

PROYECTO INTEGRADOR
CARRERA DE INGENIERÍA NUCLEAR

Equilibrio magnetohidrodinámico con frontera libre y su aplicación a plasmas de fusión

Autor

Alan Erik Pérez Winter

Director

Dr. Pablo García Martínez

Co-Director

Dr. Ricardo Farengo

Miembros del Jurado

Dr. Claudio Padra
(CNEA - CONICET)

Mgtr. Ezequiel Fogliatto
(CNEA)

Junio de 2019

Sección Fusión Nuclear Controlada y Física de Plasmas
Gerencia de Física
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
San Carlos de Bariloche - Río Negro
Argentina

La preocupación por el hombre y su destino deben ser siempre el principal interés de cualquier esfuerzo técnico. Nunca lo olvide entre sus diagramas y ecuaciones.

-Albert Einstein

Una sociedad que priorice la igualdad por sobre la libertad no obtendrá ninguna de las dos cosas. Una sociedad que priorice la libertad por sobre la igualdad obtendrá un alto grado de ambas.

-Milton Friedman

Trata de no ser un hombre de éxito, sino más bien un hombre de valor.

-Albert Einstein

Ante situaciones decisivas en su vida, solo tres palabras le serán necesarias. Templanza, valor y resolución.

-Anónimo

La soberbia es una discapacidad que suele afectar a pobres infelices mortales, que se encuentran de golpe con una miserable cuota de poder.

-Gral. José de San Martín

Escribir es ante todo poner de manifiesto la intensidad con que uno vive un problema o un concepto. La intensidad de la enunciación nos da pruebas de la veracidad de la preocupación. Creo que no se trata de escribir sobre nada sino desde todo.

-Santiago Kovadloff

La duda es uno de los nombres de la inteligencia.

-Jorge Luis Borges

La estabilidad y el progreso de la sociedad dependen en grado decisivo de la calidad humana de sus componentes.

-Arturo Umberto Illia

La filosofía del aula en una generación será la filosofía del gobierno en la siguiente.

-Abraham Lincoln

Resumen

El tokamak es un dispositivo toroidal diseñado para confinar magnéticamente un plasma de alta temperatura con el objetivo de obtener energía de la fusión de núcleos livianos, y es considerado el mayor candidato a convertirse en el primer tipo de reactor de fusión nuclear viable. Dentro del plasma, las líneas de campo magnético forman superficies magnéticas cerradas, que pueden ser identificadas por su cantidad de flujo magnético. En este sentido, la ecuación de Grad-Shafranov permite calcular la posición de estas superficies junto con su cantidad de flujo magnético poloidal en la condición de equilibrio de fuerzas magnetohidrodinámico (MHD). Esta última es una ecuación elíptica de segundo orden en general no lineal. En esta tesis estudiamos la solución de la ecuación de Grad-Shafranov que determina el equilibrio MHD como problema de frontera libre, es decir, en el caso en que la forma y posición de la separatriz del plasma resultan de la interacción entre las corrientes que por éste circulan y las corrientes que circulan por las bobina externas del tokamak. La organización del trabajo es la siguiente. En el Capítulo 1 introducimos algunos conceptos de fusión nuclear y presentamos a los reactores tipo Tokamak. Luego, en el Capítulo 2, describimos el modelo MHD para la dinámica macroscópica de un plasma magnetizado, e introducimos la ecuación de Grad-Shafranov para equilibrios axi-simétricos. En particular, se describen las dos formulaciones más comunes del problema del equilibrio: el problema de frontera fija y el problema de frontera libre. El problema de frontera libre presenta a su vez dos variantes: el problema directo y el problema inverso. En el Capítulo 3 se desarrollan y validan métodos numéricos para resolver el problema inverso de frontera libre. Finalmente, en el Capítulo 4, se presenta un método iterativo para resolver el problema directo de frontera libre. Como los esquemas de resolución de este problema sufren en general de una inestabilidad vertical, se describe y valida un método de estabilización y de calibración. El esquema estabilizado y calibrado se utiliza para estudiar equilibrios elongados con alta presión en el plasma.

Palabras clave: *Fusión nuclear, magnetohidrodinámica (MHD), frontera libre, tokamak, ecuación de Grad-Shafranov, control magnético, optimización.*

Abstract

The tokamak is designed to magnetically confine a high temperature plasma with the goal of obtaining usable energy from the fusion of light nuclei. This configuration is considered as the major candidate to build the first feasible nuclear fusion power reactor. Inside the plasma, the magnetic field lines form closed magnetic flux surfaces that can be labeled by the amount of magnetic flux they contain. Using this labeling, the Grad-Shafranov equation allows for the calculation of the spatial position and magnetic flux content of these surfaces in the magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium condition. This is a second order elliptic partial differential equation which is non linear in the general case. In this thesis, the free boundary MHD equilibrium problem is tackled. This problem is obtained when the shape and position of the plasma are obtained as a result of the interaction of the currents flowing through the plasma and the external shape coils. The thesis is organized as follows. In the first chapter the basic concepts of nuclear fusion and tokamak devices are introduced. In Chapter 2, the MHD model for the macroscopic description of a magnetized plasma dynamics is described, as well as the Grad-Shafranov equation for axisymmetric equilibria. In particular, the two typical statements of the MHD equilibrium problem are presented: the fixed boundary and free boundary problems. The free boundary problem presents, in turn, two variants: the direct and the inverse formulation. In the third chapter, the inverse free boundary MHD equilibrium problem is considered. Numerical methods to obtain the shaping coil currents as an optimization problem are developed. In Chapter 4, an iterative method to solve the direct free boundary problem is presented. Since this kind of methods suffers of a vertical position instability for elongated plasmas, a stabilization scheme is introduced and tested. The stabilization scheme produces a small shift of the final position of the plasma. A correction of this effect is designed in terms of a distribution of calibration currents in the external shaping coils. The idea of the calibration currents can be extended to account for other unmodeled effects. Finally, the stabilized and calibrated methods is employed to study elongated equilibria relevant to ITER with high plasma pressure.

Keywords: *Nuclear fusion, magnetohydrodynamics (MHD), free boundary, tokamak, Grad-Shafranov equation, magnetic control, optimization.*

Agradecimientos

Deseo tener el enorme placer de agradecer a mi director, el señor Pablo García Martínez, por su paciencia, transparencia, humildad y extensa dedicación en toda actividad desarrollada en este proyecto integrador de la carrera de ingeniería; así como también el hecho de haber depositado su confianza en mi, brindado su tiempo y transmitido sus conocimientos. Quisiera agradecer también a mi co-director, el señor Ricardo Farengo, por ser quien bajo su estricta y admirable formalidad en los conocimientos del área de física de plasmas, ha logrado en mi una sólida formación académica a través de las materias dictadas durante el desarrollo de este proyecto. Quisiera aprovechar este espacio para destacar a los señores Javier Fernandez, Ariel Márquez y José Héctor González, docentes del Instituto Balseiro, por su compromiso, dedicación y disciplina en el ámbito académico docente, ya que de forma directa han contribuido a mi formación profesional e indirectamente han hecho factible mi participación en este proyecto integrador. Me resulta ineludible mencionar a mis padres y hermano, los cuales les debo un profundo agradecimiento por estar siempre *al pie del cañón*, y por su constante apoyo, tanto en lo ético, moral como sentimental. Por último, aunque no menor, deseo honrar con estas humildes palabras, a todos aquellos conciudadanos que de forma involuntaria, a través de impuestos, han subsidiado mi carrera universitaria de grado. A ellos, mis respetos y aspiro a contribuirlos con mis conocimientos ya sea directa o indirectamente.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Reacciones nucleares	3
1.1.1. Valor de Q en una reacción nuclear	3
1.1.2. Sección eficaz microscópica	4
1.1.3. Fusión nuclear	6
1.2. Plasma	8
1.2.1. ¿Qué es un plasma?	8
1.2.2. Tipos de confinamiento	9
1.3. Tokamak	10
1.3.1. Esquema de confinamiento magnético	11
1.3.2. Control magnético, posición y forma del plasma	11
1.3.3. Sistemas de accionamiento de corriente auxiliar	13
1.3.4. Control de impurezas	15
1.3.5. Estructura de un tokamak	15
1.4. Proyecto ITER	17
1.4.1. Objetivos	18
1.5. Objetivos del Proyecto Integrador	19
2. Magnetohidrodinámica	21
2.1. Ecuaciones MHD	23
2.1.1. Breve deducción teórica	23
2.1.2. Equilibrio MHD	25
2.1.3. Ecuación de difusión magnética	26
2.2. Cantidades de superficie	27
2.3. Geometría y parámetros del plasma	29
2.3.1. Parámetros geométricos	30
2.3.2. Parámetros físicos	31
2.4. Configuración axisimétrica	32
2.4.1. Ecuación de Grad-Shafranov	32
2.4.2. Adimensionalización de la ecuación de Grad-Shafranov	36
2.4.3. Flujo magnético debido a una espira circular	37
2.5. Formulación del problema del equilibrio	39
2.5.1. Problema de frontera fija	40
2.5.2. Problema de frontera libre	42

3. Problema inverso de frontera libre	47
3.1. Determinación de las corrientes en las bobinas externas	49
3.2. Construcción del mapa magnético en el dominio computacional	51
3.2.1. Determinación de Ψ_p en el contorno	52
3.2.2. Resolución de la ecuación de Grad-Shafranov símil Poisson	53
3.3. Validación usando equilibrio de Solovév	55
3.4. Validación usando equilibrio de frontera fija	57
4. Problema directo de frontera libre	61
4.1. Detección de la frontera y puntos críticos	63
4.2. Método de cálculo para el problema directo	65
4.3. Cálculo iterativo e inestabilidad vertical	65
4.4. Estabilización y limitaciones del modelo	68
4.4.1. Corrientes de calibración	71
4.5. Equilibrios tipo ITER con alto β	74
5. Conclusiones y trabajos futuros	77
Bibliografía	84
Índice de figuras	87
Índice de tablas	89
A. Certificación PPS y P&D	91

Capítulo 1

Introducción

El presente capítulo tiene como objetivo principal introducir al lector en conceptos físicos, necesarios para la comprensión de la teoría de plasmas y su modelo magnetohidrodinámico. En primer lugar partimos de lo más básico, es decir, una introducción a las reacciones nucleares y sus tipos. Dentro de esta sección desglosamos los conceptos de energía liberada o suministrada en una reacción (valor de Q de la reacción), de sección eficaz microscópica asociada a la plausibilidad de ocurrencia de una reacción nuclear, y de la fusión nuclear como reacción central de interés en este trabajo. En la sección siguiente describimos el medio por el cual tienen lugar las reacciones de fusión, i.e. el plasma. Posteriormente, presentamos al *tokamak* como dispositivo de confinamiento magnético del plasma, el cual presenta en la actualidad mayores posibilidades como candidato a ser un tipo de reactor de fusión nuclear viable. Prontamente, presentamos el proyecto ITER, como uno de los *tokamak* en proceso de construcción, dando una breve descripción técnica y sus principales características, como así también los objetivos propuestos. Finalizando el capítulo, describimos puntualmente los objetivos propuestos dentro de este Proyecto Integrador.

1.1. Reacciones nucleares

Las reacciones nucleares juegan un papel muy importante en las ciencias e ingenierías nucleares, a tal punto que a través de éstas, varios tipos de radiaciones son producidas o detectadas, o incluso información acerca de la estructura interna del núcleo es descubierta. Existen dos categorías principales de reacciones nucleares.

En la primer categoría, el elemento reactivo inicial X es un simple átomo o núcleo el cual se modifica espontáneamente mediante la emisión de una o más partículas, es decir,



donde Y_i representa un núcleo luego de la reacción, o más conocido como el producto de reacción. Dicha reacción expresada en (1.1) es denominada decaimiento radiactivo. Hacemos notar que el decaimiento radiactivo es un caso particular de las reacciones nucleares ya que, por su ocurrencia de carácter espontánea, debe necesariamente ser exotérmica, i.e., la masa debe reducirse en el proceso de decaimiento y, esta diferencia de masa debe ser liberada en forma de energía, generalmente en forma de energía cinética sobre los productos de reacción.

En la segunda categoría se encuentran las reacciones denominadas binarias en donde dos partículas (núcleos o protones) interactúan para dar lugar a diferentes nuevas partículas. De este tipo de reacciones nucleares, la más conocida es aquella en la cual algún núcleo x se mueve con cierta energía cinética y colisiona e interactúa con un núcleo X , formando así un par de núcleos y e Y , es decir,¹



La expresión para las reacciones nucleares binarias dada en (1.2) puede ser escrita bajo una notación distinta, frecuentemente denotada como $X(x, y)Y$, donde x e y son usualmente los núcleos mas livianos involucrados en la reacción.

1.1.1. Valor de Q en una reacción nuclear

En cualquier reacción nuclear la energía debe conservarse (al igual que la carga eléctrica), es decir, la energía total, incluyendo la energía asociada a la masa en reposo, del estado inicial de las partículas debe ser igual al total de la energía del estado final. Matemáticamente, esta conservación de la energía se expresa como

$$\sum_i [E_i + m_i c^2] = \sum_i [E'_i + m'_i c^2], \quad (1.3)$$

¹A pesar de la existencia de unas pocas reacciones nucleares de importancia (e.g., fisión nuclear) en donde las partículas que interactúan producen mas de dos productos, restringimos la atención, por el momento, a aquellas que producen solamente un par de núcleos como producto de la reacción.

donde E_i (E'_i) es la energía cinética de la i -ésima partícula inicial (final) con una masa en reposo m_i (m'_i). Cualquier cambio en la energía cinética debe ser acompañado por un cambio en el total de la masa en reposo de las partículas, tanto antes como después de la reacción [1]. A partir de este concepto, se define el denominado valor Q , un valor característico de la reacción que será usado con frecuencia al momento de explicitar las distintas reacciones nucleares de fusión nuclear en la sección 1.1.3.

El valor Q puede ser determinado, matemáticamente, mediante la diferencia entre la energía cinética total de las partículas finales e iniciales. Ergo, el valor de Q cuantifica la ganancia (pérdida) de energía cinética en la reacción, lo cual deberá existir una pérdida (ganancia) de masa en reposo. Quiere decir, que a un cambio en la energía cinética total antes y después de la reacción, se le atribuye un cambio en la masa total en reposo. De esta manera, el valor de Q también puede ser cuantificado a través de la diferencia entre las masas totales en reposo, al inicio y al final de la reacción. Como consecuencia inmediata se tiene que el signo de Q puede ser negativo o positivo. Si Q es positivo, implica que hubo una pérdida de masa en reposo en la reacción y una ganancia en la energía cinética total, ergo la reacción se denomina exotérmica. Caso contrario, donde el Q es negativo, se denomina endotérmica y este tipo de reacciones no pueden ocurrir al menos que las partículas iniciales posean suficiente cantidad de energía cinética [2].

1.1.2. Sección eficaz microscópica

La sección eficaz microscópica es una medida de la probabilidad de ocurrencia de una reacción nuclear, caracterizada por una dada partícula incidente y un tipo de material objetivo². En consecuencia, la sección eficaz es una característica esencial de la reacción y se modifica con el tipo de partícula incidente o el material objetivo. Además, la sección eficaz varía según la energía de la partícula incidente, es decir, al ser una función densidad de probabilidad, la misma es una distribución según la variable energética. A modo de ejemplo, la probabilidad de ocurrencia (i.e. sección eficaz) de la fisión nuclear en un núcleo de uranio mediante un neutrón incidente, no será la misma si dicho neutrón se encuentra en un rango térmico (i.e. de bajas energías, generalmente menor a 0.5 eV) o epitérmico (i.e. de energías medias, generalmente entre 0.5 eV y 0.5 MeV).

Una comprensión inicial del concepto de sección eficaz microscópica puede ser llevado a cabo mediante una interpretación geométrica de la misma [3]. Si la densidad de blancos (i.e. núcleos del material objetivo) es uniforme, podemos imaginar a cada blanco ocupando un área $\sigma = \pi R^2$ dentro de un área mayor denominada A , por donde la partícula incidente puede atravesar el material libremente, como podemos observar en la Figura 1.1. Ergo, la probabilidad de interacción entre la partícula incidente y el blanco puede ser expresada simplemente como

$$P(E) = \frac{\sigma}{A},$$

²Entiéndase al término objetivo, en este caso aplicado al material, como el blanco de las partículas incidentes, es decir, las partículas contra las cuales colisionarán las correspondientes incidentes.

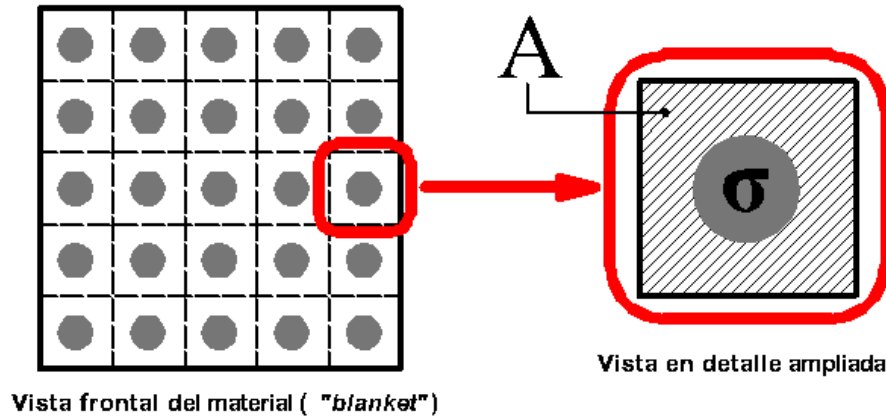


Figura 1.1.: Representación esquemática del blanco junto con sus núcleos, con motivo de la interpretación geométrica de la sección eficaz .

es decir, el cociente entre áreas, y donde $P(E)$ representa la probabilidad del evento. Sin embargo, esta interpretación geométrica de la sección eficaz microscópica puede ser frecuentemente malinterpretada debido a que σ obtiene valores mas grandes o incluso mas pequeños que la sección eficaz geométrica, debido a otros efectos con origen en la mecánica cuántica, dado por la naturaleza de las partículas.

Sea un haz colimado de partículas mono-energéticas, i.e. de igual é única energía y unidireccional, se define a J como el número de partículas que atraviesa una superficie, en dirección perpendicular al haz, de 1 cm^2 por segundo, o en otros términos, la intensidad de neutrones incidentes. Dicha superficie es parte de un material el cual contiene N núcleos atómicos idénticos por unidad de volumen (cm^3). Cuando el haz colimado colisiona con el material y por ende interactúa con sus átomos, se producirán eventos, como por ejemplo colisión elástica, captura nuclear, fisión nuclear, entre otros. El número de eventos por unidad de tiempo y volumen, es decir la tasa de ocurrencia de reacciones, resulta

$$\Gamma = J N \sigma, \quad (1.4)$$

en donde se asume que las partículas incidentes en el material penetran al mismo prácticamente sin atenuación alguna. La constante de proporcionalidad σ se denomina sección eficaz de interacción microscópica [4], cuya unidad de medida es cm^2 , o su equivalente en unidad de superficie, la cual se deduce de las restantes cantidades $J[\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}]$, $N[\text{cm}^{-3}]$, $\Gamma[\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}]$ de la ecuación (1.4). Dado el orden de magnitud característico de las secciones eficaces que se obtiene en las reacciones nucleares, y haciendo analogía a la interpretación geométrica en donde el radio nuclear es del orden de 10^{-12} , lo cual conlleva a una superficie frontal del orden de 10^{-24} , una alternativa equivalente como unidad de medida es el *barn*, cuya igualdad se estipula como

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, hemos discutido el concepto de sección eficaz microscópica en un sentido mas bien abstracto, sin especificar el tipo de reacción nuclear. A modo ilustrativo, en la Figura 1.2 se presenta la sección eficaz microscópica de fisión del Uranio (^{235}U y ^{238}U), en función de la energía de los neutrones incidentes, donde se observa una fuerte dependencia con respecto a esta variable.

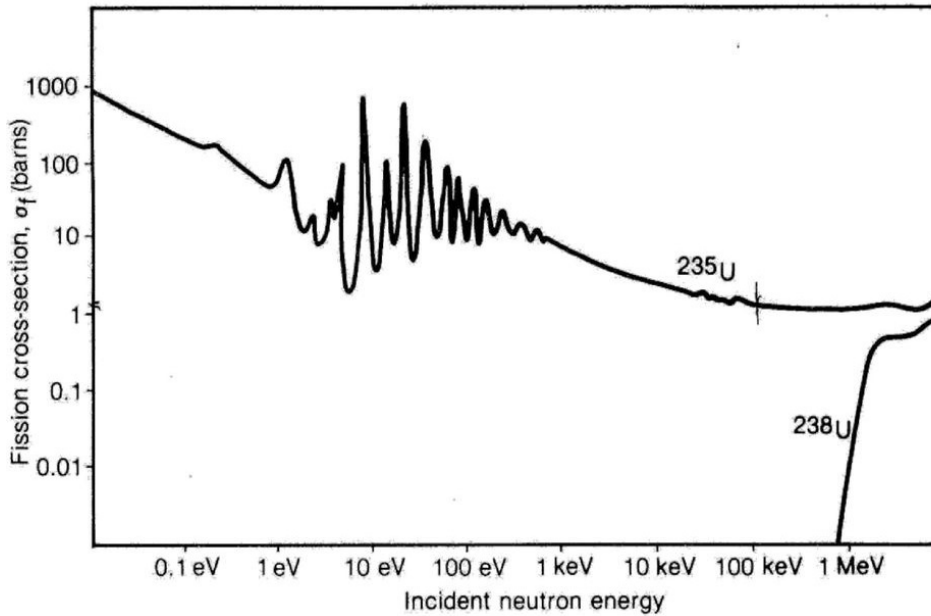


Figura 1.2.: Representación gráfica de la sección eficaz microscópica de fisión del Uranio según sus isótopos ^{235}U y ^{238}U , en función de la energía.

1.1.3. Fusión nuclear

A diferencia de la fisión nuclear en donde un núcleo pesado, mayormente inestable, es colisionado por una partícula y se divide, dando lugar a dos o mas núcleos pesados, pero mas livianos que el original, y liberando energía; la fusión nuclear se presenta como una posible fuente de energía del futuro. En estas reacciones, dos núcleos livianos se juntan para dar lugar a otro núcleo mas pesado junto con alguna partícula, según el tipo de reactivos, liberando también una cierta cantidad de energía. Para poder obtener energía de fusión se requiere que la reacción sea exotérmica, lo cual solo ocurre para núcleos de bajo número atómico Z . Además se requiere que los núcleos reactivos tengan suficiente energía como para vencer la barrera Coulombiana, como por ejemplo en el plasma en donde los núcleos que lo constituyen se encuentran ionizados. Una situación cotidiana en la que ocurren reacciones, tiene lugar en nuestro Sol, en donde se comienza con la cadena $p-p$ (átomos de hidrógeno) hasta alcanzar el hierro.

Como se mencionó en el párrafo anterior, luego de una reacción de fusión la masa total es menor que la inicial. La masa “perdida” se ha transformado en energía, la cual podemos

cuantificar mediante la ecuación (1.3), expresándose como

$$E = (m_r - m_p) c^2,$$

en donde m_r y m_p representan, respectivamente, la masa de los reactivos y los productos de reacción, y E la energía resultante de la misma. Por lo tanto dados dos reactivos con densidades n_1 y n_2 , la tasa de reacciones de fusión por unidad de volumen esta dada por

$$f = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle, \quad (1.5)$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ es la reactividad, definida como el promedio entre la sección eficaz σ de la reacción y la velocidad v de los reactivos. Dada la fuerte dependencia de la reactividad con la temperatura, buscamos optimizar esta variable, i.e. mayor reactividad factible a la menor temperatura posible. En este sentido, la que mejor satisface dicha condición es la reacción D-T, la cual se formula como

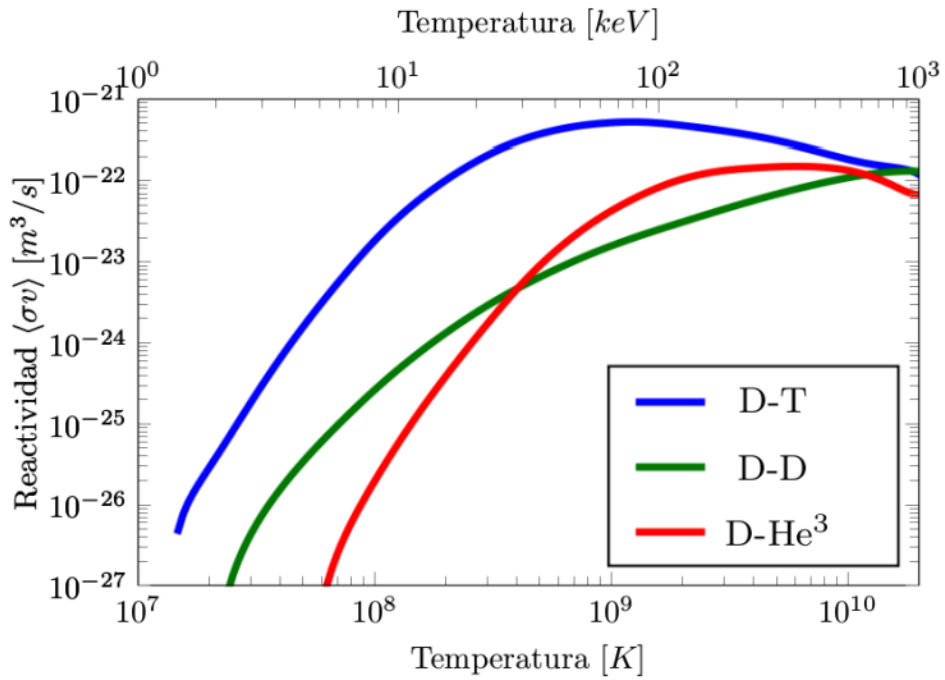
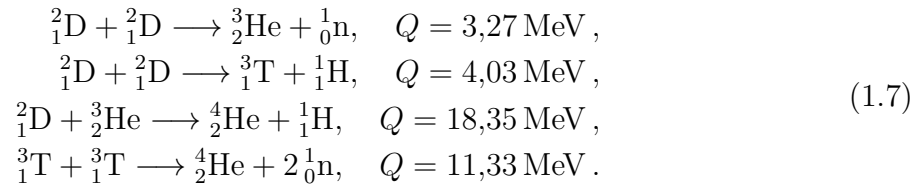


Figura 1.3.: Representación gráfica de la reactividad en función de la temperatura, expresada en [K] o en [KeV], según las reacciones de fusión de mayor interés para el diseño de reactores de fusión.

No obstante existen otras reacciones de fusión que también satisfacen esta condición,

las cuales son



La Figura 1.3 muestra la reactividad en función de la temperatura, tanto en grados Kelvin [K] como en energía [KeV]. Como podemos observar, debido al elevado nivel de temperatura del combustible, el mismo deberá estar necesariamente en estado de plasma, el cual se discutirá luego en la Sección 1.2.

La forma más eficiente de lograr fusión nuclear sostenida radica en confinar el combustible en temperaturas del orden de 1 a 10 KeV, cuya densidad de partículas sea aproximadamente del orden de $10^{20}/\text{cm}^3$. En estas condiciones, podemos asegurar que existirá una cierta cantidad relevante de partículas, dentro de la distribución de velocidad con la suficiente energía como para contribuir a las reacciones de fusión.

1.2. Plasma

Hasta aquí hemos presentado conceptos básicos, y a la vez detallados, sobre reacciones nucleares, en particular las reacciones de fusión nuclear, las cuales serán de relevancia en este trabajo. Sin embargo, no hemos mencionado hasta el momento el medio físico en el cual se llevaran a cabo dichas reacciones de fusión. Por este motivo, en los sucesivos párrafos dentro de esta sección, introduciremos el concepto de plasma, sus principales características y funciones.

1.2.1. ¿Qué es un plasma?

Comúnmente es sabido que un sólido fusiona en un líquido, mediante un ingreso de energía al sistema, cuando la agitación térmica de los átomos rompe la estructura cristalina del mismo. Análogamente ocurre cuando un líquido ebulle en un gas neutro, i.e. los átomos se vaporizan, a través de la superficie, con mayor rapidez que aquellos que se re-condensan. Posteriormente si partimos de un gas neutro, al entregarle suficiente energía se comienza a ionizar (átomos colisionan entre sí y se expulsan electrones), obteniéndose una mezcla de iones, electrones y partículas neutras. El número de partículas cargadas respecto al de partículas neutras es representativo del grado de ionización, en donde cero partículas neutras implican una ionización completa. Por lo tanto, cuando el grado de ionización es tal que el comportamiento dinámico del sistema es dominado por fuerzas de largo alcance, i.e. campos electromagnéticos, en vez de colisiones binarias (como ocurre entre partículas neutras), se dice que el gas se ha transformado en un plasma, denominándolo “cuarto estado de la materia”. Ergo, la transición de gas neutro a plasma se entiende como un

proceso continuo, en donde no existe cambio de fase como sí ocurre para los restantes estados de la materia, y por ende no puede definirse una temperatura característica del cambio de gas a plasma. A partir de lo anterior, en la Definición 1.1 explicitamos un significado formal del plasma.

Definición 1.1. *Un plasma es un gas cuasineutro³ constituido por partículas cargadas y neutras, en el cual su dinámica se fundamenta en un comportamiento colectivo⁴, y donde la energía potencial de una partícula debida a la interacción con su vecino es mucho menor que su energía cinética.*

El dato relevante y primordial es que un gas ionizado tiene propiedades únicas. En un plasma, la separación de carga entre iones y electrones da lugar a la presencia de un campo eléctrico, y el movimiento de estas partículas permite la generación de corrientes eléctricas y campos magnéticos [5].

Un plasma no surge como tal simplemente por calentar un gas dentro de un recipiente. El problema es que la mayoría de las veces, el recipiente no puede ser calentado a una temperatura la cual sí necesita el plasma para ser ionizado, de lo contrario el recipiente llegará a su punto de fusión, o más bien a su punto de ebullición, o incluso más aún a convertirse en un plasma. Típicamente, en los laboratorios, una pequeña cantidad de gas es calentada y ionizada haciendo circular una corriente eléctrica a través de él, o inyectando ondas de radio. A su vez se aprovecha la capacidad térmica del recipiente a través de refrigeración por largos períodos de tiempo, de manera pulsada, con el fin de no permitir la fusión del recipiente.

1.2.2. Tipos de confinamiento

Un plasma no puede surgir o establecerse simplemente dentro de un recipiente constituido por algún material, como comúnmente son contenidos los gases neutros. El principal problema radica en el contacto físico entre el recipiente y el plasma, ya que este último debe encontrarse a elevadas temperaturas para poder definirse como tal y, en consecuencia el recipiente podría alcanzar su punto de fusión. A partir de lo anterior, introducimos el concepto de confinamiento y la naturaleza del mismo, clasificado en tres modos distintos.

- **Confinamiento gravitatorio:** Un primer enfoque de confinamiento de plasma implementa el campo gravitatorio. Dicho método ocurre únicamente en las estrellas debido a la cantidad de masa que tienen, donde en su interior, se producen temperaturas y presiones extremas necesarias para comprimir la materia en estado de plasma. A modo ilustrativo, en el núcleo del Sol, la temperatura es aproximadamente 15 MK (quince millones de grados Kelvin) y la presión es de 4×10^{16} Pa (aproximadamente cuatrocientos mil millones de veces la presión atmosférica). Por

³El término cuasineutro significa que desde el punto de vista macroscópico, el plasma se observa como un elemento neutro de carga.

⁴El término colectivo significa que las interacciones electromagnéticas establecen el comportamiento estadístico del sistema.

obvias razones, esta propuesta de confinamiento se encuentra fuera de alcance de cualquier sistema de generación de fusión nuclear en nuestro planeta Tierra.

- **Confinamiento magnético:** Un segundo enfoque de confinamiento de plasma implementa campos magnéticos para confinar al mismo. Dado que un plasma se encuentra compuesto por partículas cargadas en movimiento, sus trayectorias pueden ser alteradas bajo la presencia de campos electromagnéticos. Se requiere un arreglo espacial del campo capaz de calentar y confinar el plasma. Este último se presenta de manera muy inestable en este tipo de dispositivos, exhibiendo muchos modos disruptivos y permitiendo el contacto físico entre el plasma y las paredes interiores de la cámara de vacío, logrando así un enfriamiento brusco y cesando cualquier posibilidad de reacción de fusión nuclear. Estas inestabilidades se intensifican a medida que aumenta la densidad y temperatura del plasma. Mas aún, la presión magnética necesaria para confinar el plasma resulta de gran magnitud, lo que atribuye una variable adicional al diseño estructural de las bobinas.
- **Confinamiento inercial:** Un tercer enfoque de confinamiento para extraer energía de fusión a partir de núcleos livianos, consiste en colocar el material reactivo en una pequeña pastilla a temperatura y presión atmosférica. Se calienta rápidamente dicha pastilla hasta ser llevada a un estado de plasma y, posteriormente comprimida hasta alcanzar altas densidades a partir del bombardeo de ésta desde muchas direcciones distintas y simultáneamente, a través de pulsos mediante luz láser de alta potencia. Durante el breve instante en el que la pastilla implosiona y antes de que se separe, el plasma de alta densidad y temperatura produce muchas reacciones de fusión. En este enfoque de confinamiento inercial, el desafío radica en lograr que las reacciones de fusión sustenten la energía utilizada para la producción de luz mediante láser.

En lo que respecta a confinamiento magnético, se desprecian efectos relativistas y cuánticos. Se tiene que hasta temperaturas del orden de 10 KeV, las correcciones relativistas carecen de importancia. Si en tanto, la separación media entre partículas y la distancia media de aproximación mínima para colisiones Coulombianas, sean mucho mayor que la longitud de onda de DeBroglie (λ_B), entonces podremos despreciar los efectos cuánticos y podremos utilizar una descripción estadística de Maxwell-Boltzmann, lo cual ampliaremos con mayor detalle en el capítulo 2.

1.3. Tokamak

La palabra *tokamak*, acrónimo del ruso “toroidal’naya **k**amera s **m**agnitnymi **k**atushkami”, es un sistema de confinamiento de plasma de geometría toroidal, en donde se establece al mismo a través del confinamiento magnético. La descripción espacial del *tokamak* es llevada a cabo mediante coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , por lo que hacemos una simple mención de las direcciones toroidal y poloidal, como la dirección en el versor \hat{e}_ϕ y aquellas contenidas en el plano (r, z) , respectivamente; dado que dichos conceptos serán detallados ampliamente en el capítulo 2.

Los esquemas completos de confinamiento magnético en un *tokamak* son muy complejos, dado que no solo requieren la presencia de diversas bobinas en distintas posiciones y direcciones, sino también el uso de sistemas tecnológicos externos como por ejemplo la inyección de partículas neutras, entre otras. Por lo tanto, en las siguientes secciones intentaremos desglosar el completo confinamiento en tres partes, detallando cada una de las mismas.

Por otro lado, dado que la presión del plasma se define, al igual que en los gases, como el producto de la densidad y la temperatura, y la reactividad del plasma, es decir, su predisposición a fusionar, aumenta con ambas de estas cantidades, por ende en un reactor la presión debe ser suficientemente alta. Teniéndose en consideración que la misma debe ser equilibrada con la acción de campos magnéticos, en consecuencia, surgen limitantes tecnológicos, dado que el calentamiento por efecto Joule es inaceptable, por lo que deben implementarse bobinas superconductoras. No obstante, existe una pérdida de superconductividad por encima de un campo magnético crítico, lo cual presenta otra limitación.

1.3.1. Esquema de confinamiento magnético

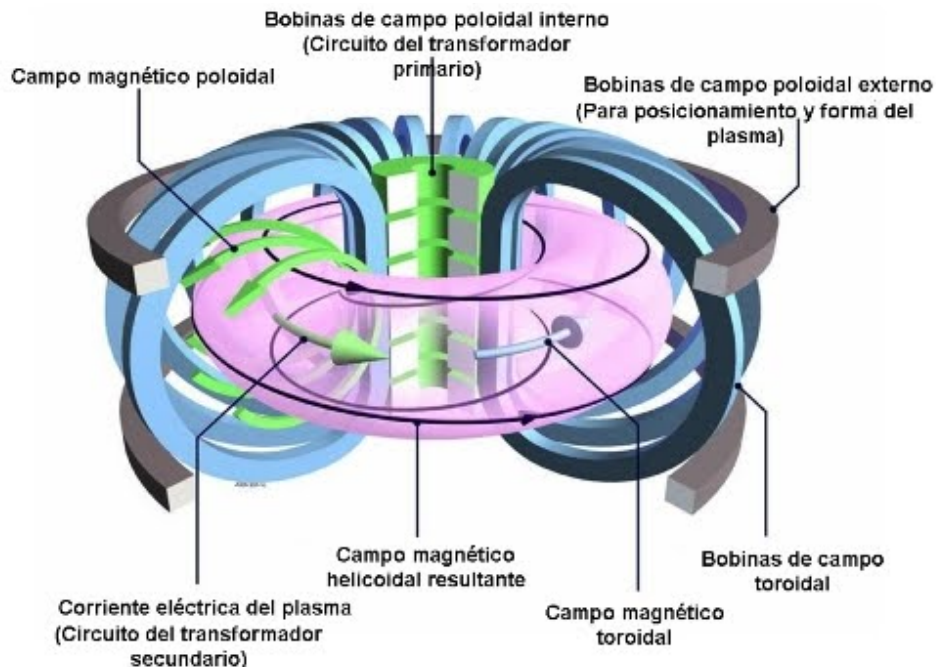
La configuración del *tokamak* se asemeja al principio de funcionamiento de un transformador. El solenoide central, o también denominado bobina de campo poloidal interno, por el que circula una corriente en dirección toroidal, representa el circuito primario del transformador, como puede observarse en el centro de la Figura 1.4a. Dicha bobina produce, como su nombre lo indica, un capo magnético contenido en el plano poloidal. La región ocupada por el plasma se encuentra delimitada por la cámara de vacío como puede observarse en la Figura 1.4b. Siguiendo con la analogía del transformador, el plasma representa el circuito secundario, es decir, sobre el plasma se induce una densidad de corriente \mathbf{J} debido al flujo poloidal concatenado, originado por el circuito primario.

Hasta aquí solo hemos tratado con un campo magnético cuyas componentes (B_r, B_z) se encuentran en el plano poloidal. Sin embargo, también se produce una componente toroidal del campo, B_ϕ , dada por las bobinas ubicadas en el plano poloidal, situándose estas últimas alrededor del plasma, es decir, enrollándolo, como puede observarse en la Figura 1.4a. Ergo, las líneas de campo magnético resultantes poseen geometría helicoidal. En consecuencia, los iones y electrones del plasma describirán trayectorias circulares, al mismo tiempo que sus centros de giro se moverán a lo largo de las líneas de campo.

1.3.2. Control magnético, posición y forma del plasma

A pesar del campo magnético resultante obtenido al final de la sección 1.3.1, la simple presencia de este campo no permite el confinamiento del plasma. Por esta razón, para lograr un equilibrio de fuerzas entre las resultantes debidas a la presión cinética y al campo magnético, se requiere la presencia de un campo magnético poloidal extra, el cual posee dos orígenes. Uno de ellos resulta de la densidad de corriente en la dirección toroidal

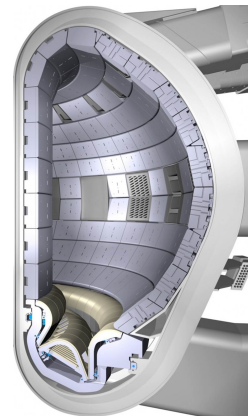
del propio plasma J_ϕ , y el restante de las bobinas externas denominadas bobinas de campo poloidal.



(a) Imagen extraída de [6]. Esquema de un tokamak. Se detallan las bobinas externas y las líneas de campo magnético resultantes.



(b) Vista interior de la cámara de vacío de un tokamak.



(c) Vista frontal de una sección del tokamak, se observa el divertor insertado en la región inferior de la cámara de vacío.

Figura 1.4.: Esquema de confinamiento magnético de un tokamak.

Una sección del *tokamak* se muestra en la Figura 1.5 donde se expone el arreglo espacial de bobinas poloidales. De esta manera, dichas bobinas permitirán un control de posición y forma del plasma dentro de la cámara de vacío. Si bien las bobinas de campo poloidal

y el solenoide central generan el mismo tipo de campo magnético, a través de este último circulan corrientes de, como mínimo un orden de magnitud mayor a las correspondientes de control de posición y forma.

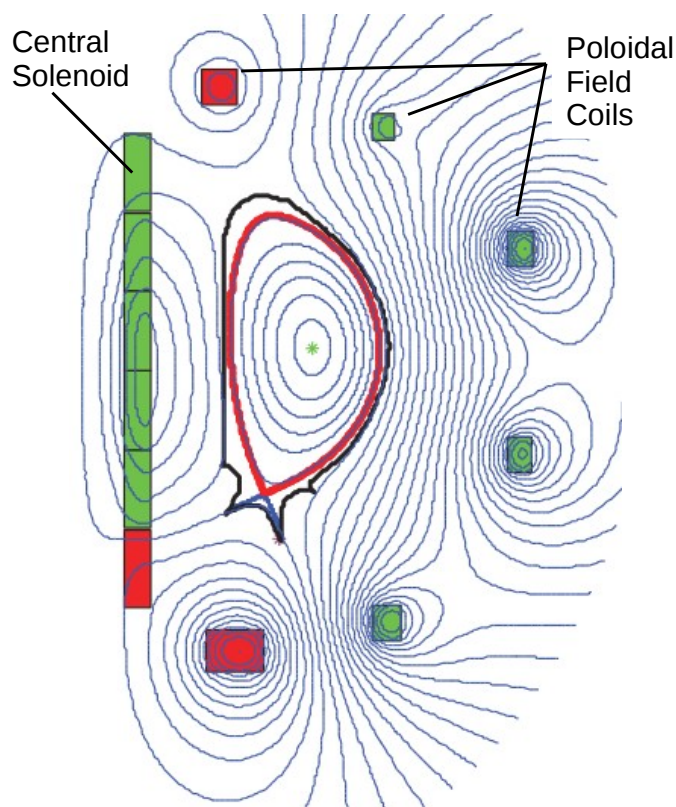


Figura 1.5.: Sección del tokamak, i.e. plano (r,z) , con la distribución espacial de las bobinas de campo poloidal (del inglés “poloidal field coils”), como así también del solenoide central. En todo el dominio, las curvas de nivel del flujo magnético, y en el centro las respectivas al plasma delimitado por la cámara de vacío.

1.3.3. Sistemas de accionamiento de corriente auxiliar

Si bien las bobinas externas, ya sean de campo poloidal como toroidal, logran confinar magnéticamente el plasma, surge una problemática adicional, la cual está relacionada con el sostenimiento de la corriente en el plasma. La corriente toroidal del plasma no puede ser constante en el tiempo dado que el campo eléctrico presente en el circuito primario solo se ejecuta por pulsos, estableciéndose períodos con el reactor apagado. Es posible aceptar dichos períodos de parada siempre y cuando sean lo suficientemente breves como para que los esfuerzos térmicos que surjan del enfriamiento sean aceptables. En consecuencia, la falta de sostenimiento de la corriente del plasma, se debe compensar mediante fuentes de corriente no inductivas, como la inyección de haces de partículas neutras y ondas electromagnéticas. Las mismas se esquematizan en la Figura 1.6. A su vez, el propio

plasma contribuye por sí mismo a través del fenómeno denominado corriente de *Bootstrap* y, por otro lado, del calentamiento óhmico producto de la propia densidad de corriente, a pesar de que este último fenómeno solo proporciona temperatura al plasma del orden de pocos Kev (la temperatura requerida es levemente superior a 10 Kev) [7].

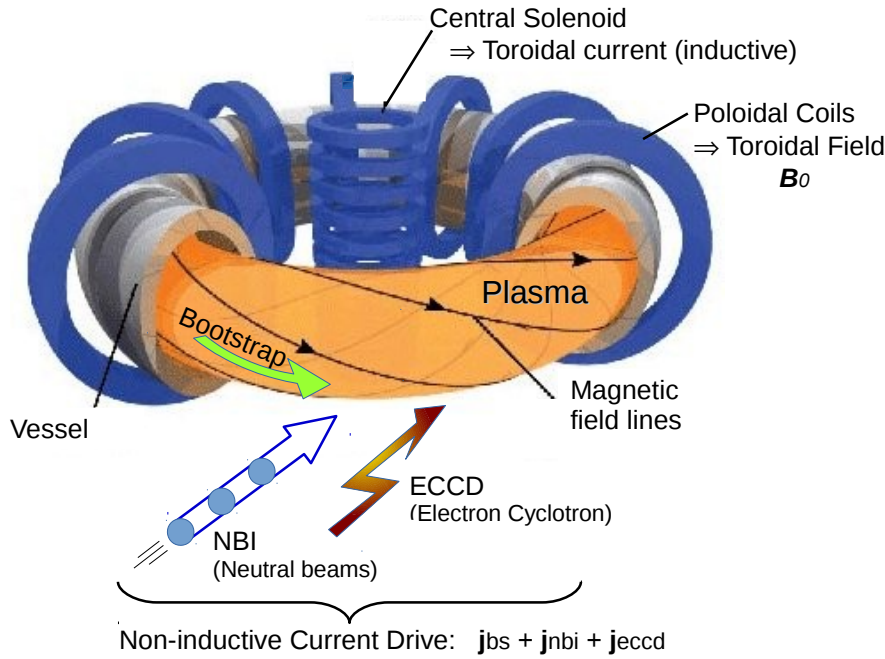


Figura 1.6.: Esquema de sistemas de accionamiento de corriente auxiliar. Las corrientes no inductivas se manifiestan mediante: haces de partículas neutras (NBI), ondas electromagnéticas a la frecuencia de ciclotrón electrónica (ECCD), y las corrientes de *Bootstrap*.

A pesar de no ser de relevancia en este trabajo, en lo que sigue haremos una breve descripción del fenómeno mencionado anteriormente como corriente de *Bootstrap*.

En el interior del plasma encontramos iones y electrones, cuyos centros de giro describen trayectorias helicoidales como resultado de las líneas de campo magnético. Para cada partícula en cada punto del espacio, podemos definir una relación entre los módulos de componentes del campo magnético toroidal y poloidal, es decir,

$$r_B = \frac{\sqrt{B_r^2 + B_z^2}}{|B_\phi|}.$$

Según el valor obtenido de esta relación, habrá partículas que logren dar una vuelta completa (y por lo tanto sucesivas vueltas) y otras que no. Aquellas que no logren dar una vuelta completa, describirán una trayectoria en el sentido contrario pero desfasada respecto a la trayectoria de ida y así sucesivamente, resultando acotadas sus trayectorias. Estas partículas atrapadas en una región del campo magnético, producen una densidad

de corriente extra en el plasma, la cual incrementa la corriente total del plasma.

1.3.4. Control de impurezas

Ahora nos enfocaremos en otro aspecto relevante en los *tokamak*, el cual involucra el comportamiento de las impurezas. Éstas resultan en una desventaja para el plasma, debido a que dan lugar a pérdidas por radiación y también diluyen el combustible, i.e. el reactivo a fusionar. Por lo tanto, debemos restringir su concentración dentro del plasma, definiéndose como un desafío fundamental para una exitosa operación del tokamak.

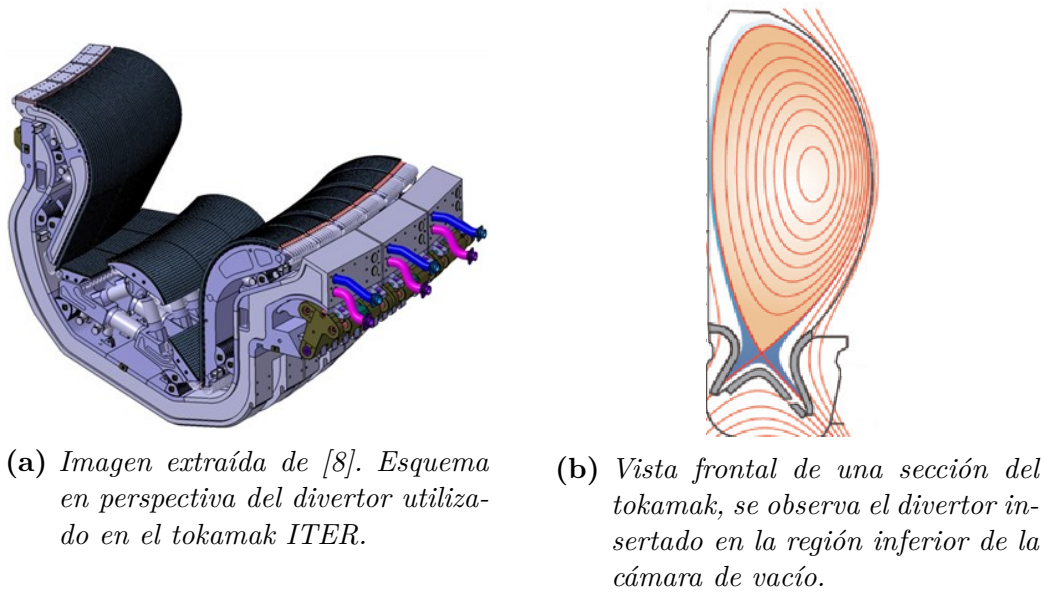
Las impurezas se clasifican en dos tipos. En primer lugar, aquellas en forma de iones que provienen de las superficies sólidas, y en segundo lugar las partículas *alpha* (i.e. ${}^4_2\text{He}$) que surgen de las propias reacciones de fusión. Por lo tanto se deben minimizar las impurezas entrantes al plasma, teniendo en cuenta que las correspondientes a las partículas *alpha* son intrínsecas. Un requisito para estas últimas es que su tiempo de confinamiento no sea demasiado prolongado.

Se requiere entonces una separación física del plasma respecto del recipiente de vacío, en donde dos técnicas son actualmente usadas. El primer método consiste en definir un borde para el plasma dado por limitadores geométricos. El segundo consiste en mantener las partículas del plasma alejadas del recipiente de vacío a partir de modificaciones en la geometría del campo magnético, con el objetivo de producir una región en forma de *divertor* como se muestra en la Figura 1.7b.

Por ende, el control del ingreso de impurezas depende, por un lado de la geometría del campo magnético en el plasma y por otro de las superficies materiales que reciben las partículas provenientes del plasma. El uso del *divertor*, o en otras palabras desviador magnético, permite el direccionamiento de las partículas salientes del plasma hacia una región específica, separada del plasma y restrictiva del flujo de retorno de impurezas. En la Figura 1.7a podemos observar una perspectiva del dispositivo *divertor* que se encuentra instalado en la parte inferior de la cámara de vacío.

1.3.5. Estructura de un tokamak

El interior de la cámara de vacío es rodeado por una capa de material (mas conocido por su término en inglés *blanket*) el cual cumple tres funciones. En primer lugar absorbe la energía proveniente de los neutrones de las reacciones de fusión (neutrones de 14 MeV), transformando dicha energía en calor el cual es removido bajo un apropiado refrigerante, para luego proveer gran parte de la potencia de salida. En segundo lugar, blindo, mediante las reacciones nucleares de absorción, las bobinas superconductoras y otros elementos estructurales de los neutrones. En tercer lugar permite la necesaria reproducción de tritio para ser luego inyectado como combustible al plasma. Con el fin de lograr este último objetivo, la capa de material mencionada al inicio de este párrafo esta compuesta por un componente de litio como por ejemplo Li_2O . Un átomo de tritio o tritón es producido



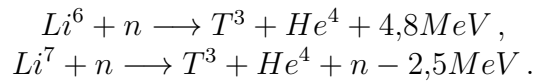
(a) Imagen extraída de [8]. Esquema en perspectiva del divertor utilizado en el tokamak ITER.

(b) Vista frontal de una sección del tokamak, se observa el divertor insertado en la región inferior de la cámara de vacío.

Figura 1.7.: Representación gráfica del divertor.

en cada reacción nuclear neutrón-litio, sin embargo no es posible diseñar el *blanket* para que todos los neutrones sufran tal reacción. Para vencer esta deficiencia y alcanzar una tasa de reproducción mayor a la unidad, es necesario emplear un material multiplicador de neutrones como por ejemplo berilio o plomo. Se utilizan espesores para el *blanket* entre 0.6 y 1.0 m, los cuales permiten una adecuada absorción de la mayoría de los neutrones. Por otro lado, se debe reducir la energía de los neutrones que hayan logrado traspasar la pared externa del *blanket* antes que alcancen las bobinas superconductoras, con el fin de evitar el daño por radiación como así también el calentamiento de las mismas. Esta protección es lograda colocando un blindaje, de aproximadamente 1 m de espesor, de material de alto número atómico Z , como por ejemplo acero, entre el *blanket* y las bobinas.

Respecto a las fuentes combustibles que abundan en la naturaleza, se encuentra el deuterio, el cual se localiza en el agua con la proporción 1/6700. Sin embargo el tritio puede ser reproducido a través del litio usando las siguientes reacciones nucleares



Las abundancias naturales son 7.4 % para el Li^6 y 92.6 % para el Li^7 . Bajo este sistema, se define entonces que los combustibles básicos son el deuterio y el litio.

Finalmente la cámara del dispositivo donde se aloja al plasma debe ser rodeada por algún tipo de refrigerante, debido a la transferencia energética de los productos de fusión y su consecuente calentamiento; así como el detenimiento y la absorción de los neutrones de fusión. El calentamiento producido por los productos de fusión debe ser por lo tanto convertido en energía eléctrica, lo cual debe ser tenido en cuenta en el diseño del dispositivo.

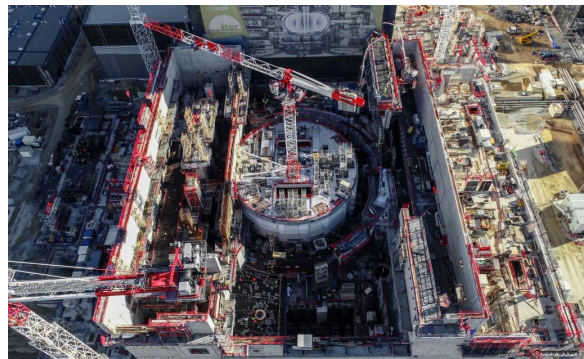
1.4. Proyecto ITER

ITER (“el camino” en latín), International Thermonuclear Experimental Reactor por sus siglas en inglés, es en la actualidad uno de los principales proyectos energéticos de fusión nuclear en el mundo.

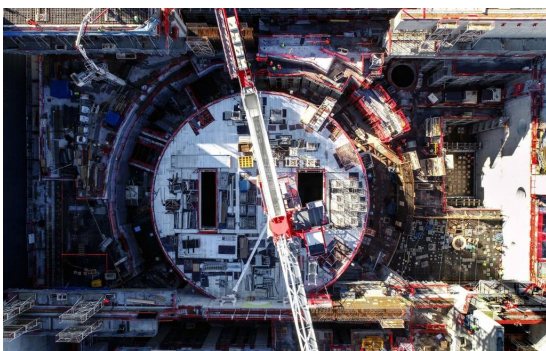
Al sur de Francia, treinta y cinco naciones se encuentran colaborando con el principal objetivo de construir el tokamak ITER, el cual comprende un dispositivo de fusión por confinamiento magnético, que ha sido diseñado para demostrar la viabilidad de la fusión nuclear como una fuente de energía a gran escala y libre de carbón, basada en el mismo principio que alimenta nuestro Sol y nuestras estrellas. Se prevé que ITER sea el primer dispositivo de fusión en producir energía neta, así como también el primero en mantener las reacciones de fusión por un largo período de tiempo, y el primero en realizar ensayos que integren tecnología, materiales y regímenes físicos necesarios para la comercialización de electricidad basada en fusión nuclear. En la Figura 1.8 puede verse la obra civil del proyecto desde distintas vistas, tomadas durante el actual año 2019.



(a) *Perspectiva del predio designado para la construcción del proyecto ITER.*



(b) *Obra civil. Vista alejada del tokamak ITER e interior del edificio.*



(c) *Obra civil. Vista superior ampliada del tokamak ITER.*



(d) *Obra civil. Vista frontal del edificio del tokamak ITER.*

Figura 1.8.: *Imágenes extraídas de [8]. Imágenes de la obra civil del proyecto ITER al año 2019.*

En la Tabla 1.1 se muestran los parámetros que se espera que tenga el reactor.

Parámetro	Valor
Potencia de fusión	500 MW
Ganancia de potencia (Q)	≥ 10 (depende del quemado) ≥ 5 (operación estado estable)
Radio mayor (R) del plasma	6.2 m
Radio menor (a) del plasma	2.0 m
Elongación vertical del plasma	1.70 / 1.85
Triangularidad del plasma	0.33 / 0.48
Corriente del plasma (I_p)	15 MA
Factor de seguridad (al 95% de la superficie)	3
Campo toroidal en R (B_0)	5.3 T
Potencia instalaciones extras (calentamiento plasma)	73 MW
Volumen del plasma	830 m ³
Superficie del plasma	680 m ²
Sección transversal del plasma	22 m ²

Tabla 1.1.: *Parámetros característicos y de operación sobre el proyecto ITER.*

1.4.1. Objetivos

La cantidad de energía de fusión que un tokamak es capaz de producir, es un resultado directo del número de reacciones de fusión que toman lugar en el núcleo del mismo. Sabemos que a mayor tamaño del recipiente donde se aloja el plasma, mayor será el volumen de dicho plasma, y por lo tanto mayor será el potencial para la energía de fusión. ITER ha sido diseñado específicamente con el objetivo de:

- Producir 500 MW de potencia de fusión. El ITER se encuentra diseñado para producir un retorno de energía diez veces mayor ($Q = 10$) o 500 MW de potencia de fusión, a partir de 50 MW de potencia como suministro de entrada. No se encuentra en los planes del proyecto ITER el retorno de energía producida como electricidad, más bien se establece que preparará el camino a seguir para los siguientes dispositivos que puedan, dado que aún se lo tiene como un experimento de fusión para producir una ganancia neta de energía.
- Demostrar el funcionamiento de tecnologías para una central eléctrica de fusión. ITER cerrará la brecha entre los actuales dispositivos de fusión de menor escala

y las centrales eléctricas de fusión, con fin demostrativo, del futuro. Se plantea la oportunidad de estudiar el plasma en condiciones similares a las que se espera en una futura planta de energía y probar tecnologías asociadas a áreas como control, diagnóstico, criogenia y mantenimiento remoto.

- Lograr un plasma compuesto por deuterio-tritio en el cual, las reacciones se sustenten a través de mecanismos internos de transferencia de energía. Actualmente la investigación relacionada a la fusión nuclear se encuentra en el umbral de exploración por un “quemado del plasma”, es decir, en donde el calor de la reacción de fusión se confina en el plasma de manera eficiente para que la reacción se mantenga durante un periodo prolongado.
- Ensayos de reproducción de tritio. Una de las misiones para las etapas posteriores a la operación del ITER es la viabilidad de producir tritio dentro del recipiente de vacío. El suministro mundial de tritio no es suficiente para cubrir las necesidades de futuras centrales eléctricas de fusión. ITER brindará la oportunidad de ensayar réplicas de reproducción de tritio dentro del recipiente de vacío durante plena operación.
- Demostrar las características vinculadas a la seguridad de un dispositivo de fusión nuclear. ITER logró un hito importante en la historia de la fusión cuando, en 2012, la organización ITER recibió la licencia de operador nuclear en Francia debido a un examen riguroso e imparcial de sus archivos de seguridad. Uno de los objetivos principales de la operación en ITER es demostrar el control del plasma y las reacciones de fusión con consecuencias insignificantes para el medio ambiente.

1.5. Objetivos del Proyecto Integrador

- Comprensión de los conceptos básicos de física de plasma y fusión nuclear controlada, para luego abarcar el modelo descriptivo MHD de fluido conductor.
- Desarrollar un algoritmo capaz de detectar la separatriz del plasma, para casos con y sin *divertor*.
- Desarrollar un código capaz de resolver la ecuación de Grad-Shafranov símil Poisson (basado en la ley de Ampère).
- Validar dicho último código a través de una solución analítica de la ecuación de Grad-Shafranov.
- Desarrollar un algoritmo de minimización para la determinación de las corrientes en las bobinas externas, de campo poloidal, conociendo las posiciones de dichas bobinas y la densidad de corriente toroidal del plasma.
- Desarrollar un código para la resolución del problema del equilibrio de frontera libre directo, bajo un determinado método iterativo convergente.

Capítulo 2

Magnetohidrodinámica

El presente capítulo tiene como principal objetivo introducir al lector en la física asociada al modelo magnetohidrodinámico, el cual considera al plasma como un fluido conductor. Seguidamente analizamos el caso particular de equilibrio MHD, donde surge el balance de fuerzas entre la presión cinética y las fuerzas de Lorentz. Por otro lado, a partir de las ecuaciones de Maxwell, deducimos una ecuación diferencial para la evolución temporal del campo magnético dada por fenómenos de difusión a causa de la resistividad del plasma. Posteriormente introducimos los conceptos de cantidades poloidales y toroidales, las cuales usaremos con frecuencia en este trabajo. Luego presentaremos los parámetros geométricos característicos utilizados para la descripción del plasma, así como también las distintas configuraciones de equilibrio posibles, y parámetros físicos relevantes para los planteos realizados en los posteriores capítulos, como por ejemplo la corriente toroidal del plasma. Luego desarrollamos el equilibrio MHD para el caso particular de configuraciones axisimétricas, es decir que poseen simetría de revolución, de donde surge la ecuación de Grad-Shafranov. Además explicitamos los parámetros utilizados para la adimensionalización de la misma, ya que los códigos computacionales desarrollados emplean las ecuaciones con cantidades adimensionales, y particularizamos la ecuación de Grad-Shafranov para el caso de una espira circular de corriente. Por último, pero no menor, formulamos en detalle el problema del equilibrio para los casos en donde la frontera es dato (frontera fija) y donde es incógnita (frontera libre).

2.1. Ecuaciones MHD

2.1.1. Breve deducción teórica

Si nos encontramos con la inquietud de conocer el origen de las ecuaciones MHD, debemos comprender que provienen de la Mecánica Estadística, en donde disponemos de la función de distribución, definida en el espacio de fases, para la descripción de las partículas del plasma. Dicha función reside en la ecuación de Boltzmann, la cual describe la evolución temporal de la función de distribución f_α en conjunto con las ecuaciones de Maxwell, considerando un plasma totalmente ionizado y formado por electrones y iones. A modo ilustrativo, las ecuaciones de Boltzmann-Maxwell [9] son

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{col}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3v + \rho_q^{ext} \right], \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \left[\sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d^3v + \mathbf{J}^{ext} \right], \quad (2.1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1e)$$

en donde el subíndice α hace referencia a la especie de partículas (iones y electrones), q_α y m_α son, respectivamente, la carga y la masa de la partícula de especie α , $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² es la permeabilidad del vacío, $\varepsilon_0 = 8,86(9) \cdot 10^{-12}$ C²/(N m²) es la permitividad del vacío, ρ_q^{ext} y \mathbf{J}^{ext} son, respectivamente, la densidad de carga y corriente externas al plasma. Dado que la deducción completa de las ecuaciones MHD se encuentra fuera del alcance de este trabajo [9],[10],[11], nos remitiremos a mencionar que la ecuación (2.1a) debe ser integrada según

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q \left[\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{col} \right] d^3v = 0, \quad (2.2)$$

donde conforme definamos la variable Q , obtendremos distintas ecuaciones. Por lo tanto las ecuaciones de continuidad, momento lineal y energía resultan, si reemplazamos en la ecuación (2.2) a Q por 1, $m_\alpha \mathbf{v}$ y $m_\alpha v^2/2$, respectivamente, para dar origen al modelo de 2 fluidos¹. Posteriormente, las ecuaciones del modelo de 2 fluidos deben ser combinadas y simplificadas bajo ciertas aproximaciones, para dar lugar al modelo de un único fluido

¹El modelo de 2 fluidos describe al plasma como un fluido compuesto por electrones y otro por iones.

conductor². Finalmente, simplificamos aun más las ecuaciones de este último modelo, y obtenemos las ecuaciones MHD. Para ello, necesitamos considerar isótropo al tensor de presiones, es decir diagonal, y la presión será un escalar igual en todas las direcciones. Solo podremos cumplir con la petición anterior si el plasma resulta muy colisionante, ergo la función de distribución será localmente Maxwelliana. Si deseamos comprender este concepto desde un punto de vista más cuantitativo, debemos satisfacer

$$\begin{aligned}\omega \tau_{col} &\ll 1, \\ \lambda/L &\ll 1,\end{aligned}$$

en donde ω es una frecuencia típica del plasma, τ_{col} es el tiempo característico de colisión, λ es el camino libre medio y L una longitud característica del plasma. Una vez comprendidas las deducciones que conllevan a pasar de modelo en modelo mediante simplificaciones y aproximaciones, nos encontramos en condiciones de finalizar esta acotada explicación mediante las, finalmente deseadas, ecuaciones MHD. Las mismas se componen por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.3)$$

donde ρ representa la densidad de masa del plasma, por la ecuación de balance de momento lineal

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{v} , \mathbf{J} y \mathbf{B} representan el campo de velocidades, la densidad de corriente y el campo magnético del plasma, respectivamente, y por último las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.5b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.5c)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta (\mathbf{J} - \mathbf{J}_{NI}), \quad (2.5d)$$

donde μ_0 y η representan, respectivamente, la permeabilidad magnética del vacío y la resistividad del plasma. Además debemos considerar que en la ecuación de la Ley de Ohm, la densidad de corriente solo se corresponde con la inductiva. Es por este motivo que explicitamos el término del lado derecho como $\mathbf{J} - \mathbf{J}_{NI}$, en donde el subíndice NI implica *no inductivo*. Por otro lado, es importante notar que el sistema compuesto por las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) no se encuentra cerrado, por lo que nos encontramos con más incógnitas que ecuaciones. En consecuencia introduciremos, generalmente, una ecuación de estado de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (2.6)$$

²Modelo de 1 fluido en donde se considera la propiedad de cuasi-neutralidad del plasma, i.e. $(n_e - n_i)/n_{i,e} \ll 1$, siendo n la densidad de partículas por unidad de volumen.

2.1.2. Equilibrio MHD

Consideremos el caso particular en el cual el plasma se encuentra en equilibrio estático. Cuando hacemos alusión a este tipo de equilibrio, lo que en realidad solicitamos es que se satisfaga la condición

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

No existe solo una forma de satisfacer la condición (2.7)³. En primer lugar consideramos el caso trivial, donde el campo de velocidades \mathbf{v} resulta nulo. En segundo lugar, y ya no tan trivial, el campo de velocidades no puede tener dependencia temporal pero si espacial, con la particularidad de que el segundo término de la ecuación (2.7) sea nulo. En resumen debemos satisfacer dos condiciones simultáneamente, las cuales resultan en

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aplicando la condición (2.7) a la ecuación (2.4) obtenemos un balance de fuerzas entre, aquellas originadas por el campo de presiones cinéticas, y por otro lado las fuerzas de Lorentz, originadas por la interacción magnética de las corrientes eléctricas (i.e. densidades de corriente \mathbf{J}). Matemáticamente el balance de fuerzas se expresa como

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.9)$$

Ahora bien, lo primero que debemos identificar es que el término del lado derecho de la ecuación (2.9) resulta en un producto vectorial entre \mathbf{J} y \mathbf{B} . Esto manifiesta que el gradiente de presiones es perpendicular tanto a \mathbf{J} como a \mathbf{B} . Podemos demostrar lo anterior matemáticamente aplicando el operador producto interno a la ecuación (2.9), con respecto a \mathbf{J} y \mathbf{B} . Ergo, obtenemos

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.10b)$$

en donde comprendemos que los vectores \mathbf{J} y \mathbf{B} yacen sobre superficies de presión constante. Incluso si denominamos superficies magnéticas a las definidas por las líneas de campo \mathbf{B} , podemos sostener que las superficies isobáricas (i.e. de presión constante) coinciden con las superficies magnéticas; análogamente ocurrirá lo mismo si pensamos en las superficies definidas por las líneas de \mathbf{J} . Por otro lado, no debemos confundir el hecho de que líneas de \mathbf{J} y \mathbf{B} yacen sobre superficies isobáricas, no implica considerar que los módulos de los vectores \mathbf{J} y \mathbf{B} deban ser constantes sobre dichas superficies. Quizás esta propiedad sea infructuosa en este momento, sin embargo debemos mencionarla y tenerla presente, pues

³La nulidad de la ecuación es de carácter vectorial, ergo se debe ser estricto en la notación. Es por este motivo que el cero se nota en negrita.

nos será clave para entender demás conceptos trascendentales en las próximas secciones.

Aplicando la ley de Ampère a la ecuación (2.9), la cual describe el equilibrio MHD, obtenemos

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0}((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}),$$

luego haciendo uso de la identidad vectorial

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

concluimos con la expresión final dada por

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

en donde el término $B^2/2\mu_0$ representa la presión ejercida por el campo magnético, y el término del lado derecho está relacionado con la “tensión”⁴ asociada a la curvatura de las líneas de campo magnético. Vemos entonces que podemos compensar el gradiente de presión cinética del plasma mediante un gradiente de presión magnética, ó por la “tensión” debida a la curvatura de las líneas de campo magnético.

Como concepto final, enfatizamos que la ecuación (2.9) la cual describe el balance de fuerzas, manifiesta que es posible utilizar campos magnéticos para confinar un plasma en equilibrio, el cual resulta en el principio utilizado en los dispositivos de fusión por confinamiento magnético.

2.1.3. Ecuación de difusión magnética

Abordamos la búsqueda de una expresión para la evolución temporal del campo magnético, ya que a pesar de ser buen conductor, el plasma tiene cierta resistividad η que va modificando el campo y hace decaer la corriente. Ergo, trabajando matemáticamente con la ley de Ohm, la cual extraemos de la ecuación (2.5d) y aplicando el operador rotor a ambos miembros, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left[\eta (\mathbf{J} - \mathbf{J}_{NI}) \right].$$

Luego, si consideramos que la resistividad η es constante y además implementamos la ley de Faraday, la expresión anterior resulta

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \eta \nabla \times \mathbf{J} - \eta \nabla \times \mathbf{J}_{NI},$$

⁴Supongamos la línea de campo magnético como si fuese un elástico, en donde se genera una tensión sobre ella producto de la curvatura desarrollada.

en donde el primer término del lado derecho puede ser reemplazado utilizando la ley de Ampère y la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B},$$

ergo podemos expresar la evolución temporal del campo magnético, hasta el momento, como

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \left[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} \right] - \eta \nabla \times \mathbf{J}_{NI}.$$

Recordando que \mathbf{B} resulta solenoidal (campo vectorial con divergencia nula en todo punto del dominio), reordenamos los términos y obtenemos la ecuación final para la evolución temporal de \mathbf{B} , la cual se expresa como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} + \eta \nabla \times \mathbf{J}_{NI}. \quad (2.12)$$

En el caso particular en el cual el campo de velocidades \mathbf{v} se anula, la ecuación (2.12) se simplifica a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} + \eta \nabla \times \mathbf{J}_{NI},$$

en donde si hacemos la analogía con la ecuación de transferencia de calor por conducción, la cual describe la evolución temporal de la temperatura en un sólido, podemos identificar al segundo término del lado derecho como un término fuente de campo magnético, debido a la inyección de haces neutros, ondas electromagnéticas y corrientes de bootstrap. También podemos ver que el coeficiente η/μ_0 hace el papel de la difusividad térmica, pero en este caso para el campo magnético.

2.2. Cantidades de superficie

Aquí haremos una descripción detallada sobre los conceptos de cantidades poloidales y toroidales. Muy probablemente coincidiremos en lo sencillo que resulta entenderlos, sin embargo haremos hincapié sobre los mismos, dado que en los próximos capítulos se usarán con frecuencia, aplicándose a cantidades físicas como por ejemplo densidades de corriente, flujo magnético, etc.

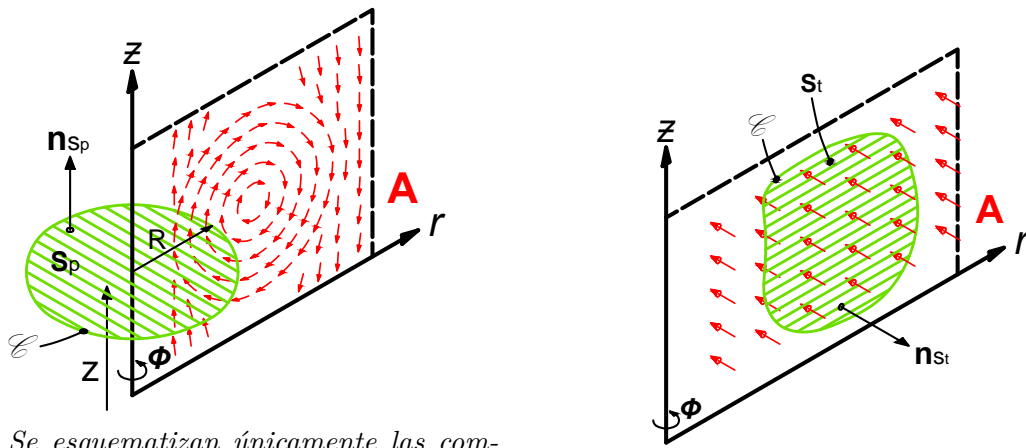
Sea una cantidad física descrita por un campo vectorial \mathbf{A} . Dado que utilizamos coordenadas cilíndricas, i.e. (r, ϕ, z) , para describir configuraciones axisimétricas, definimos dos posibles cantidades de superficie a partir de \mathbf{A} . Una de ellas implica integrar \mathbf{A} sobre una superficie poloidal, es decir, una superficie cuyo vector normal se encuentra contenido en el plano definido por los versores $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$. En la Figura 2.1a se muestra, en forma detallada, el campo vectorial \mathbf{A} y la superficie poloidal de integración. Ergo, definimos la

cantidad poloidal asociada al campo vectorial \mathbf{A} como

$$a_p = \int_{S_p} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_p.$$

Resta integrar \mathbf{A} sobre una superficie toroidal, es decir, una superficie cuyo vector normal sea paralelo a \hat{e}_ϕ . En la Figura 2.1b se muestra, en forma detallada, el campo vectorial \mathbf{A} y la superficie toroidal de integración. Por lo tanto definimos la cantidad toroidal asociada al campo vectorial \mathbf{A} como

$$a_t = \int_{S_t} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_t.$$



(a) Se esquematizan únicamente las componentes en \hat{e}_r y \hat{e}_z del campo \mathbf{A} . Superficie de integración S_p , circular de radio R , cuyo vector normal es paralelo a \hat{e}_z , desplazada del origen una distancia Z .

(b) Se esquematiza únicamente la componente en \hat{e}_ϕ del campo \mathbf{A} . Superficie de integración arbitraria S_t , cuyo vector normal es paralelo a \hat{e}_ϕ .

Figura 2.1.: Esquemas ilustrativos para la comprensión del origen de las cantidades poloidales y toroidales.

Una vez que hemos comprendido los conceptos de cantidades poloidales y toroidales, estamos en condiciones de aplicarlos a cantidades físicas involucradas en la física de plasma. Por lo tanto definimos dos cantidades relacionadas con la corriente eléctrica y otras dos con el flujo magnético. Definimos las cantidades de corriente poloidal y toroidal como

$$I_{pol} = \int_{S_p} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_p, \quad I_{tor} = \int_{S_t} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_t.$$

Luego definimos las cantidades de flujo poloidal y toroidal como

$$\Psi_p = \int_{S_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p, \quad \Phi = \int_{S_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_t.$$

2.3. Geometría y parámetros del plasma

En los experimentos de confinamiento magnético y futuros reactores de fusión, el plasma se produce dentro de una cámara de vacío. Los plasmas de este tipo tienen densidades bajas, en el orden de 10^{20} partículas por m^3 , y muy altas temperaturas, en el orden de las decenas de keV. En esas condiciones, el plasma se encuentra totalmente ionizado y es un buen conductor eléctrico por el cual se hacen circular elevadas corrientes (del orden de los MA). Para mantener las altas temperaturas es importante que el plasma no entre en contacto con paredes sólidas. Esto se logra actuando sobre él con bobinas externas de campo poloidal, mediante la fuerza de Lorentz.

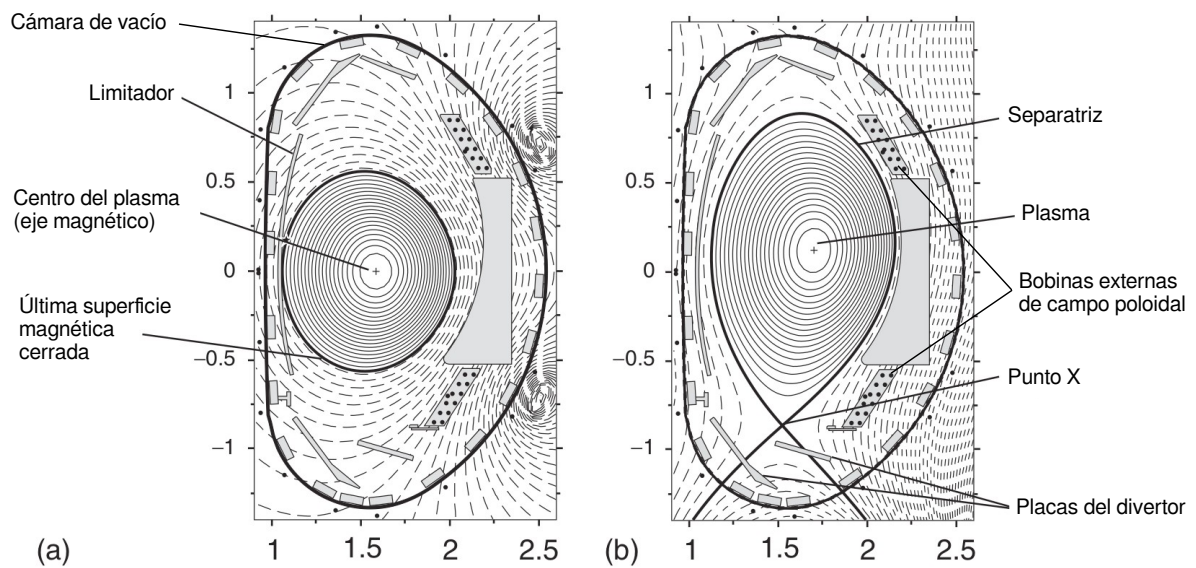


Figura 2.2.: *Dos ejemplos de configuraciones de equilibrio: (a) plasma circular con limitador y (b) plasma elongado con divertor (punto X). Las distintas configuraciones se logran cambiando las corrientes en las bobinas de campo poloidal.*

En la Figura 2.2 se muestran dos ejemplos de plasmas confinados magnéticamente por la acción de bobinas externas. Los contornos en línea continua corresponden al interior del plasma, mientras que los contornos en línea de trazos son las superficies magnéticas exteriores, producidas por la suma de las corrientes de las bobinas externas y la distribución de corriente del propio plasma. El conjunto de contornos de flujo en la región del plasma y sus alrededores se denomina comúnmente, mapa magnético. En la configuración mostrada en la Figura 2.2 (a), la posición del plasma queda definida por la última superficie cerrada que está en contacto por una de las placas limitadoras.

Para evitar el contacto del plasma con un elemento material como el limitador, se suelen utilizar las configuraciones con divertor, o punto X, como la que muestra la Figura 2.2 (b). Nótese que en este caso el plasma queda contenido en el interior de una superficie magnética que tiene un punto X, que es un cero del campo magnético poloidal. Esta

superficie se denomina separatriz y divide topológicamente al mapa magnético en distintas regiones, logrando que el plasma no entre en contacto con paredes sólidas. Las diferentes configuraciones magnéticas pueden lograrse incluso en la misma máquina, simplemente cambiando la distribución de corrientes en las bobinas externas de campo poloidal. En la Figura 2.2 se ven sólo dos bobinas de este tipo, pero todos los tokamaks tienen más de diez típicamente.

En este trabajo nos centramos en la descripción del equilibrio de fuerzas del plasma y su interacción con las bobinas externas de campo poloidal que controlan su forma y posición. En los siguientes capítulos nos será útil comprender los parámetros geométricos característicos que describen la separatriz del plasma, como así también algunos parámetros de índole físico. A continuación se definen y detallan ambos tipos de parámetros.

2.3.1. Parámetros geométricos

Los parámetros geométricos del plasma caracterizan las dimensiones y forma del mismo. En la Figura 2.3 podremos encontrarlos esquematizados, cada uno con su correspondiente notación. Los parámetros son:

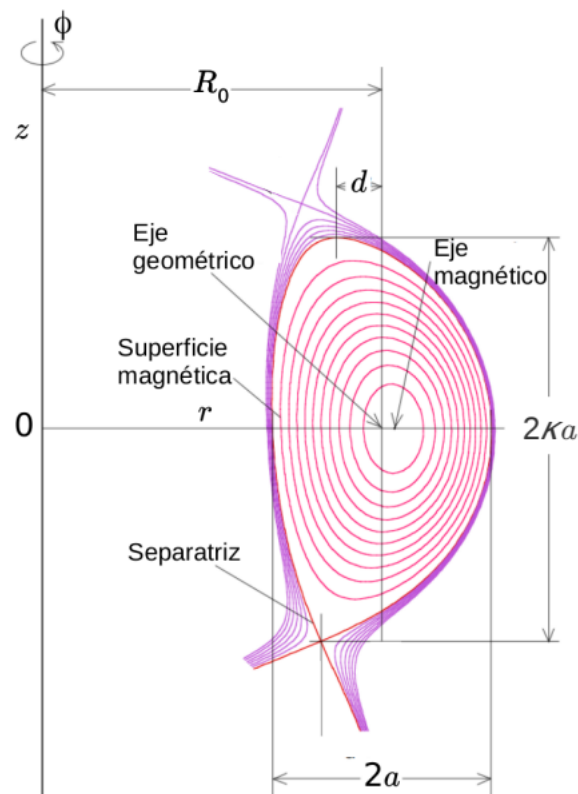


Figura 2.3.: Parámetros geométricos del plasma.

- \mathbf{R}_0 : Radio mayor del plasma. Definimos a \mathbf{R}_0 como la distancia entre el eje de ordenadas y el punto medio del plasma, en la dirección horizontal, i.e. sobre $\hat{\mathbf{e}}_r$.
- \mathbf{a} : Radio menor del plasma. Definimos a \mathbf{a} como la mitad del ancho total del plasma, delimitado por su separatriz, en la dirección horizontal, i.e. sobre $\hat{\mathbf{e}}_r$.
- δ : Triangularidad del plasma. Definimos a δ como el cociente entre la cantidad d y el radio menor a . La cantidad d representa la distancia, en el eje horizontal, entre el punto de mayor ordenada z y el radio mayor R_0 . Ergo, matemáticamente la triangularidad se expresa como $\delta = d/a$.
- κ : Elongación del plasma. Definimos a κ formalmente como el cociente entre el área, en el plano poloidal, ocupada por el plasma y su equivalente dada por un círculo de radio a . Matemáticamente se expresa como $\kappa = \left(\int_{\Omega_{pl}} 1 \, d\Omega_{pl} \right) / (\pi a^2)$, donde Ω_{pl} denota el dominio del plasma. Es usual encontrar una definición aproximada, la cual expresa a la elongación como el cociente entre el ancho y la altura del plasma.
- \mathbf{r}_c : Coordenada horizontal del centroide de corriente. Definimos a \mathbf{r}_c como la coordenada radial del centro geométrico de la densidad de corriente J_ϕ , cuya expresión matemática resulta

$$r_c = \sqrt{\frac{1}{I_{pl}} \int_{\Omega_{pl}} r^2 J_\phi(r, z) \, dS_p}.$$

- \mathbf{z}_c : Coordenada vertical del centroide de corriente. Definimos a \mathbf{z}_c como la coordenada longitudinal del centro geométrico de la densidad de corriente J_ϕ , cuya expresión matemática resulta

$$z_c = \frac{1}{I_{pl}} \int_{\Omega_{pl}} z J_\phi(r, z) \, dS_p.$$

2.3.2. Parámetros físicos

Beta

Se define al parámetro β (beta) como el cociente entre la presión cinética del plasma y la presión ejercida por el campo magnético, como mencionamos de forma previa en la Sección 2.1.2. Matemáticamente expresamos a β como

$$\beta := \frac{p}{p_{mag}} = \frac{n k_B T}{B^2 / 2\mu_0}. \quad (2.13)$$

Desde otro enfoque, interpretamos el concepto asociado al β como un balance entre costo y beneficio, ya que relaciona el campo magnético necesario para confinar un plasma con dada magnitud de presión p . Es decir, dado que la generación de campo magnético surge de las bobinas externas, las cuales presentan un costo según la tecnología que se destine, buscamos entonces minimizar la magnitud de este campo para una dada presión, optimi-

zando así la inversión económica en la fabricación de dichas bobinas externas. A modo ilustrativo, en la actualidad los valores máximos alcanzables para β en los *tokamak* ronda el 10%, i.e. se requiere diez veces más de presión magnética respecto a la cinética para lograr confinar el plasma.

En lo que concierne a este Proyecto Integrador, utilizaremos una definición promedio del parámetro β , la cual se expresa matemáticamente como

$$\beta := \frac{\int_{\mathcal{V}_{pl}} p \, d\mathcal{V}_{pl}}{B_0^2/2\mu_0}, \quad (2.14)$$

donde se utilizo el campo magnético de vacío B_0 en el radio mayor, y \mathcal{V}_{pl} representa el volumen ocupado por el plasma. **Corriente del plasma**

Definimos a la corriente del plasma como aquella cuya densidad de corriente \mathbf{J} se encuentra solo en la dirección toroidal, ya que en el dominio del plasma ocurre que $|J_\phi| \gg |(J_r, J_z)|$. Ergo, expresamos matemáticamente la corriente del plasma como

$$I_{pl} := \int_{\Omega_{pl}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi \, dS_p = \int_{\Omega_{pl}} J_\phi \, dS_p. \quad (2.15)$$

2.4. Configuración axisimétrica

En lo que sigue trabajaremos con geometrías axisimétricas, es decir que presentan simetría acimutal o de revolución, y usaremos coordenadas cilíndricas estándar (r, ϕ, z) . Nos encontramos en la búsqueda de soluciones para la ecuación de equilibrio estático (2.9) que cumplan con la condición de simetría acimutal, es decir, que su dependencia con la variable angular se anule. Matemáticamente, expresamos la condición anterior como

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0.$$

2.4.1. Ecuación de Grad-Shafranov

Comenzando con el campo magnético \mathbf{B} , a partir de sus tres componentes, expresado como

$$\mathbf{B}(r, z) = B_r(r, z)\hat{\mathbf{e}}_r + B_\phi(r, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_z(r, z)\hat{\mathbf{e}}_z,$$

utilizando la ley de Gauss del magnetismo, dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (2.16)$$

e implementando la definición hecha en la Sección 2.2 sobre el flujo poloidal

$$\Psi_p(r, z) = \int_{S_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^r dr' r' B_z(r', z) \quad ; d\mathbf{S}_p = \hat{\mathbf{e}}_z dS_p \quad ; dS_p = r' dr' d\phi',$$

buscamos determinar una expresión para el campo magnético en función del flujo y la corriente poloidal. Derivando la integral, para el flujo poloidal, respecto a la variable z y utilizando la ecuación (2.16), obtenemos una expresión para la componente radial del campo magnético dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\Psi_p(r, z)) &= 2\pi \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^r dr' r' B_z(r', z) \right) \\ &= 2\pi \int_0^r dr' r' \frac{\partial B_z(r', z)}{\partial z} \\ &= -2\pi \int_0^r dr' r' \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' B_r(r', z) \right) \\ &= -2\pi \int_0^r d \left(r' B_r(r', z) \right) \\ &= -2\pi \left[r' B_r(r', z) \right]_0^r \\ &= -2\pi r B_r(r, z) \end{aligned}$$

$$\boxed{B_r(r, z) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi_p(r, z)}{\partial z}}. \quad (2.17)$$

Análogamente, derivamos la misma integral respecto a la variable r y utilizando la Definición 2.1, hallamos una expresión para la componente longitudinal del campo magnético dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(\Psi_p(r, z)) &= 2\pi \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^r dr' r' B_z(r', z) \right) \\ &= 2\pi \left\{ r B_z(r, z) \frac{d(r)}{dr} - \underbrace{r \left[B_z(r, z) \right]_{r=0}}_{=0} \frac{d(0)}{dr} + \int_0^r \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left(r' B_z(r', z) \right)}_{=0} dr' \right\} \\ &= 2\pi r B_z(r, z) \end{aligned}$$

$$\boxed{B_z(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi_p(r, z)}{\partial r}}. \quad (2.18)$$

Definición 2.1. En la teoría del cálculo, se define la regla de Leibniz para la derivada de la integral de una función f de la forma

$$\int_{b(x)}^{a(x)} f(x, t) dt,$$

en donde $-\infty < a(x), b(x) < \infty$. La derivada de la integral se expresa como

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{b(x)}^{a(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx} - f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} + \int_{b(x)}^{a(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt, \quad (2.19)$$

donde la derivada parcial indica que dentro de la integral, solo la variación de $f(x, t)$ con respecto a x es considerada al tomar la derivada.

A partir de las expresiones halladas en (2.17) y (2.18), el campo magnético puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r, z) &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi_p(r, z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_r + B_\phi(r, z) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi_p(r, z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \mathbf{B}(r, z) &= \frac{1}{2\pi r} \nabla \Psi_p(r, z) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\phi(r, z) \hat{\mathbf{e}}_\phi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Resta expresar la componentes del campo magnético en la dirección acimutal, i.e. $\hat{\mathbf{e}}_\phi$. Para ello recurrimos a la definición formal de la corriente poloidal y el teorema de Stokes, dando lugar a una expresión para dicha componente del campo magnético, dada por

$$\begin{aligned} I_{pol}(r, z) &= \frac{1}{\mu_0} \int_{S_p} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_p = \int_{S_p} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}_p = \oint_{\partial S_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \\ I_{pol}(r, z) &= \int_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi r d\phi = \int_0^{2\pi} B_\phi r d\phi = 2\pi r B_\phi(r, z), \\ &\boxed{B_\phi(r, z) = \frac{\mu_0 I_{pol}(r, z)}{2\pi r}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ergo, la expresión hallada para el campo magnético en función del flujo y la corriente, ambos poloidales, resulta

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi r} \nabla \Psi_p \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\mu_0 I_{pol}}{2\pi r} \hat{\mathbf{e}}_\phi}. \quad (2.22)$$

Si aplicamos el operador rotacional a la expresión dada en (2.22), obtenemos

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{2\pi r} \left\{ \mu_0 \nabla I_{pol} \times \hat{\mathbf{e}}_\phi - \Delta_{GS} \Psi_p \hat{\mathbf{e}}_\phi \right\}}, \quad (2.23)$$

en donde el operador Δ_{gs} se denomina operador de Grad-Shafranov y se define como

$$\Delta_{gs}(\cdot) := \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\cdot) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\cdot). \quad (2.24)$$

Reemplazando la expresión para la densidad de corriente \mathbf{J} dada por la ley de Ampère, (2.22) y (2.23) en la ecuación de balance de fuerzas

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}],$$

y dado que la componente acimutal de la presión cinética se anula, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla p \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi &= \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi = 0, \\ [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi &= \frac{\mu_0}{(2\pi r)^2} (\nabla \Psi_p \times \nabla I_{pol}) = 0, \\ \implies I_{pol} &= I_{pol}(\Psi_p), \quad \nabla I_{pol} = \frac{dI_{pol}}{d\Psi_p} \nabla \Psi_p, \end{aligned} \quad (2.25)$$

en donde la nulidad del producto vectorial $\nabla \Psi_p \times \nabla I_{pol}$ implica que el jacobiano de la transformación $(r, z) \rightarrow (\Psi_p, I_{pol})$ se anula y la variable I_{pol} es función del flujo poloidal Ψ_p o viceversa. En consecuencia, las componentes radial y longitudinal, i.e. en $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$, para la presión resultan

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla p &= -\frac{1}{(2\pi r)^2} \left(\mu_0^2 I_{pol} \frac{dI_{pol}}{d\Psi_p} + \Delta_{gs} \Psi_p \right) \nabla \Psi_p, \\ \mu_0 \nabla p \times \nabla \Psi_p &= 0, \\ \implies p &= p(\Psi_p), \quad \nabla p = \frac{dp}{d\Psi_p} \nabla \Psi_p, \end{aligned} \quad (2.26)$$

en donde, en el segundo paso, aplicamos el producto vectorial a ambos miembros con respecto a $\nabla \Psi_p$, y obtenemos una relación funcional de p con Ψ_p . Por ende, utilizando la expresión para el gradiente de p hallada en (2.26) y sacando factor común el término $\nabla \Psi_p$, determinamos una ecuación diferencial para el flujo magnético dada por

$$\Delta_{gs} \Psi_p = -4\pi^2 \mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi_p} - \mu_0^2 I_{pol} \frac{dI_{pol}}{d\Psi_p}, \quad (2.27a)$$

$$p = p(\Psi_p), \quad I_{pol} = I_{pol}(\Psi_p), \quad (2.27b)$$

la cual se conoce por el nombre de ecuación de Grad-Shafranov. Dicha ecuación se encon-

trará definida una vez especificada la forma funcional, respecto a la variable Ψ_p , de los perfiles de presión cinética p y corriente poloidal I_{pol} . Es común encontrar en los libros una expresión más sintética de la ecuación (2.27). Para ello debemos definir una nueva cantidad Ψ denominada función de flujo poloidal, y también la función f la cual involucra a la corriente poloidal I_{pol} , ambas expresadas como

$$\Psi := \frac{\Psi_p}{2\pi}, \quad f := \frac{\mu_0 I_{pol}}{2\pi}.$$

Ergo, la expresión sintética para la ecuación de Grad-Shafranov resulta

$$\Delta_{gs} \Psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi}, \quad (2.28a)$$

$$p = p(\Psi), \quad f = f(\Psi). \quad (2.28b)$$

Por otro lado, reemplazando las expresiones halladas para el campo magnético como función del flujo poloidal, dadas en (2.17) y (2.18), dentro del término $\Delta_{gs} \Psi_p$ y utilizando la ley de Ampère, obtenemos una expresión para la ecuación del Grad-Shafranov cuyo término del lado derecho resulta

$$-4\pi^2 \mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi_p} - \mu_0^2 I_{pol} \frac{dI_{pol}}{d\Psi_p} = -2\pi \mu_0 r J_\phi(\Psi_p(r, z)), \quad (2.29a)$$

$$-\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi} = -\mu_0 r J_\phi(\Psi(r, z)), \quad (2.29b)$$

donde se especificó el término del lado derecho para ambas alternativas de la ecuación de Grad-Shafranov, según se utilice (Ψ_p, I_{pol}) ó (Ψ, f) respectivamente. Ergo, podemos escribir la ecuación de Grad-Shafranov a partir de la densidad de corriente toroidal del plasma, la cual expresamos como

$$\Delta_{gs} \Psi_p = -2\pi \mu_0 r J_\phi(\Psi_p(r, z)), \quad (2.30a)$$

$$\Delta_{gs} \Psi = -\mu_0 r J_\phi(\Psi(r, z)), \quad (2.30b)$$

según se utilice (Ψ_p, I_{pol}) ó (Ψ, f) respectivamente.

2.4.2. Adimensionalización de la ecuación de Grad-Shafranov

Dado que los códigos computacionales que han sido programados dentro de este proyecto integrador se encuentran desarrollados a partir de ecuaciones adimensionalizadas, en lo que resta de esta sección explicitaremos los parámetros implementados para la determinación de las cantidades adimensionales. Dichos parámetros son: campo magnético de vacío B_0 , expresado en Tesla, radio menor a expresado en metros, y permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$. En base a estos parámetros, expresamos las

variables adimensionales, denotadas con asterisco, como

$$\Psi_p^* = \frac{\Psi_p}{B_0 a^2}, \quad p^* = \frac{p}{B_0^2 / \mu_0}, \quad \mathbf{J}^* = \frac{\mathbf{J}}{B_0 / \mu_0 a}, \quad I^* = \frac{I}{B_0 a / \mu_0}, \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r} / a. \quad (2.31)$$

Según las variables adimensionales obtenidas en (2.31), obtenemos expresiones para las derivadas de dichas variables, dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_p}{\partial r} &= B_0 a \frac{\partial \Psi_p^*}{\partial r^*}, & \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial r^2} &= B_0 \frac{\partial^2 \Psi_p^*}{\partial r^{*2}}, & \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial z^2} &= B_0 \frac{\partial^2 \Psi_p^*}{\partial z^{*2}}, \\ \frac{dp}{d\Psi} &= \frac{B_0}{\mu_0 a^2} \frac{dp^*}{d\Psi^*}, & \frac{dI}{d\Psi} &= \frac{1}{\mu_0 a} \frac{dI^*}{d\Psi^*}, & \frac{df}{d\Psi} &= \frac{1}{a} \frac{df^*}{d\Psi^*}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, procedemos a la adimensionalización de la ecuación de Grad-Shafranov según (2.28), resultando en

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^{*2}} = -r^{*2} \frac{dp^*}{d\Psi^*} - f^* \frac{df^*}{d\Psi^*} = -r^* J_\phi^*(r^*, z^*). \quad (2.32)$$

2.4.3. Flujo magnético debido a una espira circular

El problema del equilibrio MHD involucra la resolución de la ecuación de Grad-Shafranov en la región ocupada por el plasma. Cuando esta región se conoce, se especifica como dominio del problema diferencial y se resuelve el denominado problema de frontera "fija". Sin embargo, en la práctica la forma y posición del plasma resultan de su interacción con las corrientes de las bobinas externas. Para desarrollar métodos numéricos que permitan tener en cuenta esta interacción (Capítulos 3 y 4), la solución analítica del problema de Green para magnetostática que da el flujo poloidal debido a una espira circular puntual, resulta de gran utilidad. En esta sección se describe este problema.

Consideramos una espira puntual que yace en el plano x - y (ver Figura 2.4), la cual está centrada en el origen y por la que circula una corriente eléctrica I_{cl} . El flujo magnético poloidal en un punto (r, z) del espacio, producido por la espira circular, puede ser calculado a partir de la componente angular del potencial vector \mathbf{A} . La expresión para el flujo magnético en función del potencial vector, surge a partir de la definición formal de dicho flujo y el campo magnético como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, y la implementación del teorema de Stokes, la cual resulta

$$\begin{aligned} \Psi_p(r, z) &= \int_{S_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p = \int_{S_p} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_p = \oint_{\partial S_p} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \\ \Rightarrow \oint_{\partial S_p} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} A_\phi(r, z) \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi r \, d\phi = 2\pi r A_\phi(r, z), \end{aligned}$$

$$\boxed{\Psi_p(r, z) = 2\pi r A_\phi(r, z)}. \quad (2.33)$$

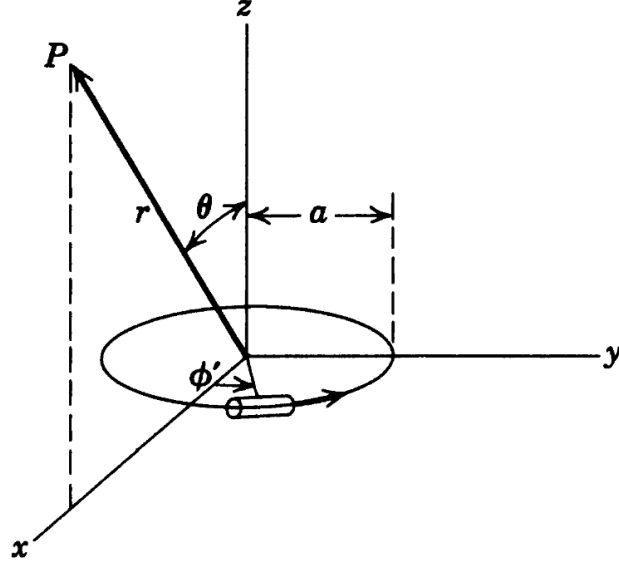


Figura 2.4.: Imagen extraída de [12]. Representación gráfica de una espira circular de radio r_0 (se entiende $a = r_0$), descrita en coordenadas cilíndricas, donde el punto P representa un punto genérico del espacio.

La densidad de corriente \mathbf{J} para una espira circular de corriente I_{cl} se expresa como

$$\mathbf{J}_{cl}(r', z') = I_{cl} \delta(r' - r_0) \delta(z' - z_0) \hat{e}'_\phi. \quad (2.34)$$

Dado que la geometría es cilíndrica y por lo tanto presenta simetría de revolución, podemos resolver el flujo magnético, como función de r y z , en un plano dado por $\phi = 0$ para simplificar el cálculo. Si observamos la Figura 2.4, vemos que para dicho plano, la única componente que contribuye al cálculo del potencial vector, debido a la simetría, es aquella que yace sobre el eje y , la cual es A_ϕ . Procedemos matemáticamente con el cálculo del potencial vector requerido, y en la ecuación (2.35) expresamos el resultado obtenido [12].

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\infty r' dr' \int_{-\infty}^\infty dz' \frac{I_{cl} \delta(r' - r_0) \delta(z' - z_0) (-\sin(\phi'), \cos(\phi'), 0)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi') + (z - z')^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{I_{cl} r_0 (-\sin(\phi'), \cos(\phi'), 0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi') + (z - z_0)^2}}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = A_\phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\mu_0 I_{cl}}{2\pi k} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)\} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.35a)$$

$$k^2 = \frac{4r r_0}{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (2.35b)$$

Reemplazando la expresión para el potencial vector dada en (2.35) en la ecuación (2.33), obtenemos una expresión para el flujo magnético en el plano r - z , debido a una espira circular ubicada en (r_0, z_0) , la cual resulta

$$\Psi_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0 I_{cl}}{k} \sqrt{r r_0} [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)]. \quad (2.36)$$

En base a la ecuación (2.36), definimos la función de Green para el problema de la espira circular de corriente como

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{\sqrt{r r'}}{2\pi k} [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)], \quad (2.37)$$

la cual se lee como la función de Green evaluada en el punto \mathbf{r} debido a un punto fuente en \mathbf{r}' . La misma satisface la ecuación de Grad-Shafranov para una distribución de densidad de corriente dada por una delta de Dirac en el plano r - z , i.e.

$$\Delta_{gs} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -r \delta(r - r') \delta(z - z'). \quad (2.38)$$

Ergo, podemos expresar el flujo magnético poloidal en un punto \mathbf{r} debido a una espira ubicada en \mathbf{r}_{cl} , a partir de la función de Green dada en (2.37), como

$$\Psi_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_{cl}) = 2\pi\mu_0 I_{cl} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_{cl}). \quad (2.39)$$

2.5. Formulación del problema del equilibrio

El equilibrio de fuerzas dentro del plasma está dado por la ecuación de Grad-Shafranov (2.28). Para resolver esta ecuación es necesario formular debidamente el problema diferencial adecuado. La opción más sencilla consiste en prescribir la forma de la separatriz o última superficie magnética cerrada y resolver (2.28) en su interior como problema de Dirichlet. Esta formulación matemática se conoce como problema de frontera fija, y se detalla en la Sección 2.5.1.

Sin embargo, en la práctica la forma de la frontera del plasma es el resultado de la interacción de la corriente del plasma con las corrientes que circulan por las bobinas externas, a través de los campos magnéticos que estas generan. Para atacar este problema debe resolverse la ecuación de Grad-Shafranov en el interior del plasma y la ley de Ampère en el exterior de éste, formalmente en todo el espacio. El problema matemático de hallar el equilibrio del plasma, incluyendo su forma y posición, a partir de su interacción con las

bobinas externas se denomina problema de frontera libre. Existen dos enfoques clásicos de este problema, el directo y el inverso. En pocas palabras, el problema de frontera libre directo consiste en hallar el equilibrio del plasma a partir de las corrientes que circulan por las bobinas externas. En este caso, la forma y posición de la separatriz son una incógnita del problema. En el problema de frontera libre inverso, se impone como dato la separatriz y se obtienen a partir de ésta las corrientes en las bobinas externas. Estas dos variantes del problema de frontera libre se detallan en la Sección 2.5.2.

2.5.1. Problema de frontera fija

Dedicamos esta sección a la explicación y formulación del problema de frontera fija de modo sintético, dado que el mismo ha sido ampliamente desarrollado por el Mgter. Pablo Esteban Montes en su tesis de Maestría en Ciencias Físicas [6]. En lo que sigue nos avocaremos solamente al planteo matemático dado que nos será de utilidad, tanto en la resolución del problema inverso (Capítulo 3) como del problema directo (Capítulo 4).

El problema de frontera fija supone que la ubicación geométrica de la separatriz del plasma, en el plano poloidal, es un dato del problema, i.e. es una curva cerrada conocida *a priori*. Ergo, el problema diferencial se convierte en uno de Dirichlet. Solo resta especificar la forma funcional de los perfiles internos, tanto cinéticos como magnéticos en función del flujo, para definir el problema del equilibrio. Matemáticamente el problema de frontera fija, utilizando la variable de función de flujo poloidal, se expresa como

$$\Delta_{cs}\Psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi} \quad \text{en } \Omega_{\text{pl}}, \quad (2.40a)$$

$$p = p(\Psi), \quad f = f(\Psi), \quad (2.40b)$$

$$\Psi \Big|_{\partial\Omega_{\text{pl}}} = \Psi_b, \quad (2.40c)$$

en donde Ψ_b es el valor de la función de flujo poloidal en cada punto de la separatriz del plasma, y Ω_{pl} el dominio del plasma.

Notemos que la ecuación de Grad-Shafranov se encuentra definida a menos de una constante en la variable de flujo, i.e. \mathbf{B} y \mathbf{J} solo dependen de las derivadas de Ψ_p (o Ψ). Ergo, podemos definir como cero el valor de Ψ_b en la ecuación (2.40) sin pérdida de generalidad. Por otro lado, utilizar Ψ como coordenada para los perfiles p y f resulta impráctico, pues resulta difícil predecir las formas funcionales de estos perfiles, lo cual está relacionado a inestabilidades numéricas que impiden la convergencia. Queremos evitar esta dificultad, por lo que definimos una normalización de la variable Ψ la cual viene dada por

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad \Psi_0 = \Psi_a - \Psi_b, \quad (2.41)$$

donde Ψ_a y Ψ_b se definen como, la función de flujo poloidal evaluada en el eje magnético y en la separatriz del plasma, respectivamente. Por lo tanto definimos las nuevas funciones

P y F , las cuales representan los perfiles, cinético y magnético, en función de la variable normalizada ψ . Dado que por definición, las imágenes entre funciones son iguales, nos interesa conocer la relación entre sus derivadas, las cuales se expresan matemáticamente como

$$\begin{aligned} p(\Psi), f(\Psi) &\longrightarrow P(\psi), F(\psi), \\ \frac{dp}{d\Psi} &= \frac{1}{\Psi_0} \frac{dP}{d\psi}, \quad \frac{df}{d\Psi} = \frac{1}{\Psi_0} \frac{dF}{d\psi}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

De esta manera, el dominio para las funciones P y F se encuentra siempre acotado entre cero y uno, i.e. $\psi \in [0, 1]$, independientemente del valor de la variable Ψ . Ergo, podemos expresar la ecuación (2.40) en función de la coordenada normalizada ψ y las funciones P y F , resultando en

$$\Delta_{gs}\psi = -\frac{1}{\Psi_0^2} \left(\mu_0 r^2 \frac{dP}{d\psi} + F \frac{dF}{d\psi} \right) \quad \text{en } \Omega_{pl}, \quad (2.43a)$$

$$P = P(\psi), \quad F = F(\psi), \quad (2.43b)$$

$$\psi \Big|_{\partial\Omega_{pl}} = 0, \quad (2.43c)$$

donde es importante notar que Ψ_0 es la amplitud de la función de flujo poloidal, ergo resulta en una incógnita adicional del problema. En este trabajo solo plantearemos cierta forma funcional de los perfiles cinético y magnético, tales que conlleven a una ecuación de Grad-Shafranov lineal, i.e. empleamos las siguientes formas funcionales

$$P(\psi) = P_0\psi^2, \quad F^2(\psi) = F_0^2 + F_1^2\psi^2, \quad (2.44)$$

donde P_0 está asociada a la presión máxima la cual tiene lugar en el eje magnético, F_0 está asociada con el producto $R_0 B_0$ el cual es proporcional a la corriente poloidal de las bobinas externas, y F_1 está asociada con la contribución del plasma a la corriente poloidal. Aplicando las formas funcionales definidas en (2.44) a la ecuación (2.43), previamente adimensionalizando esta última, obtenemos

$$\Delta_{gs}\psi = -(r^2 \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_F)\psi \quad \text{en } \Omega_{pl}, \quad (2.45a)$$

$$\Psi \Big|_{\partial\Omega_{pl}} = 0, \quad (2.45b)$$

$$\mathcal{L}_P = \frac{2P_0}{\Psi_0^2}, \quad \mathcal{L}_F = \frac{F_1^2}{\Psi_0^2}, \quad (2.45c)$$

donde hemos suprimido la notación con asterisco de las variables adimensionales, y hemos definido dos nuevas cantidades, \mathcal{L}_P y \mathcal{L}_F , las cuales relacionan los parámetros P_0 , F_1 y Ψ_0 . Además, se deben explicitar dos parámetros globales para la determinación de las tres variables incógnita mencionadas anteriormente, los cuales son I_{pl} y β .

2.5.2. Problema de frontera libre

El planteo del problema de frontera fija es útil para obtener la estructura interna del plasma, cuando se conoce de antemano su geometría, es decir, la forma de la separatriz. Sin embargo, esta formulación no sirve para responder preguntas tales como ¿qué corrientes deben circular por las bobinas para obtener una cierta geometría y posición del plasma? O bien, dada una distribución de corrientes en las bobinas, ¿cuál será la forma y posición del plasma? Las respuestas a estas preguntas son útiles para diseñar esquemas de control magnético de forma y posición del plasma [13] o estudiar el efecto de las bobinas externas sobre los perfiles internos del plasma.

Para responder estas preguntas se debe resolver la interacción del plasma con las corrientes en las bobinas externas. Este enfoque se conoce como problema de frontera libre, y su planteo matemático general es el siguiente,

$$\Delta_{GS}\Psi = \begin{cases} -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi} & \text{en } \Omega_{pl}(\Psi), \\ 0 & \text{en } \Omega_v, \\ -\mu_0 \frac{I_{cl}}{S_{cl}} & \text{en } \Omega_{cl}, \end{cases} \quad (2.46a)$$

$$\Psi(0, z) = 0, \quad \lim_{\|(r,z)\| \rightarrow +\infty} \Psi(r, z) = 0. \quad (2.46b)$$

Este problema se extiende a todo el semiplano (r, z) , que se encuentra dividido en Ω_{pl} , la región del plasma, Ω_{cl} , el conjunto de bobinas externas, y todo el resto se considera vacío (Ω_v). En este nivel de aproximación se desprecia el efecto del cambio de permeabilidad magnética en los elementos estructurales de la máquina. En Ω_{pl} se resuelve la ecuación de Grad-Shafranov, y la ley de de Ampère en el resto. Un esquema de los contornos de $\Psi(r, z)$ que es solución del problema (2.46) se muestra en la Figura 2.5 [14].

En este trabajo estamos interesados en encontrar el mapa magnético en el interior del plasma y la zona exterior cercana, digamos dentro de la cámara de vacío. También nos interesa desarrollar la capacidad de obtener la respuesta del plasma, es decir, cómo varían su forma y posición y sus perfiles internos ante cambios en las corrientes de las bobinas externas. Pero estos cambios también están espacialmente limitados por las paredes de la cámara de vacío. En este sentido, el planteo formal del problema de frontera libre (2.46), que se extiende a todo el semiplano, resulta poco práctico. Por eso detallamos a continuación el planteo del problema de frontera libre en un dominio computacional, de forma que pueda ser resuelto eficientemente en forma numérica.

Problema de frontera libre en un dominio computacional

Para resolver el problema de frontera libre del equilibrio en una región acotada que incluya al plasma definimos un dominio computacional Ω_{comp} como muestra la Figura 2.6.

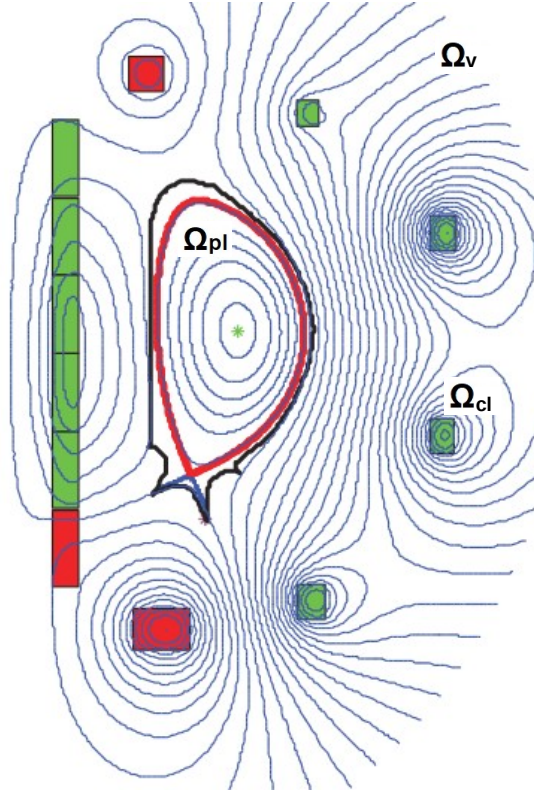


Figura 2.5.: Esquema de los contornos de la solución del problema (2.46), mostrando las distintas regiones para una configuración de plasma con divertor. La curva negra representa la cámara de vacío, a modo ilustrativo, ya que su efecto no es considerado en el modelo del sistema.

Esta región queda compuesta por el plasma rodeado por una zona de vacío relativamente chica. Por simplicidad, en este trabajo consideramos un rectángulo que incluye la cámara de vacío (donde está el plasma) pero excluye las bobinas externas.

Usando la definición de las regiones de la Figura 2.6, el problema de frontera libre restringido a un dominio computacional consiste en hallar el mapa magnético $\Psi(r, z)$ en Ω_{comp} , que satisfaga la siguiente ecuación,

$$\Delta_{GS}\Psi = \begin{cases} -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi} & \text{en } \Omega_{\text{pl}}(\Psi), \\ 0 & \text{en } \Omega_v, \end{cases} \quad (2.47a)$$

$$\Psi(\mathbf{r}_b) = \mu_0 \int_{\Omega_{\text{pl}}} J_\phi(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}_b; \mathbf{r}) dS_p + \mu_0 \sum_{cl=1}^{N_{cl}} I_{cl} G(\mathbf{r}_b; \mathbf{r}_{cl}) \quad \forall \mathbf{r}_b \text{ en } \partial\Omega_{\text{comp}}. \quad (2.47b)$$

De esta manera, el problema de frontera libre en Ω_{pl} , se formula como un problema en un dominio fijo Ω_{comp} , en el cual el miembro de la derecha de la ecuación y la condición de contorno dependen de la solución de forma no-lineal.

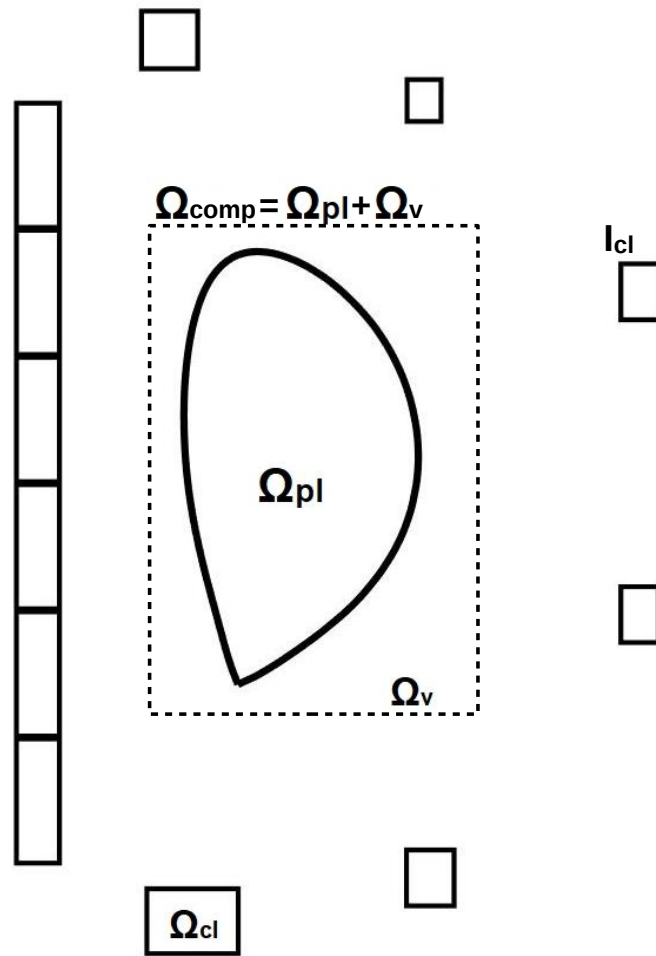


Figura 2.6.: Definición del dominio computacional, Ω_{comp} , donde se resuelve el mapa magnético $\Psi(r, z)$. La región se compone del plasma, Ω_{pl} , más una zona de vacío, Ω_v . El efecto de las bobinas externas y la corriente del plasma se incluye como condición de contorno sobre $\partial\Omega_{comp}$ usando funciones de Green (Sección 2.4.3).

Notar que la condición de contorno contiene dos términos. El primero es la contribución de la corriente del plasma a Ψ en el borde del dominio computacional. El segundo incorpora el efecto de las bobinas externas. En este caso se aproximaron como espiras puntuales de corriente, aunque podría considerarse una distribución de corriente más realista, que tenga en cuenta las dimensiones espaciales de cada bobina.

Para poder resolver esta ecuación, además del dominio computacional, debemos especificar los perfiles internos del plasma, $p(\Psi)$ y $f(\Psi)$. En la práctica, es muy común que se especifique la corriente total del plasma como dato. Para hallar soluciones que tengan un valor de corriente del plasma prescrito, se modifica la amplitud de los perfiles del plasma. Es decir, los perfiles $p(\Psi)$ y $f(\Psi)$ se definen a menos de una constante λ que se elige para obtener el valor de I_{pl} deseado.

Una vez definido el miembro de la derecha de la ecuación (2.47), a través de los perfiles y

la corriente total del plasma, surgen dos opciones. Por un lado, el problema directo consiste en especificar las corrientes en las bobinas y obtener el mapa magnético, que contiene a su vez la información de la forma y posición de la separatriz. Por otro lado, el problema inverso consiste en especificar una curva para la separatriz deseada y hallar las corrientes en las bobinas que minimizan la distancia de la separatriz a la curva especificada.

Con estas consideraciones, estamos en condiciones de formular las dos variantes del problema de frontera libre :

■ **Problema directo**

Sean $S_{p'}(\psi)$ y $S_{ff'}(\psi)$ las funciones que dan la forma de los perfiles internos del plasma, I_{cl} las corrientes en las bobinas externas e I_{pl} la corriente total del plasma. Hallar $\Psi(r, z)$ y λ que satisfagan la ecuación (2.47), con $p'(\Psi) = \lambda S_{p'}(\psi)$, $ff'(\Psi) = \lambda S_{ff'}(\psi)$ y además,

$$I_{pl} = \lambda \int_{\Omega_{pl}(\psi)} \left(r S_{p'}(\psi(r, z)) + \frac{1}{\mu_0 r} S_{ff'}(\psi(r, z)) \right) dr dz \quad (2.48)$$

■ **Problema inverso**

Dados los perfiles internos del plasma, la corriente total I_{pl} y un conjunto de puntos $\{r_l, z_l\}$ que definen la forma de la separatriz $\partial\Omega_{pl}$, hallar primero $\Psi(r, z)$ en Ω_{pl} resolviendo el problema (interior) de frontera fija (2.45). Luego, hallar las corrientes I_{cl} que minimicen la distancia ε , dada por la ecuación (3.1), entre la separatriz y la curva objetivo. Por último, determinar $\Psi(r, z)$ en Ω_{comp} a partir de la densidad de corriente del plasma y las corrientes halladas para las bobinas (ver Sección 3.2).

En el Capítulo 3 se presentan los métodos implementados y la validación realizada para la solución del problema inverso. Comenzamos por este caso porque presenta menor complejidad que el problema directo. La dificultad del problema directo radica en la dependencia no-lineal del miembro de la derecha (a través de Ω_{pl}) y de la condición de contorno en el borde del dominio computacional con la solución. Los métodos implementados y los resultados obtenidos para este problema se describen en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Problema inverso de frontera libre

En este capítulo introducimos los métodos empleados para la solución del problema de frontera libre inverso. Primero planteamos el problema de optimización que permite determinar la mejor distribución de corrientes en las bobinas. Luego describimos el cálculo del mapa magnético en un dominio computacional que contiene al plasma. Por último, validamos los resultados comparando con la solución analítica de Solovév y con los valores obtenidos mediante el código de equilibrio de frontera fija.

3.1. Determinación de las corrientes en las bobinas externas

Para resolver el problema inverso de frontera libre, el primer paso es resolver el problema de frontera fija, especificando la separatriz deseada como frontera del dominio, los perfiles del plasma e I_{pl} . Esto lo hacemos usando el código previamente desarrollado por Pablo Montes [6]. Una vez hallados los datos en el interior del plasma, se requiere la determinación de las corrientes que circulan por las bobinas externas de campo poloidal (PFC)¹. Para ello, conocida la distribución de densidad de corriente del plasma $J_\phi(r, z)$, la posición espacial de las bobinas externas (PFC) y la separatriz deseada, procedemos al planteo formal de un problema de minimización. El método requiere la asignación de un valor de flujo magnético a la separatriz deseada, ya que la misma representa una curva de nivel del campo escalar.

Previo a la formulación matemática del problema, debemos aclarar que la forma y posición del plasma se obtiene como resultado de la interacción entre los campos magnéticos debido a las bobinas externas (PFC) y la corriente toroidal del plasma. Ergo, al establecer una posición específica para cierta curva de nivel, en este caso la separatriz deseada, debemos determinar las corrientes en las bobinas tal que la geometría del flujo magnético resultante satisfaga la condición pedida.

El problema de optimización requiere la minimización de la cantidad ε sobre los N_s puntos de la separatriz deseada, rotulados según el índice l , cuya expresión está dada por

$$\varepsilon = \sum_{l=1}^{N_s} \left\{ \Psi_{sep} - \Psi(r_l, z_l) \Big|_{pl} - \sum_{cl=1}^{N_{cl}} \Psi(r_l, z_l) \Big|_{cl} \right\}^2, \quad (3.1)$$

en donde se define a Ψ_{sep} como el valor de la función de flujo poloidal en la separatriz deseada (que es arbitrario, pues la forma de los contornos está definida a menos de una constante), y a $\Psi(r_l, z_l) \Big|_{pl}$ y $\Psi_p(r_l, z_l) \Big|_{cl}$ como la función de flujo poloidal en el punto (r_l, z_l) debido al plasma y a las bobinas externas, respectivamente. Las funciones de flujo poloidal debidas al plasma y a las bobinas externas se calculan a partir de la función de Green obtenida en la Sección 2.4.3. La expresión matemática de los mismos resulta

$$\begin{aligned} \Psi(r_l, z_l) \Big|_{pl} &= \mu_0 \int_{\Omega_{pl}} G(\mathbf{r}_l; \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}') \, dr' dz', \\ \Psi(r_l, z_l) \Big|_{cl} &= \mu_0 \int_{\Omega_{cl}} G(\mathbf{r}_l; \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}') \, dr' dz', \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde Ω_{pl} y Ω_{cl} especifican, respectivamente, el dominio de integración del plasma y cada bobina externa (PFC). Discretizando la densidad de corriente toroidal del plasma en am-

¹Poloidal field coils por sus siglas en inglés. Abreviatura que usaremos con frecuencia en este trabajo, para referirnos a las bobinas externas de campo poloidal.

bas direcciones, $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$, modelándola como una sumatoria finita de espiras ubicadas en los respectivos puntos de la grilla, I_{nm} , análogamente para las bobinas externas, expresamos ambas distribuciones de densidad de corriente como

$$\begin{aligned} J_\phi(\mathbf{r}') \Big|_{\Omega_{pl}} &\approx \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm} \delta(r' - r_n) \delta(z' - z_m), \\ J_\phi(\mathbf{r}') \Big|_{\Omega_{cl}} &= \sum_{cl=1}^{N_{cl}} I_{cl} \delta(r' - r_{cl}) \delta(z' - z_{cl}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como su nombre lo indica, minimizar implica hallar un extremo local de la cantidad ε con respecto a sus variables I_{cl} , matemáticamente debemos satisfacer la condición dada por

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_{cl}} = 0, \quad \forall cl \in [1, N_{cl}], \quad (3.4)$$

donde N_{cl} es el número de bobinas externas. Aplicamos la condición dada en (3.4) a la ecuación (3.1) para la cantidad a minimizar ε , y obtenemos N_{cl} expresiones algebraicas para la determinación de las corrientes correspondientes a las bobinas externas (PFC). Cuando derivamos a ε con respecto a la corriente de una bobina en particular, la cual identificaremos con el subíndice k , la expresión algebraica obtenida resulta

$$\sum_{cl=1}^{N_{cl}} I_{cl} \sum_{l=1}^{N_s} G(\mathbf{r}_l; \mathbf{r}_k) G(\mathbf{r}_l; \mathbf{r}_{cl}) = \sum_{l=1}^{N_s} G(\mathbf{r}_l; \mathbf{r}_k) \left\{ \frac{\Psi_{sep}}{\mu_0} - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm} G(r_l, z_l; r_n, z_m) \right\}. \quad (3.5)$$

Análogamente a lo planteado en la Sección 2.4.2, explicitamos las variables adimensionales, así como también los parámetros necesarios para su determinación, resultando

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{B_0 a^2}, \quad I^* = \frac{I}{B_0 a / \mu_0}, \quad G^* = G/a, \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}/a.$$

En consecuencia, obtenemos una expresión adimensionalizada de la ecuación algebraica (3.5), la cual se encuentra dada por

$$\sum_{cl=1}^{N_{cl}} I_{cl}^* \sum_{l=1}^{N_s} G^*(\mathbf{r}_l^*; \mathbf{r}_k^*) G^*(\mathbf{r}_l^*; \mathbf{r}_{cl}^*) = \sum_{l=1}^{N_s} G^*(\mathbf{r}_l^*; \mathbf{r}_k^*) \left\{ \Psi_{sep}^* - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm}^* G^*(r_l^*, z_l^*; r_n^*, z_m^*) \right\}. \quad (3.6)$$

Podemos expresar de forma matricial el sistema lineal de ecuaciones, dado por una matriz de coeficientes, un vector de incógnitas y otro de constantes. Matemáticamente se expresa como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{N_{cl} \times N_{cl}}, \quad \mathbf{I}, \mathbf{b} &\in \mathbb{R}_{N_{cl} \times 1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

en donde \mathbf{I} y \mathbf{b} se definen, respectivamente, como el vector de corrientes incógnita y el vector de constantes. En base a la ecuación (3.6) explicitamos las componentes del sistema matricial como

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= (I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_{N_{cl}}), \\ a_{ij} &= \sum_{l=1}^{N_s} G^*(\mathbf{r}_l^*; \mathbf{r}_{cl_i}^*) G^*(\mathbf{r}_l^*; \mathbf{r}_{cl_j}^*), \\ b_i &= \sum_{l=1}^{N_s} G^*(\mathbf{r}_l^*; \mathbf{r}_{cl_i}^*) \left\{ \Psi_{sep}^* - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm}^* G^*(r_l^*, z_l^*; r_n^*, z_m^*) \right\},\end{aligned}\tag{3.8}$$

el cual resolvemos mediante una función existente por defecto, brindada por el software *Matlab*.

3.2. Construcción del mapa magnético en el dominio computacional

Definimos al mapa magnético como la extensión del flujo poloidal a la zona de vacío que rodea el plasma, i.e. el mapa magnético es la suma del flujo magnético Ψ_p en el dominio del plasma Ω_{pl} y en el vacío Ω_v . Dicho mapa es utilizado principalmente para el control de posición y forma del plasma [13], y para abundantes estudios de transporte de partículas en la frontera del plasma [15].

Si conocemos las corrientes en las bobinas externas I_{cl} , y la distribución de la densidad de corriente toroidal del plasma $J_\phi(r, z)$, obtenemos el flujo magnético Ψ_p en el dominio computacional utilizando funciones de Green, según la ecuación dada en (2.36), el cual se expresa, matemáticamente para cada punto del dominio, como

$$\frac{\Psi_p(r, z)}{2\pi \mu_0} = \int_{\Omega_{pl}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}') dr' dz' + \int_{\Omega_{cl}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}') dr' dz', \quad \forall (r, z) \in \Omega_{comp}, \tag{3.9}$$

donde Ω_{comp} representa el dominio computacional definido en la Figura 2.6 . Sin embargo, el uso de las funciones de Green resulta en un método computacionalmente costoso y por sobre todo impreciso en el interior del plasma, cuando éste es discretizado en una arreglo de espiras circulares. Por lo tanto se recurre a resolver la ley de Ampère en el dominio Ω_{comp} , el cual involucra al plasma en su totalidad, no así para las bobinas externas. En la Tabla 3.1 explicitamos, a modo ilustrativo, los tiempos de cálculo del mapa magnético para ambos métodos.

N_r	N_z	$N_r \times N_z$	N_G	T_G	T_{pss}
50	90	4.500	20.250.000	≈ 15 s	0,06 s
75	135	10.125	102.515.625	≈ 1 min s	0,14 s
100	180	18.000	324.000.000	≈ 3 min	0,21 s
150	270	40.500	1.640.250.000	≈ 10 min	0,57 s
200	360	72.000	5.184.000.000	≈ 30 min	1,20 s

Tabla 3.1.: Tiempo de cálculo del mapa magnético en el dominio computacional según se utilice las funciones de Green (T_G) ó, resolviendo la ley de Ampère (T_{pss}), para distinta resolución de puntos en la grilla. N_r , N_z , y N_G representan, respectivamente, el número de puntos en \hat{e}_r , el número de puntos en \hat{e}_z , y el número de funciones de Green a calcular. Tiempos de cálculo a partir del software Matlab y un procesador Intel(R) Core(TM) i7-Q 740 - 1.73 GHz.

3.2.1. Determinación de Ψ_p en el contorno

En vista al costo computacional que involucra el cálculo del mapa magnético mediante funciones de Green, procedemos a su determinación mediante la ley de Ampère, el cual se vuelve un problema de Dirichlet. Empleando la ecuación (3.9), la cual nos permite calcular Ψ_p en cualquier punto del plano poloidal como contribución del plasma y las bobinas externas, determinamos el valor del flujo en el contorno $\partial\Omega_{comp}$, discretizando la densidad de corriente del plasma en una sumatoria finita de espiras circulares. Ergo, solo evaluamos la función de Green sobre una curva y no en toda la región de interés.

Expresamos matemáticamente la discretización de J_ϕ del plasma como

$$J_\phi(\mathbf{r}') \Big|_{\Omega_{pl}} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm} \delta(r' - r_n) \delta(z' - z_m), \quad (3.10)$$

donde la discretización del plasma se hace sobre una grilla cartesiana de N puntos en el eje horizontal y M puntos en el eje vertical. Análogamente para las bobinas externas tomadas como espiras en su centro geométrico, expresamos su densidad de corriente como

$$J_\phi(\mathbf{r}') \Big|_{\Omega_{cl}} = \sum_{cl=1}^{N_{cl}} I_{cl} \delta(r' - r_{cl}) \delta(z' - z_{cl}). \quad (3.11)$$

Reemplazando las expresiones planteadas en (3.10) y (3.11) dentro de la ecuación (3.9) y evaluando sobre el contorno del dominio, obtenemos

$$\Psi_p(r_b, z_b) = 2\pi\mu_0 \left[\sum_{cl=1}^{N_{cl}} I_{cl} G(r_b, z_b; r_{cl}, z_{cl}) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm} G(r_b, z_b; r_n, z_m) \right], \quad (3.12)$$

en donde (r_b, z_b) representa un punto genérico de $\partial\Omega_{comp}$.

Por último, pero no menor, notemos que por conveniencia hemos definido el dominio computacional como un rectángulo que encierra al plasma y excluye las bobinas, aunque podría incluirlas. En el hipotético caso que incluyéramos las bobinas al dominio, deberíamos considerarlas como parte del término de la derecha de la ley de Ampère, ecuación (2.30). Dejando de lado esta situación y volviendo al caso original, es importante enfatizar en que el efecto físico sobre el plasma de las corrientes externas al dominio computacional, se tiene en cuenta a través de la condición de contorno que se calcula a partir de estas corrientes y la corriente del plasma usando funciones de Green.

3.2.2. Resolución de la ecuación de Grad-Shafranov símil Poisson

Partimos de la ecuación de Grad-Shafranov adimensionalizada obtenida en (2.32), considerando el término de la derecha como la densidad de corriente toroidal del plasma. Planteamos la ecuación diferencial desde un modelo generalizado. Definimos al término del lado derecho como una función F , y a la incógnita como U . El dominio de resolución comprende el uso de una grilla cartesiana sobre un plano r - z , discretizado en un total de N y M puntos, con un paso h_r y h_z en direcciones \hat{e}_r y \hat{e}_z , respectivamente. Ergo, el planteo formal de la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= F(r, z) \quad \text{en } \mathcal{D}, \\ U(r, z) &= V(r, z) \quad \forall (r, z) \in \mathcal{S}, \\ \mathcal{S} &:= \{(r, z) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R} / : \mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2 \cup \mathbb{S}_3 \cup \mathbb{S}_4\}, \\ \mathbb{S}_1 &= \{(r, z) \in \mathbb{R} / : r_1 \leq r \leq r_n \wedge z = z_1\}, \\ \mathbb{S}_2 &= \{(r, z) \in \mathbb{R} / : z_1 \leq z \leq z_m \wedge r = r_n\}, \\ \mathbb{S}_3 &= \{(r, z) \in \mathbb{R} / : r_1 \leq r \leq r_n \wedge z = z_m\}, \\ \mathbb{S}_4 &= \{(r, z) \in \mathbb{R} / : z_1 \leq z \leq z_m \wedge r = r_1\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

en donde la función V representa la condición de borde del problema de Dirichlet, el conjunto \mathcal{S} se define como la frontera del dominio \mathcal{D} , siendo \mathcal{S} la unión de cuatro subconjuntos \mathbb{S}_1 , \mathbb{S}_2 , \mathbb{S}_3 y \mathbb{S}_4 que conforman los cuatro bordes rectos de la grilla cartesiana.

Procedemos con la discretización del operador de Grad-Shafranov, el cual comprende una derivada parcial de primer orden y dos de segundo orden. Utilizando la fórmula de los tres puntos, la derivada de primer orden respecto a r resulta

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right|_{(r_i, z_j)} &= \frac{U(r_{i+1}, z_j) - U(r_{i-1}, z_j)}{2h_r} - \frac{h_r^2}{6} \frac{\partial^3 U(\xi_i, z_j)}{\partial r^3}, \\ \forall \xi_i &\in (r_{i-1}, r_{i+1}), \quad i \in [2, N-1], \quad j \in [2, M-1]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Con respecto a las derivadas de segundo orden se utilizó el método de diferencias cen-

tradas de segundo orden. Las mismas, respecto a r y z , respectivamente, resultan

$$\left. \frac{\partial^2 U(r, z)}{\partial r^2} \right|_{(r_i, z_j)} = \frac{U(r_{i-1}, z_j) - 2U(r_i, z_j) + U(r_{i+1}, z_j)}{h_r^2} - \frac{h_r^2}{12} \frac{\partial^4 U(\xi_i, z_j)}{\partial r^4}, \quad (3.15)$$

$$\forall \xi_i \in (r_{i-1}, r_{i+1}), \quad i \in [2, N-1], \quad j \in [2, M-1],$$

$$\left. \frac{\partial^2 U(r, z)}{\partial z^2} \right|_{(r_i, z_j)} = \frac{U(r_i, z_{j-1}) - 2U(r_i, z_j) + U(r_i, z_{j+1})}{h_z^2} - \frac{h_z^2}{12} \frac{\partial^4 U(r_i, \eta_j)}{\partial z^4}, \quad (3.16)$$

$$\forall \eta_j \in (z_{j-1}, z_{j+1}), \quad i \in [2, N-1], \quad j \in [2, M-1].$$

Formalmente, la condición de borde según la notación de la ecuación (3.13) se define como

$$\begin{aligned} U(r_1, z_j) &= V(r_1, z_j), & U(r_N, z_j) &= V(r_N, z_j), & \forall j \in [1, M], \\ U(r_i, z_1) &= V(r_i, z_1), & U(r_i, z_M) &= V(r_i, z_M), & \forall i \in [1, N]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En lo que sigue de esta sección, utilizaremos una notación de subíndices para la función incógnita evaluada en cada punto de la grilla, la misma se explicita según

$$U(r_i, z_j) \longrightarrow U_{i,j}.$$

En consecuencia, usando las formulas (3.14), (3.15) y (3.16) en la ecuación diferencial (3.13), nos permite expresar la ecuación símil *Poisson* evaluada en el punto (r_i, z_j) como

$$\begin{aligned} U_{i-1,j} \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2h_r r_i} \right) - U_{i,j} \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{h_z^2} \right) + U_{i+1,j} \left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2h_r r_i} \right) + \frac{U_{i,j-1}}{h_z^2} + \frac{U_{i,j+1}}{h_z^2} - \\ - \frac{h_r^2}{12} \frac{\partial^4 U(\xi_i, z_j)}{\partial r^4} - \frac{h_z^2}{12} \frac{\partial^4 U(r_i, \eta_j)}{\partial z^4} - \frac{1}{r_i} \frac{h_r^2}{6} \frac{\partial^3 U(\xi_i, z_j)}{\partial r^3} = V_{i,j} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Utilizando el método de diferencias finitas y definiendo a w como la función que aproxima a U , i.e.

$$w_{i,j} \simeq U_{i,j},$$

truncamos localmente la ecuación (3.18) con un orden $O(h_r^2 + h_z^2)$. Posteriormente definimos el parámetro l a partir de los índices i, j , el cual viene dado por

$$l := (i-1) + (N-2)(j-2), \quad i \in [2, N-1], \quad j \in [2, M-1]. \quad (3.19)$$

el cual numera a los puntos de la grilla y será de utilidad para la formulación del problema matricial, en donde la incógnita será el vector \mathbf{w} . Para poder formular la expresión completa en función de un solo índice l , se requiere especificar la relación funcional $i(l)$ como consecuencia de la variable r en el término de la derivada primera, la cual viene

dada por

$$i(l) = \begin{cases} \mathcal{R}(l/(N-2)) + 1 & \text{sí } \mathcal{R}(l/(N-2)) \neq 0, \\ N-1 & \text{sí } \mathcal{R}(l/(N-2)) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

en donde \mathcal{R} representa la función resto. Por ende la ecuación en diferencias finitas para la variable w , según un único índice l , resulta

$$\begin{aligned} \frac{w_{l-N+2}}{h_z^2} + w_{l-1} \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2h_r r_{i(l)}} \right) - w_L \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{h_z^2} \right) + \\ + w_{l+1} \left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2h_r r_{i(l)}} \right) + \frac{w_{l+N-2}}{h_z^2} = V_l. \end{aligned} \quad (3.21)$$

El sistema matricial queda definido como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (3.22)$$

el cual resolvemos mediante una función existente brindada por el software *Matlab*.

3.3. Validación usando equilibrio de Solovév

Nos interesa validar el código desarrollado para la resolución de la ecuación de Grad-Shafranov símil Poisson (ley de Ampère), basada en el método planteado en la Sección 3.2.2, a partir de una solución analítica de la ecuación (2.28). Para ello recurrimos a la solución hallada por Solovév [16], la cual plantea los perfiles internos, $p(\Psi)$ y $f(\Psi)$, como

$$p(\Psi) = \frac{g_0}{\mu_0} \Psi + p_0, \quad f(\Psi) \frac{df}{d\Psi} = g_0 R_0^2. \quad (3.23)$$

Remplazando los perfiles propuestos en (3.23) en la ecuación de Grad-Sfranov dada en (2.28), obtenemos

$$\Delta_{gs} \Psi = -g_0(r^2 + R_0^2). \quad (3.24)$$

Ergo la solución propuesta por Solovév resulta

$$\Psi(r, z) = \frac{g_0 R_0^2 a^2}{2} \left[1 - \frac{z^2}{a^2} - \left(\frac{r - R_0}{a} + \frac{(r - R_0)^2}{2aR_0} \right)^2 \right], \quad (3.25)$$

donde asignamos a los parámetros característicos los valores $g_0 = 1,0 \text{ Wb/m}^4$, $a = 0,5 \text{ m}$ y $R_0 = 6,2 \text{ m}$. Resulta entonces sencillo validar el código desarrollado, ya que solo necesitamos evaluar la función (3.25), por un lado en el contorno $\partial\Omega_{\text{comp}}$ y resolver mediante

el método numérico, y por otro lado en el dominio computacional Ω_{comp} , para finalmente comparar los mismos contornos de nivel. En la Figura 3.1 exhibimos algunos contornos de nivel para ambas soluciones, en donde se aprecia una correcta similitud entre ellos. Sin embargo, debemos considerar el hecho de la simetría respecto al eje horizontal, \hat{e}_r , que posee la solución analítica de Solovév. Es decir, no es posible validar defectos que podría llegar a poseer el código ante una solución no simétrica con respecto a dicho eje.

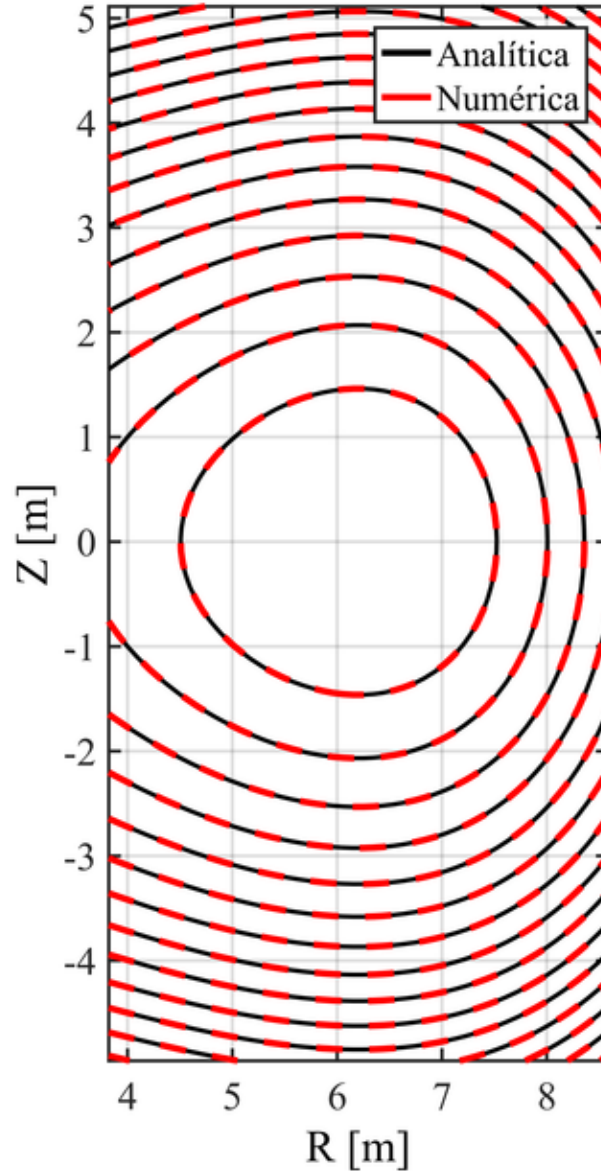


Figura 3.1.: Representación gráfica de distintos contornos de nivel, asociados al flujo magnético poloidal Ψ_p , según la solución analítica de Solovév exacta y su aproximada numéricamente mediante la ley de Ampère.

3.4. Validación usando equilibrio de frontera fija

Buscamos validar el código numérico desarrollado a partir de la Sección 3.2.2, mediante la solución obtenida para la densidad de corriente J_ϕ del plasma del problema de frontera fija. Es decir, primero debemos establecer los parámetros I_{pl} y β , obtener la J_ϕ del plasma a través del código de frontera fija [6], hallar las corrientes en las bobinas externas mediante la rutina planteada en la Sección 3.1, construir el mapa magnético implementando las funciones de Green como así también la ley de Ampère, y comparar la ubicación del contorno de nivel de valor cero en particular.

Realizamos validaciones para el caso de plasmas circulares, como así también para plasmas elongados tipo ITER con un $\kappa = 1,8$. En ambos casos, fijamos los parámetros globales en $I_{pl} = 12$ MA y $\beta = 0,01$. En las Figuras 3.2 y 3.3 se muestran los mapas magnéticos y el contorno de nivel cero, para plasmas circulares y elongados tipo ITER, respectivamente.

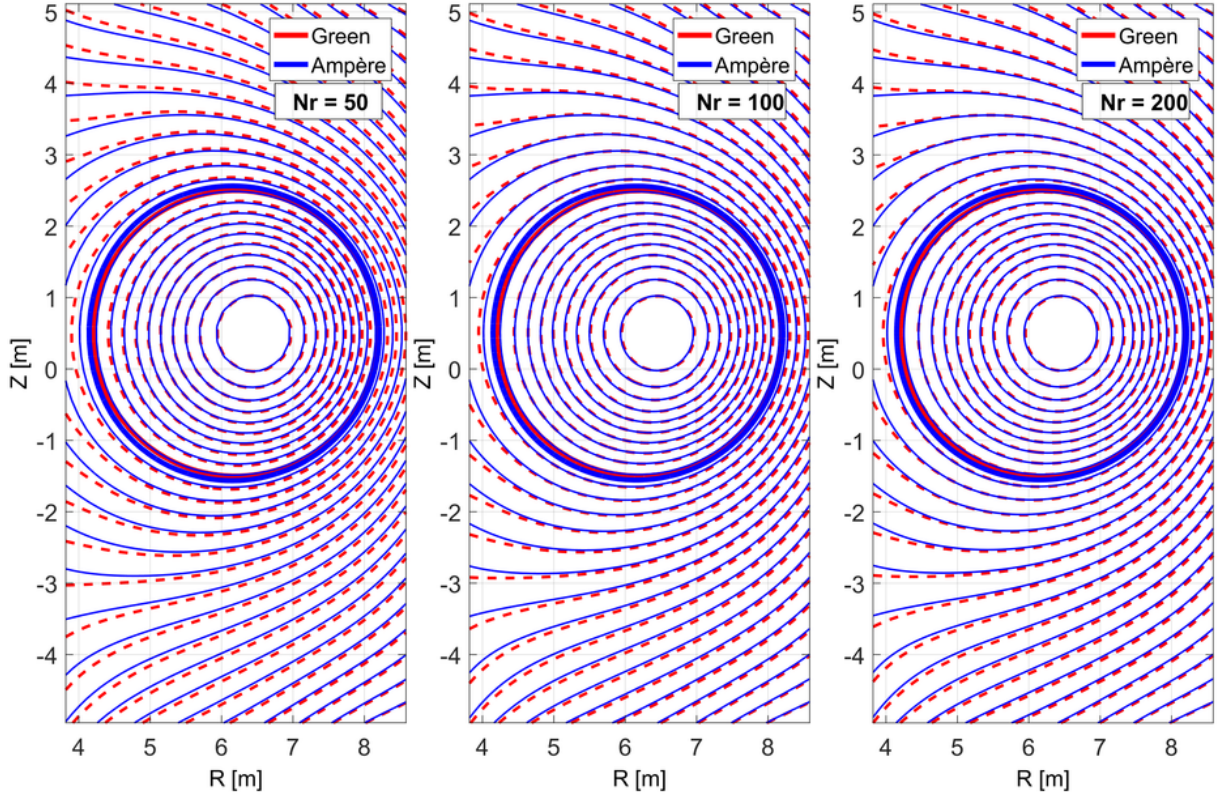


Figura 3.2.: Representación gráfica de distintos contornos de nivel, asociados a la validación del problema inverso, partiendo de la solución de frontera fija, para plasmas circulares. Se enfatizan los contornos de nivel de valor cero para ambos métodos de resolución numérica. Se consideran tres resoluciones de grilla distintas, diferenciadas por el número de puntos N_r en la dirección horizontal.

Como enfoque adicional al análisis, hemos decidido simular ambos casos según la re-

solución de grilla, utilizando en la dirección horizontal, i.e. \hat{e}_r , 50, 100 y 200 puntos. La cantidad de puntos en la dirección vertical, i.e. \hat{e}_z , se estipula como el valor de puntos en la dirección horizontal multiplicada por la elongación κ , donde en el caso del círculo es unitario y para ITER resulta en 1,8.

Las Figuras 3.2 y 3.3, muestran un acuerdo razonable entre ambos métodos numéricos (funciones de Green y ley de Ampère), dado por la similitud que podemos apreciar entre los mismos contornos de nivel, y por sobre todo en el contorno de nivel cero el cual fue establecido así en el problema de frontera fija. No se observan notables discrepancias entre soluciones con respecto a la resolución de grilla, lo cual valida la condición suficiente de implementar grillas de menor resolución, disminuyendo así el costo computacional y el tiempo de ejecución.

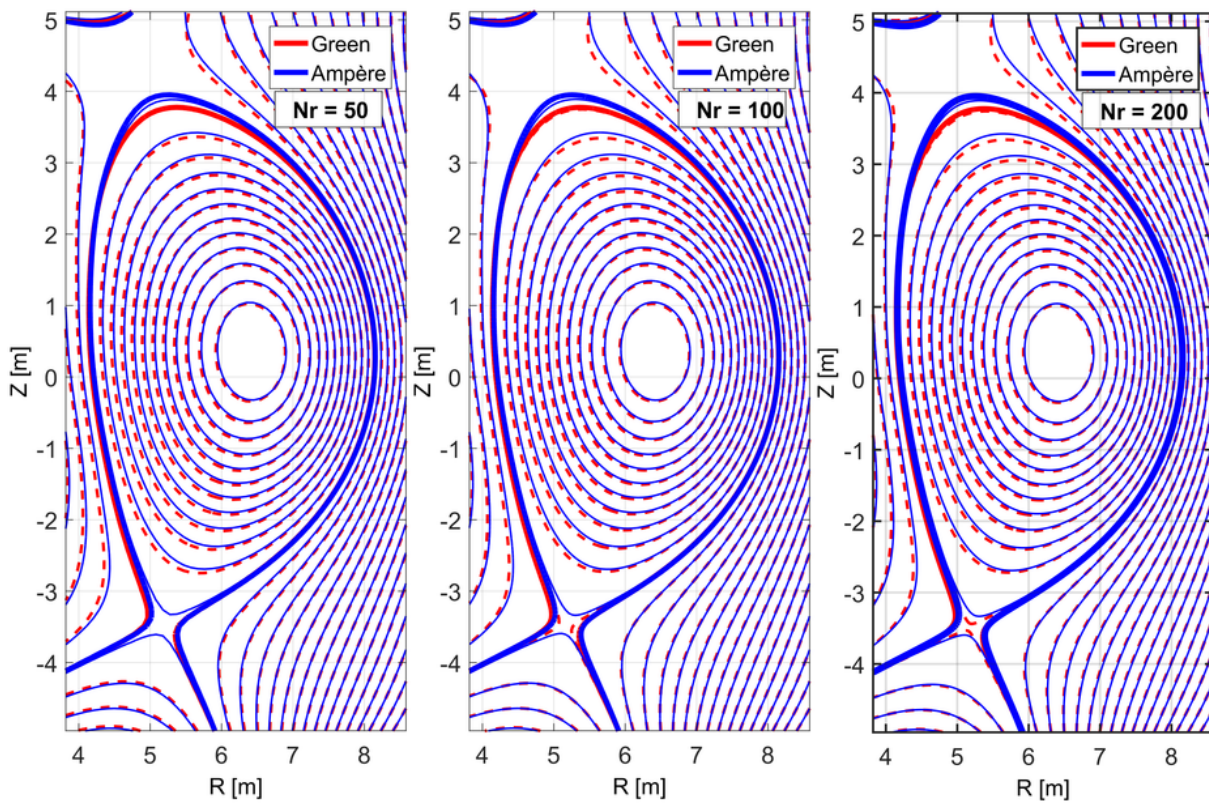


Figura 3.3.: Representación gráfica de distintos contornos de nivel, asociados a la validación del problema inverso, partiendo de la solución de frontera fija, para plasmas elongados tipo ITER. Se enfatizan los contornos de nivel de valor cero para ambos métodos de resolución numérica. Se consideran tres resoluciones de grilla distintas, diferenciadas por el número de puntos N_r en la dirección horizontal.

En base a los resultados anteriores, optamos por calcular, en adelante, el mapa magnético resolviendo la ley de Ampère por medio del método descrito en la Sección 3.2.2. En la Figura 3.4 se observa el mapa magnético obtenido por este método luego de resolver el problema inverso (contornos rojos), junto con los contornos del problema de frontera fija

(negro), para distintas resoluciones de grilla. La diferencia observada entre los contornos de cada solución, se atribuye al limitado número de bobinas externas que no permite reproducir la separatriz original en forma exacta.

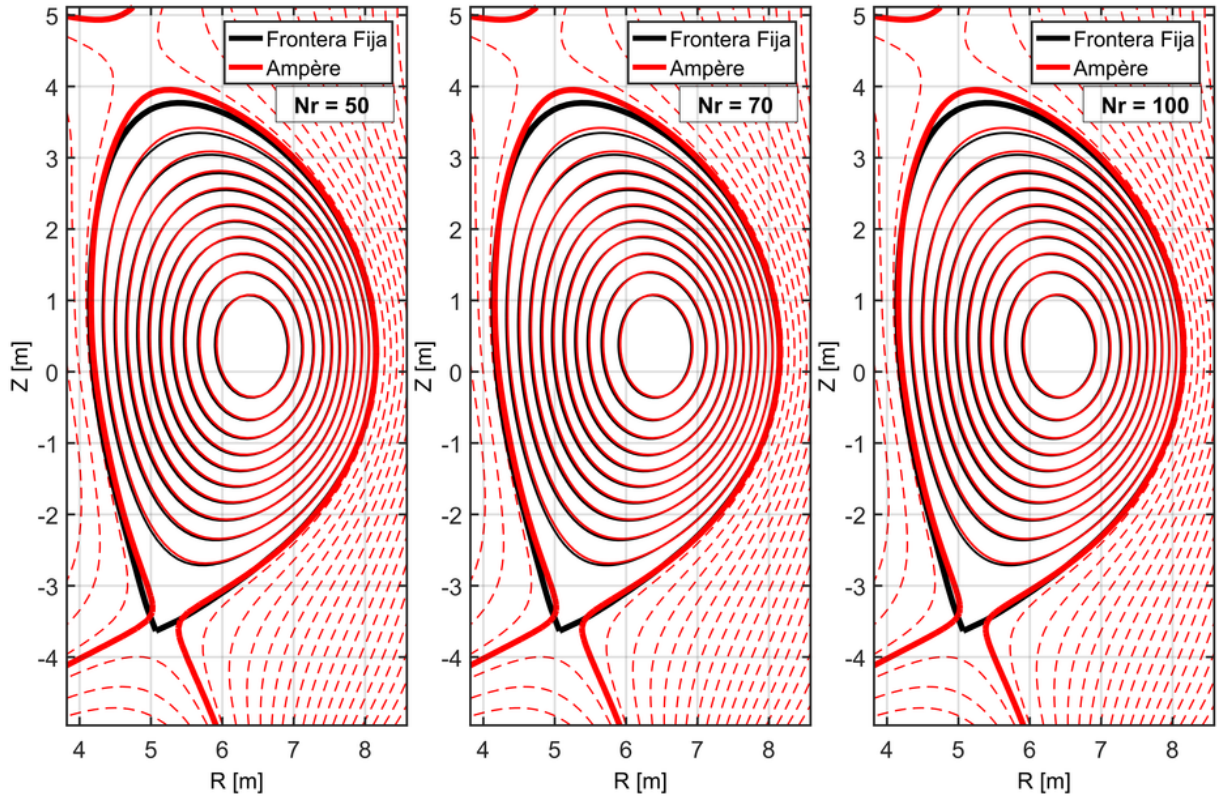


Figura 3.4.: Mapa magnético obtenido al resolver el problema inverso de frontera libre (rojo), junto con los contornos del problema de frontera fija original (negro), para distintas resoluciones de grilla.

Capítulo 4

Problema directo de frontera libre

En este capítulo presentamos los métodos utilizados para resolver el problema directo de frontera libre. Como este problema involucra la detección de la separatriz del plasma, primero introducimos los criterios y algoritmos usados para detectarla. Luego describimos el método iterativo para resolver el problema directo en el dominio computacional. Este método es verticalmente inestable para plasmas elongados, por lo que es necesaria la introducción de un esquema de estabilización. La estabilización afecta levemente la posición final del plasma, por lo que agregamos una corrección a las corrientes en las bobinas. Esta corrección es interpretada como una etapa de calibración general del método que podría usarse para compensar otras limitaciones del modelo. Finalmente, utilizamos el método estabilizado y calibrado para obtener equilibrios tipo ITER con alto β .

4.1. Detección de la frontera y puntos críticos

Para tratar el problema de frontera libre directo es necesario detectar la separatriz del plasma a partir de un mapa magnético dado (solución en Ω_{comp}). Este proceso de detección depende del tipo de configuración que se esté considerando. Como hemos mencionado en la Sección 2.3, existen básicamente dos tipos de configuraciones según cómo se produzca la separatriz del plasma: con limitadores y con divertor (ver Figura 2.2). En el primer caso, la separatriz se localiza mediante superficies limitadoras fijas dentro de la cámara de vacío y en el otro caso, el más moderno, mediante una configuración magnética con un punto X. Los criterios utilizados para determinar la separatriz en cada caso son:

- Configuración con limitadores:** Hallamos el máximo correspondiente a la variable Ψ en Ω_{comp} , el cual coincide con el máximo asociado al plasma. Luego, dado que Ψ es monótonamente decreciente dentro del plasma, nos desplazamos en dirección decreciente y nos preguntamos periódicamente si el presente contorno es cerrado. En caso afirmativo, continuamos con esta lógica hasta alcanzar el primer contorno abierto. A partir de allí, retrocedemos cierta cantidad de pasos, dado por la tolerancia en la variable Ψ , como sea necesario para no atravesar la superficie limitadora. En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo para plasmas circulares con la cámara de vacío como superficie limitadora, para distintas resoluciones de grilla.

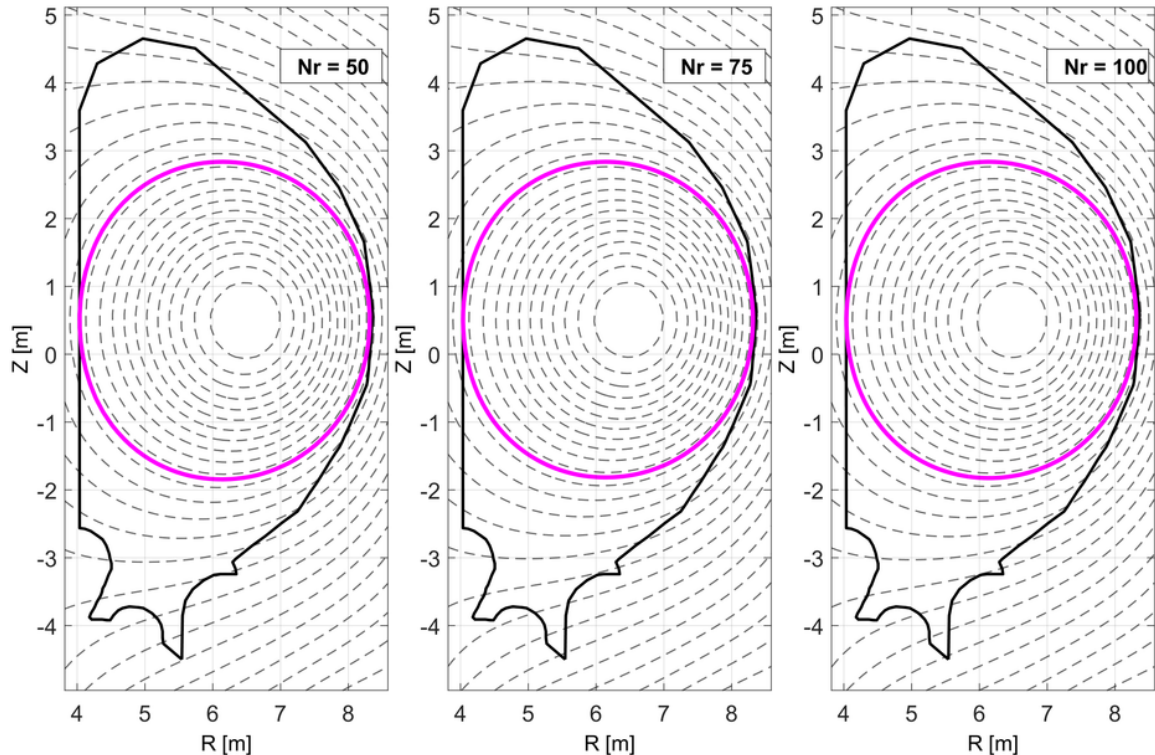


Figura 4.1.: *Separatrices de plasmas circulares determinadas a partir de una superficie limitadora, en este caso el interior de la cámara de vacío. No se observa apreciables diferencias entre distintas resoluciones de grilla.*

- Configuración con *divertor*:** Calculamos la norma del gradiente $\|\nabla\Psi(\mathbf{r})\|$ y la matriz hessiana, dada en (4.1), para cada punto del dominio computacional. Luego, restringiéndonos solamente a los puntos de la grilla interiores a la cámara de vacío, buscamos aquellos que satisfagan $\det(H_\Psi(\mathbf{r})) < 0$. Subdividimos el dominio en una mitad superior y en otra inferior, ya que la configuración con *divertor* se caracteriza, en general, por tener dos puntos de silladura. Por último, en cada subdominio, localizamos aquel punto que se caracterice por tener la menor norma del gradiente, ya que la condición formal de un extremo local implica $\|\nabla\Psi(\mathbf{r})\| = 0$. En la Figura 4.2 se muestra un ejemplo para plasmas elongados, característicos del tokamak ITER, según distintas resoluciones de grilla. En caso de hallar dos puntos X, se utiliza el que tenga valor de flujo poloidal más alto.

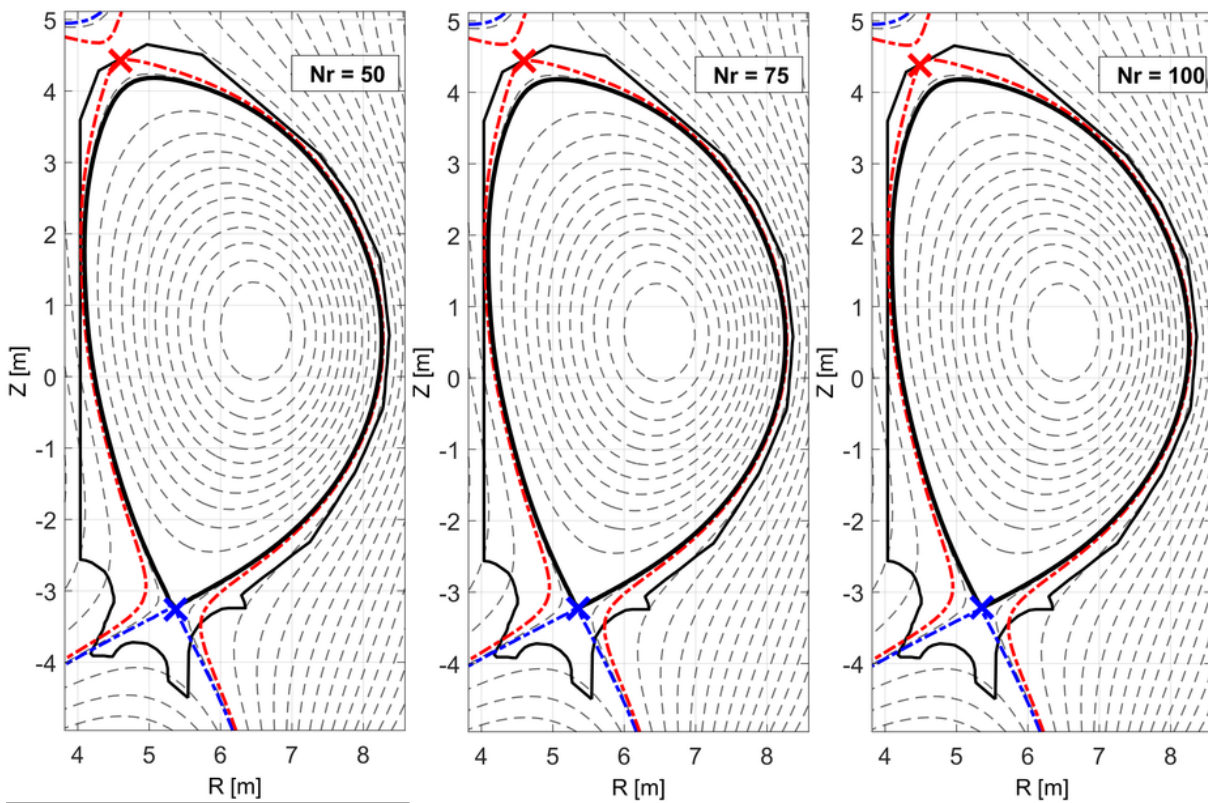


Figura 4.2.: *Separatrices de plasmas elongados tipo ITER, obtenidas a partir de la determinación de los puntos X en el interior de la cámara de vacío. No se observan apreciables diferencias entre distintas resoluciones de grilla. Separatriz en línea continua, y contornos de nivel asociados a los puntos X en línea de trazos.*

$$H_\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r})}{\partial r^2} & \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r})}{\partial r \partial z} \\ \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r})}{\partial z \partial r} & \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r})}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.2. Método de cálculo para el problema directo

Como se describió al final del Capítulo 2, la solución del problema de frontera libre directo consiste en obtener la forma y posición del plasma a partir de sus perfiles internos, uno o dos parámetros globales y las corrientes en las bobinas externas. Una forma de realizar esto en la práctica es definir un dominio computacional y calcular el mapa magnético en su interior como se describe en la Sección 2.5.2. La condición de contorno se compone de dos contribuciones una proveniente de las bobinas y otra de la corriente del propio plasma. En el problema directo, conocemos las corrientes en las bobinas, por lo que tenemos la primera contribución. Sin embargo, la contribución del plasma es desconocida por lo que se obtiene iterando a partir de una estimación inicial para el plasma.

La estructura del método iterativo se muestra en la Figura 4.3. Con la estimación m de la condición de contorno, podemos corregir el mapa en el interior del dominio computacional. En el nuevo mapa tenemos que seleccionar el contorno que define la separatriz, y así obtener la posición del plasma corregida. Este es un paso delicado del método porque contiene la no-linealidad del problema: la nueva posición y forma del plasma afecta en gran medida a la corriente del plasma en la nueva iteración y cualquier imprecisión en la determinación de la nueva separatriz hace que el método no converja. Por eso se desarrollaron las rutinas de detección de curvas cerradas y puntos X, en la sección anterior.

Con el mapa corregido y la nueva separatriz, podemos actualizar la corriente del plasma, que afecta la condición de contorno del dominio computacional. Sin embargo, antes de actualizar la condición de contorno debemos lograr estabilizar el efecto de la corriente del plasma en el interior del dominio computacional. Esto se entiende al recordar que el mapa magnético en el dominio computacional se obtiene resolviendo una ecuación símil Poisson (Sección 3.2.2) y la corriente del plasma juega un papel doble, determina el término de la derecha (la fuente) y contribuye a la condición de contorno. Por este motivo, el método de resolución involucra un doble lazo iterativo como muestra la Figura 4.3.

Una vez convergido el lazo interno, es decir, estabilizada la contribución de la corriente de plasma a su propia forma y posición, se actualiza la condición de contorno (sólo la contribución del plasma es necesaria) y se avanza un paso el lazo exterior. Se procede de la misma forma hasta alcanzar la convergencia. En la siguiente sección se muestran los primeros resultados obtenidos al aplicar este método.

4.3. Cálculo iterativo e inestabilidad vertical

Para poner en práctica y validar el método de cálculo descrito en la sección anterior debemos definir los perfiles del plasma, su corriente total y las corrientes en las bobinas externas. En una primera instancia, tomamos como punto de partida las soluciones obtenidas mediante el problema inverso para el equilibrio tipo ITER y el plasma circular. Esto resulta muy práctico porque tenemos la información de las corrientes en las bobinas, compatible con el equilibrio. Además, esta semilla inicial es una solución del problema de

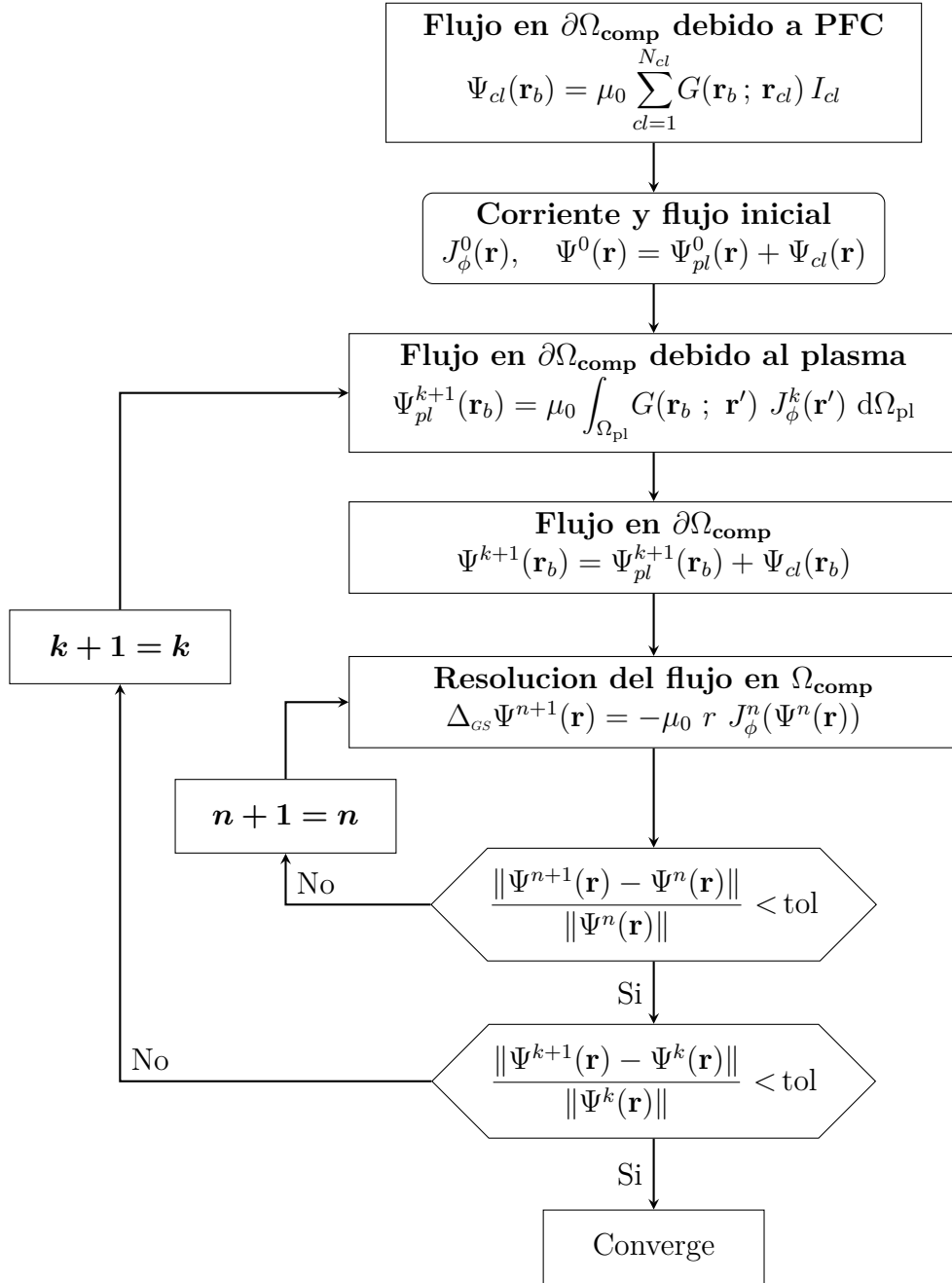


Figura 4.3.: Método de resolución del problema de frontera libre directo. El lazo interno permite estabilizar la forma y posición del plasma y su corriente dejando la condición de contorno fija. Una vez convergido, se avanza el lazo exterior que modifica la condición de contorno según la nueva contribución del plasma.

frontera libre y debería ser un punto fijo del método iterativo.

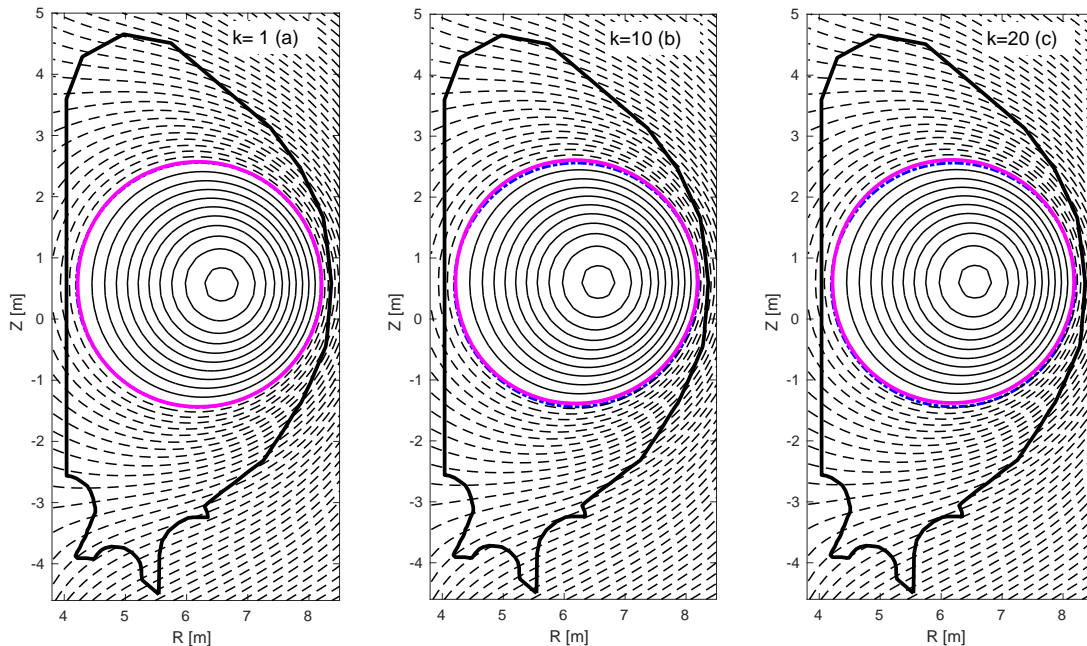


Figura 4.4.: Método de resolución del problema directo aplicado al plasma circular. La semilla inicial, en $k = 1$ (a), es el equilibrio obtenido mediante el problema inverso. Al iterar usando el método descrito en la sección anterior vemos que los contornos prácticamente no se modifican.

En la Figura 4.4 se muestran los contornos de flujo del mapa magnético para el plasma circular. El círculo magenta corresponde al contorno cero del mapa magnético, es decir, es la separatriz hallada por el método iterativo. Los contornos en línea continua son los internos del plasma. El mapa magnético se completa con los contornos de flujo exteriores en línea de trazos negra. La solución para $k = 1$ (a) es la obtenida para el problema inverso. A medida que avanzan las iteraciones (exteriores) el equilibrio prácticamente no se modifica, salvo por un pequeño desplazamiento que deja ver la separatriz original usada para el problema inverso (línea de trazos azul en la Figura 4.4 b-c).

El mismo procedimiento se aplicó al equilibrio tipo ITER, como se muestra en la Figura 4.5. En este caso se observa un rápido desplazamiento vertical de la separatriz y el plasma, que comienzan a escapar del dominio computacional en pocas iteraciones.

La inestabilidad vertical es un problema típico en los plasmas elongados y es solucionado mediante el control activo de la posición [17, 18, 15]. Como actuadores para este sistema de control se usan bobinas externas dedicadas específicamente. Si bien nuestro esquema iterativo no contiene un modelo dinámico de la respuesta del plasma, el origen de esta inestabilidad se debe a una curvatura desfavorable del campo generado por las bobinas externas. En la Figura 4.6 (a) se muestra el campo de vacío generado por las bobinas para

el plasma tipo ITER (inestable) y el correspondiente al plasma circular, Figura 4.6 (c), (estable). El panel (b) muestra el campo de vacío para el caso ITER pero estabilizado con el método descrito en la siguiente sección.

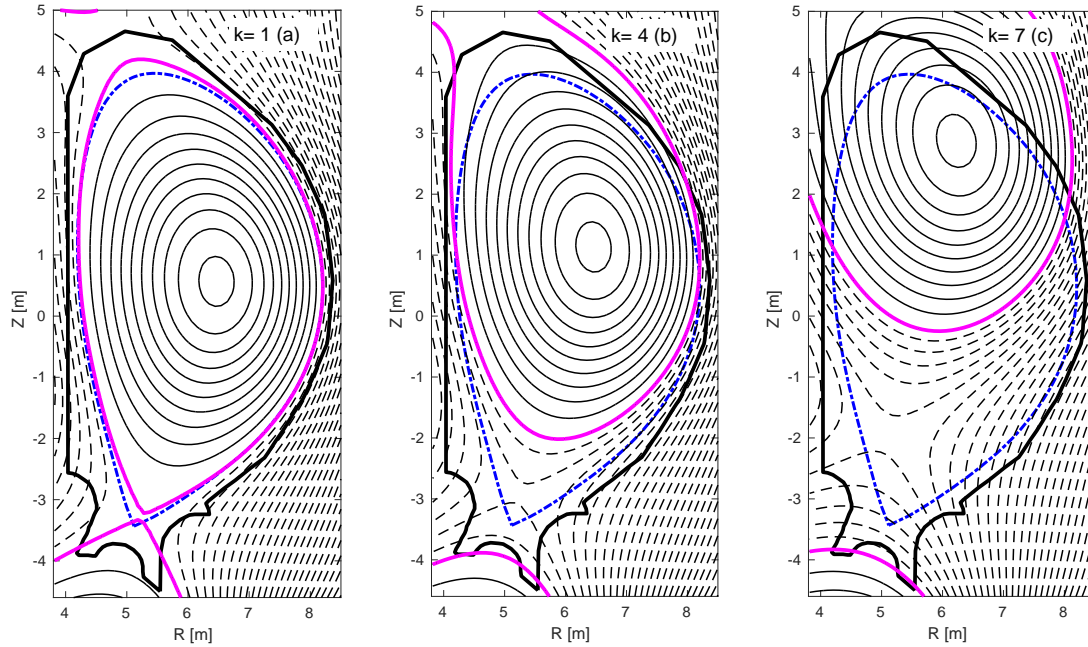


Figura 4.5.: Método iterativo aplicado a plasmas tipo ITER. Los plasmas elongados tienen inestabilidad vertical debido a la curvatura de los campos producidos por las bobinas externas.

Mediante consideraciones básicas de física es posible verificar que para formar un plasma elongado con forma de D, como se busca en los experimentos de fusión, la componente vertical del campo magnético externo tendrá cierta curvatura hacia él. El índice de curvatura del campo magnético externo se define como,

$$n = - \frac{R}{B_Z} \frac{\partial B_R}{\partial Z} \Big|_{R_0}. \quad (4.2)$$

Si n definido de esta manera es negativo, el sistema es inestable a un desplazamiento rígido vertical y es necesario incorporar un sistema de control de posición tanto en el experimento como en el esquema numérico para hallar el equilibrio [17].

4.4. Estabilización y limitaciones del modelo

Debido a la inestabilidad axisimétrica vertical, el método iterativo para hallar la solución del problema directo de frontera libre tiene problemas de convergencia para plasmas

elongados. Esto se debe a que pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio del plasma durante la iteración numérica son inevitables, haciendo que el plasma empiece a desplazarse y eventualmente diverja verticalmente.

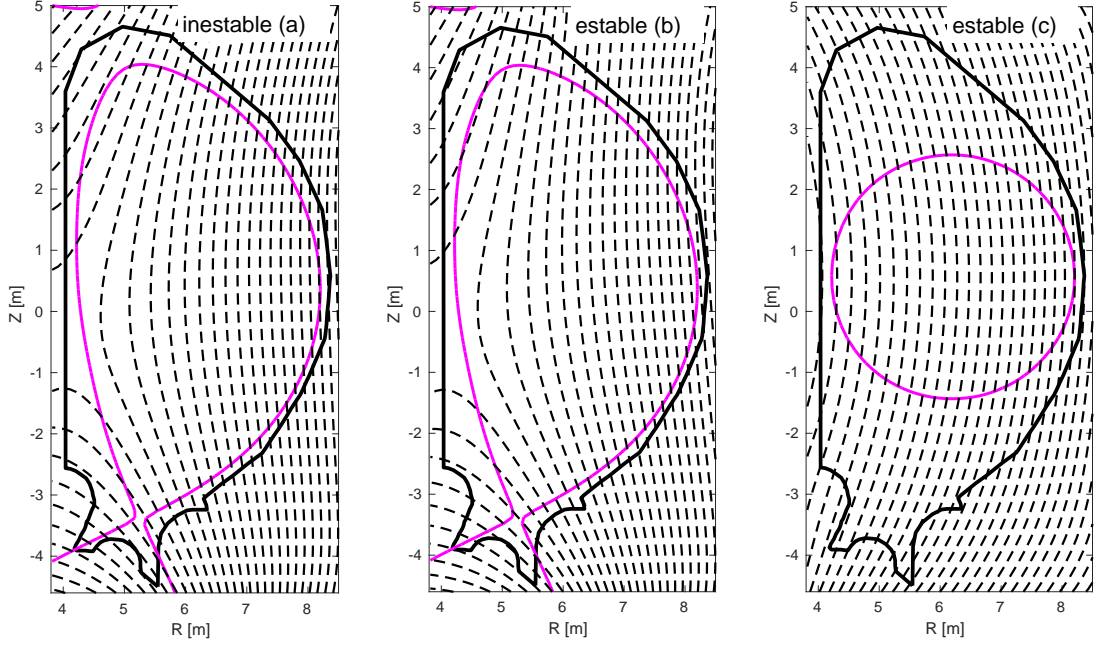


Figura 4.6.: Contornos del campo de vacío generado por las bobinas externas para el plasma elongado tipo ITER (a), inestable, para el mismo caso pero estabilizado (b) y para el plasma circular (c), estable.

Para resolver esta dificultad, en lugar de agregar un lazo de control artificial de la posición vertical, es posible eliminar la fuente de la inestabilidad compensando la curvatura desfavorable de B_R en el centroide de corriente del plasma. Para ello se introduce un par de espiras virtuales de corriente, a la altura del radio mayor del toroide y ubicadas fuera del dominio computacional en forma verticalmente simétrica. Las corrientes en las bobinas deben ser de la misma magnitud y opuestas, para lograr el efecto estabilizante. El valor de la corriente se calcula como

$$I_{\text{estab}} = -g_z \frac{B_{R,\text{vac}}}{B_{R,\text{estab}}}\bigg|_{(R_{\text{cur}}, Z_{\text{cur}})}, \quad (4.3)$$

donde el signo menos se pone para lograr el efecto de compensación, g_z es un parámetro de ajuste, y $B_{R,\text{vac}}$ y $B_{R,\text{estab}}$ son los campos magnéticos radiales producidos por las bobinas externas (campo de vacío) y por el par de bobinas virtuales con corriente unitaria, respectivamente. Estos campos se evalúan en el centroide de corriente $(R_{\text{cur}}, Z_{\text{cur}})$, definido en el Capítulo 2. Notar que el valor I_{estab} debe ser actualizado en cada paso de iteración externa, como podemos observar en la Figura 4.9 en donde presentamos el diagrama del método iterativo con la adición de las corrientes virtuales.

En la Figura 4.7 se muestra la coordenada Z del eje magnético en función del número de iteración externa para varios valores del parámetro g_z . El caso $g_z = 0$ es el que no tiene estabilización, como el mostrado en la figura 4.5. Para valores de g_z menores a 2 y mayores a 4, no se observó estabilización vertical. Los mejores resultados se obtuvieron para $g_z = 3,5$, y se adoptó ese valor en todos los cálculos posteriores.

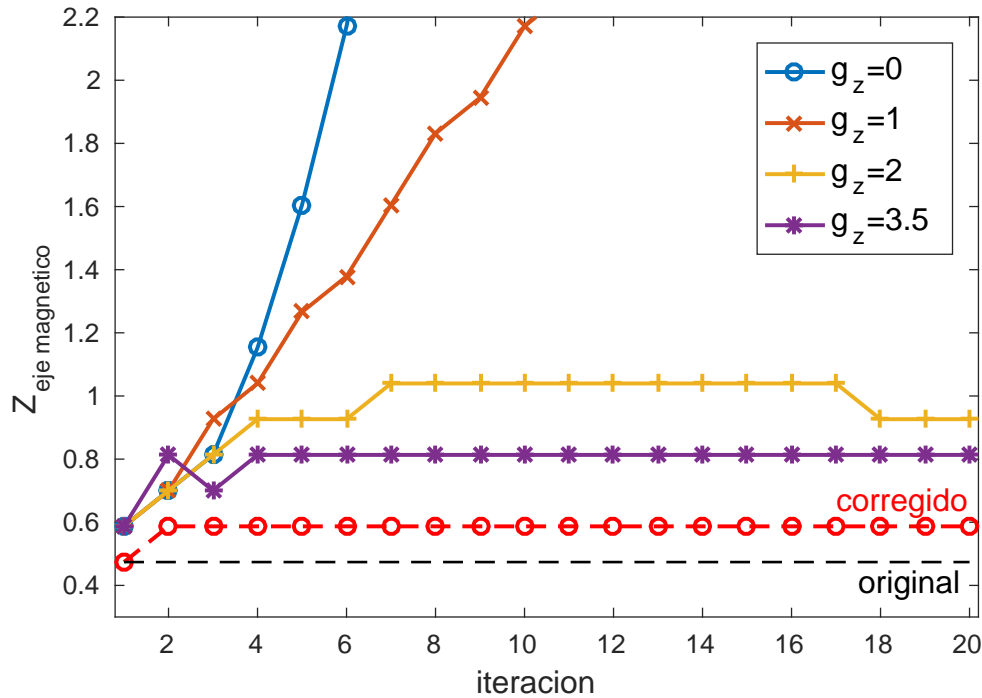


Figura 4.7.: Posición vertical del eje magnético en función del número de iteración externa para distintos valores de la constante g_z . La línea de trazos negra muestra la posición del eje magnético del equilibrio original y la roja la posición del equilibrio obtenido luego de la corrección detallada en la Sección 4.4.1

En la Figura 4.8 se muestran los contornos obtenidos para distintos números de iteración externa para el equilibrio tipo ITER estabilizado con las espiras virtuales, usando $g_z = 3,5$. La modificación que las espiras virtuales producen sobre del campo externo de vacío es muy chica, como puede verse en la Figura 4.6 (a-b). A pesar de ello, es suficiente para estabilizar la posición vertical durante el proceso iterativo de resolución del problema de frontera libre directo. No obstante, la posición final de la separatriz hallada se encuentra desplazada respecto de la original, como se observa en la Figura 4.8 (c). Esta diferencia se debe a la contribución de las corrientes por las espiras de estabilización. En la siguiente sección se discute una forma de corregir este efecto para lograr que el método iterativo converja a un equilibrio más parecido al equilibrio de partida.

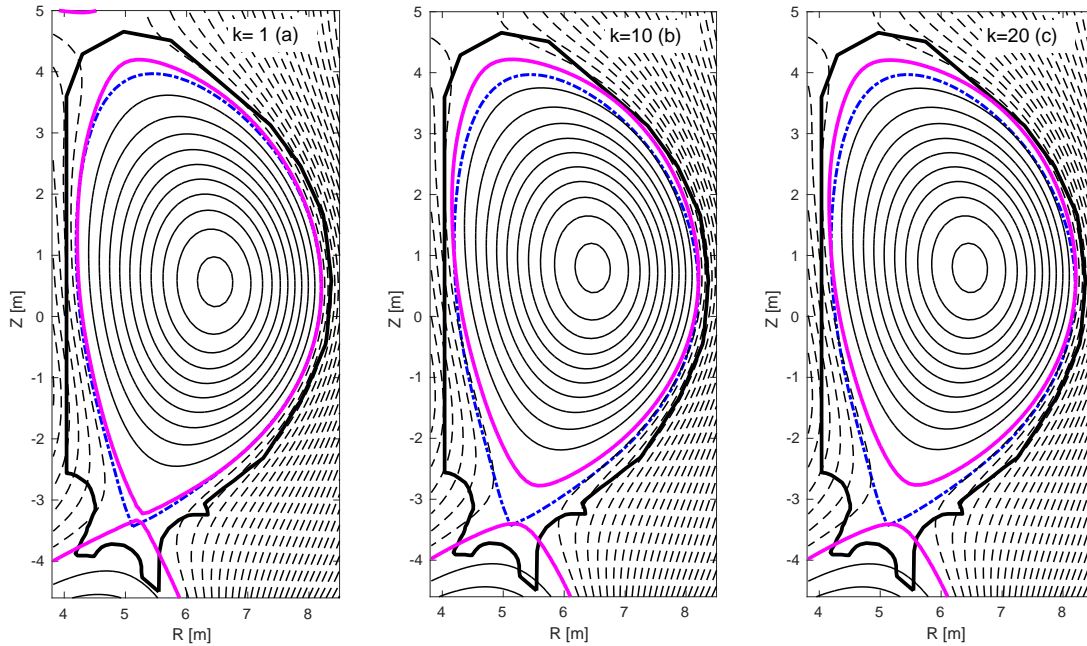


Figura 4.8.: *Contornos obtenidos con el método iterativo agregando un par de espiras virtuales que estabilizan el plasma compensando la curvatura desfavorable del campo vertical.*

4.4.1. Corrientes de calibración

Una desventaja del método iterativo descrito en la Sección 4.2 es que requiere, en general, algún método de estabilización de la posición del plasma para converger a una solución dentro del dominio computacional. Estos métodos, como el planteado en la sección anterior, involucran la adición de corrientes externas al dato de partida (recordar que el problema directo requiere como dato las corrientes en las bobinas externas) y alteran levemente el mapa magnético final. Esto quiere decir, que si tenemos una solución al problema del equilibrio, sólo podemos esperar que nuestro esquema converja a una aproximación de este.

La idea de restar al mapa magnético final la contribución de las espiras virtuales de estabilización es cuestionable, ya que el mapa magnético convergido representa el equilibrio del plasma con el total de las corrientes. Si restamos la contribución de las espiras virtuales afectaríamos el mapa magnético, eso desplazaría al plasma junto con su corriente y la nueva posición no tiene porqué estar en equilibrio con la distribución de corrientes en las bobinas externas impuesta como dato. Si bien la corrección es menor, y la desviación respecto del equilibrio puede ser aceptable en algunos casos, en este trabajo buscamos alternativas que respeten la solución convergida hallada por el esquema iterativo, aunque esté levemente desplazada.

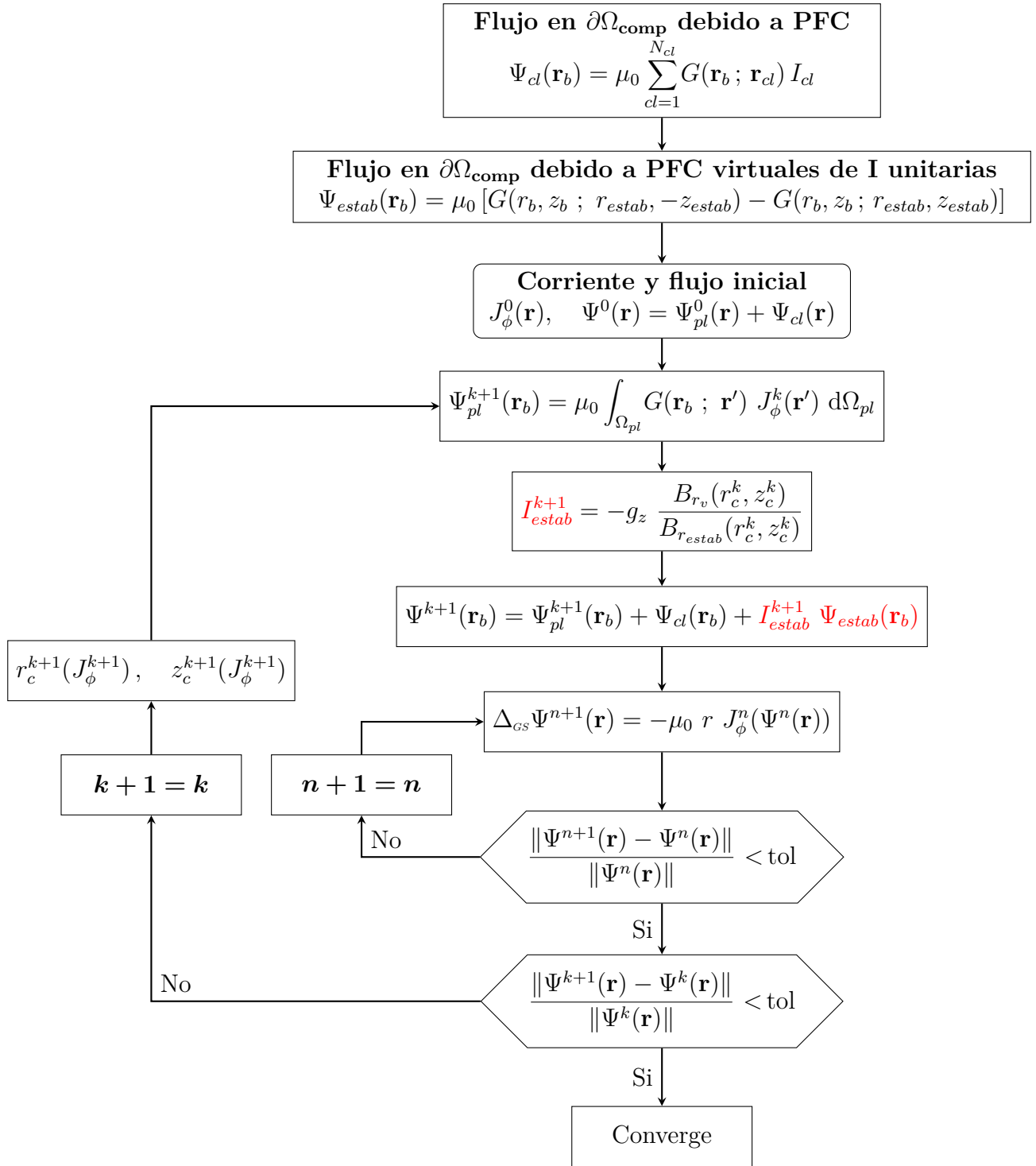


Figura 4.9.: Método de resolución del problema de frontera libre directo. El lazo interno permite estabilizar la forma y posición del plasma y su corriente dejando la condición de contorno fija. Una vez convergido, se avanza el lazo exterior que modifica la condición de contorno según la nueva contribución del plasma, agregando la contribución de las bobinas virtuales a la condición de borde del flujo, previamente calculando el nuevo centroide de J_ϕ .

De hecho, en la práctica, nuestra representación del problema de equilibrio es limitada e involucra también otras fuentes de error. Por ejemplo, si tuviéramos toda la información disponible de alguno de los experimentos con mejor equipo de diagnóstico, y especificáramos el problema del equilibrio directo con los perfiles del plasma, su corriente total y las corrientes en las bobinas externas, la solución hallada diferiría del equilibrio real debido, por ejemplo, a que las bobinas reales no son puntuales y los materiales estructurales tienen permeabilidades magnéticas distintas del vacío, entre otros efectos.

En esa línea, consideramos la implementación de una distribución de corrientes de corrección, que se suma a la distribución de corrientes dato, para compensar las limitaciones del modelo incluyendo las corrientes virtuales de las bobinas de estabilización. Formalmente esta corrección sería,

$$I_{c,input} = I_{c,dato} + \Delta I_{c,calib}, \quad c = 1, \dots, N_{coils} \quad (4.4)$$

donde $I_{c,dato}$ es el dato original que define matemáticamente al problema del equilibrio, $I_{c,input}$ es el dato que especificamos en el método iterativo y $\Delta I_{c,calib}$ es la distribución de corrientes de corrección, o calibración, para compensar el efecto de las espiras de estabilización y las demás diferencias entre el modelo y el experimento real. Para obtener la distribución de corrientes $\Delta I_{c,calib}$ es necesario contar con información precisa del experimento que se quiere modelar. Otra limitación importante es que estos valores son válidos sólo para un cierto margen de operación de cada experimento. Si las condiciones de operación (escenario) cambian significativamente, habría que recalcular esta distribución.

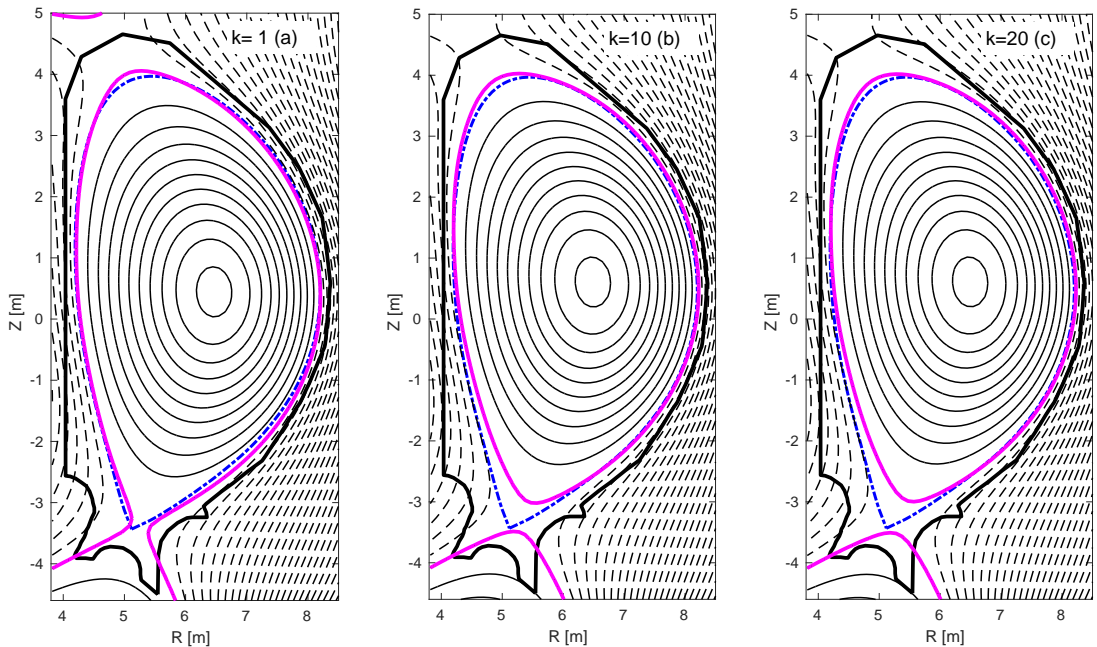


Figura 4.10.: Contornos de la solución obtenida por el método iterativo luego de agregar una distribución de corrientes de calibración.

Como prueba de concepto, generamos durante este trabajo una distribución de corrientes de calibración para el caso del equilibrio tipo ITER, usando un método muy sencillo. En la Figura 4.8 queda claro que la solución obtenida por el método iterativo es parecida al equilibrio original de partida, pero queda desplazada un poco hacia arriba. Para generar una distribución de corrientes de corrección para este efecto, usamos el código para el problema inverso del equilibrio especificando como dato una separatriz desplazada hacia abajo. La salida es una nueva distribución en las bobinas que está *corregida* y puede compensar el desplazamiento vertical que produce el esquema de estabilización. En la Figura 4.10 se muestran los resultados obtenidos usando el método iterativo para el problema directo usando la distribución de corrientes en las bobinas corregida de esta manera. Dado que los resultados mejoran significativamente se concluye que es un método válido para obtener una mejor aproximación a los equilibrios reales. Sin embargo, para lograr una precisión mayor la etapa de calibración debería ser mejorada.

4.5. Equilibrios tipo ITER con alto β

A medida que la presión del plasma aumenta, el eje magnético se desplaza hacia afuera comprimiendo al plasma contra la cara exterior de la separatriz. Este efecto es uno de los que más modifica la distribución de corrientes interna del plasma. Además, es frecuente que los códigos de equilibrio presenten problemas de convergencia a alto β . Por estos motivos se eligió como caso de prueba para el código, la resolución de equilibrios tipo ITER con β creciente.

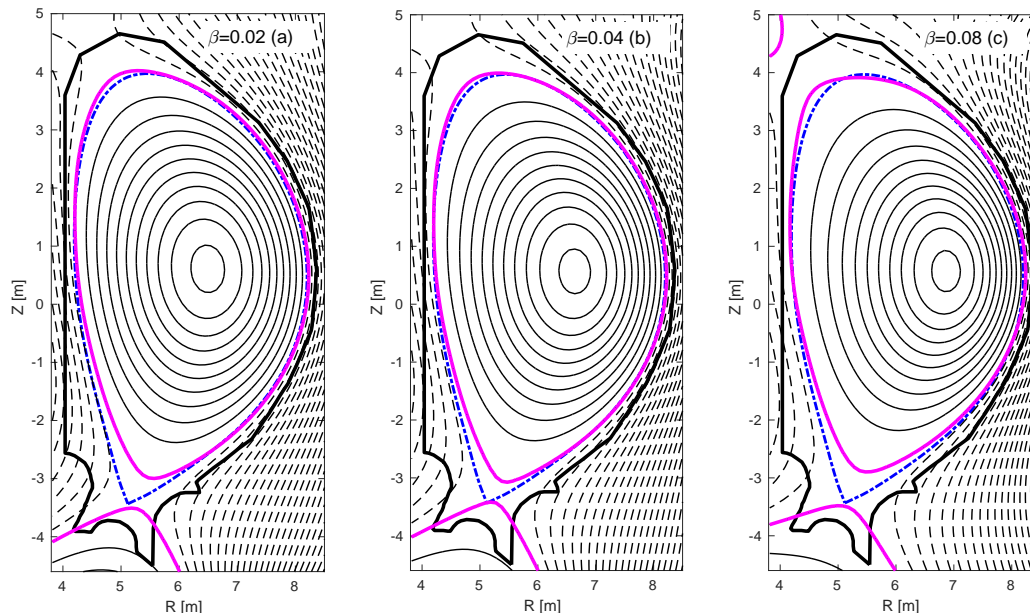


Figura 4.11.: *Equilibrios tipo ITER con β creciente. Solución convergida usando el esquema de estabilización más la corrección de las corrientes calibrada en la Sección 4.4.1.*

En la Figura 4.11 se muestran los contornos de la solución convergida para tres casos: $\beta = 0,02$ (a), $\beta = 0,04$ (b) y $\beta = 0,08$ (c). El desplazamiento del eje magnético hacia la derecha (corrimiento de Shafranov) es claramente visible. El corrimiento del centroide de corriente es aun mayor, como puede verse en la Figura 4.12. Para el caso de mayor β , Figura 4.12 (c), se observa una zona de inversión de densidad de corriente, a la izquierda del eje magnético. Este tipo de equilibrios, con β tan alto, no son actualmente alcanzables en la práctica.

Los resultados muestran que el método de estabilización es efectivo incluso ante grandes cambios en la distribución interna de corriente del plasma. La distribución de corrientes de corrección utilizada fue la misma en los tres casos (la descrita en la sección previa), y vemos que da buenos resultados.

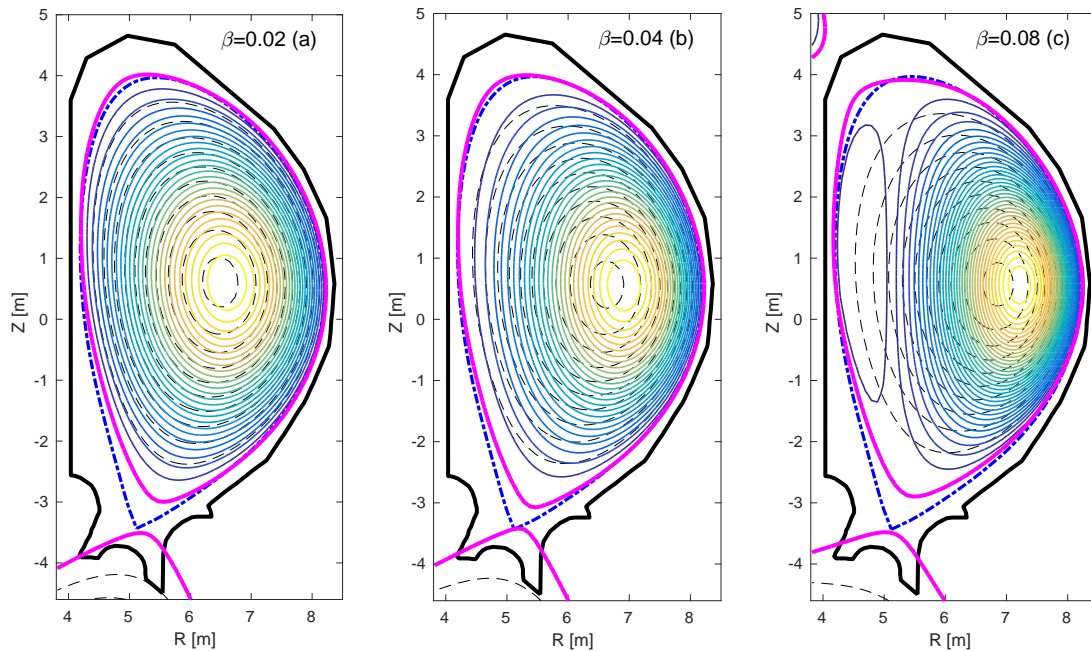


Figura 4.12.: *Contornos de la densidad de corriente (línea continua) y contornos de flujo (línea de trazos). El centroide de corriente se desplaza aun más que el eje magnético. A medida que aumenta β se ve claramente que la densidad de corriente no es función de flujo.*

Por último se analiza la convergencia del método iterativo para el problema directo. Como puede observarse en la Figura 4.11, la solución obtenida luego de 20 iteraciones difiere de la solución del problema inverso. Esto se debe al agregado de las espiras de estabilización, que permiten que el método sea estable y convergente. Si bien las corrientes de calibración permiten compensar en parte esta diferencia y obtener una solución más precisa, no es posible medir la convergencia hacia una solución conocida. Sin embargo,

podemos medir la evolución de la diferencia relativa de la solución hallada en cada iteración. Esto se muestra en la Figura 4.13. Como vemos la corrección de la solución es cada vez más chica, indicando que el método converge, si la grilla es lo suficientemente fina.

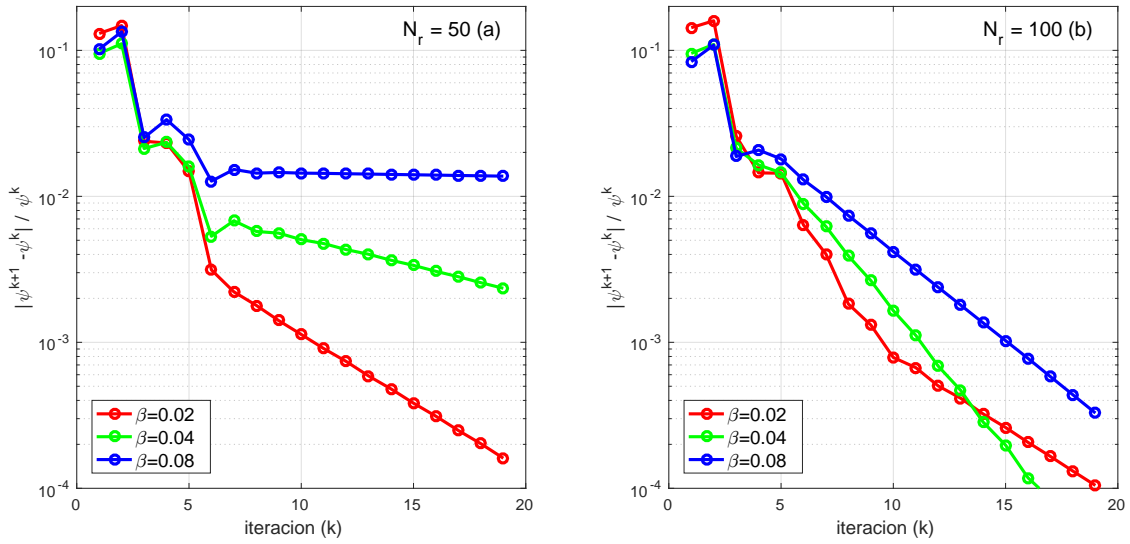


Figura 4.13.: Evolución de la diferencia relativa de la solución hallada en cada iteración, usando 50 (a) y 100 (b) puntos de grilla en la dirección radial.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo desarrollamos e implementamos métodos de cálculo del equilibrio MHD con frontera libre para dos formulaciones posibles: problema directo y problema inverso. A continuación se resumen los avances realizados, los resultados obtenidos y los trabajos a futuro para cada caso.

Problema inverso

En primer lugar se trabajó sobre el problema inverso de frontera libre. En este caso, se parte de los mismos datos que el problema de frontera fija y adicionalmente se especifica la posición de las bobinas externas. La resolución de este problema se divide naturalmente en dos etapas: en primer lugar se resuelve el problema de frontera fija y en segundo lugar se determinan las corrientes en las bobinas. Para la primera parte, se utilizó un código de elementos finitos, previamente desarrollado en la Sección de Fusión Nuclear y Física de Plasmas del CAB [6], que resuelve el equilibrio de frontera fija incluyendo todos los parámetros de interés en el interior del plasma.

Para la segunda parte implementamos un método de optimización lineal que permite hallar la distribución de corrientes en las bobinas externas que minimizan la *distancia* entre un contorno dado del mapa magnético completo y la separatriz dato. Cabe destacar que la distancia minimizada es en realidad una medida de la diferencia de flujo magnético poloidal entre el contorno elegido y la separatriz dato. Cuando el contorno elegido es el de valor cero, este problema de optimización se puede interpretar como el de hallar las corrientes en las bobinas que minimizan la norma del flujo poloidal en una curva dato (la separatriz).

Para realizar esta minimización es necesario conocer la relación entre el flujo magnético en cada punto y la distribución de corrientes (en las bobinas y en el plasma). Esta relación se estableció superponiendo la solución analítica para el campo generado por una espira puntual (función de Green para este problema). Una vez halladas las corrientes en las bobinas, es posible utilizar estas funciones de Green para obtener el mapa magnético, que es útil para muchos estudios y para la resolución del problema directo de frontera libre. Sin embargo, esta forma de construir el mapa magnético es ineficiente y presenta dificultades en el interior del plasma donde la distribución de corrientes es modelada por un conjunto de corrientes puntuales.

Para mejorar la determinación del mapa magnético se implementó un método basado en la definición de un dominio computacional arbitrario en el que se resuelve la ley de Ampère como problema de valores de contorno. En este caso, la condición de contorno se obtiene usando funciones de Green, para tener en cuenta el flujo magnético producido tanto por las bobinas externas como por el plasma. La implementación del cálculo del mapa magnético en el dominio computacional se validó comparando con la solución analítica de Solovév.

La herramienta de cálculo desarrollada y validada en esta primera etapa permite extender el mapa magnético hacia el exterior del plasma, a partir de la solución de frontera fija. Esto es útil en estudios de física de plasmas en la zona periférica del plasma y el divertor [15]. Además, la solución de este problema sirve como punto de partida para la

resolución del problema directo. En particular, el módulo para calcular eficientemente el mapa magnético en el dominio computacional es también parte del esquema de resolución del problema directo, que se desarrolló en la última etapa de este trabajo.

En cuanto a la validación de los resultados, observamos que el contorno cero del mapa magnético obtenido no coincide exactamente con la separatriz dato en la mayoría de los casos. Esto es esperable, pues sólo se tiene un reducido número de bobinas con las que construir los campos que mejor aproximan la separatriz en el sentido establecido. Tal como se planteó, este sentido es el de minimizar la norma del flujo poloidal en la curva de la separatriz dato. Si bien esta es una primera aproximación razonable al problema, sería deseable a futuro probar otras funciones costo a minimizar. En particular, sería interesante modificar el criterio de minimización para reproducir en forma más precisa la posición de los puntos X, aunque la distancia a la curva objetivo aumente en el sentido utilizado en este trabajo. Cabe destacar que esta propuesta de estudio a futuro se puede llevar a cabo haciendo sólo modificaciones menores al código elaborado durante el presente proyecto.

Problema directo

En la segunda etapa del proyecto se trabajó en la formulación directa del problema de frontera libre. En este caso, se definen los perfiles internos y uno o dos parámetros globales del plasma (corriente y , opcionalmente, β) más las posiciones y corrientes de las bobinas externas, y la solución consiste en hallar la forma de la separatriz junto con la estructura interna del plasma y el mapa magnético. Para resolver este problema se construyó un método iterativo basado en las rutinas previamente desarrolladas para cálculo del mapa magnético en el dominio computacional. Adicionalmente, se implementaron rutinas adicionales para la determinación de los puntos X (puntos de ensilladura) y de curvas cerradas dentro del mapa magnético calculado. Estas rutinas permiten detectar la nueva separatriz en cada iteración a partir del nuevo mapa magnético, lo cual es esencial ya que la forma de la separatriz es una incógnita en esta formulación del problema.

La condición de contorno en el borde del dominio computacional se calcula mediante funciones de Green a partir de las corrientes en las bobinas externas (contribución fija) y la distribución de corriente del plasma (variable). Al buscar la solución del problema iterando sobre la condición de contorno en el dominio computacional, encontramos que el método resulta convergente sólo para plasmas de muy baja elongación (por ejemplo, separatriz en forma circular). Los plasmas de mayor interés para tokamaks avanzados son siempre elongados, y en estos casos el plasma se desplazaba verticalmente conforme avanzaban las iteraciones, hasta que excede el dominio computacional.

La inestabilidad vertical de plasmas elongados es un problema conocido, y en la práctica se resuelve controlando en forma activa las corrientes en un par de bobinas simétricas respecto al plano ecuatorial. Por supuesto que nuestro esquema iterativo no resuelve la física de la inestabilidad vertical real, pero ocurre que el origen de ésta se debe a la curvatura desfavorable del campo producido por las bobinas externas, y este efecto está presente en nuestra representación del equilibrio. Para resolver este problema se agregaron

dos bobinas virtuales, fuera del dominio computacional, verticalmente simétricas y en la posición radial del radio mayor del toroide. Calculando la corriente en estas bobinas de forma que anulen la curvatura del campo de vacío a la altura del eje magnético del plasma, fue posible obtener un método iterativo convergente. Sin embargo, la presencia del campo estabilizante generado por las bobinas virtuales produce un desplazamiento de la separatriz obtenida, respecto de la solución del problema.

El error introducido por las bobinas de estabilización se suma a otras fuentes de error debidas al nivel de aproximación utilizado. Por ejemplo, estamos modelando las bobinas externas como espiras puntuales y no estamos teniendo en cuenta los cambios de permeabilidad magnética debido a los elementos estructurales de la máquina. Para evitar la necesidad de efectuar un modelo mucho más detallado y complejo del sistema, se propuso el empleo de una etapa de calibración que permita compensar estas desviaciones mediante una distribución de corrientes "de corrección", en las bobinas externas. De esta forma, a la distribución de corrientes en las bobinas dato, se le suma una corrección que compensa las limitaciones del modelo simplificado. A modo de prueba de concepto, se generó una corrección de este tipo usando el código para el problema inverso y una separatriz desplazada a propósito para compensar el efecto de las bobinas virtuales. Usando este enfoque simplificado para generar la corrección se obtuvieron resultados más precisos. El proceso de calibración sobre una máquina real podría plantearse como trabajo futuro, si se consigue información adecuada de los experimentos actuales.

Finalmente, el esquema estabilizado y calibrado para el problema directo de frontera libre, se utilizó para estudiar configuraciones tipo ITER con β creciente. El aumento de la presión del plasma relativo al campo magnético aumenta el desplazamiento del eje magnético (corrimiento de Shafranov) y los gradientes en el plasma, y dificulta en general la convergencia de los códigos de equilibrio. En las pruebas realizadas elevamos el β hasta 8 %, que es muy superior al esperable en ITER y obtuvimos buenos resultados. Observamos una leve deformación de la separatriz y validamos los perfiles internos comparando los resultados obtenidos por el código de frontera fija (preexistente) y los nuevos códigos de frontera libre, el del problema inverso y el directo.

Con los códigos desarrollados en este trabajo se podría estudiar el efecto de las corrientes en las bobinas externas sobre la forma del plasma y su estructura interna. Sin embargo, la información de los perfiles del plasma aparece como un dato externo que habría que proveer usando un modelo adecuado. Para esto, el código desarrollado podría acoplarse con un código de difusión magnética. El código de equilibrio provee la geometría, mientras que el de difusión resuelve la evolución de los perfiles internos del plasma en esa geometría (variable). Este trabajo a futuro es de gran relevancia para el diseño de esquemas de control simultáneo de la forma de la separatriz y los perfiles internos del plasma.

Bibliografía

- [1] J. Kenneth Shultis y Richard E. Faw. *Fundamentals of Nuclear Science and Engineering*. Third Edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742, 2016.
- [2] Robley D. Evans. *The Atomic Nucleus*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1955.
- [3] James J. Duderstadt y Louis J. Hamilton. *Nuclear Reactor Analysis*. JOHN WILEY & SONS, Inc., 1974.
- [4] K. H. Beckurts y K. Wirtz. *Neutron Physics*. Springer-Verlag Berlin, 1958.
- [5] Robert J. Goldston y Paul H. Rutherford. *Introduction to Plasma Physics*. Institute of Physics Publishing, London, UK, 1995.
- [6] Pablo Esteban Montes. «Calculo de Equilibrios Toroidales en Plasmas de Fusion Nuclear». Tesis de mtría. San Carlos de Bariloche, Argentina: Instituto Balseiro, 2017.
- [7] John Wesson. *Tokamaks*. Third Edition. Clarendon Press - Oxford, 2001.
- [8] Iter Organization. *Iter*. URL: <https://www.iter.org/>. (accessed: 20.03.2019).
- [9] Nicholas A. Krall y Alvin W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. First Edition. McGraw-Hill, 1973.
- [10] Jeffrey P. Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. First Edition. Cambridge University Press, 2007.
- [11] J. G. Linhart. *Plasma Physics*. First Edition. North-Holland Publishing Co., 1960.
- [12] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Third Edition. JOHN WILEY & SONS, Inc., 1998.
- [13] Marco Ariola y Alfredo Pironti. *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. First Edition. Springer, 2008.
- [14] Holger Heumann y col. «Quasi-static Free-Boundary Equilibrium of Toroidal Plasma with CEDRES++: Computational Methods and Applications». En: *Journal of Plasma Physics* (2015), pág. 35. DOI: 10.1017/S0022377814001251. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01088772>.
- [15] Cesar Clauser y R Farengo. «The effect of inelastic collisions on the transport of alpha particles in ITER-like plasmas». En: *Nuclear Fusion* 57 (abr. de 2017), pág. 046013. DOI: 10.1088/1741-4326/aa5cdf.

- [16] SimJournal: Artur Palha's Simulation Journal. *Grad-Shafranov Soloviev Solution*. 2014. URL: http://palha.org/journal/mhd/technical_notes/grad_shafranov_analytical_solutions/soloviev.html (visitado 06-06-2019).
- [17] Stephen Jardin. *Computational Methods in Plasma Physics*. First Edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [18] Young Mu Jeon. «Development of a free-boundary tokamak equilibrium solver for advanced study of tokamak equilibria». En: *Journal of the Korean Physical Society* 67.5 (2015), pág. 843.

Índice de figuras

1.1.	<i>Representación esquemática del blanco junto con sus núcleos, con motivo de la interpretación geométrica de la sección eficaz</i>	5
1.2.	<i>Representación gráfica de la sección eficaz microscópica de fisión del Uranio según sus isótopos 235 y 238, en función de la energía.</i>	6
1.3.	<i>Representación gráfica de la reactividad en función de la temperatura, expresada en [K] o en [KeV], según las reacciones de fusión de mayor interés para el diseño de reactores de fusión.</i>	7
1.4.	<i>Esquema de confinamiento magnético de un tokamak.</i>	12
1.5.	<i>Sección del tokamak, i.e. plano (r,z), con la distribución espacial de las bobinas de campo poloidal (del inglés “poloidal field coils”), como así también del solenoide central. En todo el dominio, las curvas de nivel del flujo magnético, y en el centro las respectivas al plasma delimitado por la cámara de vacío.</i>	13
1.6.	<i>Esquema de sistemas de accionamiento de corriente auxiliar. Las corrientes no inductivas se manifiestan mediante: haces de partículas neutras (NBI), ondas electromagnéticas a la frecuencia de ciclotrón electrónica (ECCD), y las corrientes de Bootstrap.</i>	14
1.7.	<i>Representación gráfica del divertor.</i>	16
1.8.	<i>Imágenes extraídas de [8]. Imágenes de la obra civil del proyecto ITER al año 2019.</i>	17
2.1.	<i>Esquemas ilustrativos para la comprensión del origen de las cantidades poloidales y toroidales.</i>	28
2.2.	<i>Dos ejemplos de configuraciones de equilibrio: (a) plasma circular con limitador y (b) plasma elongado con divertor (punto X). Las distintas configuraciones se logran cambiando las corrientes en las bobinas de campo poloidal.</i>	29
2.3.	<i>Parámetros geométricos del plasma.</i>	30
2.4.	<i>Imagen extraída de [12]. Representación gráfica de una espira circular de radio r_0 (se entiende $a = r_0$), descrita en coordenadas cilíndricas, donde el punto P representa un punto genérico del espacio.</i>	38
2.5.	<i>Esquema de los contornos de la solución del problema (2.46), mostrando las distintas regiones para una configuración de plasma con divertor. La curva negra representa la cámara de vacío, a modo ilustrativo, ya que su efecto no es considerado en el modelo del sistema.</i>	43

2.6.	<i>Definición del dominio computacional, Ω_{comp}, donde se resuelve el mapa magnético $\Psi(r, z)$. La región se compone del plasma, Ω_{pl}, más una zona de vacío, Ω_v. El efecto de las bobinas externas y la corriente del plasma se incluye como condición de contorno sobre $\partial\Omega_{comp}$ usando funciones de Green (Sección 2.4.3).</i>	44
3.1.	<i>Representación gráfica de distintos contornos de nivel, asociados al flujo magnético poloidal Ψ_p, según la solución analítica de Solovév exacta y su aproximada numéricamente mediante la ley de Ampère.</i>	56
3.2.	<i>Representación gráfica de distintos contornos de nivel, asociados a la validación del problema inverso, partiendo de la solución de frontera fija, para plasmas circulares. Se enfatizan los contornos de nivel de valor cero para ambos métodos de resolución numérica. Se consideran tres resoluciones de grilla distintas, diferenciadas por el número de puntos N_r en la dirección horizontal.</i>	57
3.3.	<i>Representación gráfica de distintos contornos de nivel, asociados a la validación del problema inverso, partiendo de la solución de frontera fija, para plasmas elongados tipo ITER. Se enfatizan los contornos de nivel de valor cero para ambos métodos de resolución numérica. Se consideran tres resoluciones de grilla distintas, diferenciadas por el número de puntos N_r en la dirección horizontal.</i>	58
3.4.	<i>Mapa magnético obtenido al resolver el problema inverso de frontera libre (rojo), junto con los contornos del problema de frontera fija original (negro), para distintas resoluciones de grilla.</i>	59
4.1.	<i>Separatrices de plasmas circulares determinadas a partir de una superficie limitadora, en este caso el interior de la cámara de vacío. No se observa apreciables diferencias entre distintas resoluciones de grilla.</i>	63
4.2.	<i>Separatrices de plasmas elongados tipo ITER, obtenidas a partir de la determinación de los puntos X en el interior de la cámara de vacío. No se observan apreciables diferencias entre distintas resoluciones de grilla. Separatriz en línea continua, y contornos de nivel asociados a los puntos X en línea de trazos.</i>	64
4.3.	<i>Método de resolución del problema de frontera libre directo. El lazo interno permite estabilizar la forma y posición del plasma y su corriente dejando la condición de contorno fija. Una vez convergido, se avanza el lazo exterior que modifica la condición de contorno según la nueva contribución del plasma.</i>	66
4.4.	<i>Método de resolución del problema directo aplicado al plasma circular. La semilla inicial, en $k = 1$ (a), es el equilibrio obtenido mediante el problema inverso. Al iterar usando el método descrito en la sección anterior vemos que los contornos prácticamente no se modifican.</i>	67
4.5.	<i>Método iterativo aplicado a plasmas tipo ITER. Los plasmas elongados tienen inestabilidad vertical debido a la curvatura de los campos producidos por las bobinas externas.</i>	68

4.6. Contornos del campo de vacío generado por las bobinas externas para el plasma elongado tipo ITER (a), inestable, para el mismo caso pero estabilizado (b) y para el plasma circular (c), estable.	69
4.7. Posición vertical del eje magnético en función del número de iteración externa para distintos valores de la constante g_z . La línea de trazos negra muestra la posición del eje magnético del equilibrio original y la roja la posición del equilibrio obtenido luego de la corrección detallada en la Sección 4.4.1	70
4.8. Contornos obtenidos con el método iterativo agregando un par de espiras virtuales que estabilizan el plasma compensando la curvatura desfavorable del campo vertical.	71
4.9. Método de resolución del problema de frontera libre directo. El lazo interno permite estabilizar la forma y posición del plasma y su corriente dejando la condición de contorno fija. Una vez convergido, se avanza el lazo exterior que modifica la condición de contorno según la nueva contribución del plasma, agregando la contribución de las bobinas virtuales a la condición de borde del flujo, previamente calculando el nuevo centroide de J_ϕ	72
4.10. Contornos de la solución obtenida por el método iterativo luego de agregar una distribución de corrientes de calibración.	73
4.11. Equilibrios tipo ITER con β creciente. Solución convergida usando el esquema de estabilización más la corrección de las corrientes calibrada en la Sección 4.4.1.	74
4.12. Contornos de la densidad de corriente (línea continua) y contornos de flujo (línea de trazos). El centroide de corriente se desplaza aun más que el eje magnético. A medida que aumenta β se ve claramente que la densidad de corriente no es función de flujo.	75
4.13. Evolución de la diferencia relativa de la solución hallada en cada iteración, usando 50 (a) y 100 (b) puntos de grilla en la dirección radial.	76

Índice de tablas

1.1. <i>Parámetros característicos y de operación sobre el proyecto ITER.</i>	18
3.1. <i>Tiempo de cálculo del mapa magnético en el dominio computacional según se utilice las funciones de Green (T_G) ó, resolviendo la ley de Ampère (T_{pss}), para distinta resolución de puntos en la grilla. N_r, N_z, y N_G representan, respectivamente, el número de puntos en \hat{e}_r, el número de puntos en \hat{e}_z, y el número de funciones de Green a calcular. Tiempos de cálculo a partir del software Matlab y un procesador Intel(R) Core(TM) i7-Q 740 - 1.73 GHz.</i>	52

Apéndice **A**

Certificación PPS y P&D

Práctica profesional supervisada

El desarrollo del presente Proyecto Integrador se realizó en la Sección de Fusión Nuclear y Física de Plasmas de la Gerencia de Física del Centro Atómico Bariloche. Esta práctica profesional, por un total de 200 hs, fue supervisada por los doctores Pablo García Martínez y Ricardo Farengo.

Actividades de proyecto y diseño

- Formulación matemática del problema diferencial de equilibrio magnetohidrodinámico (MHD) de plasmas de fusión, con frontera libre.
- Solución del equilibrio MHD con frontera fija usando un código numérico pre-existente.
- Desarrollo de un algoritmo de optimización para resolver el problema inverso de frontera libre.
- Desarrollo de un solver tipo Poisson para cálculo del mapa magnético en un dominio computacional.
- Diseño e implementación de un esquema iterativo estabilizado para solución del problema directo de frontera libre.

En total, las actividades demandaron unas 200 hs de trabajo.