ un abierto, una* ***2-forma*** *en U es una función bilineal suave $\Omega : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$, tal que:*

- *$(\Omega(X,Y))(x)$ depende sólo de los valores de $\hat{X}(x)$ e $\hat{Y}(x)$, $\forall x \in U$, $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.*

- *Es antisimétrica, es decir,* $(\Omega(X,Y))(x) = -(\Omega(Y,X))(x)$.

Nota 4.2. *Dado que se requiere que una 2-forma sea una función bilineal, puede pensársela alternativamente como una función suave* $\Omega' : U \to Mat(\mathcal{R}, r)$, *tal que:*

- $\Omega'(x)$ *es antisimétrica* $\forall x \in U$.

- $(\Omega(X,Y))(x) = (\hat{X}(x))^t \Omega'(x) \hat{Y}(x)$.

De aquí en adelante se entenderá a una 2-forma según esta segunda interpretación, a menos que se indique lo contrario.

Definición 4.3. *Una* ***forma simpléctica*** *en* U *es una 2-forma* ω *en* U *tal que:*

- *Existe una 1-forma* θ *en* U *que cumple*

$$\omega_{ij}(x) = \frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \hat{\theta}_j}{\partial x_i}(x), \quad i, j = 1, ..., d, \tag{4.1}$$

  donde $\omega_{ij}(x) = (\omega(x))_{ij}$.

- *La matriz* $\omega(x)$ *es invertible* $\forall x \in U$.

Nota 4.3. *Es importante destacar el hecho de que, de la antisimetría de* $\omega(x)$, $\forall x \in U$, *sumado al requerimiento de invertibilidad de tal matriz, se impone que la dimensión de* U *sea par. De aquí en más, cada vez que se hace referencia a una forma simpléctica en un abierto dado, se considera implícito que el abierto debe ser de dimensión par.*

Ejemplo 4.1. *En el caso de que el abierto* U *sea de la forma* $U = Q \times \mathcal{R}^r$, *con* $Q \subseteq \mathcal{R}^r$, *la 1-forma dada por* $\theta(q,p) = (q,p,p,0)$ *da lugar a una forma simpléctica en* $Q \times \mathcal{R}^r$ *conocida como forma simpléctica canónica,*

$$\omega(q,p) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{r\times r} & \mathcal{I}_{r\times r} \\ -\mathcal{I}_{r\times r} & \mathcal{O}_{r\times r} \end{pmatrix} \quad \forall (q,p) \in Q \times \mathcal{R}^r. \tag{4.2}$$

Suele denotarse a esta forma simpléctica en particular como J.

Nota 4.4. *Para el caso de un sistema hamiltoniano definido en* $Q \times \mathcal{R}^r$ *por un hamiltoniano* H, *es útil notar que*

$$\hat{X}_H(q,p) = J \nabla H(q,p). \tag{4.3}$$

4.2. Soluciones isotrópicas, solubilidad exacta e integrabilidad no conmutativa

En esta sección se estudia la relación entre cierto tipo de soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada (las llamadas isotrópicas), la integrabilidad por cuadraturas y la integrabilidad no conmutativa del sistema hamiltoniano.

4.2.1. La condición de isotropía

Definición 4.4. *Sea X un campo en M, $\Pi : N \to M$ una fibración, ω una forma simpléctica en M.*

- *Se dice que una solución parcial de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada $\sigma : N \to M$ para X y Π es* ***isotrópica*** *con respecto a la forma simpléctica ω si se cumple que*
$$(D\sigma(n))^t \omega(\sigma(n)) D\sigma(n) = 0 \quad \forall n \in N. \tag{4.4}$$
- *Se dice que una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ para X y Π es isotrópica con respecto a la forma simpléctica ω si cada una de las soluciones parciales σ_λ que ella define lo es, es decir, si*
$$(D\sigma_\lambda(n))^t \omega(\sigma_\lambda(n)) D\sigma_\lambda(n) = 0 \quad \forall n \in N, \lambda \in \Lambda. \tag{4.5}$$

Nota 4.5. *Una forma simpléctica ω en $M \subseteq \mathcal{R}^d$ define una bilineal en $\mathcal{R}^d$ para cada $x \in M$ de la forma $B_{\omega(x)} : \mathcal{R}^d \times \mathcal{R}^d \to \mathcal{R} / B_{\omega(x)}(u, v) = u^t \omega(x) v$. De este modo, dada una función W que a cada punto x le asigna un subconjunto $W(x) \subseteq \mathcal{R}^d$, puede definirse el conjunto ortogonal a W en x según ω como $W^{\perp_\omega}(x) = \{v \in \mathcal{R}^{2r} / B_{\omega(x)}(v, w) = 0, \forall w \in W(x)\}$. En estos términos, la condición de isotropía (4.4) puede reescribirse como $Im(\sigma_*) \subseteq [Im(\sigma_*)]^{\perp_\omega}$.*

Proposición 4.1. *Sea $\sigma : N \to Q \times \mathcal{R}^r$ una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada (3.12) para un sistema hamiltoniano y una fibración $\Pi : Q \times \mathcal{R}^r \to N$. En tal caso, σ debe cumplir la condición*

$$\nabla(H \circ \sigma)(n) = -[(D\sigma(n))^t J D\sigma(n)] \hat{X}_H^\sigma(n), \tag{4.6}$$

donde J es la forma simpléctica canónica de $Q \times \mathcal{R}^r$.

Demostración. En primer lugar, se tiene que

$$\sigma_* \circ X_H^\sigma(n) = \sigma_*(n, \hat{X}_H^\sigma(n)) = (\sigma(n), D\sigma(n)\hat{X}_H^\sigma(n)),$$

y por otro lado, $X_H \circ \sigma(n) = (\sigma(n), \hat{X}_H(\sigma(n)))$, con ello, de la ecuación (3.12) para un sistema hamiltoniano y una fibración Π se sigue que las secciones σ de Π cumplen

$$D\sigma(n)\hat{X}_H^\sigma(n) = \hat{X}_H(\sigma(n)). \tag{4.7}$$

También, se mencionó en la Nota 4.3 que $\hat{X}_H(q,p) = J\nabla H(q,p)$; y como $J^{-1} = -J$, entonces,

$$\nabla H(q,p) = -J\hat{X}_H(q,p). \tag{4.8}$$

Ahora bien, por regla de la cadena, $\nabla(H \circ \sigma)(n) = (D\sigma(n))^t \nabla H(\sigma(n))$, que según (4.8) da $\nabla(H \circ \sigma)(n) = -(D\sigma(n))^t J\hat{X}_H(\sigma(n))$, y finalmente, por (4.7), ello implica la igualdad

$$\nabla(H \circ \sigma)(n) = -[(D\sigma(n))^t J D\sigma(n)]\hat{X}_H^\sigma(n), \tag{4.9}$$

que es precisamente lo que se quería probar. □

Corolario 4.1. *Sea $\sigma : N \to Q \times \mathcal{R}^r$ una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada (3.12) para un sistema hamiltoniano y una fibración $\Pi : Q \times \mathcal{R}^r \to N$ isotrópica respecto a J. En tal caso, σ debe cumplir la condición*

$$\nabla(H \circ \sigma)(n) = 0. \tag{4.10}$$

En las condiciones del corolario anterior, si la fibración considerada es la proyección canónica, entonces σ debe cumplir la condición $\nabla(H \circ \sigma)(q) = 0$, con lo que será también una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica (3.5).

Puede enunciarse un resultado análogo a la Proposición 4.1 para una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada:

Proposición 4.2. *La condición (3.16) para una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un sistema hamiltoniano con hamiltoniano H y una fibración $\Pi : Q \times \mathcal{R}^r \to N$ se cumple si y sólo si también se cumple que*

$$\nabla(H \circ \Sigma)(n,\lambda) = -[(D\Sigma(n,\lambda))^t J D\Sigma(n,\lambda)]\hat{X}_H^\Sigma(n,\lambda), \tag{4.11}$$

lo cual implica que

$$\nabla(H \circ \sigma_\lambda)(n) = -[(D\sigma_\lambda(n))^t J D\sigma_\lambda(n)]\hat{X}_H^{\sigma_\lambda}(n), \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{4.12}$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la demostración de la Proposición 4.1, salvo por el hecho de que la matriz $D\Sigma(n,\lambda)$ es invertible (la matriz

$D\sigma(n)$ es rectangular), lo que hace que la implicación de la Proposición 4.1 sea en este caso una equivalencia. □

El siguiente resultado pone de manifiesto una propiedad de las soluciones completas isotrópicas que es de particular utilidad a la hora de relacionarlas con la integrabilidad del sistema en cuestión.

Proposición 4.3. *Sea $\Sigma : N \times \Lambda \to Q \times \mathcal{R}^r$ una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un campo X en $Q \times \mathcal{R}^r$ y una fibración Π : $Q \times \mathcal{R}^r \to N$. Si se escribe $\sigma_\lambda(n) = (\sigma_\lambda^Q(n), \sigma_\lambda^P(n))$ con $\sigma_\lambda^Q : N \to Q$ y $\sigma_\lambda^P : N \to \mathcal{R}^r$, entonces, la condición de isotropía (4.5) para $\omega(q,p) = J$ equivale a la condición*

$$\frac{\partial}{\partial n_k}[(\sigma_\lambda^P)_i(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_j}(n)] = \frac{\partial}{\partial n_j}[(\sigma_\lambda^P)_i(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_k}(n)]. \tag{4.13}$$

Demostración. Se tiene que la matriz $D\sigma_\lambda(n)$ puede escribirse por bloques como

$$D\sigma_\lambda(n) = \begin{pmatrix} D\sigma_\lambda^Q(n) \\ D\sigma_\lambda^P(n) \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Con ello,

$$(D\sigma_\lambda(n))^t = \begin{pmatrix} (D\sigma_\lambda^Q(n))^t & (D\sigma_\lambda^P(n))^t \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

y además

$$JD\sigma_\lambda(n) = \begin{pmatrix} D\sigma_\lambda^P(n) \\ -D\sigma_\lambda^Q(n) \end{pmatrix}; \tag{4.16}$$

con lo que se obtiene que la ecuación (4.5) para $\omega(q,p) = J$ equivale a

$$\frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_j}(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^P)_i}{\partial n_k}(n) = \frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_k}(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^P)_i}{\partial n_j}(n). \tag{4.17}$$

Ahora bien, por la regla de derivación del producto de funciones, se tiene que la ecuación (4.13) equivale a

$$\frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_j}(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^P)_i}{\partial n_k}(n) + \frac{\partial^2(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_k \partial n_j}(n) = \frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_k}(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^P)_i}{\partial n_j}(n) + \frac{\partial^2(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_j \partial n_k}(n), \tag{4.18}$$

que a su vez, por la igualdad de las derivadas segundas cruzadas, se reduce a la ecuación (4.17), probando el resultado deseado. □

Del resultado anterior se desprende que la función $F : N \to \mathcal{R}^k / F(n) = (\sigma_\lambda^P)_i(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n}(n)$, debe ser un gradiente, es decir, $\exists W_\lambda : N \to \mathcal{R}/$

$$(\sigma_\lambda^P)_i(n)\frac{\partial(\sigma_\lambda^Q)_i}{\partial n_j}(n) = \frac{\partial W_\lambda}{\partial n_j}(n), \quad j = 1, ..., k. \tag{4.19}$$

Es importante notar que no sólo puede asegurarse la existencia de tal funcón W_λ, sino que, a partir de la ecuación (4.19), puede construirse a menos de cuadraturas. Asociada a esta función W_λ pueden definirse las funciones $W : N \times \Lambda \to \mathcal{R}/W(n, \lambda) = W_\lambda(n)$ y $W_n : \Lambda \to \mathcal{R}/W_n(\lambda) = W(n, \lambda)$.

En términos de la 1-forma θ que da lugar a la forma simpléctica canónica, es decir, $\hat{\theta} : Q \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^r/\hat{\theta}(q, p) = (p, 0)$, la ecuación (4.19) se reescribe como

$$(\hat{\theta}(\sigma_\lambda(n)))^t D\sigma_\lambda(n) = \frac{\partial W_\lambda}{\partial n}(n). \tag{4.20}$$

Además, la condición de isotropía (4.5) junto con la ecuación (4.12) aseguran que $\nabla(H \circ \sigma_\lambda)(n) = 0$, lo cual lleva a que $\exists h : \Lambda \to \mathcal{R}/H \circ \Sigma(n, \lambda) = h(\lambda)$ o, equivalentemente, $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$. Nuevamente, no sólo puede asegurarse la existencia de tal función h, sino que puede construirse a partir de la simple composición del hamiltoniano H con la solución completa Σ.

4.2.2. El proceso de integración

Considérese la función $\varphi : N \times \Lambda \to T^*\Lambda/\varphi(n, \lambda) = (\lambda, \hat{\varphi}(n, \lambda))$, con

$$\hat{\varphi}(n, \lambda) = \frac{\partial W_n}{\partial \lambda}(\lambda) - (\hat{\theta}(\sigma_n(\lambda)))^t D\sigma_n(\lambda), \tag{4.21}$$

puede enunciarse el siguiente resultado respecto a tal función.

Proposición 4.4. *La función φ es tal que $\hat{\varphi}$ es localmente inyectiva en n, es decir, $\forall n \in N, \quad \exists V$ abierto que contiene a n tal que, $\forall n_1, n_2 \in V$, si $\hat{\varphi}(n_1, \lambda) = \hat{\varphi}(n_2, \lambda)$, entonces, $n_1 = n_2$.*

Demostración. Definiendo $\hat{\varphi}_\lambda : N \to \mathcal{R}^l/\hat{\varphi}_\lambda(n) = \hat{\varphi}(n, \lambda)$, probar la inyectividad local en n de $\hat{\varphi}$ equivale a probar que, $\forall n \in N$, la matriz $D\hat{\varphi}_\lambda(n)$ tiene rango k; es esto último lo que se va a probar. Dado $v \in \mathcal{R}^k$, resulta de un cálculo inmediato que

$$\begin{aligned} D\hat{\varphi}_\lambda(n)v &= [D\hat{\theta}(\sigma_n(\lambda))D\sigma_\lambda(n) - D\hat{\theta}(\sigma_\lambda(n))D\sigma_n(\lambda)]v = \\ &= Dp_\Lambda(n, \lambda)(D\Sigma(n, \lambda))^t J D\Sigma(n, \lambda) \left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right). \end{aligned} \tag{4.22}$$

También de un cálculo directo, teniendo en cuenta la condición de isotropía (4.5), resulta que

$$(D\Sigma(n, \lambda))^t J D\Sigma(n, \lambda) \left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ v' \end{smallmatrix}\right), \tag{4.23}$$

para algún $v' \in \mathcal{R}^l$, de donde se tiene que

$$D\hat{\varphi}_\lambda(n)v = v'. \tag{4.24}$$

Ahora bien, dado que las matrices $D\Sigma(n,\lambda)$ y J son invertibles, se tiene que, si $v' = 0$, entonces necesariamente $v = 0$, de donde se deduce que la matriz $D\hat{\varphi}_\lambda$ tiene rango k, probando la proposición. □

El desarrollo precedente permite enunciar el siguiente resultado, que relaciona de manera directa las trayectorias del sistema hamiltoniano con las soluciones completas isotrópicas respecto a J.

Proposición 4.5. *Sea Σ una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un sistema hamiltoniano caracterizado por H, isotrópica respecto a J. Una curva $(q(t), p(t))$ en $Q \times \mathcal{R}^r$ con condición inicial (q_0, p_0) es una trayectoria del sistema hamiltoniano si y sólo si, dada una inversa local Σ^{-1} en un abierto V que contiene a (q_0, p_0), la curva $(n(t), \lambda) = \Sigma^{-1}(q(t), p(t))$ satsiface*

$$\hat{\varphi}(n(t), \lambda_0) = \hat{\varphi}(n_0, \lambda_0) - t\nabla h(\lambda_0), \tag{4.25}$$

$$\lambda(t) = \lambda_0, \tag{4.26}$$

con φ definido como en la Proposición 4.4, h la función que cumple $h \circ p_\Lambda = H \circ \Sigma$, $(n_0, \lambda_0) = \Sigma^{-1}(q_0, p_0)$.

Demostración. Para mostrar la implicación directa, considérse una tal trayectoria. Por la Proposición 3.5, se tiene que, como $\lambda(t) = p_\Lambda \circ \Sigma^{-1}(q(t), p(t))$, efectivamente $\lambda(t) = \lambda_0$ con lo que basta con mostrar que

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t), \lambda_0) = -\nabla h(\lambda_0). \tag{4.27}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t), \lambda_0) = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n}(n(t), \lambda_0)\frac{dn}{dt} = \\ &= Dp_\Lambda(n(t), \lambda_0)(D\Sigma(n(t), \lambda_0))^t J D\Sigma(n(t), \lambda_0) \begin{pmatrix} \frac{dn}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por otra parte, puede escribirse

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{dn}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n(t) \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \\ &= D\Sigma^{-1}(q(t), p(t)) \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \\ &= D\Sigma^{-1}(q(t), p(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \end{pmatrix} = \\ &= (D\Sigma(n(t), \lambda_0))^{-1} J \nabla H(\Sigma(n(t), \lambda_0)). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Con todo lo anterior, combinando las ecuaciones (4.28) y (4.29) se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t),\lambda_0) = -Dp_\Lambda(n(t),\lambda_0)(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^t\nabla H(\Sigma(n(t),\lambda_0)) = \\ &= -Dp_\Lambda(n(t),\lambda_0)\nabla(H\circ\Sigma)(n(t),\lambda_0). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ahora bien, resulta de un cálculo directo que $\nabla(H\circ\Sigma)(n,\lambda) = (Dp_\Lambda(n,\lambda))^t\nabla h(\lambda)$ y que $Dp_\Lambda(n,\lambda)(Dp_\Lambda(n,\lambda))^t = \mathcal{I}_{l\times l}$, de donde se obtiene

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t),\lambda_0) = -\nabla h(\lambda_0), \tag{4.31}$$

que es precisamente lo que se quería mostrar.

Para probar la implicación recíproca, pueden invertirse todos los pasos realizados anteriormente, siempre que se muestre que

$$JD\Sigma(n(t),\lambda_0)\begin{pmatrix}\frac{dn}{dt}\\ 0\end{pmatrix} = -\nabla H(\Sigma(n(t),\lambda_0)). \tag{4.32}$$

Teniendo en cuenta que $\hat{\varphi}$ satisface (4.25) y (4.28), entonces puede escribirse

$$Dp_\Lambda(n(t),\lambda_0)(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^tJD\Sigma(n(t),\lambda_0)\begin{pmatrix}\frac{dn}{dt}\\ 0\end{pmatrix} = -\nabla h(\lambda_0), \tag{4.33}$$

de donde, multiplicando ambos miembros por $(Dp_\Lambda(n(t),\lambda_0))^t$

$$\begin{aligned} &(Dp_\Lambda(n(t),\lambda_0))^tDp_\Lambda(n(t),\lambda_0)(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^tJD\Sigma(n(t),\lambda_0)\begin{pmatrix}\frac{dn}{dt}\\ 0\end{pmatrix} = \\ &= -\nabla(H\circ\Sigma)(n(t),\lambda_0) = -(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^t\nabla H(\Sigma(n(t),\lambda_0)). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Ahora bien, combinando la ecuación (4.23) con que $(Dp_\Lambda(n(t),\lambda_0))^tDp_\Lambda(n(t),\lambda_0)\begin{pmatrix}0\\ v'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ v'\end{pmatrix}$ $\forall v'\in\mathcal{R}^l$ se tiene

$$(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^tJD\Sigma(n(t),\lambda_0)\begin{pmatrix}\frac{dn}{dt}\\ 0\end{pmatrix} = -(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^t\nabla H(\Sigma(n(t),\lambda_0)), \tag{4.35}$$

a partir de donde, por la invertibilidad de $(D\Sigma(n(t),\lambda_0))^t$ se obtiene lo que se quería probar. □

Este último resultado permite construir las trayectorias del sistema hamiltoniano con el siguiente procedimiento (a partir de una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema isotrópica respecto a J). En primer lugar, se construyen a menos de cuadraturas las funciones h y W anteriormente descriptas. A partir de W, se construye, también a menos de cuadraturas, la función φ descripta en la Proposición 4.4. Luego, dado un par (n_0,λ_0) se escribe la ecuación (4.25), de donde, por la inyectividad de $\hat{\varphi}$ en n puede obtenerse $n(t)$, encontrando por último una trayectoria al definir $(q(t),p(t)) = \Sigma(n(t),\lambda_0)$. El hecho de que, por ser Σ una solución completa, entonces es localmente invertible (lo que implica que es localmente sobreyectiva), permite asegurar que todas las trayectorias del sistema pueden construirse con este procedimiento.

La discusión anterior sirve como demostración del siguiente resultado.

Teorema 4.1. *Si se conoce una fibración* $\Pi : Q \times \mathcal{R}^r \to N$ *y* $\Sigma : N \times \Lambda \to Q \times \mathcal{R}^r$*, una solución completa local de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un sistema hamiltoniano y la fibración* Π*, isotrópica respecto de* J*, entonces, el sistema hamiltoniano es integrable por cuadraturas.*

Ahora, pueden utilizarse los puntos enumerados en la Sección 1.3 para analizar el criterio de integrabilidad de Hamilton-Jacobi generalizado. En cuanto a la plausibilidad, puede asegurarse la existencia de soluciones completas locales isotrópicas de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para sistemas hamiltonianos [13]. La maximalidad será discutido en la sección posterior.

4.2.3. La dualidad "solución completa isotrópica e integrabilidad no conmutativa"

Para finalizar la discusión de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada en sistemas hamiltonianos, se comentan, sin demostración, los siguientes resultados, que vinculan las soluciones completas isotrópicas de tal ecuación con la integrabilidad no conmutativa del sistema [10].

Proposición 4.6. *Dada* $\Sigma : N \times \Lambda \to Q \times \mathcal{R}^r$ *una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para un sistema hamiltoniano y una fibración* $\Pi : Q \times \mathcal{R}^r \to N$*, isotrópica respecto a* J*;* $\forall (q,p) \in Q \times \mathcal{R}^r \quad \exists V \subseteq Q \times \mathcal{R}^r$ *tal que* V *es un abierto que contiene a* (q,p)*, la aplicación* $F : V \to N \times \Lambda / F = (F_1, ..., F_l) = p_\Lambda \circ \Sigma^{-1}$ *está bien definida, y las funciones* $F_1, ..., F_l$ *satisfacen las condiciones requeridas en el Ejemplo 1.6, es decir, son integrales primeras del sistema, isotrópicas e independientes.*

Proposición 4.7. *Para un sistema hamiltoniano definido en* $Q \times \mathcal{R}^r$*, dadas funciones* $F_1, ..., F_l$ *definidas localmente alrededor de un punto* $(q,p) \in Q \times \mathcal{R}^r$*, que sean integrales primeras del sistema, isotrópicas en el sentido del Ejemplo 1.6 e independientes, puede construirse localmente alrededor de* (q,p) *una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema, para alguna fibración* $\Pi : Q \times \mathcal{R}^r \to N$*, con* N *un abierto de* $\mathcal{R}^{2r-l}$*, isotrópica respecto a* J*.*

De los resultados anteriores queda claro que, al menos localmente, para un sistema hamiltoniano es lo mismo tener una solución completa isotrópica respecto a J, que tener constantes de movimiento independientes, isotrópicas en el sentido del Teorema de

Mischenko-Fomenko. En conclusión, puede enunciarse el siguiente resultado, que compara al criterio de integrabilidad no conmutativa con el criterio de solubilidad exacta proveniente de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada en sistemas hamiltonianos en términos de la relación de equivalencia introducida en la Sección 1.3.

Proposición 4.8. *El criterio de integrabilidad para sistemas hamiltonianos proveniente de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada es equivalente al criterio de integrabilidad no conmutativa.*

Además, de lo anterior se extrae que el criterio de integrabilidad presentado en el Teorema 4.1 es maximal, ya que, de las trayectorias del sistema, según se mencionó en la Sección 1.3, pueden construirse funciones que satisfacen el criterio de integrabilidad no conmutativa, y a partir de ellas, por la Proposición 4.7, una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema isotrópica respecto a J.

Capítulo 5

La ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada en sistemas no hamiltonianos

Una vez estudiada la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para sistemas hamiltonianos y su relación con la integrabilidad por cuadraturas de dichos sistemas, es natural preguntarse si es posible utilizar tal ecuación para encontrar criterios de solubilidad exacta para sistemas dinámicos más generales. En esta sección se lleva adelante tal estudio, partiendo del caso hamiltoniano, y viendo qué condiciones pueden relajarse de modo de generar criterios para sistemas dinámicos generales.

5.1. Conceptos matemáticos preliminares

De modo de poder enunciar de forma más compacta y precisa algunos resultados presentados en este capítulo, es necesario introducir algunos conceptos.

Definición 5.1. *Dados un campo X y una 1-forma θ en U, la* ***derivada de Lie*** *de θ en la dirección de X es otra 1-forma en U, denotada por $L_X(\theta)$, tal que $(\widehat{L_X(\theta)})_i(x) = \hat{X}_j(x)\frac{\partial\hat{\theta}_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial\hat{X}_j}{\partial x_i}(x)\hat{\theta}_j(x)$.*

Definición 5.2. *Dado un campo X en U, la* ***evaluación*** *en X es una función i_X que, dada una 2-forma Ω en U le asigna una 1-forma en U, denotada por $i_X(\Omega)$, tal que*

$$\widehat{i_X(\Omega)}(x) = (\Omega(x))^t\hat{X}(x), \tag{5.1}$$

o bien, dada la antisimetría de $\Omega(x)$,

$$\widehat{i_X(\Omega)}(x) = -\Omega(x)\hat{X}(x). \tag{5.2}$$

Se dirá equivalentemente que $i_X(\Omega)$ *es la 1-forma asociada a* X *por* Ω.

Definición 5.3. *Dadas dos 1-formas* θ *y* κ *en* U*, el* ***producto exterior*** *de* θ *y* κ *es una 2-forma en* U*, denotada por* $\theta \wedge \kappa$*, tal que*

$$(\theta \wedge \kappa(x))_{ij} = \hat{\theta}_i(x)\hat{\kappa}_j(x) - \hat{\theta}_j(x)\hat{\kappa}_i(x). \tag{5.3}$$

Definición 5.4. *Dada una función* $F : U \to V$ *y una 1-forma* θ *en* V*, el* ***pullback*** *de* θ *por* F *es una 1-forma en* U *que se denota por* $F^*(\theta)$ *y es tal que*

$$\widehat{F^*(\theta)}(x) = (DF(x))^t\hat{\theta}(F(x)) \quad \forall x \in U. \tag{5.4}$$

Definición 5.5. *Dada una función* $F : U \to V$ *y una 2-forma* Ω *en* V*, el* ***pullback*** *de* Ω *por* F *es una 2-forma en* U *que se denota por* $F^*(\Omega)$ *y es tal que*

$$F^*(\Omega)(x) = (DF(x))^t\Omega(F(x))DF(x) \quad \forall x \in U. \tag{5.5}$$

Definición 5.6. *Dada una función* $F : U \to \mathcal{R}$*, su* ***diferencial*** *es una 1-forma en* U *que se denota por* dF *y es tal que*

$$\widehat{dF}(x) = \nabla F(x) \quad \forall x \in U. \tag{5.6}$$

Definición 5.7. *En el contexto de este capítulo, se dirá que un campo* X *en* U *es* ***hamiltoniano*** *respecto a una forma simpléctica* ω *en* U *si existe una función* $H : U \to \mathcal{R}$ *tal que*

$$i_X(\omega) = dH. \tag{5.7}$$

Nota 5.1. *Es inmediato ver que los campos de los sistemas hamiltonianos tratados entre los Capítulos 1 y 4 son efectivamente campos hamiltonianos en el sentido de la definición anterior respecto a la forma simpléctica* $-J$ *para el hamiltoniano del sistema.*

5.2. Soluciones completas isotrópicas e integrabilidad por cuadraturas de sistemas dinámicos

El objetivo de esta sección es discutir la posibilidad de enunciar criterios de integrabilidad de sistemas dinámicos basados en la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada. Algunas de las cuentas presentadas en esta sección son introducidas sin demasiada rigurosidad, omitiendo en muchos casos las justificaciones de algunos de sus pasos, ya que utilizan herramientas propias de la geometría diferencial. Lo que se pretende es meramente ilustrar los posibles procedimientos a utilizar para la construcción de las trayectorias del sistema dinámico. Para un tratamiento riguroso de algunos conceptos aquí involucrados, véase [1] [8].

Para comenzar con el desarrollo de esta sección, puede decirse que, dado un sistema dinámico X definido en M y una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema $\Sigma : N \times \Lambda \to M$, se ve a partir de la ecuación (3.16) que toda forma simpléctica ω en M debe cumplir la condición

$$i_{X^\Sigma}(\Sigma^*(\omega)) = \Sigma^*(i_X(\omega)). \tag{5.8}$$

En el desarrollo realizado para sistemas hamiltonianos en el capítulo anterior, dos fueron los aspectos clave que permitieron construir las soluciones del sistema: la condición de isotropía y el hecho de que el campo del sistema era hamiltoniano (con respecto a la forma simpléctica $-J$).

La condición de isotropía permite operar sobre el miembro izquierdo de la ecuación (5.8). Es posible mostrar que, si la solución completa Σ es isotrópica respecto de una forma simpléctica ω, entonces, denotando por θ a la 1-forma asociada a ω (ver Definición 4.3), debe existir una función $W_\lambda : N \to \mathcal{R}$ tal que $\sigma_\lambda^*(\theta) = dW_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Más aún, dado que se tiene una forma explícita para σ_λ y que θ puede construirse a menos de cuadraturas, entonces, las funciones W_λ pueden también construirse a menos de cuadraturas. Por otra parte, definiendo $W : N \times \lambda \to \mathcal{R} / W(n, \lambda) = W_\lambda(n), \forall n \in N, \lambda \in \Lambda$, y una 1-forma α en $N \times \Lambda$ tal que $\alpha = \Sigma^*(dW - \theta)$, es posibe mostrar que se cumple

$$i_{X^\Sigma}(\Sigma^*(\omega)) = L_{X^\Sigma}(\alpha). \tag{5.9}$$

Ahora bien, es un resultado conocido de la geometría diferencial que, dado un campo X' y una 1-forma κ en un abierto U, si se representan con $x(t)$ las trayectorias del campo X', entonces debe cumplirse que $\widehat{L_{X'}(\kappa)}(x(t)) = \frac{d}{dt}\hat{\kappa}(x(t))$, con lo que, en las trayectorias de X^Σ debe cumplirse que

$$\widehat{L_{X^\Sigma}(\alpha)}(n(t), \lambda(t)) = \frac{d}{dt}\hat{\alpha}(n(t), \lambda(t)). \tag{5.10}$$

Interpretando ahora las 1-formas en el sentido original de la Definición 4.1 y el espacio cotangente como en la Nota 3.5, considérse la función $\varphi : N \times \Lambda \to T^*\Lambda$ que cumple

$$\alpha(0, Z) = \varphi(Z) \quad \forall(0, Z) \in \{0\} \times T\Lambda. \tag{5.11}$$

Es inmediato ver que, en el sentido de la Nota 4.1 y de la Definición 3.1, las componentes de $\hat{\varphi}$ son las últimas l componentes de $\hat{\alpha}$, es decir,

$$\hat{\varphi}_j(n, \lambda) = \hat{\alpha}_{j+k}(n, \lambda), \quad j = 1, ..., l. \tag{5.12}$$

También es posible mostrar que la función φ tiene propiedades análogas a su homónima definida en la Sección 4.2, en particular, $\hat{\varphi}$ es inyectiva en n. Con todo lo anterior, de las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.12) se obtiene que

$$i_{X^\Sigma}(\hat{\Sigma^*}(\omega))_{j+k}(n(t), \lambda(t)) = \frac{d}{dt}\hat{\varphi}_j(n(t), \lambda(t)), \quad j = 1, ..., l. \tag{5.13}$$

Caso 1: el campo es hamiltoniano (Criterio C1). Si el campo X del sistema es hamiltoniano con respecto a la misma forma simpléctica ω que hace a Σ isotrópica, puede afirmarse que $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$, para alguna función $h : \Lambda \to \mathcal{R}$ que puede construirse (de manera análoga a lo que ocurre en la Sección 4.2 para J). En términos de h, puede mostrarse que el miembro derecho de la ecuación (5.8) queda

$$\Sigma^*(i_X(\omega)) = p_\Lambda^*(dh). \tag{5.14}$$

Por otra parte, evaluando la ecuación (5.14) en una trayectoria de X^Σ, sus últimas l componentes son

$$(\Sigma^*(\hat{i_X}(\omega)))_{j+k}(n(t), \lambda(t)) = \frac{\partial h}{\partial \lambda_j}(\lambda(t)), \quad j = 1, ..., l. \tag{5.15}$$

De esta manera, combinando las ecuaciones (5.15) y (5.13),

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t), \lambda(t)) = \nabla h(\lambda(t)). \tag{5.16}$$

Dado que en la Sección 3.4 se mostró que λ no varía en las trayectorias de X^Σ, la ecuación (5.16) tiene como solución

$$\hat{\varphi}(n(t), \lambda(0)) = \hat{\varphi}(n(0), \lambda(0)) + t\nabla h(\lambda(0)). \tag{5.17}$$

Por último, dado que $\hat{\varphi}$ es inyectiva en n, de esta última ecuación pueden obtenerse las trayectorias $(n(t), \lambda(0))$ de X^Σ. Por la Nota 3.13, $\Sigma(n(t), \lambda(0))$ será trayectoria de X, y por ser Σ solución completa (en particular, por ser sobreyectiva), todas las trayectorias de X podrán obtenerse de esta manera. De todo lo anterior se concluye la integrabilidad por cuadraturas del sistema hamiltoniano, hecho que se resume en el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Sea X un sistema dinámico en un abierto $M \subseteq \mathcal{R}^d$. Si se conocen abiertos $N \subseteq \mathcal{R}^k$, $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^l$, funciones $\Pi : M \to N$, $\Sigma : N \times \Lambda \to M$, $H : M \to \mathcal{R}$ y una forma simpléctica ω en M tales que*

- Π *es una fibración.*
- Σ *es solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y la fibración Π, definida localmente.*
- Σ *es isotrópica con respecto a la forma simpléctica ω.*
- *El campo X es hamiltoniano respecto a la forma ω para la función H.*

entonces el sistema dinámico es integrable por cuadraturas.

Caso 2: la 1-forma asociada al campo es el pullback de una 1-forma en Λ (Criterio C2). Si el campo no es hamiltoniano respecto a la forma simpléctica ω que hace a Σ isotrópica, pero se conoce una 1-forma γ en Λ tal que

$$\Sigma^*(i_X(\omega)) = p_\Lambda^*(\gamma), \tag{5.18}$$

entonces, pueden repetirse todos los pasos del caso anterior desde la ecuación (5.15) con solo reemplazar ∇h por $\hat{\gamma}$, y de este modo, la integrabilidad por cuadraturas del sistema podrá asegurarse. Ésto se resume en el siguiente resultado.

Teorema 5.2. *Sea X un sistema dinámico en un abierto $M \subseteq \mathcal{R}^d$. Si se conocen abiertos $N \subseteq \mathcal{R}^k$, $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^l$, funciones $\Pi : M \to N$, $\Sigma : N \times \Lambda \to M$, una forma simpléctica ω en M y una 1-forma γ en Λ tales que:*

- Π *es una fibración.*
- Σ *es solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y la fibración Π, definida localmente.*
- Σ *es isotrópica con respecto a la forma simpléctica ω.*
- *Se cumple que*
$$\Sigma^*(i_X(\omega)) = p_\Lambda^*(\gamma), \tag{5.19}$$

entonces el sistema dinámico es integrable por cuadraturas.

Nota 5.2. *La condición impuesta por la ecuación (5.19) puede escribirse más explícitamente como*

$$\frac{\partial \Sigma_j}{\partial n_b}(n,\lambda)\omega(\Sigma(n,\lambda))_{ij}\hat{X}_i(\Sigma(n,\lambda)) = 0 \quad \forall n \in N, \lambda \in \Lambda, b = 1, ..., k, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \Sigma_j}{\partial \lambda_{k+b}}(n,\lambda)\omega(\Sigma(n,\lambda))_{ij}\hat{X}_i(\Sigma(n,\lambda)) = \hat{\gamma}_b(\lambda) \quad \forall n \in N, \lambda \in \Lambda, b = 1, ..., l, \tag{5.21}$$

Caso 3: la 1-forma asociada al campo es invariante (Criterio C3). Por otra parte, si el campo es tal que su 1-forma asociada por la forma simpléctica ω que hace a Σ isotrópica es invariante por X, es decir, cumple que

$$L_X(i_X(\omega)) = 0, \tag{5.22}$$

entonces, puede construirse una función $\beta : N \times \Lambda \to \mathcal{R}^l$ que sea constante en toda trayectoria de X^Σ y que cumpla

$$(\Sigma^*(\hat{i_X}(\omega)))_{j+k}(n(t), \lambda(0)) = \beta_j(n(0), \lambda(0)), \quad j = 1, ..., l. \tag{5.23}$$

De esta manera, para la misma función φ definida anteriormente en esta sección, debe cumplirse que

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t), \lambda(0)) = \beta(n(0), \lambda(0)), \tag{5.24}$$

con lo que se obtiene

$$\hat{\varphi}(n(t), \lambda(0)) = \beta(n(0), \lambda(0))t + c, \tag{5.25}$$

con $c = (c_1, ..., c_l)$ constante (puede determinarse a través de las condiciones iniciales).

Así, de modo similar a lo que ocurría en los Casos 1 y 2, dado que $\hat{\varphi}$ es inyectiva en n, pueden obtenerse las trayectorias $(n(t), \lambda(0))$ de X^Σ. Por la Nota 3.13, $\Sigma(n(t), \lambda(0))$ será trayectoria de X, y por ser Σ solución completa (en particular, por ser sobreyectiva), todas las trayectorias de X podrán obtenerse de esta manera. De todo lo anterior se concluye la integrabilidad por cuadraturas del sistema dinámico, hecho que se resume en el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Sea X un sistema dinámico en un abierto $M \subseteq \mathcal{R}^d$. Si se conocen abiertos $N \subseteq \mathcal{R}^k$, $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^l$, funciones $\Pi : M \to N$, $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ y una forma simpléctica ω en M tales que*

- Π *es una fibración.*
- Σ *es solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y la fibración Π, definida localmente.*
- Σ *es isotrópica con respecto a la forma simpléctica ω.*

- *Se cumple que*

$$L_X(i_X(\omega)) = 0, \tag{5.26}$$

entonces el sistema dinámico es integrable por cuadraturas.

Nota 5.3. *La condición impuesta por la ecuación* (5.26) *puede escribirse más explícitamente como*

$$\hat{X}_j \hat{X}_b \frac{\partial \omega_{bi}}{\partial x_j} + \hat{X}_j \omega_{bi} \frac{\partial \hat{X}_b}{\partial x_j} + \omega_{bj} \hat{X}_b \frac{\partial \hat{X}_j}{\partial x_i} = 0. \tag{5.27}$$

Caso 4: la 1-forma asociada al campo es conformemente invariante (Criterio C4). Si en cambio el campo es tal que su 1-forma asociada por la forma simpléctica ω que hace a Σ isotrópica es conformemente invariante por X, es decir, en el sentido de la Definición 4.2 se cumple que

$$(L_X(i_X(\omega)) \wedge i_X(\omega)) = 0, \tag{5.28}$$

entonces, pueden construirse funciones $\beta : N \times \Lambda \to \mathcal{R}^l$ y $F : Im(\hat{\varphi}) \to \mathcal{R}$ tales que, en una trayectoria de X^Σ,

$$(\Sigma^*(\hat{i_X}(\omega)))_{j+k}(n(t), \lambda(0)) = \beta_j(n(0), \lambda(0))\, \mathrm{e}^{F(\hat{\varphi}((n(t),\lambda(0)))}, \quad j = 1, ..., l. \tag{5.29}$$

De esta manera, para la misma función φ definida anteriormente en esta sección, debe cumplirse que

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(n(t), \lambda(0)) = \beta(n(0), \lambda(0))\, \mathrm{e}^{F(\hat{\varphi}((n(t),\lambda(0)))}. \tag{5.30}$$

Supóngase ahora que $\beta_1(n(0), \lambda(0))$ no se anula (si todas las componentes de β se anluan, la trayectoria de X^Σ tiene $n(t)$ constante). De la ecuación (5.30) se tiene que

$$\frac{\frac{d\hat{\varphi}_j}{dt}}{\frac{d\hat{\varphi}_1}{dt}} = \frac{\beta_j(n(0), \lambda(0))}{\beta_1(n(0), \lambda(0))}, \quad j = 2, ..., l, \tag{5.31}$$

de donde

$$\hat{\varphi}_j(n(t), \lambda(0)) = \frac{\beta_j(n(0), \lambda(0))}{\beta_1(n(0), \lambda(0))}\hat{\varphi}_1(n(t), \lambda(0)) + c_j, \quad j = 2, ..., l, \tag{5.32}$$

con c_j constantes de integración que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Combinando la ecuación (5.32) con la componente 1 de la ecuación (5.30), y definiendo

$$G(\hat{\varphi}_1(n(t), \lambda(0))) = \mathrm{e}^{F(\hat{\varphi}_1(n(t),\lambda(0)), \frac{\beta_2(n(0),\lambda(0))}{\beta_1(n(0),\lambda(0))}\hat{\varphi}_1(n(t),\lambda(0))+c_2, ..., \frac{\beta_l(n(0),\lambda(0))}{\beta_1(n(0),\lambda(0))}\hat{\varphi}_1(n(t),\lambda(0))+c_l)} \tag{5.33}$$

se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}_1(n(t),\lambda(0)) = \beta(n(0),\lambda(0))G(\hat{\varphi}_1(n(t),\lambda(0))). \tag{5.34}$$

Ahora bien, la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria para $\hat{\varphi}_1$ con la forma del Ejemplo 1.2, con lo que puede construirse $\hat{\varphi}_1$ a menos de cuadraturas, y con la ecuación (5.32) se obtienen las demás componentes de $\hat{\varphi}$.

Así, de modo similar a lo que ocurría en los casos anteriores, se concluye la integrabilidad por cuadraturas del sistema dinámico, hecho que se resume en el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Sea X un sistema dinámico en un abierto $M \subseteq \mathcal{R}^d$. Si se conocen abiertos $N \subseteq \mathcal{R}^k$, $\Lambda \subseteq \mathcal{R}^l$, funciones $\Pi : M \to N$, $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ y una forma simpléctica ω en M tales que*

- *Π es una fibración.*
- *Σ es solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y la fibración Π, definida localmente.*
- *Σ es isotrópica con respecto a la forma simpléctica ω.*
- *Se cumple que*
$$(L_X(i_X(\omega)) \wedge i_X(\omega)) = 0 \quad \forall n \in N, \lambda \in \Lambda, \tag{5.35}$$

entonces el sistema dinámico es integrable por cuadraturas.

Nota 5.4. *La condición impuesta por la ecuación (5.35) puede escribirse más explícitamente como*

$$\begin{aligned}&\hat{X}_l\{\omega_{aj}\hat{X}_a[\frac{\partial \omega_{ci}}{\partial x_b}\hat{X}_c + \omega_{ci}\frac{\partial \hat{X}_c}{\partial x_b}] - \omega_{ci}\hat{X}_c[\frac{\partial \omega_{ai}}{\partial x_b}\hat{X}_a + \omega_{aj}\frac{\partial \hat{X}_a}{\partial x_b}]\}+\\ &+\omega_{cb}\hat{X}_c\hat{X}_a[\omega_{aj}\frac{\partial \hat{X}_b}{\partial x_i} - \omega_{ai}\frac{\partial \hat{X}_b}{\partial x_j}] = 0, \quad i,j = 1,...,d, \quad \forall n \in N, \lambda \in \Lambda.\end{aligned} \tag{5.36}$$

5.3. Análisis comparativo de los criterios C1 a C4

En este punto pueden utilizarse los conceptos introducidos en la Sección 1.3 para analizar y comparar los criterios de solubilidad exacta tratados en los Casos 1, 2, 3 y 4. Es inmediato ver que, si se cumplen las hipótesis del criterio C1, también se cumplen las del criterio C2 para la 1-forma $\gamma = dh$. Además, de la Definición 5.3 resulta de manera directa que, si se cumplen las hipótesis del criterio C3, también se cumplen las del criterio C4.

Por otra parte, puede mostrarse que

$$\Sigma^*(L_X(i_X(\omega))) = L_{X^\Sigma}(\Sigma^*(i_X(\omega))). \tag{5.37}$$

Ahora bien, si el sistema cumple con las hipótesis del criterio C2, entonces

$$\Sigma^*(L_X(i_X(\omega))) = L_{X^\Sigma}(p^*_\Lambda(\gamma)). \tag{5.38}$$

Así, dado que λ no varía en las trayectorias de X^Σ, el lado derecho de la ecuación (5.38) se anula, y por ser Σ una solución completa,

$$L_X(i_X(\omega)) = 0, \tag{5.39}$$

de donde se tiene que se cumplen las hipótesis del criterio C3. Para resumir toda la discusión anterior, puede enunciarse el siguiente resultado.

Proposición 5.1. *Los criterios C1 a C4 cumplen que C1 $\subseteq$ C2 $\subseteq$ C3 $\subseteq$ C4.*

Nota 5.5. *Es posible demostrar que, para un sistema dinámico cualquiera, si se tiene una solución completa Σ para alguna fibración Π, que cumple $l = d - 1$, o lo que es lo mismo, $k = 1$, entonces:*

- *La solución completa Σ de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada es isotrópica con respecto a cualquier forma simpléctica en M.*
- *Puede construirse a menos de cuadraturas una forma simpléctica ω en M tal que el campo del sistema es hamiltoniano respecto a ella.*

Corolario 5.1. *Sea X un sistema dinámico en un abierto $M \subseteq \mathcal{R}^d$. Si se tiene una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada para el campo X y una fibración $\Pi : M \to N$, definida localmente, con $N \subseteq \mathcal{R}$ un abierto, entonces el sistema dinámico es integrable por cuadraturas.*

Ejemplo 5.1. *En la Sección 3.3, se consideró un sistema dinámico lineal de dimensión r, con ecuaciones para sus trayectorias de la forma*

$$\dot{x}(t) = Ax + g, \tag{5.40}$$

cuya matriz A tiene todos sus autovalores reales y al menos uno de ellos no nulo. Para un tal sistema, se encontró una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada del sistema para una proyección $\Pi(x_1, ..., x_r) = x_r$ definida globalmente en $U \times \mathcal{R}^{r-1}$, con $U = \{x_r \in \mathcal{R} / x_r > \frac{-g_r}{c_m}\}$. De este modo, el Corolario 5.1 asegura que el sistema dinámico con su dominio restringido a $\Sigma(U \times \mathcal{R}^{r-1}) = \mathcal{R}^{r-1} \times U$ es integrable por cuadraturas.

Ahora bien, se tiene que dado un sistema dinámico exactamente soluble X en M, pueden construirse a partir de sus trayectorias una fibración $\Pi : M \to N$, con $N \subseteq \mathcal{R}$ un abierto, y una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada Σ para el campo X y la fibración Π. Así, según la Nota 5.5, Σ será isotrópica respecto a cualquier forma simpléctica ω, y podrá construirse ω de modo que el campo del sistema sea hamiltoniano respecto a ella. Así, el criterio C1 es maximal, lo que permite enunciar los siguientes resultados.

Proposición 5.2. *Los criterios C1 a C4 cumplen que C1 $\simeq$ C2 $\simeq$ C3 $\simeq$ C4.*

Corolario 5.2. *Los criterios C1 a C4 son maximales.*

Corolario 5.3. *Los criterios C1 a C4 equivalen al criterio del Ejemplo 1.9.*

Finalmente, de modo completamente análogo a lo realizado para mostrar que el criterio C1 es maximal, a partir de la plausibilidad del criterio del Ejemplo 1.9 puede mostrarse que C1 es también plausible, y de lo discutido entre el comienzo de esta sección y la Proposición 5.1 puede deducirse lo siguiente.

Proposición 5.3. *Los criterios C1 a C4 son plausibles.*

Conclusiones

Tal como se dijo al comienzo de este escrito, los objetivos centrales del trabajo fueron dos. En primer lugar, se pretendía proveer una forma de analizar desde un punto de vista meramente teórico diferentes criterios de integrabilidad por cuadraturas para sistemas dinámicos. En segundo lugar, se esperaba formular y estudiar, desde el punto de vista anteriormente mencionado, nuevos criterios de solubilidad exacta para sistemas dinámicos en general aprovechando la versión generalizada de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Además, paralelamente se buscaba traducir algunos resultados conocidos en el lenguaje de la geometría diferencial al lenguaje del cálculo multivariable y el álgebra lineal.

El primero de los objetivos mencionados en el párrafo anterior fue tratado en la Sección 1.3. Si bien el hecho de que un criterio de solubilidad exacta no cumpla con los tres puntos enumerados al comienzo de dicho apartado no significa que deba ser descartado, tales aspectos sí proveen una herramienta útil para evaluar un tal criterio, dando una idea de qué tan fructífero puede ser buscar la información requerida por este. En ese sentido, las condiciones de plausibilidad y maximalidad introducidas en tal sección fueron estudiadas en diversos criterios de integrabilidad presentados entre los Capítulos 1 y 5. Además, también en la Sección 1.3 se introdujeron nociones de equivalencia y de orden parcial de criterios, que fueron aplicadas en varios de los criterios de solubilidad exacta presentados en el escrito (por ejemplo, para comparar el criterio de integrabilidad conmutativa con el de integrabilidad no conmutativa, o este último con el derivado de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada en sistemas hamiltonianos).

El objetivo central del trabajo, que fue el segundo de los mencionados anteriormente, fue estudiado principalmente en los Capítulos 4 y 5. En el primero de estos capítulos se presentó, se demostró y se analizó un criterio de integrabilidad para sistemas hamiltonianos basado en la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada (ya formulado anteriormente en el lenguaje de la geometría diferencial, ver [1]). En el Capítulo 5 se enunciaron, discutieron y analizaron, sin incluir todas las demostraciones, criterios de integrabilidad por cuadraturas basados en dicha ecuación para sistemas dinámicos generales; mostrando además que, a pesar de la gran diferencia aparente entre las condiciones que ellos imponen, son todos equivalentes a uno de los criterios más conocidos para sistemas dinámicos generales: el del Ejemplo 1.9.

Esto último dice, en particular, que no tiene sentido buscar ejemplos de sistemas dinámicos que cumplan las hipótesis de alguno de los nuevos criterios pero no del antedicho. Sin embargo, tal como se discutió en la Sección 1.3, ello no quiere decir que no tengan utilidad alguna, ya que aportan una herramienta diferente con la que analizar la integrabilidad de los sistemas dinámicos.

Apéndice A

El teorema de Lie sobre superficies de nivel

En este apéndice se presenta sólo por completitud una versión del Teorema de Lie junto con su demostración, ya que es un instrumento crucial en algunos de los criterios de integrabilidad por cuadraturas exhibidos en este escrito.

Teorema A.1. *Sea $U \subseteq \mathcal{R}^r$ un abierto, $S \subseteq U$ un subconjunto de dimensión k tangente a un campo X en U. Si se conocen campos X^i,$i = 1, .., k$ en U tales que*

- *los campos $X^1, ..., X^k$ son linealmente independientes en S, o sea, el conjunto $\{\hat{X}^1(x), ..., \hat{X}^k(x)\}$ es linealmente independiente $\forall s \in S$,*
- *los campos $X^1, ..., X^k$ son tangentes a S,*
- *los campos $X, X^1, ..., X^k$ son tales que*

$$[X^i, X^j](s) = 0 \quad \forall s \in S, \quad i, j = 1, ..., k, \tag{A.1}$$

$$[X^i, X](s) = 0 \quad \forall s \in S, \quad i = 1, ..., k, \tag{A.2}$$

entonces, las trayectorias de X contenidas en S pueden construirse a menos de cuadraturas.

Demostración. Dado $s \in S$, si $\hat{X}(s) = 0$, entonces la trayectoria de X que pasa por s es la función constante. Supóngase entonces que $\hat{X}(s) \neq 0$. Ya que los campos $X, X^1, ..., X^k$ son tangentes a S, S tiene dimensión k y los campos $X^1, ..., X^k$ son linealmente independientes en S, puede escribirse el vector $\hat{X}(s)$ como combinación lineal de los vectores $\hat{X}^i(s)$. Ahora bien, como $\hat{X}(s) \neq 0$, al menos uno de los coeficientes de la combinación lineal no se anulará. Se asume que el coeficiente de $\hat{X}^1(s)$ es no nulo (sino, se reordenan los campos de modo que así sea). Ello quiere decir que el conjunto $\hat{X}(s), \hat{X}^2(s), ..., \hat{X}^k(s)$ es linealmente independiente. Por continuidad de los campos,

$\exists V \subseteq S$ abierto respecto de la topología relativa de S (es decir, $\exists V' \subseteq U / V' \bigcap S = V$, con V' abierto), con $s \in V$, en el que los campos $X, X^2, ..., X^k$ son linealmente independientes. De ahora en adelante, se escribe $X := X^1$, dejando de lado el campo originalmente denotado por X^1.

Sean $x = (x_1, ..., x_k)$ coordenadas locales de V (restringiendo V en caso de ser necesario). Como los campos $X^1, ..., X^k$ son tangentes a S, dada una función $f : V \to \mathcal{R}$, sus derivadas direccionales pueden escribirse

$$(\hat{X}^i)^t \nabla f = b_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

para algunas funciones $b_{ij} : V \to \mathcal{R}$, $i, j = 1, ..., k$. □

Ahora, consíderese las ecuaciones

$$b_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \delta_{il}, \quad i, l = 1, ..., k,$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker. Sea $b : V \to Mat(\mathcal{R}, k) / (b(x))_{ij} = b_{ij}(x)\ \forall x \in V$. Dado que los campos $X^1, ..., X^k$ son linealmente independientes en V, la matriz $b(x)$ debe ser invertible $\forall x \in V$, y con ello la última ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = ((b(x))^{-1})_{il}, \quad i = 1, ..., k. \tag{A.3}$$

Por otra parte, puede mostrarse que las ecuaciones (A.1) y (A.2) equivalen a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}((b(x))^{-1})_{il} = \frac{\partial}{\partial x_i}((b(x))^{-1})_{jl}, \quad i, j, l = 1, ..., k,$$

lo que implica que la ecuación (A.3) puede resolverse a menos de cuadraturas. Para cada valor de l, la solución general y_l está dada por

$$y_l(x_1, ..., x_k) = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{0,i}}^{x_i} ((b(x))^{-1})_{ik}(x_{0,1}, ..., x_{0,i-1}, u, x_{i+1}, ..., x_k) du.$$

Pueden elegirse las constantes de integración $x_{0,i}$ como las coordenadas de s. En tal caso las funciones $y_1, ..., y_k$ definen un sistema de coordenadas en V. En particular, son independientes en tal conjunto, y satisfacen que

$$(\hat{X}^1(x))^t \nabla y_l(x) = \delta_{1,l}, \quad l = 1, ..., k.$$

Así, en una trayectoria $(x_1(t), ..., x_l(t))$ de X^1 se satisfacen las relaciones

$$\dot{y_1}(t) = 1,$$

$$\dot{y}_l(t) = 0, \quad l = 2, ..., k.$$

De este modo, tales trayectorias pueden obtenerse de

$$y_1(x_1(t), ..., x_k(t)) = y_{0,1} + t, \tag{A.4}$$

$$y_l(t)(x_1(t), ..., x_k(t)) = y_{0,l}, \quad l = 2, ..., k, \tag{A.5}$$

ya que, por ser las funciones y_l independientes, pueden resolverse unívocamente para $x_i(t)$.

Dado que el proceso anterior puede repetirse $\forall s \in S$, se concluye lo que se quería mostrar.

Bibliografía

[1] Grillo, E., Sergio; Padrón. A hamilton-jacobi theory for general dynamical systems and integrability by quadratures in symplectic and poisson manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, págs. 101–129, 2016. vii, ix, xi, 26, 41, 49

[2] Cariñena, e. a., José F. Geometric hamilton-jacobi theory. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, págs. 1417–1458, 2006. xi

[3] Cariñena, e. a., José F. Geometric hamilton-jacobi theory for nonholonomic dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, págs. 431–454, 2010. xi

[4] De León, e. a., M. A hamilton-jacobi theory on poisson manifolds. *Journal of Geometric Mechanics*, págs. 121–140, 2014. xi

[5] De León, e. a., M. Linear almost poisson structures and hamilton-jacobi equation. application to nonholonomic mechanics. *Journal of Geometric Mechanics*, págs. 159–198, 2010. xi

[6] Teschl, G. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. 2012. 1, 4

[7] Goldstein, H. Classical Mechanics. 3ª edón. 2000. 5, 13, 14, 15

[8] Boothby, W. An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry. 1975. 9, 41

[9] Liberman, C., P; Marle. Symplectic Geometry and Analytical Mechanics. 1987. 10

[10] Grillo, S. Non-conmutative integrability, exact solvability and the hamilton-jacobi theory. *arXiv:1804.10958 [nlin.SI]*. 10, 37

[11] Evans, L. Partial Differential Equations. 1997. 16

[12] Arnold, V. I. Mathematical methods of classical mechanics. 2ª edón. 1991. 16

[13] Grillo, S. Existence of local isotropic solutions of the generalized hamilton-jacobi equations. *En redacción*. 37

[14] Montenegro, P. R. La Ecuación de Hamilton-Jacobi para Sistemas Mecánicos con Vínculos. Proyecto Fin de Carrera, Instituto Balseiro, 2012.