

TESIS DE INGENIERÍA MECÁNICA

SIMULACIÓN DE LA DINÁMICA ROTACIONAL DE UN
SATÉLITE CON APÉNDICES MÓVILES

Lucca Dellazoppa

Ing. Agustín Casquero
Director

Ing. José Relloso
Co-director

Miembros del Jurado

Ing. Celso Flury Jurado (Instituto Balseiro)
Ing. Andrés Laudari Segundo Jurado (INVAP)

20 de Junio de 2019

Instituto Balseiro – Centro Atómico Bariloche – INVAP

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Índice de símbolos

Detalle	Notación
Centro de masa	CM
Cuerpo rígido	CR
Derivada temporal en un SR local	" · "
Grado de libertad	GL
Matriz de rotación de un $SRC1$ a un $SRC2$	C_{12}
Matriz equivalente a un producto vectorial (ver 2.6)	\tilde{c}
Matriz equivalente a un doble producto vectorial (ver 2.7)	\bar{c}
Matriz identidad 3x3	$\mathbf{1}$
Orientación de $SRC2$ relativa a $SRC1$ en términos de matriz de rotación	C_{12}
Orientación de $SRC2$ relativa a $SRC1$ en términos del cuaternión	q_{12}
Radar del satélite real simulado	RAD
Satélite real simulado	SAT
Sistema de referencia	SR
Sistema de referencia inercial	SRI
Sistema de referencia no inercial	$SRNI$
Sistema de referencia no inercial, fijo a un cuerpo	SRC
Transpuesta de una matriz M	M^T
Vector v expresado en un SRI	v
Vector v expresado en un $SRC1$	$v^{(1)}$
Velocidad w de un $SR2$ relativa a un $SR1$	w_{21}

Tabla 1: Abreviaturas y convención adoptada en la notación de las diferentes cantidades.

Índice de contenidos

Índice de símbolos	iii
Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	xi
Abstract	xiii
1. Introducción	1
1.1. Objeto de estudio	1
1.2. Mecánica de cuerpos rígidos: conceptos fundamentales	2
1.2.1. Velocidad angular	2
1.2.2. Energía cinética	3
1.2.3. Tensor de inercia	3
1.2.4. Momento lineal y momento angular - Ecuaciones de la dinámica	5
1.2.5. Dinámica en ausencia de acciones externas	7
1.3. Cinemática de la orientación	7
1.3.1. Parametrizaciones de la orientación	8
1.3.2. Ecuación diferencial de la cinemática rotacional	13
2. Modelado	15
2.1. Modelo Físico	15
2.2. Modelo matemático de dos cuerpos	16
2.2.1. Junta esférica	16
2.2.2. Junta de revolución	21
2.2.3. Posiciones del centro de masa y la junta	24
3. Desarrollo e implementación computacional	27
3.1. Representación de cuerpos	27
3.2. Esquema general	30

4. Simulaciones de validación	33
4.1. Cilindros - junta esférica	33
4.1.1. Rotación a lo largo del eje y	34
4.1.2. Rotación a lo largo del eje x y eje z	38
4.2. Cilindros - junta de revolución	45
4.3. Geometría de un satélite con un panel - junta esférica	46
5. Simulaciones de la dinámica rotacional de un satélite real	49
5.1. Determinación de parámetros para la simulación	51
5.1.1. Geometría	51
5.1.2. Tensores de inercia	54
5.1.3. Condiciones iniciales cinemáticas y dinámicas	55
5.2. Hipótesis consideradas	55
5.3. Simulación con modelo de junta esférica	56
5.3.1. Primer despliegue	57
5.3.2. Segundo despliegue	60
5.3.3. Tercer despliegue	61
5.3.4. Cuarto despliegue	63
5.3.5. Quinto despliegue	64
5.3.6. Sexto despliegue	65
6. Conclusiones	69
Bibliografía	71
Agradecimientos	73

Índice de figuras

1.1. Esquema de un cuerpo rígido con velocidad angular w	2
1.2. Esquema de un cuerpo rígido cuya orientación se desea conocer respecto a un <i>SRI</i>	9
1.3. Esquema de un giroscopio, usado para representar los <i>ángulos de Euler</i> . Figura tomada del libro <i>Spacecraft Dynamics</i> de los autores <i>Kane, Likins</i> y <i>Levinson</i> ^[7]	13
2.1. Modelos físicos de satélites representados con cuerpos rígidos y juntas puntuales.	15
2.2. Esquema con los modelos físicos de las juntas más comunes.	16
2.3. Diagrama de cuerpo libre de un sistema de dos cuerpos rígidos vinculados por una junta esférica.	17
2.4. Diagrama con dos cuerpos y sus <i>SR</i> . Se elige la secuencia de rotación <i>RB</i> – 231, con lo que el grado de libertad para el despliegue es θ_1 en y_2 . A su vez, $\theta_2 = \theta_3 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ en los ejes z_2 y x_2 para restringir la rotación.	21
2.5. Esquema de dos cuerpos para la determinación de r_{cm1} , r_{cm2} y r_j	24
3.1. Esquema de la representación computacional de un satélite genérico mediante el uso de estructuras en <i>C</i> . Es posible vincular los cuerpos entre sí implementando una estructura tipo árbol, usando al cuerpo central del satélite como nodo raíz.	30
3.2. Esquema general del software implementado en lenguaje <i>C</i> , junto con el conjunto de <i>scripts</i> en lenguaje <i>python</i>	31
4.1. Modelo físico.	34
4.2. Ángulo entre los ejes del cuerpo 1 y cuerpo 2.	35
4.3. Ángulo entre los ejes de los cuerpos y del <i>SRI</i>	35
4.4. Posiciones de los centros de masa y la junta respecto, expresadas en el <i>SRI</i>	36

4.5. Momento angular total del cuerpo 1 y cuerpo 2 expresado en el <i>SRI</i> , y momento angular total del sistema en el <i>SRI</i>	36
4.6. Orientación relativa entre los cuerpos, para el caso de cilindros con inercias cruzadas en los tensores de inercia de cada uno.	37
4.7. Momento angular total del cuerpo 1 y cuerpo 2 expresado en el <i>SRI</i> , y momento angular total del sistema en el <i>SRI</i>	37
4.8. Dos cilindros con velocidades angulares iniciales iguales y opuestas en el eje z	38
4.9. Posiciones de los centros de masa y la junta respecto, expresadas en el <i>SRI</i>	39
4.10. Ángulo entre los ejes del cuerpo 1 y cuerpo 2.	40
4.11. Conservación de la energía ante ausencia de acciones externas. Se muestra la energía traslacional total, la rotacional total, y la energía total del sistema.	40
4.12. Momento angular total del cuerpo 1 y cuerpo 2 expresado en el <i>SRI</i> , y momento angular total del sistema en el <i>SRI</i>	41
4.13. Dos cilindros con velocidades angulares iniciales nulas y torque en el eje x	41
4.14. Posiciones de los centros de masa y la junta respecto, expresadas en el <i>SRI</i>	42
4.15. Ángulo entre los ejes del cuerpo 1 y cuerpo 2.	42
4.16. Conservación de la energía cuando $T_j = 0$. Se muestra la energía traslacional total, la rotacional total, y la energía total del sistema.	43
4.17. Torque de frenado $T_j = f(t)$ en instante en que la energía traslacional es máxima. La energía residual en el sistema es máxima.	44
4.18. Torque de frenado $T_j = f(t)$ en instante en que la energía traslacional es cercana a cero. La energía residual es cercana a cero.	44
4.19. Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de junta esférica (gráficas superiores) y el de junta de revolución (gráficas inferiores). Las figuras de la izquierda muestran las orientaciones absolutas de los cilindros, las de la derecha las orientaciones relativas entre ellos.	45
4.20. Módulo de la velocidad angular $w_2^{(2)}$ y de la razón de cambio de los ángulos de Euler del cuerpo 2 relativos al cuerpo 1 ($u^{(2)}$).	45
4.21. Modelo físico con la geometría simplificada de un satélite para la simulación del despliegue de uno de sus paneles.	46
4.22. Orientación relativa entre los cuerpos del sistema, medido con los ángulos entre los ejes de cada uno.	47

5.1. Esquema del <i>SAT</i> con los paneles solares y el <i>RAD</i> desplegados. Se muestra el sistema de referencia <i>SGL</i> en el extremo posterior del satélite.	50
5.2. Resumen de las diferentes configuraciones del <i>SAT</i> en sus seis despliegues. El cuerpo más oscuro es el que se despliega en cada caso.	50
5.3. Modelo físico equivalente para la geometría del <i>SAT</i> en cada configuración.	51
5.4. Esquema simplificado del cuerpo central del <i>SAT</i> para el cálculo de r_{cm1} , donde se agrupó al conjunto $BS := (bus) + (X1X2X3X4X5)$ en un único cuerpo y al de los paneles solares (<i>PS</i>) en otro.	52
5.5. Posición de la junta respecto a los centros de masa de los cuerpos 1 y 2 del modelo físico del <i>SAT</i> , para la configuración <i>C4</i>	54
5.6. Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del <i>SAT</i> durante el despliegue 1.	57
5.7. Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en <i>SRC1</i> y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 1.	58
5.8. Chequeo de conservación del momento lineal ante ausencia de fuerzas externas.	58
5.9. Chequeo de conservación del momento angular total del satélite expresado en el <i>SRI</i> en ausencia de torques externos.	59
5.10. Chequeo de conservación de la energía cinética en ausencia de acciones externas, durante la evolución de la dinámica sin acción del torque en la junta. La energía máxima alcanzada es la misma que la entregada al sistema al principio, y la quitada al final del despliegue por el torque en la junta.	59
5.11. Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del <i>SAT</i> respecto a un <i>SRI</i> durante el despliegue 2.	60
5.12. Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del <i>SAT</i> durante el despliegue 2.	60
5.13. Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en <i>SRC1</i> y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 2.	61
5.14. Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del <i>SAT</i> respecto a un <i>SRI</i> durante el despliegue 3.	61
5.15. Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del modelo del <i>SAT</i> durante el despliegue 3.	62
5.16. Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en <i>SRC1</i> y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 3.	62
5.17. Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del <i>SAT</i> respecto a un <i>SRI</i> durante el despliegue 4.	63
5.18. Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del <i>SAT</i> durante el despliegue 4.	63

5.19. Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en $SRC1$ y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 4.	64
5.20. Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del SAT respecto a un SRI durante el despliegue 5.	64
5.21. Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del SAT durante el despliegue 5.	65
5.22. Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en $SRC1$ y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 5.	65
5.23. Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del SAT respecto a un SRI durante el despliegue 6.	66
5.24. Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del SAT durante el despliegue 6.	66
5.25. Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en $SRC1$ y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 6.	67

Resumen

En la presente tesis, escrita en el marco del Proyecto Integrador de fin de la carrera de grado de Ingeniería Mecánica del Instituto Balseiro, se estudió la cinemática y dinámica de los cuerpos rígidos para su aplicación en el desarrollo de modelos físicos, matemáticos y computacionales, que permitan la simulación de la dinámica rotacional de satélites con apéndices móviles. El problema específico a resolver es el de la dinámica rotacional de satélites durante el despliegue de alguno de dichos apéndices, como pueden ser paneles solares, antenas, etc. Para ello, se trabajó con las ecuaciones de *Newton-Euler* en el modelo matemático, y se desarrolló un *software* escrito en lenguaje *C* para su resolución. La integración numérica se realizó mediante el uso de la librería *LSODE*. Se realizaron simulaciones de validación del código realizado, y se simuló el despliegue de la antena radar de un satélite real, efectuado mediante seis despliegues parciales. Se utilizaron datos reales de masas, inercias y geometría del satélite, y mediciones de orientación y velocidad angular del mismo.

Palabras clave: DINÁMICA DE LA ORIENTACIÓN, CINEMÁTICA DE LA ORIENTACIÓN, DESPLIEGUES, CUERPOS RÍGIDOS

Abstract

In this thesis, corresponding to the Final Project for the major in Mechanical Engineering at Balseiro Insitute, the kinematics and dynamics of rigid bodies were studied for their application in the development of pyhsical, mathematical and computational models that allow the simulation of the rotational dynamics of satellites with mobile appendages. The specific problem to solve is the rotational dynamics of satellites during the deployment of one of these appendages, such as solar pannels, antennas, etc. For this purpose, *Newton-Euler's* equations were used in the mathematical model, and a *C* written *software* was developed for their resolution. The numerical integration was acomplished by using the *LSODE* library. Code validation simulations were performed, and the deployment of the radar antenna of a real satellite, carried out by six partial deployments, was simulated. Real data of the satellite's mass, inertia and geometry, and measurements of its orientation and angular velocity were used for the simulation.

Keywords: ROTATIONAL DYNAMICS, ROTATIONAL KINEMATICS, DEPLOYMENTS, RIGID BODIES

Capítulo 1

Introducción

“Lo más bello que podemos experimentar es el misterio. Es la verdadera fuente del arte y de la ciencia.”

— Albert Einstein

1.1. Objeto de estudio

En el estudio de la cinemática y dinámica rotacional de satélites artificiales con apéndices móviles resulta de interés conocer su orientación a partir de sus ecuaciones de movimiento. Los satélites de comunicaciones, de observación, militares y meteorológicos, son algunos ejemplos de satélites con apéndices móviles, como paneles solares o antenas. La resolución de su dinámica permitiría la predicción de su orientación antes, durante y luego de un despliegue de alguno de dichos apéndices. Una estrategia conservativa que puede implementarse es el despliegue con los sistemas de control de orientación inactivos, seguida de una corrección de la orientación mediante diferentes técnicas que dependerán del satélite considerado. De esta forma, el satélite quedaría sujeto a la acción de la fuerza gravitatoria y diferentes *torques de perturbación* externos producidos por diversos fenómenos^[1]: aquél debido al efecto del *gradiente gravitatorio*, *radiación solar*, efecto de *drag* con la atmósfera y/o debido a la *interacción entre los campos magnéticos* del satélite y de la Tierra. Entre las técnicas de reorientación de los satélites se pueden nombrar^{[1][2]}: *maniobras de reorientación absoluta*, realizando mediciones de vectores de referencia (*sol*, *campo magnético*, *tierra* y *estrellas*) con los sensores apropiados a bordo (*magnetómetro*, *sensor solar*, *sensor de tierra*, *sensor estelar* y *GPS*); y *maniobras de atenuación de las velocidades angulares* o de *reorientación relativa*, utilizando giroscopios o derivadas de los sensores absolutos. Los actuadores usados para éstas pueden ser *ruedas de inercia*, *bobinas de torque*, o *expulsores de gas*. Otra estrategia menos conservativa es realizar un control de orientación del satélite

durante los despliegues. En el presente trabajo se realizan simulaciones de la dinámica rotacional de un satélite a partir de sus ecuaciones de movimiento, de las cuales se podría extraer información útil para la elección de una u otra estrategia.

1.2. Mecánica de cuerpos rígidos: conceptos fundamentales

Para el modelado del satélite, se supondrá al mismo constituido por uno o más cuerpos rígidos. En esta sección se realiza una síntesis de los conceptos y ecuaciones fundamentales de la mecánica de cuerpos rígidos, necesarios para el desarrollo del presente proyecto. Se pretende hacer un resumen y no un análisis detallado de éstos, sugiriendo lectura adicional si fuere necesario ^{[1] [2] [3] [4] [5]}.

1.2.1. Velocidad angular

En la figura 1.1 se muestra un esquema de un cuerpo rígido con dos sistemas de referencia: uno inercial (*SRI*) y uno no inercial fijo al cuerpo (*SRC*).

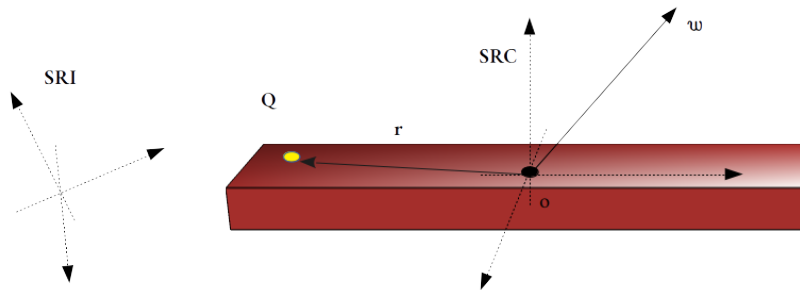


Figura 1.1: Esquema de un cuerpo rígido con velocidad angular w .

Conocida la velocidad de un punto o del cuerpo rígido respecto al *SRI*, la velocidad de cualquier otro punto Q del mismo respecto al *SRI* puede determinarse según:

$$v_Q = v_o + w \times r, \quad (1.1)$$

donde r es la distancia desde el origen del *SRC* hasta el punto Q , y w es la *velocidad angular del cuerpo rígido*. Las coordenadas de cada vector de esta ecuación deben estar expresadas en un mismo *SR* para que la ecuación sea consistente. Puede demostrarse que esta velocidad angular resulta independiente de la elección del origen o del *SRC*, así como también de la dirección de los versores que componen a dicho sistema. Es por esto que w es una propiedad del cuerpo rígido. Es común elegir el punto o como el centro de masa del cuerpo.

1.2.2. Energía cinética

La energía cinética de un cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de cada partícula que lo compone. Partiendo de esto, es posible obtener la siguiente expresión para la energía cinética (T):

$$T = \frac{1}{2}Mv_o^2 + (v_o \times w) \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha}r_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha}(w \times r_{\alpha})^2, \quad (1.2)$$

donde M es la masa del CR , m_{α} la masa de una partícula del CR cuya posición respecto del punto o es r_{α} y v_o la velocidad del punto o , según la figura 1.1. Esta expresión permite entender conceptualmente a la energía cinética en su forma general compuesta por tres términos, que pueden reducirse dependiendo de qué punto de referencia o del CR se elija para su cálculo. Puede observarse que se está realizando una sumatoria sobre α partículas, considerando al CR como compuesto por un número discreto de ellas. Si se considera al CR como un continuo de partículas, debe reemplazarse a las sumatorias por integrales de volumen, y a las masas de cada partícula m_{α} por $\rho(V)dV$. Esta expresión se simplifica si la elección del punto o es un punto quieto del CR , o el centro de masa del mismo. En el primer caso, los dos primeros términos se anulan. Si o es el centro de masa, el primer término resulta la energía cinética de traslación del centro de masa y el segundo término se anula, ya que $\sum_{\alpha} m_{\alpha}r_{\alpha} = Mr_{cm} = 0$ en el SR del centro de masa, de la definición de la posición del mismo. En ambos casos, debe calcularse el tercer término. Éste representa la energía cinética rotacional del cuerpo rígido, y puede demostrarse que tiene una forma más práctica para su cálculo en términos del *tensor de inercia* del CR . La forma más conveniente para el caso de cuerpos libres de acciones externas en el espacio exterior es con el punto o en el centro de masa. En este caso, la energía cinética adquiere la forma:

$$T = T_{traslacional} + T_{rotacional} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}w \cdot \mathbf{I}w, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{I} es el *tensor de inercia* del CR , cuyas propiedades se detallan en la sección 1.2.3.

Para el caso de un sistema de n cuerpos rígidos, se suma sobre todos los cuerpos y se obtiene la expresión:

$$T_{sist} = \sum_{i=1}^n (T_{traslacional_i} + T_{rotacional_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (M_i v_{cm_i}^2 + w_i \cdot \mathbf{I}_i w_i) \quad (1.4)$$

1.2.3. Tensor de inercia

El tensor de inercia es un objeto matemático de rango 2, de nueve componentes, que representa la distribución de masas alrededor del centro de masas (aunque podría

representar la distribución de masas alrededor de algún otro punto, ver teorema de Steiner, ecuación 1.8). Su expresión aparece en el desarrollo del tercer término de la ecuación de la energía cinética 1.2. En notación indicial¹, este término tiene la forma:

$$T_{rotacional} = \frac{1}{2} w_i w_j \int (r_k^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV, \quad (1.5)$$

donde se usó la notación $r_\alpha = (r_1, r_2, r_3)$ para el vector posición de la partícula α , en el *SRC*, con los índices $i, j = 1, 2, 3$. Se define de esta expresión a la integral como al tensor de inercias del *CR*. A continuación se presenta la componente ij del tensor (I_{ij}) y al tensor completo (\mathbf{I}):

$$I_{ij} = \int (r_k^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int (r_2^2 + r_3^2) \rho dV & - \int r_1 r_2 \rho dV & - \int r_1 r_3 \rho dV \\ - \int r_1 r_2 \rho dV & \int (r_1^2 + r_3^2) \rho dV & - \int r_2 r_3 \rho dV \\ - \int r_1 r_3 \rho dV & - \int r_2 r_3 \rho dV & \int (r_1^2 + r_2^2) \rho dV \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Se listan las principales características y propiedades de este tensor:

- Es simétrico: $I_{ij} = I_{ji}$. Por lo tanto 6 de sus 9 componentes son independientes.
- Es aditivo: su expresión surge de sumar sobre cada partícula α del *CR*, con lo que si se desea calcular el tensor de inercia de un cuerpo compuesto por dos *sub-cuerpos* cuyos tensores individuales se conocen respecto a un mismo punto, se pueden sumar componente a componente para obtener el tensor total.
- Los elementos de la diagonal son los *momentos de inercia*: I_{11}, I_{22}, I_{33} del cuerpo respecto a los ejes del *SR* que pasa por su centro de masa.
- Los elementos fuera de la diagonal son las *inercias cruzadas*, términos asociados con distribuciones de masa no homogéneas respecto al centro de masa.
- El valor de sus componentes depende de la *base* elegida para su cálculo. Es decir, cambiando la orientación de la terna de versores que componen el *SRC* de la figura 1.1, aún manteniendo su origen en o , el valor de las componentes de \mathbf{I} cambia.
- Es un tensor real y simétrico. Esto tiene como consecuencia que siempre es posible encontrar una base donde el tensor sea diagonal. Los ejes de esta base se llaman *ejes principales*, y los elementos de la diagonal en este caso son los *momentos principales de inercia* del *CR*.

¹Notación desarrollada por *Einstein* para abreviar sumatorias sobre todos los valores posibles de los índices indicados. Así, $u = \sum_{i,j=1}^3 (x_i y_j)$ se escribe en notación indicial como $u = x_i y_j = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_3 y_3$, donde i y j toman los valores 1, 2 y 3.

- Si el cuerpo tiene simetrías geométricas y es de distribución de masa homogénea, los ejes principales son los de simetría.

Como se mencionó anteriormente, también es posible calcular cada componente del tensor de inercia $I_{ij}^{(Q)}$ respecto de otro punto Q cuya posición desde el centro de masa está dada por el vector R , según el *teorema de Steiner*:

$$I_{ij}^{(Q)} = I_{ij}^{(cm)} + M(|R|^2\delta_{ij} - R_i R_j), \quad (1.8)$$

donde $I_{ij}^{(cm)}$ es la componente ij del tensor de inercia conocido, calculado respecto al centro de masa del CR , M la masa del mismo, δ_{ij} la función *delta de Kroenecker*² y R_i, R_j las componentes i y j del vector R .

1.2.4. Momento lineal y momento angular - Ecuaciones de la dinámica

Se presentan a continuación las expresiones del momento lineal y angular, y las ecuaciones diferenciales que surgen del balance de fuerzas y momentos sobre un cuerpo rígido.

Momento lineal

El momento lineal total de un cuerpo rígido (p_{cm}) se obtiene sumando sobre cada partícula del mismo. El momento resultante es el de su centro de masa:

$$p_{cm} = Mv_{cm}, \quad (1.9)$$

donde M es la masa total y v_{cm} la velocidad lineal de su centro de masa. La ecuación diferencial que surge del balance de fuerzas externas (F_{ext}) es:

$$\frac{d}{dt}(p_{cm}) = \sum F_{ext} = M\dot{v}_{cm} \quad (1.10)$$

Puede observarse que en ausencia de fuerzas externas, el vector momento lineal total del cuerpo rígido debe ser constante.

Para el caso de un sistema de cuerpos rígidos, el momento lineal total del sistema (p_{sist}) se obtiene realizando la suma sobre los n cuerpos que lo componen, y se obtiene:

$$p_{sist} = \sum_{i=1}^n p_{cm_i} \quad (1.11)$$

²La función *delta de Kroenecker* (δ_{ij}) está definida según sus índices, y puede tomar dos valores: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Momento angular

El momento angular (h) es una cantidad que depende del punto respecto del cual se lo calcule. Esto puede notarse en su definición, para una partícula i con momento angular h_{oi} calculado respecto al punto o :

$$h_{oi} = r_i \times p_i = r_i \times (m_i v_i),$$

donde r_i es la posición de la partícula i respecto de o , m_i y v_i su masa y velocidad. De esta forma, el momento angular total de un CR respecto a un punto o (H_o) puede obtenerse sumando sobre todas las partículas del mismo. Si se elige como punto de referencia del CR a su centro de masa y se realiza esta suma, puede reconocerse el tensor de inercia respecto al centro de masa en uno de los términos. Así, se obtiene la siguiente expresión:

$$H_o = r_{cm} \times p_{cm} + \mathbf{I}w = H_{cm} + H_{spin} \quad (1.12)$$

Pueden reconocerse dos términos: uno asociado al momento angular del centro de masa respecto del punto o (H_{cm}), y otro asociado al movimiento alrededor del centro de masa (H_{spin}), en el que aparece la distribución de masa del cuerpo rígido respecto a éste mediante el tensor de inercia \mathbf{I} .

Para obtener la ecuación diferencial resultante del balance de momentos, debe tenerse especial cuidado del sistema en el que se está expresando el momento angular del CR . En un SRI resulta:

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{SRI} = \sum T_{ext} \quad (1.13)$$

Si quiere relacionarse la acción de los torques externos con la variación temporal del momento angular en el SR del cuerpo, debe tenerse en cuenta que deben derivarse cantidades respecto al tiempo que están expresadas en sistemas de referencia no inerciales. En este caso, existe la siguiente expresión para relacionar la derivada temporal de un vector V fijo a un $SRNI$, con la derivada temporal de dicho vector en un SRI :

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{SRI} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{SRNI} + w \times V, \quad (1.14)$$

donde w es la velocidad angular del $SRNI$ respecto al SRI . Si el vector V es el momento angular H , se reemplaza en la ecuación 1.14 y se reconoce la expresión 1.13 para la derivada temporal en el SRI . Así, se obtiene:

$$\dot{H} = \mathbf{I}\dot{w} = \sum T_{ext} - w \times H \quad (1.15)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Euler*. Es importante aclarar lo siguiente:

al resolver la ecuación diferencial 1.15 se obtiene $H = \mathbf{I}w$, el momento angular del CR respecto a su centro de masa, es decir H_{spin} . Esto significa que si se desea calcular el momento angular del CR respecto a un punto o , como puede ser el origen de algún SRI , debe sumarse el momento angular del centro de masa H_{cm} respecto a este punto o , en concordancia con la ecuación 1.12. Por otro lado, la velocidad angular w es la velocidad angular del $SRNI$ respecto al SRI . Para ser consistente, las coordenadas de cada término deben expresarse en un mismo sistema.

Para el caso de un sistema de cuerpos rígidos, el momento angular total del sistema (H_{sist}) se obtiene realizando la suma sobre los n cuerpos que lo componen. Debe tenerse la precaución de expresar todos los términos de la suma en un mismo sistema de referencia. La expresión del momento angular total de un sistema de cuerpos rígidos respecto a un punto o es:

$$H_{sist_o} = \sum_{i=1}^n (r_{cm_i} \times p_{cm_i} + \mathbf{I}w_i) = \sum_{i=1}^n (H_{cm_i} + H_{spin_i}) \quad (1.16)$$

1.2.5. Dinámica en ausencia de acciones externas

Resulta de interés para este proyecto el estudio de los cuerpos libres de acciones externas (fuerzas o momentos). En este caso, es conocido el resultado de conservación de la energía mecánica del sistema, del momento angular total expresado en un sistema de referencia inercial y la velocidad lineal constante del centro de masa total del sistema. Si bien los satélites artificiales están sujetos a la acción de la fuerza gravitatoria, fuerzas de *drag* debido a la atmósfera, torques gravitatorios, entre otras, es importante verificar las conservaciones en los casos de acciones externas nulas como una validación de los programas de simulación desarrollados. Esto permite obtener resultados esperados de los simuladores implementados bajo condiciones conocidas.

A modo de resumen, resulta de interés para cada instante temporal revisar los siguientes resultados en el caso de un CR o sistema de cuerpos rígidos libres de acciones externas (se supone que no hay intercambio de calor ni masa):

- Conservación de la energía mecánica: $\Delta(E_{mec}) = 0$
- Conservación del momento angular total expresado en un SRI : $H_{SRI} = cte$ (1.13)
- Velocidad del centro de masa total del sistema constante: $v_{cm} = cte$ (1.10)

1.3. Cinemática de la orientación

Hasta el momento se presentaron conceptos fundamentales de la mecánica de un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, y las ecuaciones de la dinámica para su

movimiento traslacional (ecuación 1.10) y rotacional (ecuación 1.15). En esta sección se presentan las ecuaciones principales de la cinemática rotacional, aquellas que describen la orientación de un cuerpo rígido respecto a algún sistema de referencia de interés. Se presentan tres formas diferentes y equivalentes para representar dicha orientación.

En el caso de un satélite formado por más de un CR , es de interés conocer la orientación de cada uno de ellos para cada instante respecto de un SRI . Para esto, se asigna un sistema de referencia fijo a cada cuerpo, y se determina su orientación para cada instante. Usualmente se asigna a la tierra un sistema de referencia inercial. El más común de ellos es el llamado ECI , de sus siglas en inglés (*Earth Centered Inertial System*)^[6]. Éste se ubica con su origen en el centro de la Tierra, y la terna ortonormal y orientada de vectores que lo compone se define como: el eje x apuntando fijo al *equinoccio de verano*³, el eje y 90° hacia el Este del mismo, sobre el plano del Ecuador, y el eje z apuntando al polo Norte. Tanto el plano del Ecuador, como el equinoccio de verano cambian a lo largo del tiempo, con lo que este sistema no es técnicamente un SRI . El sistema $J2000$, basado en el *Catálogo Fundamental* estelar $FK5$ ⁴, es el ECI en una época determinada^[6]. Esto permite poder transformar las cantidades a este sistema y que resulten comparables, independientemente de la época en que se midieron. El sistema $J2000$ es el sistema de referencia más cercano a un SRI teórico, dada la precisión obtenida en los cálculos al usarlo.

1.3.1. Parametrizaciones de la orientación

La orientación de un cuerpo rígido puede determinarse de diferentes maneras equivalentes, usualmente llamadas *parametrizaciones de la orientación*. En todos los casos, lo que se obtiene es la orientación de un sistema de referencia compuesto por 3 ejes ortonormales fijos al cuerpo rígido respecto a algún SR de interés, para cualquier tiempo t . La *matriz de orientación*, el conjunto *eje-ángulo de Euler*, los *parámetros simétricos de Euler*, el *vector de Gibbs* y los *ángulos de Euler* son formas equivalentes de representar esta orientación. Cada una de ellas tiene ventajas y desventajas asociadas, según el campo de aplicación. Puede verse en detalle el desarrollo de cada una de éstas en la bibliografía sugerida^[1]. A continuación se presenta la *matriz de orientación*, los *parámetros simétricos de Euler*, y los *ángulos de Euler*, dado que son las parametrizaciones utilizadas en el presente trabajo. La elección de la *matriz de orientación* y los *ángulos de Euler* se basa en la directa interpretación física que brindan respecto a otras. Por otro lado, los *parámetros simétricos de Euler* tienen pocas variables independientes respecto a otras parametrizaciones, con la adicional ventaja de que no tienen indeter-

³Si se observa el movimiento aparente del Sol respecto a la Tierra, el punto de la órbita aparente de éste en que cruza el plano ecuatorial, yendo de Norte a Sur, es el *equinoccio de verano*^[1].

⁴El *Catálogo Fundamental* es un set de catálogos, al cual pertenece el $FK5$, con la posición de ciertas estrellas, usado como sistema estándar de coordenadas^[6].

minaciones matemáticas en su cálculo, lo que es beneficioso a la hora de la simulación numérica. Además, estas indeterminaciones están asociadas con orientaciones físicas que no pueden representarse de forma matemática, con lo cual esta elección permite representar cualquier orientación de los cuerpos del satélite.

Matriz de orientación

La forma más directa de especificar la orientación de un cuerpo rígido, es especificando las componentes de cada uno de los tres ejes que conforman el *SRC* fijo a dicho cuerpo, respecto a algún otro sistema de interés. En la figura 1.2 se muestra un *SRC* con versores x_C, y_C, z_C , cuya orientación se desea conocer respecto a un *SRI*, con ejes x_I, y_I, z_I .

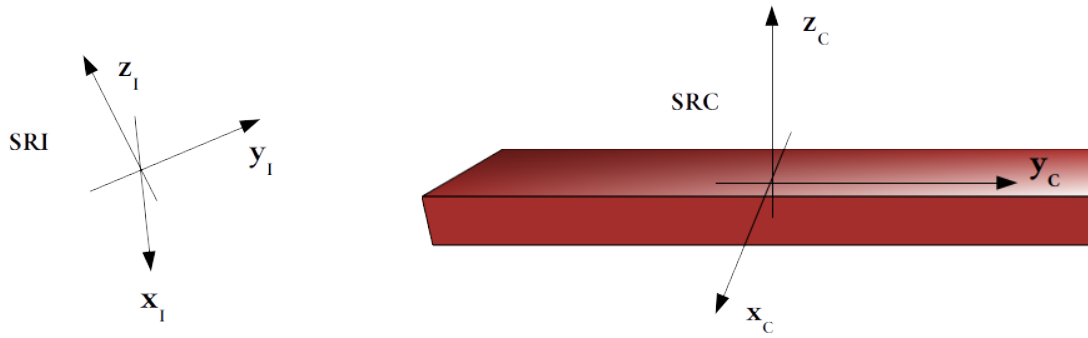


Figura 1.2: Esquema de un cuerpo rígido cuya orientación se desea conocer respecto a un *SRI*.

Si se ordenan las componentes de los tres ejes del *SRC* expresadas en la base del *SRI* en una matriz 3x3, se obtiene la matriz de orientación:

$$C_{IC} = \begin{pmatrix} - & x_C^{(SRI)} & - \\ - & y_C^{(SRI)} & - \\ - & z_C^{(SRI)} & - \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Esta matriz tiene por filas a los versores que componen el *SRC* expresados en el *SRI*. Se resumen a continuación las características más útiles de esta matriz:

- Representa la orientación del *CR* respecto al *SRI*.
- Es la matriz asociada a la transformación lineal entre la base del *SRI* y la base del *SRC*. Es decir, es la *matriz de cambio de base* o *matriz de rotación* entre el *SRI* y el *SRC*, que permite expresar vectores originalmente expresados en el *SRI* en el *SRC*:

$$V^{(SRC)} = C_{IC} V^{(SRI)} \quad (1.18)$$

- Se la suele denominar *matriz de cosenos directores*, ya que las filas contienen los *cosenos* de los ángulos que hay entre el eje del *SRC* dado por la fila y los 3 ejes

del *SRI*. Por ejemplo, $C_{IC}(0,0) = \cos(x_C, \hat{x}_I)$, $C_{IC}(1,0) = \cos(y_C, \hat{x}_I)$, etc. Esto resulta útil en las simulaciones para calcular los ángulos entre ejes de diferentes sistemas de referencia.

De esta forma, al conocer la orientación de un cuerpo rígido respecto a un *SRI*, se conoce también la transformación lineal, en este caso la rotación, que permite obtener las coordenadas de cualquier vector de interés expresado en el *SRI* (como pueden ser la velocidad lineal del centro de masa, el momento angular, etc) en el sistema fijo al cuerpo rígido *SRC*. Estas características presentadas son consecuencias de que la matriz 1.17 es una matriz real y ortonormal, lo que implica que $C_{IC}C_{IC}^T = \mathbf{1}$, es decir que $C_{IC}^{-1} = C_{IC}^T$. Este resultado significa que, además de conocer la transformación lineal entre la base compuesta por los versores del *SRI* y la compuesta por los versores del *SRC*, se conoce la transformación lineal inversa. Esto resulta extremadamente útil, ya que al determinar la matriz de rotación se puede *ir de un sistema a otro* utilizando dicha matriz y su transpuesta, fácilmente calculable en comparación con la inversa. A la matriz asociada a la transformación inversa de la transformación dada por la expresión 1.17, se la denota como:

$$C_{CI} := C_{IC}^{-1} = C_{IC}^T \quad (1.19)$$

Parámetros simétricos de Euler - Cuaternión

Otra forma de representar la orientación de un *CR* es mediante los *parámetros simétricos de Euler*, q_0, q_1, q_2 y q_3 , definidos a partir del par *eje-ángulo de Euler* (\hat{e}, ϕ) ⁵ según:

$$\begin{cases} q_0 &= \hat{e}_1 \sin(\phi/2) \\ q_1 &= \hat{e}_2 \sin(\phi/2) \\ q_2 &= \hat{e}_3 \sin(\phi/2) \\ q_3 &= \cos(\phi/2) \end{cases} \quad (1.20)$$

Puede verificarse que vale la relación $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Es usual ordenar estos parámetros en una herramienta matemática llamada *cuaternión* (q), definida como:

$$q = q_0\hat{i} + q_1\hat{j} + q_2\hat{k} + q_3, \quad (1.21)$$

donde \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} son los denominados *números hiperimaginarios*, como una extensión del

⁵Según el teorema de Euler, cualquier rotación de un *CR* puede ser expresada como una rotación de un ángulo ϕ alrededor de un eje fijo $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)^T$.

número imaginario i , que satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1 \\ \hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k}\hat{i} = -\hat{i}\hat{k} = \hat{j} \end{cases} \quad (1.22)$$

De esta forma, es usual denominar a la parte q_3 como *parte real* o *parte escalar*, y a la parte $q_0\hat{i} + q_1\hat{j} + q_2\hat{k}$ como *parte vector* o *parte imaginaria* del cuaternión. A partir de estas propiedades, se definen operaciones de suma y producto de cuaterniones, su conjugado o inverso ($q^* := -q_0\hat{i} - q_1\hat{j} - q_2\hat{k} + q_3$), y su norma ($|q| := \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$). Si los *parámetros de Euler* definidos en las ecuaciones 1.20 son las componentes de un cuaternión, entonces éste representa la rotación del cuerpo rígido dado por el par *eje-ángulo de Euler*. Así como representa una rotación, también representa la orientación del mismo, como se vio en el caso de la matriz de orientación. La relación entre las componentes de dicha matriz con las componentes del cuaternión, y su relación inversa^[5] son:

$$C(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & 2(q_0q_2 - q_1q_3) \\ 2(q_1q_0 - q_2q_3) & -q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) \\ 2(q_2q_0 + q_1q_3) & 2(q_2q_1 - q_0q_3) & -q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(C) = \left(\frac{1}{4q_0} \right) \begin{pmatrix} 1 + 2C(0,0) - tr(C) \\ C(0,1) + C(1,0) \\ C(0,2) + C(2,0) \\ C(1,2) + C(2,1) \end{pmatrix}, \quad q(C) = \left(\frac{1}{4q_1} \right) \begin{pmatrix} C(1,0) + C(0,1) \\ 1 + 2C(1,1) - tr(C) \\ C(1,2) + C(2,1) \\ C(2,0) - C(0,2) \end{pmatrix} \\ \\ q(C) = \left(\frac{1}{4q_2} \right) \begin{pmatrix} C(2,0) + C(0,2) \\ C(2,1) + C(1,2) \\ 1 + 2C(2,2) - tr(C) \\ C(0,1) - C(1,0) \end{pmatrix}, \quad q(C) = \left(\frac{1}{4q_3} \right) \begin{pmatrix} C(1,2) - C(2,1) \\ C(2,0) - C(0,2) \\ C(0,1) - C(1,0) \\ 1 + tr(C) \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (1.24)$$

donde puede calcularse q a partir de cualquiera de las cuatro relaciones anteriores. El error numérico se minimiza eligiendo aquella que tenga el máximo $|q_i|$ ^[5].

Para la implementación computacional, resulta útil representar al cuaternión como

un vector o arreglo de cuatro componentes $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$. Así como un vector V puede transformarse de un sistema a otro mediante la matriz de orientación (ecuación 1.18), puede usarse el cuaternión de forma equivalente como:

$$V^{(SRC)} = q_{IC}^* V^{(SRI)} q_{IC} \quad (1.25)$$

Se hace énfasis en la propiedad de norma unitaria que tiene un cuaternión que representa la orientación de un CR . Esto debe verificarse durante las simulaciones y, en caso de que su norma no sea unitaria por errores numéricos, volver a normalizarlo. De forma contraria no representa la orientación ni una rotación del CR .

Ángulos de Euler

La tercera parametrización de la orientación que se presenta es la de los *ángulos de Euler*. En la figura 1.3 se presenta un esquema de un giróscopo, dispositivo práctico para la visualización de dichos ángulos. En éste, se tienen dos cuerpos denominados A y B . El primero de ellos puede pensarse como un marco externo, al que se le asigna un SR formado por la terna de vectores ortonormales a_1, a_2 y a_3 . Al cuerpo B se lo puede pensar como un rotor, al que se le asigna otro SRC formado por la terna de vectores ortonormales b_1, b_2 y b_3 . Se colocan líneas de referencia fijas a cada cuerpo, como se muestra en la figura, y se distinguen dos ejes de giro: uno interno y uno externo. Inicialmente se considera a los cuerpos A y B orientados de tal forma que las ternas de sus respectivos SR tengan la misma orientación. Es decir, inicialmente a_1 y b_1 tiene igual dirección y sentido, al igual que los demás vectores. A través de rotaciones parciales dadas por combinaciones de los *ángulos de Euler* θ_1, θ_2 y θ_3 , pueden lograrse distintas orientaciones del cuerpo B respecto al A . Como nada se supuso acerca del movimiento o no del cuerpo A , el SR fijo al mismo podría o no ser inercial.

Las rotaciones pueden hacerse a lo largo de los ejes fijos al cuerpo A , que se denotan mediante las siglas RA (rotaciones tipo A), o a lo largo de los ejes fijos al cuerpo B , que se denotan como RB (rotaciones tipo B)⁶. Esto define una primera clasificación para las rotaciones, según en que SR se efectúan las mismas. Adicionalmente, puede que se realicen las tres rotaciones parciales a lo largo de tres ejes distintos, o a lo largo de dos ejes diferentes, repitiendo uno de ellos. Una orientación de B respecto a A dada a través de una secuencia de rotaciones en ejes del cuerpo B con giros de θ_1 a lo largo de b_2 , θ_2 a lo largo de b_3 y θ_3 a lo largo de b_1 se denota como: $RB - 231$ (donde se usaron tres ejes diferentes). Una rotación final dada por la secuencia de rotaciones en

⁶En la bibliografía^[7] se encontrará esta clasificación con los nombres de rotaciones tipo *space-angles* y *body-angles*, respectivamente. Estos nombres surgen de suponer al cuerpo A quieto respecto a un SRI , mientras que el SR del cuerpo B es no inercial, para lo que se usa la palabra *body* (del inglés *cuerpo*). En este trabajo se modifica la denominación por conveniencia, y se considera que el cuerpo A puede estar acelerado respecto a un SRI .

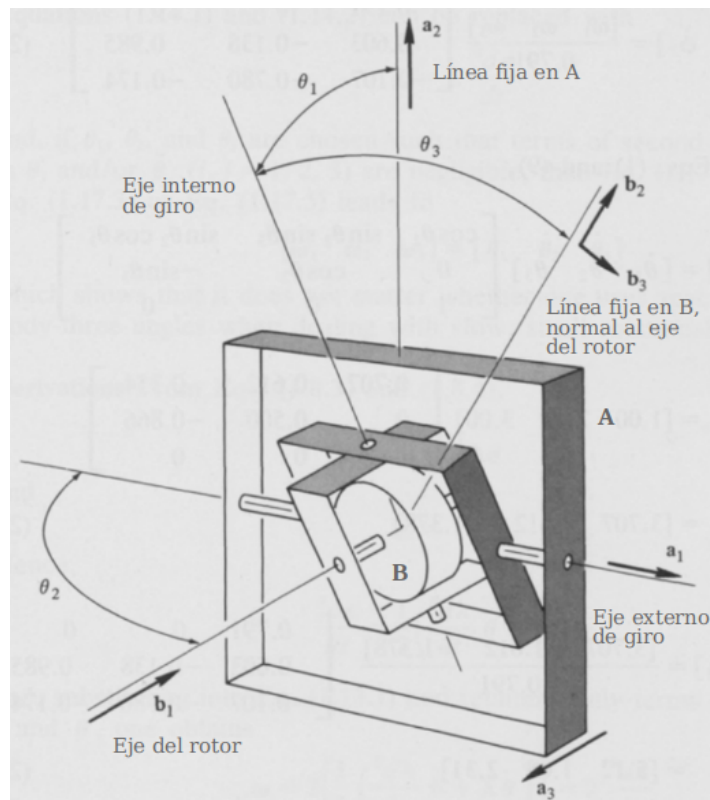


Figura 1.3: Esquema de un giroscopio, usado para representar los *ángulos de Euler*. Figura tomada del libro *Spacecraft Dynamics* de los autores Kane, Likins y Levinson^[7].

ejes del cuerpo A con giros de θ_1 a lo largo de a_1 , θ_2 a lo largo de a_2 y θ_3 a lo largo de a_3 se denota como: $RA - 121$ (donde se usaron dos ejes diferentes). En el caso de la figura, la orientación final del cuerpo B puede obtenerse con una rotación $RB : 121$.

Al igual que con las demás parametrizaciones, existen relaciones entre éstas y los *ángulos de Euler*, que pueden encontrarse en la bibliografía sugerida^{[1][7]}. Además, pueden encontrarse 24 matrices de orientación en términos de los *ángulos de Euler* en el Apéndice I del libro *Spacecraft Dynamics*^[7].

1.3.2. Ecuación diferencial de la cinemática rotacional

Como se mencionó en la sección anterior, hay diferentes formas equivalentes de representar la orientación de un CR . De la misma manera, existen formas equivalentes de representar la derivada temporal de la misma, para cada parametrización. Esta variación temporal indica matemáticamente la razón de cambio de la orientación de un CR en función del tiempo, respecto a algún SR dado por la parametrización usada.

Parámetros simétricos de Euler - Cuaternión

La ecuación diferencial que rige la evolución temporal de la orientación (\dot{q}) para el caso de los *parámetros de Euler* como componentes del cuaternión resulta:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega q \quad (1.26)$$

donde Ω es una matriz que depende de la velocidad angular del *CR*. Explícitamente:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 & w_1 \\ -w_3 & 0 & w_1 & w_2 \\ w_2 & -w_1 & 0 & w_3 \\ -w_1 & -w_2 & -w_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Resolviendo la ecuación anterior es posible conocer el cuaternión (la orientación) de cada cuerpo de algún sistema de cuerpos rígidos en función del tiempo, si se conoce la velocidad angular de los mismos. Es importante recalcar dos aspectos de la ecuación 1.27: el cuaternión representa la orientación del *CR* del sistema respecto a un *SRI*. Es decir, se usó q de forma equivalente a q_{IC} . Por otro lado, w es la velocidad angular del cuerpo rígido expresada en el *SRC*. Esta es la ecuación usada en las simulaciones.

Matriz de orientación

Análogamente, la ecuación diferencial de la cinemática rotacional en términos de la matriz de orientación es la siguiente:

$$\dot{C} = C\tilde{w} \quad (1.28)$$

donde \tilde{w} es una matriz anti-simétrica que depende de la velocidad angular del *CR*, definida en la sección 2, ecuación 2.6, con la siguiente forma:

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Si C representa la orientación de un *CR* respecto a un *SRI*, se la está usando de forma equivalente a C_{IC} , y las componentes de \tilde{w} están expresadas en el *SRC*.

Capítulo 2

Modelado

“Un genio es alguien que descubre que la piedra que cae y la Luna que no cae representan un solo y mismo fenómeno.”

— Ernesto Sábato, sobre Isaac Newton

Lo primero que debe definirse en el proceso de desarrollar una simulación dinámica de cualquier sistema, es el modelado físico y matemático del mismo. En este caso, se desea simular la dinámica rotacional de un satélite provisto de apéndices móviles, como puede ser el caso de paneles, antenas, etc. Para ello, se utilizarán dos herramientas conceptuales principales en el desarrollo del modelado: *cuerpos rígidos* y *juntas*, que vinculan a los cuerpos entre sí.

2.1. Modelo Físico

En la figura 2.1 se presentan diferentes modelos físicos de un satélite compuesto por cuerpos rígidos, a modo de ejemplo. En cada uno de ellos puede identificarse un *cuerpo central* (color negro) y un número variable de *apéndices*. Cada cuerpo se vincula con los demás en una junta puntual. Este esquema es el utilizado para modelar físicamente a cualquier satélite cuya dinámica se desee simular.

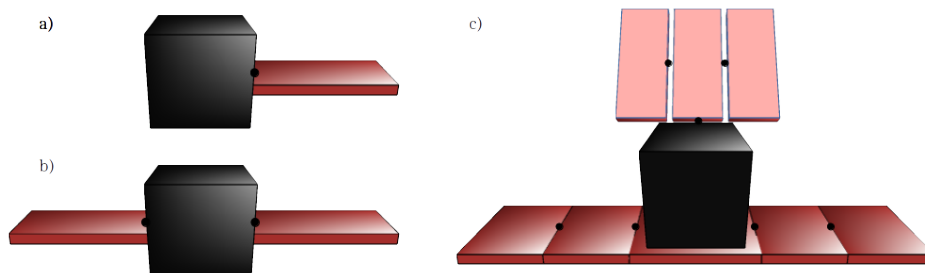


Figura 2.1: Modelos físicos de satélites representados con cuerpos rígidos y juntas puntuales.

Dado que se trabaja con cuerpos rígidos, cada cuerpo del sistema en estudio tendrá

asociadas las propiedades conocidas de los mismos: masa, tensor de inercia, velocidad angular, centro de masa, etc. Fijo al centro de masa de cada cuerpo se coloca un sistema de referencia que permitirá identificar unívocamente la posición del centro de masa y la orientación de cada cuerpo que constituya al satélite, respecto a un sistema de referencia arbitrario, como puede ser uno inercial, o el sistema de referencia fijo al centro de masa total del satélite. Por otro lado, las juntas pueden ser de diferente naturaleza según cuántos grados de libertad ésta restrinja. En la figura 2.2 se presentan dos tipos comunes de juntas: *esférica*, sin restricción de grados de libertad (*GL*) rotacionales y de *revolución*, con restricción de dos *GL* rotacionales.

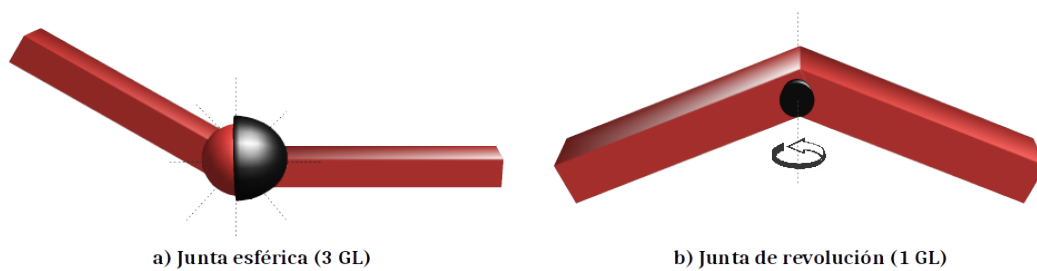


Figura 2.2: Esquema con los modelos físicos de las juntas más comunes.

2.2. Modelo matemático de dos cuerpos

2.2.1. Junta esférica

Se presenta a continuación el modelo matemático de un sistema de dos cuerpos rígidos vinculados mediante una junta esférica^[8]. En este caso, ambos cuerpos tienen una restricción traslacional en el punto que los vincula, y ninguna restricción rotacional. En la figura 2.3 se muestra un diagrama de cuerpo libre del sistema, donde el cuerpo i está sometido a fuerzas externas (F_i) y torques externos (T_i) en su centro de masa, y ambos se vinculan entre sí por una junta que transmite una fuerza (F_j) para impedir su separación. Para el sistema de los dos cuerpos, esta fuerza en la junta es una acción interna. Además, se coloca un torque interno al sistema en la junta (T_j) que puede ser modelado con alguna expresión deseada. En el caso de una junta esférica, este torque puede o no ser nulo, afectando la rotación individual de cada cuerpo. Sin embargo, cada uno podrá rotar con tres grados de libertad en todo momento. Este torque en la junta también será una variable libre en el sistema de ecuaciones para una junta de *revolución* como la que se muestra en 2.2, como se verá más adelante, aunque únicamente en la dirección en la que exista un grado de libertad rotacional. En los demás ejes, resultará un valor fijado por la restricción que exista.

Si se realiza un balance de fuerzas y momentos en el sistema de la figura 2.3, con las cantidades expresadas en un *SRI*, se obtienen las denominadas ecuaciones de *Newton-*

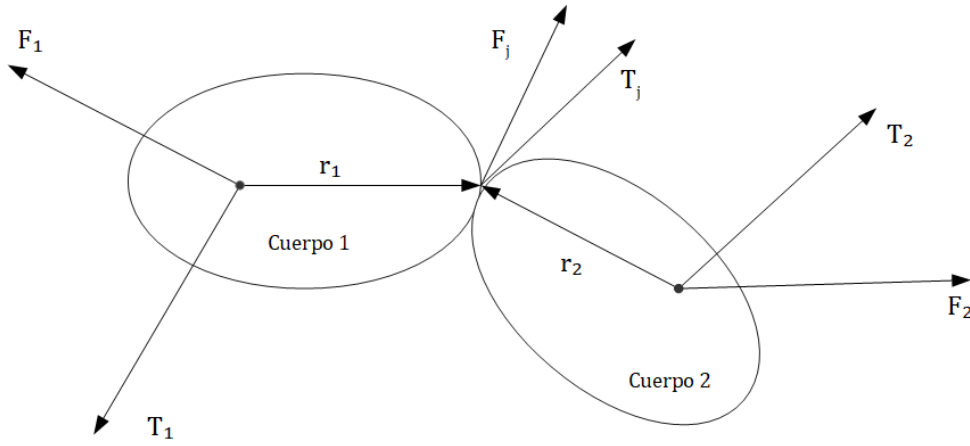


Figura 2.3: Diagrama de cuerpo libre de un sistema de dos cuerpos rígidos vinculados por una junta esférica.

Euler (ver ecuación 1.15):

$$I_1 \dot{w}_1 = T_1 - w_1 \times H_1 + T_j + r_1 \times F_j \quad (2.1)$$

$$I_2 \dot{w}_2 = T_2 - w_2 \times H_2 - T_j - r_2 \times F_j \quad (2.2)$$

$$m_1 \dot{v}_1 = F_1 + F_j \quad (2.3)$$

$$m_2 \dot{v}_2 = F_2 - F_j \quad (2.4)$$

donde w_i , v_i , H_i , m_i , I_i son la velocidad angular, la velocidad lineal del centro de masa, el momento angular, la masa y el tensor de inercia del cuerpo i , respectivamente. Debe notarse que se usa el símbolo " $\dot{\cdot}$ " para denotar la derivada temporal en un marco de referencia *local*. Para \dot{w}_1 y \dot{w}_2 los marcos de referencia locales son sistemas de referencia fijos a los cuerpos 1 y 2, respectivamente, mientras que para \dot{v}_1 y \dot{v}_2 el marco local es el *SRI*.

Para impedir la separación de los cuerpos, se plantea que ambos tengan la misma velocidad lineal en la junta. Matemáticamente, esto se escribe como:

$$v_1^j = v_2^j$$

que puede escribirse explícitamente:

$$v_1 + w_1 \times r_1 = v_2 + w_2 \times r_2 \quad (2.5)$$

Para introducir estas ecuaciones de vínculo en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, se las deriva temporalmente. Debe tenerse en cuenta que r_1 y r_2 son cantidades fijas a los *SRNI* unidos a los cuerpos 1 y 2, respectivamente.

La derivada temporal de la primer ecuación de vínculo resulta:

$$\dot{v}_1 + \dot{w}_1 \times r_1 + w_1 \times (w_1 \times r_1) = \dot{v}_2 + \dot{w}_2 \times r_2 + w_2 \times (w_2 \times r_2)$$

A partir de este momento se sobreentiende que las velocidades angulares (así como cualquier otro vector) están expresadas en el *SRI*, salvo que se indique lo contrario. De esta forma, w_2 es equivalente a $w_{2I}^{(I)}$. Además, se utilizan las matrices \tilde{c} y \bar{c} tales que $\tilde{c}y = c \times y$, $\bar{c}y = c \times (c \times y)$, donde $c, y \in \mathbb{R}^3$. A continuación, se presentan dichas matrices en términos de sus componentes.

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} -c_2^2 - c_3^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & -c_3^2 - c_1^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & -c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Puede observarse que \tilde{c} es una matriz antisimétrica y \bar{c} es una matriz simétrica, con lo que $\tilde{c}^T = -\tilde{c}$.

Usando estas matrices, se reescribe el sistema de ecuaciones junto con la ecuación de vínculo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} I_1 \dot{w}_1 - \tilde{r}_1 F_j = T_1 - \tilde{w}_1 H_1 + T_j \\ I_2 \dot{w}_2 + \tilde{r}_2 F_j = T_2 - \tilde{w}_2 H_2 - T_j \\ m_1 \dot{v}_1 - F_j = F_1 \\ m_2 \dot{v}_2 + F_j = F_2 \\ -\tilde{r}_1^T \dot{w}_1 + \tilde{r}_2^T \dot{w}_2 - \dot{v}_1 + \dot{v}_2 = \bar{w}_1 r_1 - \bar{w}_2 r_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Siguiendo la metodología usada en el trabajo de *Stoneking*^[8], resulta conveniente expresar ciertas cantidades en un *SRI*, como las fuerzas actuantes sobre los centros de masa de los cuerpos, mientras que cantidades como la velocidad angular w o el momento angular H resultan cómodas en sistemas de referencia fijos al cuerpo 1 (*SRC1*) o al cuerpo 2 (*SRC2*). En la tabla 2.1 se presenta un resumen de los sistemas de referencia elegidos para expresar cada cantidad de interés.

Expresado en SRC1	Expresado en SRC2	Expresado en SRI
I_1	I_2	v_1, \dot{v}_1
r_1, \tilde{r}_1	r_2, \tilde{r}_2	v_2, \dot{v}_2
$w_1, \dot{w}_1, \tilde{w}_1, \bar{w}_1$	$w_2, \dot{w}_2, \tilde{w}_2, \bar{w}_2$	F_1
T_1, T_j	T_2	F_2
H_1	H_2	F_j

Tabla 2.1: Sistemas de referencia elegidos para expresar las distintas cantidades. Tabla adaptada de la publicación de referencia ^[8].

Utilizando las matrices de rotación correspondientes, se procede a expresar la primera ecuación del sistema 2.8 en el *SRC1*, la segunda ecuación en el *SRC2*, y las siguientes en el *SRI*. Puede escribirse de forma compacta el sistema final de ecuaciones correspondiente a la dinámica del sistema de dos cuerpos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{r}_1^{(1)} C_{I1} \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & \tilde{r}_2^{(2)} C_{I2} \\ 0 & 0 & m_1 \mathbf{1} & 0 & -\mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -C_{1I} \tilde{r}_1^{(1)T} & C_{2I} \tilde{r}_2^{(2)T} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1^{(1)} \\ \dot{w}_2^{(2)} \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ F_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} - \tilde{w}_1^{(1)} H_1^{(1)} + T_j^{(1)} \\ T_2^{(2)} - \tilde{w}_2^{(2)} H_2^{(2)} - C_{12} T_j^{(1)} \\ F_1 \\ F_2 \\ C_{1I} \bar{w}_1^{(1)} r_1^{(1)} - C_{2I} \bar{w}_2^{(2)} r_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El sistema 2.9 es un sistema de 15 ecuaciones diferenciales no lineal. Debe destacarse que la fuerza en la junta (F_j) entre los cuerpos es una incógnita del problema, y que el torque en la junta debe ser modelado con alguna función. Esto significa que el torque resulta una variable de control si se quiere lograr un movimiento rotacional deseado, como es el caso del despliegue de un panel, por ejemplo. Además, debe notarse que las matrices de rotación dependen del tiempo, al representar éstas la orientación de cada cuerpo en cada instante, con lo que es necesario añadir a este sistema las ecuaciones de la cinemática rotacional para poder calcularlas.

Sistema de ecuaciones diferenciales completo

El sistema completo a resolver es el que se muestra en la ecuación 2.9 junto con las ecuaciones de la cinemática rotacional, presentadas en 1.27, para cada cuerpo:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{1}{2}\Omega(w_1)q_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}\Omega(w_2)q_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

En este caso, las velocidades angulares de cada cuerpo usadas en la ecuación anterior serán las resultantes de resolver la dinámica rotacional. Es decir, de forma numérica se puede resolver secuencialmente el problema: en primer lugar la dinámica rotacional dada por 2.9, con las correctas condiciones iniciales, y luego la cinemática rotacional construyendo la matriz Ω con la solución obtenida. Dado que el cuaternión y la matriz de rotación son dos parametrizaciones equivalentes para representar la orientación de los cuerpos rígidos, es posible calcular las matrices del sistema 2.9 a partir de las soluciones de 2.10 con la ecuación 1.23.

Fuerza en la junta esférica

Dado que la resolución del sistema de ecuaciones se realiza mediante un integrador numérico que resuelve sistemas del tipo $\dot{y} = f(y, t)$, es necesario despejar manualmente la fuerza en la junta F_j de la ecuación de vínculo presente en 2.9. Luego de trabajar con las ecuaciones y simplificar, se puede obtener la siguiente expresión para la fuerza:

$$F_j = \alpha^{-1}(F_{ext_m} - C_{wr} + Cr_1 I_1^{-1}(T_1 - T_{d1} + T_j) - Cr_2 I_2^{-1}(T_2 - T_{d2} - C_{12}T_j)) \quad (2.11)$$

donde se definió:

- $F_{ext_m} := (F_2/m_2 - F_1/m_1)$, las fuerzas externas por unidad de masa.
- $C_{wr} := (C_{1I}\bar{w}_1 r_1 - C_{2I}\bar{w}_2 r_2)$
- $Cr_k := C_{kI}\tilde{r}_k$, para el cuerpo k .
- $T_{dk} := \tilde{w}_k H_k$, los denominados *momentos centrífugos* sobre el cuerpo k .
- $MM := (1/m_1 + 1/m_2)$
- $\alpha := (Cr_1 I_1^{-1} Cr_1^T + Cr_2 I_2^{-1} Cr_2^T + MM\mathbf{1})$

Torque en la junta esférica

El torque en la junta T_j puede ser modelado según la función que se desee. En las simulaciones se realizaron modelos como función del tiempo, de algún ángulo, o de la energía entregada al sistema al aplicar el mismo. Se recuerda que T_j está expresado en el *SRC1*.

2.2.2. Junta de revolución

Para la restricción del movimiento rotacional del cuerpo 2 respecto al cuerpo 1 se sigue la metodología usada en el trabajo de *Stoneking*, junto con la teoría desarrollada por *Kane*^{[7][8]}, y se busca adaptar las ecuaciones al caso de un despliegue del cuerpo 2 respecto al 1, con un único grado de libertad rotacional. La velocidad angular relativa entre los cuerpos w_{21} tiene la expresión:

$$w_{21} = \Gamma u , \quad (2.12)$$

donde se define el vector $u := (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)$, que contiene las derivadas temporales de los *ángulos de Euler* del segundo cuerpo, los cuales representan la orientación de 2 respecto a 1. Γ es una matriz de funciones no lineales de dichos ángulos, cuya forma depende de la elección de la secuencia elegida de rotaciones y de si la rotación es del tipo *RA* o *RB*, en este caso el cuerpo *A* corresponde al cuerpo 1, y el *B* al cuerpo 2 (ver sección 1.3.1). Existen 24 posibilidades de elección de las secuencias de rotación^[7]. Según cada una de estas elecciones, se obtiene una matriz Γ que relaciona la velocidad angular relativa w_{21} con el vector u . Resulta importante en este trabajo una elección tal que la matriz Γ no sea singular para el caso de un despliegue. Como se verá más adelante, esto es así ya que en el sistema de ecuaciones resultante para este modelo debe computarse la matriz Γ^{-1} , de ahí la necesidad de que sea invertible.

En primer lugar, se colocan los sistemas de referencia fijos a los cuerpos 1 y 2, y se determina que las rotaciones serán en ejes del *SRC2*, como se muestra en la figura 2.4. Con estas consideraciones, se elige una rotación tipo *RB – 231*, lo que significa que se compone la rotación total con tres rotaciones parciales mediante giros de magnitud: θ_1 en y_2 , θ_2 en z_2 y θ_3 en x_2 . La matriz Γ resultante es:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sin \theta_2 & 0 & 1 \\ \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

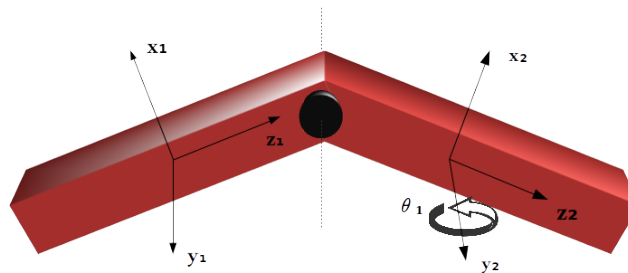


Figura 2.4: Diagrama con dos cuerpos y sus *SR*. Se elige la secuencia de rotación *RB – 231*, con lo que el grado de libertad para el despliegue es θ_1 en y_2 . A su vez, $\theta_2 = \theta_3 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ en los ejes z_2 y x_2 para restringir la rotación.

Derivando respecto al tiempo la ecuación 2.12:

$$\dot{w}_{21} = \Gamma \dot{u} + \dot{\Gamma} u, \quad (2.14)$$

donde $\dot{\Gamma}$ es una función no lineal de θ y u . Explícitamente para la secuencia elegida, se obtiene:

$$\dot{w}_{21} = \begin{pmatrix} \sin \theta_2 & 0 & 1 \\ \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{pmatrix} \dot{u} + \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 \\ \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \cos \theta_2 & -\dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & 0 \end{pmatrix} u$$

Se quiere un despliegue con un único grado de libertad, en este caso la rotación a lo largo del eje y_2 , con lo cual se identifica a éste como θ_1 . Por otro lado, se desea que $\theta_2 = \theta_3 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$, para que no haya rotación relativa en otro sentido que no sea el mostrado en la figura. De esta forma, las ecuaciones 2.12 y 2.14 resultan:

$$\begin{pmatrix} w_{21x} \\ w_{21y} \\ w_{21z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_{21x} \\ \dot{w}_{21y} \\ \dot{w}_{21z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Sustituyendo 2.14 en la ecuación de vínculo 2.5, se puede obtener:

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \dot{w}_1 + \tilde{r}_2 (\Gamma \dot{u} + \dot{\Gamma} u) + \bar{w}_1 r_1 - \bar{w}_2 r_2 \quad (2.17)$$

Con esta nueva restricción, se identifican las incógnitas del sistema: w_1 , \dot{u} , \dot{v}_1 , F_j . La primera ecuación se expresa en el *SRC1*, la segunda en el *SRC2*, y la tercera y cuarta en el *SRI*. El sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 & -\tilde{r}_1 C_{I1} \\ I_2 & I_2 \Gamma & 0 & \tilde{r}_2 C_{I2} \\ 0 & 0 & m_1 \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ m_2 (C_{2I} \tilde{r}_2 - C_{1I} \tilde{r}_1) & m_2 C_{2I} \tilde{r}_2 \Gamma & m_2 \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{u} \\ \dot{v}_1 \\ F_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 - \tilde{w}_1 H_1 + T_j \\ T_2 - \tilde{w}_2 H_2 - C_{12} T_j - I_2 \dot{\Gamma} u \\ F_1 \\ F_2 - m_2 C_{2I} \tilde{r}_2 \dot{\Gamma} u + m_2 (C_{1I} \bar{w}_1 r_1 - \bar{w}_2 r_2) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Sistema de ecuaciones diferenciales completo

El sistema completo para este modelo de junta de revolución es el conjunto de ecuaciones 2.18 junto con 2.10, donde w_1 y w_2 fueron resueltas considerando las nuevas restricciones.

Fuerza en la junta de revolución

Al igual que en el modelo de junta esférica, se debe despejar manualmente la expresión para la fuerza en la junta (F_j), que resulta:

$$F_j = \alpha^{-1}(F_{ext_m} - C_{wr} + Cr_1 I_1^{-1}(T_1 - T_{d1} + T_j) - Cr_2 I_2^{-1}(T_2 - T_{d2} - C_{12}T_j)) \quad (2.19)$$

que es la misma expresión encontrada para el modelo de junta esférica. La diferencia está en que, para la junta de revolución, el torque en la junta T_j debe despejarse de la ecuación para \dot{u} del sistema 2.18.

Torque en la junta de revolución

Si se despeja T_j del sistema 2.18, se obtiene:

$$T_j = C_{21}(Cr_2^T F_j + T_2 - T_{d2} - I_2(\Gamma\dot{u} + \dot{\Gamma}u + \dot{w}_1)) \quad (2.20)$$

Puede observarse que el torque depende de la fuerza en la junta, y de la aceleración angular del cuerpo 1. Reemplazando en esta ecuación sus expresiones, reagrupando y simplificando varios términos, se puede obtener:

$$T_j = \epsilon^{-1} \left(\delta (F_{ext_m} - C_{wr} + Cr_1 I_1^{-1} T t_1 - Cr_2 I_2^{-1} T t_2) + C_{21} \left(T t_2 - I_2 I_1^{-1} T t_1 - I_2 (\Gamma\dot{u} + \dot{\Gamma}u) \right) \right), \quad (2.21)$$

donde se usan las definiciones del modelo de junta esférica y otras adicionales:

- $F_{ext_m} := (F_2/m_2 - F_1/m_1)$, las fuerzas externas por unidad de masa.
- $C_{wr} := (C_{1I}\bar{w}_1 r_1 - C_{2I}\bar{w}_2 r_2)$
- $Cr_k := C_{kI}\tilde{r}_k$, para el cuerpo k .
- $T t_k := T_k - T d_k$, los torques externos sobre el cuerpo k .
- $T d_k := \tilde{w}_k H_k$, los denominados *momentos centrífugos* sobre el cuerpo k .
- $MM := (1/m_1 + 1/m_2)$
- $\epsilon := \beta - \delta(Cr_1 I_1^{-1} + Cr_2 I_2^{-1} C_{12})$
- $\beta := (\mathbf{1} - C_{21} I_2 I_1^{-1})$
- $\delta := C_{21}(Cr_2^T + I_2 I_1^{-1} Cr_1^T)\alpha^{-1}$
- $\alpha := (Cr_1 I_1^{-1} Cr_1^T + Cr_2 I_2^{-1} Cr_2^T + MM\mathbf{1})$

Esta es la expresión para el torque en la junta que debe usarse en el modelo computacional, junto con las condiciones iniciales. Como se observa, colocando los valores de $u_x = u_z = 0$ y $\dot{u}_x = \dot{u}_z = 0$, dos de las componentes de T_j resultan ecuaciones de vínculo del modelo. La tercera componente tiene como grado de libertad a u_y , según se detalló anteriormente. Esta expresión debe ingresarse en la ecuación 2.19 para obtener la fuerza en la junta.

2.2.3. Posiciones del centro de masa y la junta

Para el cálculo del momento angular total y para verificar que la restricción dada por la ecuación 2.5 es correcta, resulta necesario conocer la posición en todo instante de los centros de masa de cada cuerpo r_{cm1} y r_{cm2} , y la posición de la junta (r_j) respecto a un *SRI*. En la figura 2.5 se muestra un esquema de dos cuerpos arbitrarios, con masas distintas (en este caso $m_2 > m_1$, a modo de ejemplo), vinculados con una junta esférica, cada uno con un *SRC*. La posición de la junta desde el centro de masa de cada cuerpo es r_1 y r_2 . Además, se muestra un sistema de referencia inercial *SRI*, desde el que se desea conocer r_{cm1} , r_{cm2} y r_j . En primer lugar, se busca una expresión para calcular la

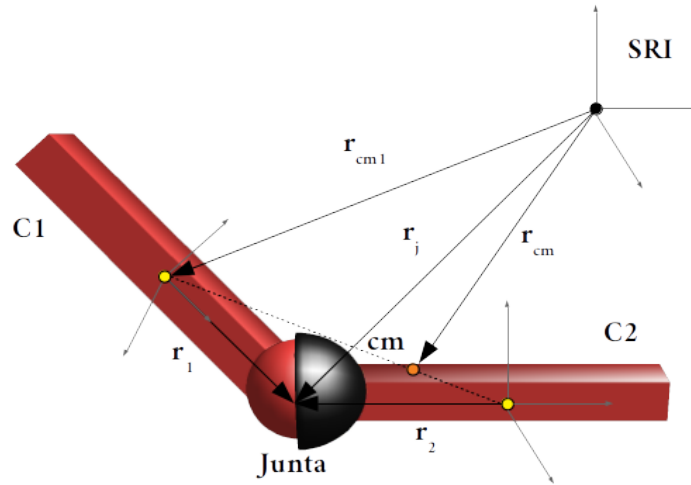


Figura 2.5: Esquema de dos cuerpos para la determinación de r_{cm1} , r_{cm2} y r_j .

posición de la junta. Puede observarse que se cumple para ambos cuerpos:

$$r_j = r_{cm1} + r_1 \quad (2.22)$$

$$r_j = r_{cm2} + r_2 \quad (2.23)$$

Si se multiplica la primer ecuación por m_1 y la segunda por m_2 y se las suma, se obtiene:

$$(m_1 + m_2)r_j = m_1r_{cm1} + m_2r_{cm2} + m_1r_1 + m_2r_2$$

$$Mr_j = Mr_{cm} + m_1r_1 + m_2r_2$$

$$r_j = r_{cm} + \left(\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M} \right) \quad (2.24)$$

donde se identificó la posición del centro de masa total del sistema: $m_1 r_{cm1} + m_2 r_{cm2} = M r_{cm}$, con $M = m_1 + m_2$. De la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales 2.9 y 2.10 se puede obtener la velocidad de cada cuerpo respecto a un *SRI*, con lo cual es necesario integrar la velocidad del centro de masa $v_{cm} = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/M$ para obtener r_{cm} y así resolver 2.24:

$$r_{cm} = r_{cm0} + v_{cm} t + (v_{cm}^2/2) t^2 \quad (2.25)$$

Los centros de masa individuales pueden calcularse a partir de 2.22 y 2.23.

Un caso particular de interés es el de fuerza externa neta nula sobre el sistema. En este caso, es conocido el hecho de que la velocidad del centro de masa es constante. Si se considera v_{cm} inicialmente nula, la posición del centro de masa está fija respecto a un sistema de referencia inercial, con lo que puede elegirse ese punto como origen del *SRI*. Así, $r_{cm} = 0$ y no es necesario integrar la velocidad del centro de masa dada por 2.25. La posición de la junta puede calcularse directamente con:

$$r_j = \left(\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M} \right) \quad (2.26)$$

Capítulo 3

Desarrollo e implementación computacional

“Un lenguaje nuevo, vasto y poderoso se está desarrollando para el uso futuro del análisis, en el cual se pueden introducir sus principios con el fin de que tengan una aplicación más veloz y precisa al servicio de la humanidad.”

— Ada Lovelace

Para la simulación de la dinámica rotacional, se desarrolló un *software* escrito en lenguaje *C*. El mismo utiliza una librería para la integración numérica llamada *LSODE*^[9]. El programa realizado se compone de un archivo principal, *main.c*, y dos archivos con sus encabezados: *FuncionesSat.c*, *FuncionesSat.h* y *utility.c*, *utility.h*. El primer par de archivos contiene funciones desarrolladas para la cinemática y dinámica de los satélites simulados, así como también funciones para el manejo de estructuras y archivos relacionados a los modelos físicos y matemáticos. El segundo par de archivos, contiene funciones ya implementadas en *INVAP*, junto con otras desarrolladas en este trabajo, para operaciones matemáticas o computacionales que se consideraron necesarias. Ejemplos de éstas son funciones para el cálculo de cuaterniones a partir de matrices de orientación, productos vectoriales, productos escalares, etc.

Mediante el programa realizado en *C* se obtiene un archivo de texto (*.txt*) con las variables del satélite en función del tiempo. Las gráficas y cálculos adicionales se realizan en un *script* escrito en *python*.

3.1. Representación de cuerpos

Para la representación de cada cuerpo rígido constituyente del satélite se definió un listado con un conjunto de variables cinemáticas, dinámicas, geométricas e inerciales,

como se muestra en el código a continuación:

```

// Conjunto de variables cinemáticas
double q1[4];      // Orientación en cuaternión
double q2[4];      // Orientación en cuaternión
double C1n[3][3];  // Orientación del SRI resp al SRC1
double C2n[3][3];  // Orientación del SRI resp al SRC2
double Cn1[3][3];  // Orientación del SRC1 resp al SRI
double Cn2[3][3];  // Orientación del SRC2 resp al SRI
double C12[3][3];  // Matriz de rotación
double C21[3][3];  // Transpuesta de C12
double rcm1[3];    // Posición del CM1 desde el SRI, exp en SRI
double rcm2[3];    // Posición del CM2 desde el SRI, exp en SRI

// Conjunto de variables dinámicas
double w1[3];      // Velocidad angular 1 (SRC1)
double w2[3];      // Velocidad angular 2 (SRC2)
double w1_si[3];   // Velocidad angular 1 (SRI)
double w2_si[3];   // Velocidad angular 2 (SRI)
double w21_j[3];   // Velocidad angular relativa (SRC1)
double v1[3];      // Velocidad lineal 1 (SRI)
double v2[3];      // Velocidad lineal 2 (SRI)
double w1_r[3][3]; // Matriz equiv al doble prod vect: Wx(WxA)=W_r.A
double w2_r[3][3]; // ""
double w1_t[3][3]; // Matriz equivalente al prod vectorial: WxA=W_t.A
double w2_t[3][3]; // ""
double Fj[3];      // Fuerza en la junta (SRI)
double Tj[3];      // Torque en la junta (SRC1)
double F1[3];      // Fuerza sobre el CG1 (SRI)
double F2[3];      // Fuerza sobre el CG2 (SRI)
double T1[3];      // Torque sobre el CG1 (SRI)
double T2[3];      // Torque sobre el CG2 (SRI)
double H1[3];      // Momento angular de spin I1.w1 (SRC1)
double H2[3];      // Momento angular de spin I2.w2 (SRC2)
double u[3];       // d/dt(AngEuler 2) (SRC2)
double u_dot[3];   // d2/dt2(AngEuler 2) (SRC2)
double Gamma[3][3]; // Matriz Gamma
double invGamma[3][3]; // Inversa de Gamma
double Gamma_dot[3][3]; // d/dt(Gamma)

```

```

// Conjunto de variables geométricas
double r1[3];           // Posición de junta desde el CM del cuerpo1 (SRC1)
double r2[3];           // Posición de junta desde el CM del cuerpo2 (SRC2)
double r1_t[3][3];      // Matriz equivalente al prod vectorial
double r2_t[3][3];      // Matriz equivalente al prod vectorial
double r1_tT[3][3];     // Transpuesta de r1_t
double r2_tT[3][3];     // Transpuesta de r2_t

// Conjunto de variables inerciales de cada cuerpo o apéndice del satélite
double m1;              // Masa del cuerpo 1
double m2;              // Masa del cuerpo 2
double I1[3][3];        // Tensor de inercia respecto al CM1 del cuerpo 1
double I2[3][3];        // Tensor de inercia respecto al CM2 del cuerpo 2
double invI1[3][3];     // Inversa del tensor de inercia 1
double invI2[3][3];     // Inversa del tensor de inercia 2

```

Es posible, y se deja como propuesta para futuros trabajos, la extensión de este programa computacional para la implementación de n cuerpos vinculados entre sí, mediante el uso de estructuras (*structs*), representando de forma genérica cada cuerpo. Así, cada uno de ellos puede englobar las variables definidas anteriormente y es posible inicializar cada estructura según el tipo de satélite estudiado y el número de apéndices:

```

typedef struct nodo_j{
//Definición de variables cinemáticas del cuerpo j
//Definición de variables dinámicas del cuerpo j
//Definición de variables geométricas del cuerpo j
//Definición de variables inerciales del cuerpo j

//Variable para vincular nodos entre sí (creación de árbol)
struct nodo_j *apendice[];
}cuerpo_j;

```

donde se usó *typedef* para renombrar la estructura *nodo_j* como un nuevo *tipo* definido por el usuario, para inicializar variables como *cuerpo_j VariableA* en lugar de *struct nodo_j VariableA*. Esto puede usarse o no, a gusto del usuario. Para la vinculación de los cuerpos entre sí, una de las variables de la estructura definida sería un puntero al primer elemento de un *array* de variables *tipo cuerpo_j*, siendo ésta la base de una implementación típica de estructura de *árbol* en *C*, con el cuerpo central del satélite como nodo raíz:

```

struct nodo_j *apendice[];

```

El esquema anterior, junto con un apropiado manejo de inicialización y destrucción de cada cuerpo, permitiría la representación de satélites compuestos por varios apéndices móviles, como se muestra en la Figura 3.1. Para el presente proyecto se trabajó con el

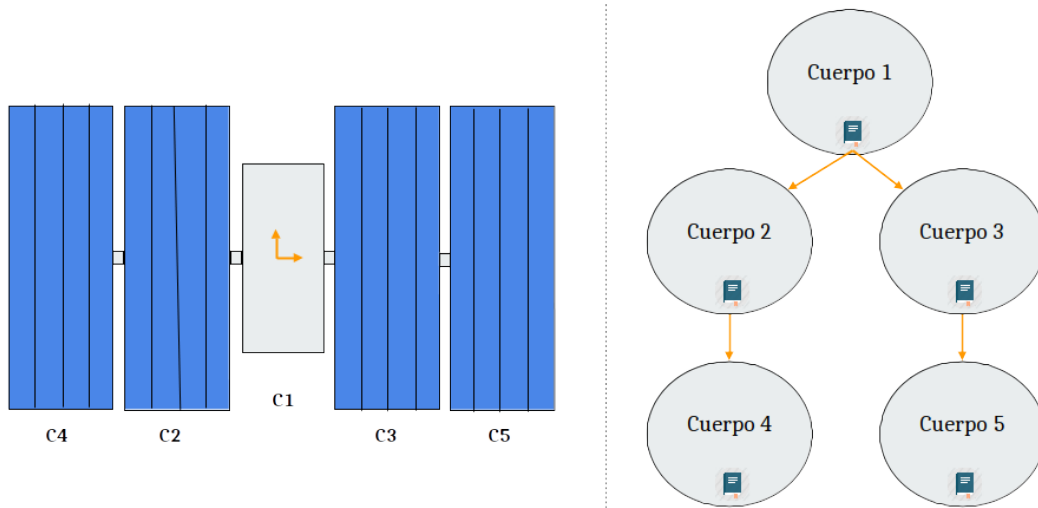


Figura 3.1: Esquema de la representación computacional de un satélite genérico mediante el uso de estructuras en C . Es posible vincular los cuerpos entre sí implementando una estructura tipo árbol, usando al cuerpo central del satélite como nodo raíz.

listado de variables presentado anteriormente, dada su practicidad para simulaciones de dos cuerpos, aunque se implementó este esquema con estructuras y se simularon casos de validación de dos cuerpos vinculados con una junta esférica.

3.2. Esquema general

En la Figura 3.2 se presenta un diagrama de bloques del *software* desarrollado. El código en C contiene un archivo principal, *main.c*, dentro del que se inicializa cada variable de los cuerpos de forma manual (número de apéndices, geometría de cada uno, propiedades inerciales y condiciones iniciales). Desde el mismo se llama a diferentes funciones, definidas dentro de los archivos *FuncionesSat* y *utility*, donde se inicializan las variables iniciales de cada cuerpo del satélite, se calculan momentos angulares, orientaciones, entre otras. La secuencia del código continúa con un lazo de iteraciones temporales para la resolución de la dinámica y cinemática rotacional. Esto se hace llamando a la función integradora *lsode* de la librería *LSODE* en cada paso temporal. A la función *lsode* se le da como argumento la función *fx*, escrita por el usuario y que contiene las ecuaciones diferenciales del sistema que se esté resolviendo, en la forma $\dot{y} = f(y, t)$, que son las ecuaciones 2.9 y 2.10 para el modelo de junta esférica, y las ecuaciones 2.18 y 2.10 para el modelo de junta de revolución, con los vectores de estado (\mathbf{y}) para cada modelo de junta, ordenados como:

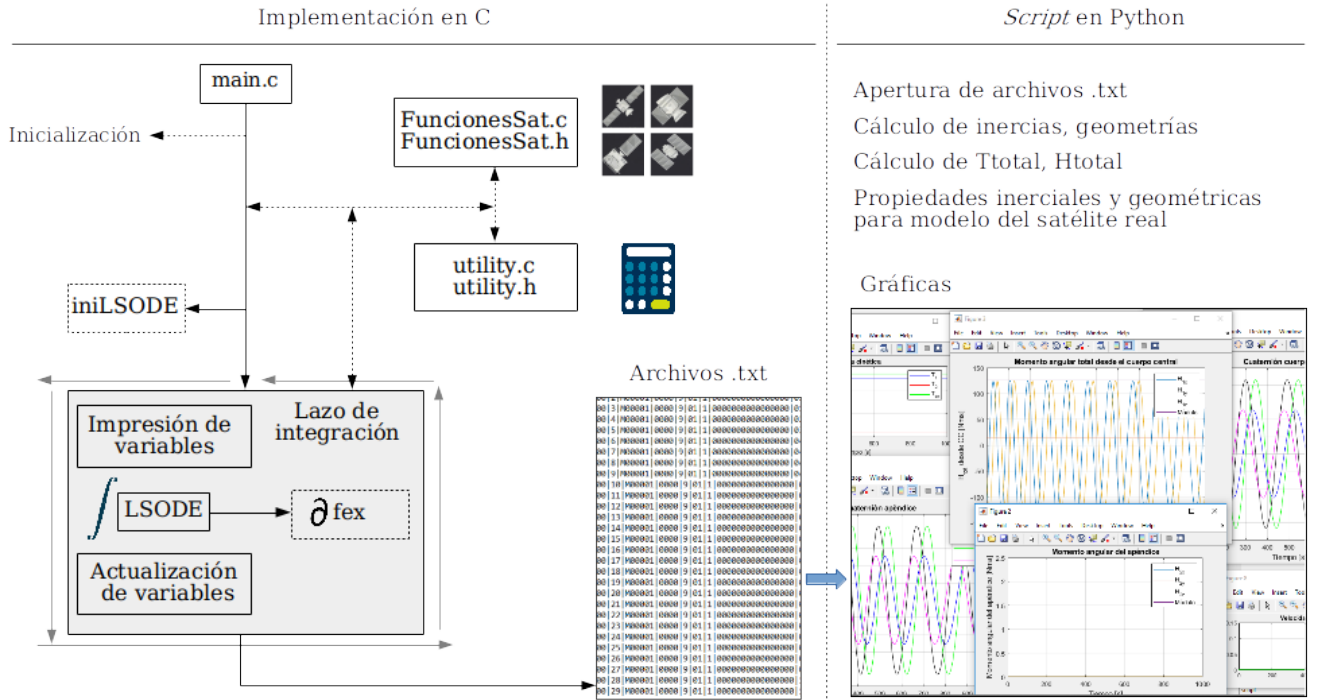


Figura 3.2: Esquema general del software implementado en lenguaje *C*, junto con el conjunto de *scripts* en lenguaje *python*.

$$\mathbf{y}_{(Junta\ Esf)} := (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}_{(Junta\ Rev)} := (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{w}_1, u_y, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T, \quad (3.2)$$

El vector de estado correspondiente al modelo de junta esférica ($\mathbf{y}_{(Junta\ Esf)}$) tiene 20 componentes. Las primeras ocho correspondientes a los cuaterniones de los cuerpos 1 y 2, y las restantes correspondientes a cada componente de las velocidades lineales y angulares. El vector de estados del modelo de junta de revolución ($\mathbf{y}_{(Junta\ Rev)}$) tiene 18 componentes. Las primeras ocho correspondientes a los cuaterniones de los cuerpos 1 y 2, tres que corresponden a las 3 componentes de la velocidad angular del cuerpo 1, una única que corresponde al grado de libertad de rotación del cuerpo 2, dado por u_y , según se describe en la sección 2.2.2, y seis correspondientes a cada componente de las velocidades lineales de los centros de masa de cada cuerpo.

Una vez terminado el proceso de integración, se actualizan todas las variables y se continúa con el lazo. Se recuerda que la resolución de la dinámica debe hacerse simultáneamente con la resolución de la cinemática, con lo cual en cada paso temporal se están enviando al integrador *LSODE* las condiciones iniciales que resultaron solución del paso anterior. Dentro de este lazo, se llama a la función definida por el usuario que calcula el torque en la junta. Dado que en cada instante se ejecuta la función *lsode*, con una variable para el tiempo actual (t), puede definirse cualquier perfil de torque en la junta como función de ésta ($T_j = f(t)$). En el presente trabajo se implementaron

perfiles tipo escalón y rampa en función del tiempo, con la posibilidad de modificar el valor del escalón, la pendiente de la rampa, la duración de actuación del torque en ambos casos, y la variable que defina dicha duración: la energía entregada al sistema, calculada como $\int_{t_1}^{t_2} (T_j^{(i)} \cdot w_i) dt$ sobre el cuerpo i , el ángulo de rotación (ϕ) producido, o un valor umbral de velocidad angular de alguno de los cuerpos. En las mediciones de despliegues reales, suele ser un dato la velocidad relativa w_{21} entre los cuerpos, aproximadamente constante, con lo que se puede definir que T_j actúe hasta que se alcance un valor determinado de la velocidad angular mencionada.

Al finalizarse el lazo de integración, se obtiene un archivo de extensión *.txt* en el que se encuentran todas las variables del satélite en función del tiempo. El mismo puede ser abierto y procesado desde cualquier otro programa. En este caso, se desarrolló una serie de *scripts* en lenguaje *python* en el entorno interactivo *jupyter – notebook*, en el que se abren los archivos *.txt*, se procesan las variables, se realizan cálculos (energía cinética, momento angular total del satélite, posiciones del centro de masa y de la junta entre cuerpos, etc) y se realizan las gráficas finales de la simulación.

Además, se desarrolló una serie de *scripts* en *python* que determinan las propiedades inerciales y geométricas de las diferentes configuraciones del satélite real estudiado para simular el despliegue de una de sus antenas.

Capítulo 4

Simulaciones de validación

“El arte se relaciona con el ser humano tal como éste se relaciona con la naturaleza”

— Richard Wagner

En este capítulo se resumen las diferentes simulaciones obtenidas, para los casos de dos cuerpos rígidos vinculados entre sí con una junta esférica, de las cuales una se replica con las mismas condiciones iniciales usando el modelo de junta de revolución. Previo a la realización de éstas, se estudió una simulación correspondiente a un único cuerpo rígido, cuyo código ya había sido desarrollado en *INVAP* por el grupo de *Guiado y Control*, y que se tomó como referencia para la implementación del resto de simulaciones. El código de las simulaciones de dos cuerpos rígidos es parte del trabajo desarrollado a lo largo de esta tesis. En cada caso se detallan las condiciones iniciales, el comportamiento físico que se espera y la simulación obtenida. Estas simulaciones se utilizaron para validar el *software* desarrollado.

A continuación, se presentan las distintas simulaciones realizadas para diferentes geometrías. Se verifican en todos los casos las conservaciones comentadas en la sección [1.2.5](#).

4.1. Cilindros - junta esférica

La primera simulación que se desarrolló fue la de dos cilindros de igual geometría, masas e inercias, vinculados mediante una junta esférica en sus extremos. Con este mismo modelo físico, se realizaron simulaciones variando sus geometrías, masas, y agregando inercias cruzadas en los tensores de inercia calculados respecto al centro de masa de cada cuerpo.

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para diferentes condiciones iniciales, detalladas en cada caso.

4.1.1. Rotación a lo largo del eje y

El primer caso simulado fue el de dos cilindros con la misma orientación inicial, y velocidades angulares iniciales iguales y opuestas a lo largo de su eje común y . Se realizó la misma simulación para los cilindros con distribución homogénea de masa (sin inercias cruzadas en el tensor de inercia calculado respecto a su centro de masa) y con distribución no homogénea de masa (agregando inercias cruzadas).

Sin inercias cruzadas

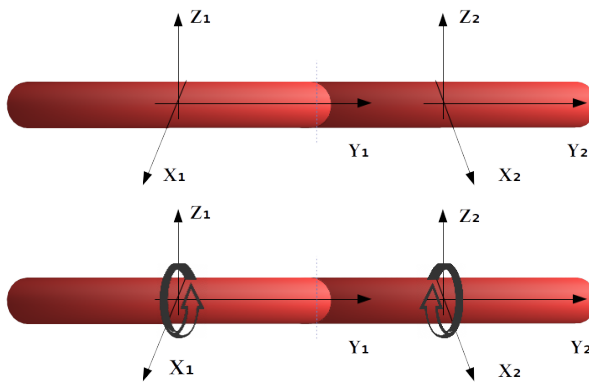


Figura 4.1: Modelo físico.

Condición Inicial	Valor
$q_1 = q_2 = q_{12}$	$[0, 0, 0, 1]^T$
$w_1 = -w_2$	$[0, \pm 2, 0]^T$ [$^\circ/s$]
$v_1 = v_2$	$[0, 0, 0]^T$ [m/s]
$F_1 = F_2$	$[0, 0, 0]^T$ [N]
$T_1 = T_2 = T_j$	$[0, 0, 0]^T$ [Nm]
Inercias cruzadas	nulas

Tabla 4.1: Condiciones iniciales.

Al haberse elegido los ejes de los SRC coincidentes con los ejes de simetría, éstos son los ejes principales en cada cilindro. Es decir, el tensor de inercia de cada cuerpo respecto a su centro de masa es diagonal y contiene a los momentos de inercia principales en su diagonal. Esto implica que el vector w_i del cuerpo i será paralelo al vector H_i del mismo, y $w_i \times H_i = 0$. Al no haber torques externos ni torque en la junta, las velocidades angulares iniciales solo podrían variar si hubiera una fuerza en la junta F_j que produzca un torque debido a la distancia entre la junta y el centro de masa del cuerpo i : $r_i \times F_j$ (ver ecuación para \dot{w}_1 2.9). Sin embargo, las velocidades iniciales de los centros de masa v_1 y v_2 son nulas, y no hay fuerzas externas, con lo que F_j debería ser nula en todo momento. Así, el sistema debería seguir con las mismas condiciones iniciales a lo largo del tiempo. Esto se observa en las figuras 4.2 a 4.5.

Puede verse que los ángulos varían de forma lineal, lo que se corresponde con una velocidad angular constante. Además, se observa que invierten el valor de su pendiente al alcanzar los 180° , ya que la función $arccos$ usada para el cálculo de los mismos (ver sección 1.3.1) tiene como imagen el conjunto $[0; \pi]$, o $[0; 180]$ en $[^\circ]$. Puede notarse que los ángulos relativos alcanzan el valor de 180° a la mitad del tiempo que lo hacen los ángulos entre los ejes de los cuerpos y los del SRI , lo cual se corresponde con lo esperado.

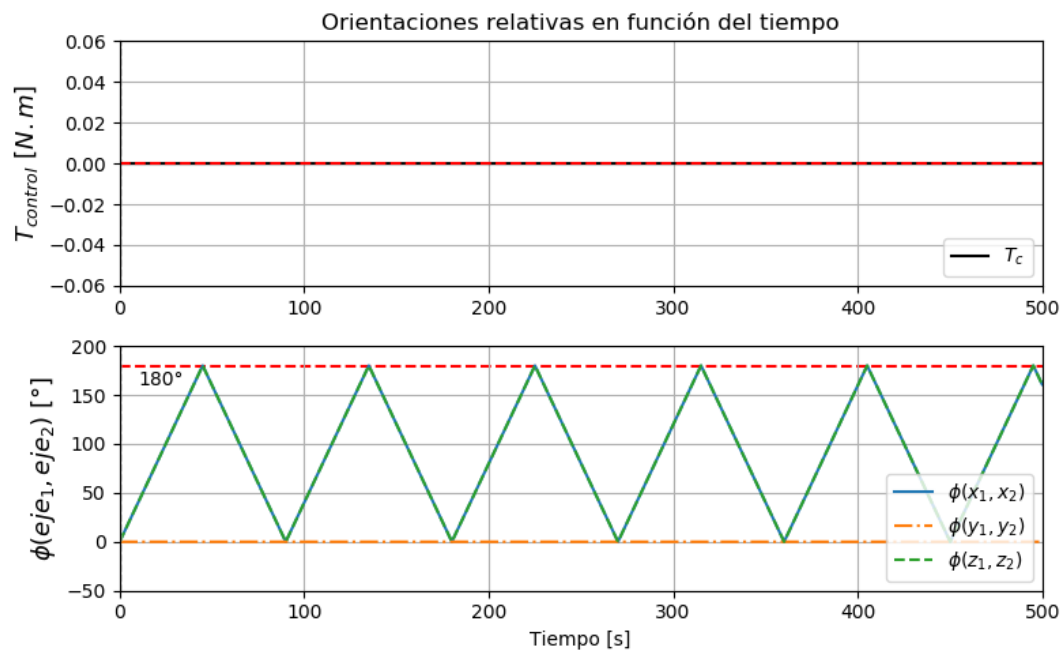


Figura 4.2: Ángulo entre los ejes del cuerpo 1 y cuerpo 2.

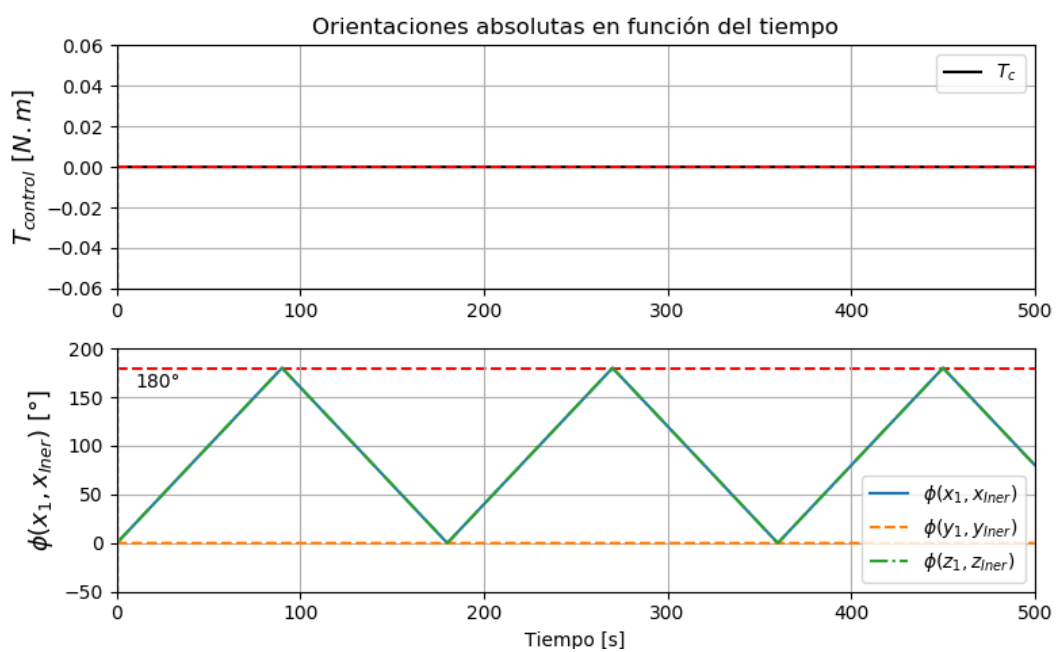


Figura 4.3: Ángulo entre los ejes de los cuerpos y del SRI.

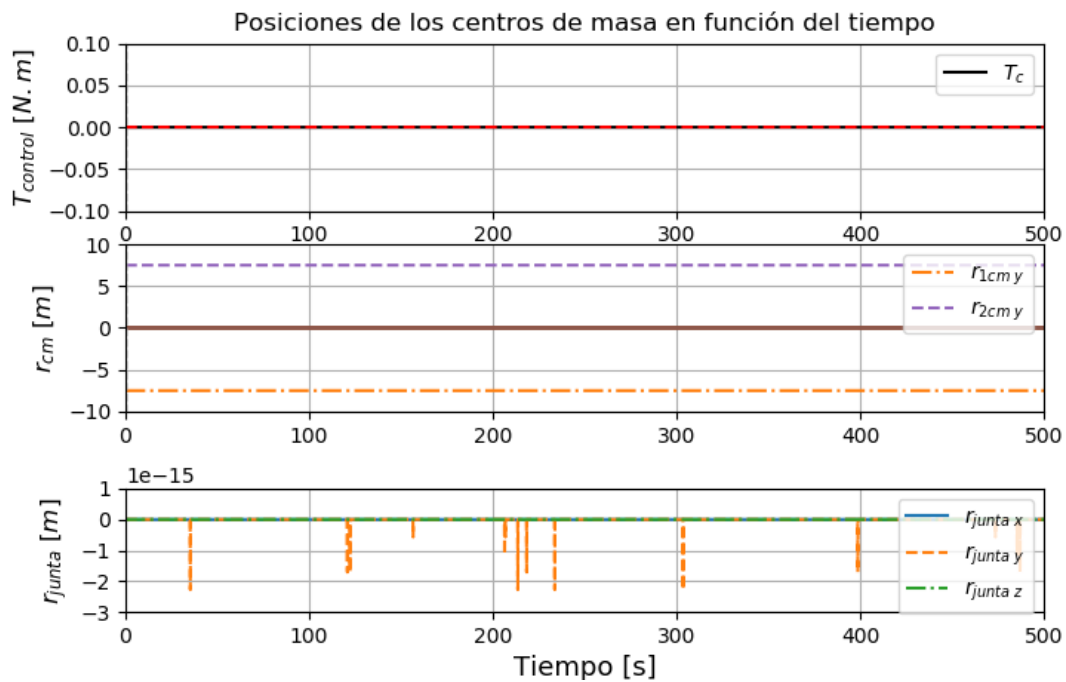


Figura 4.4: Posiciones de los centros de masa y la junta respecto, expresadas en el *SRI*.

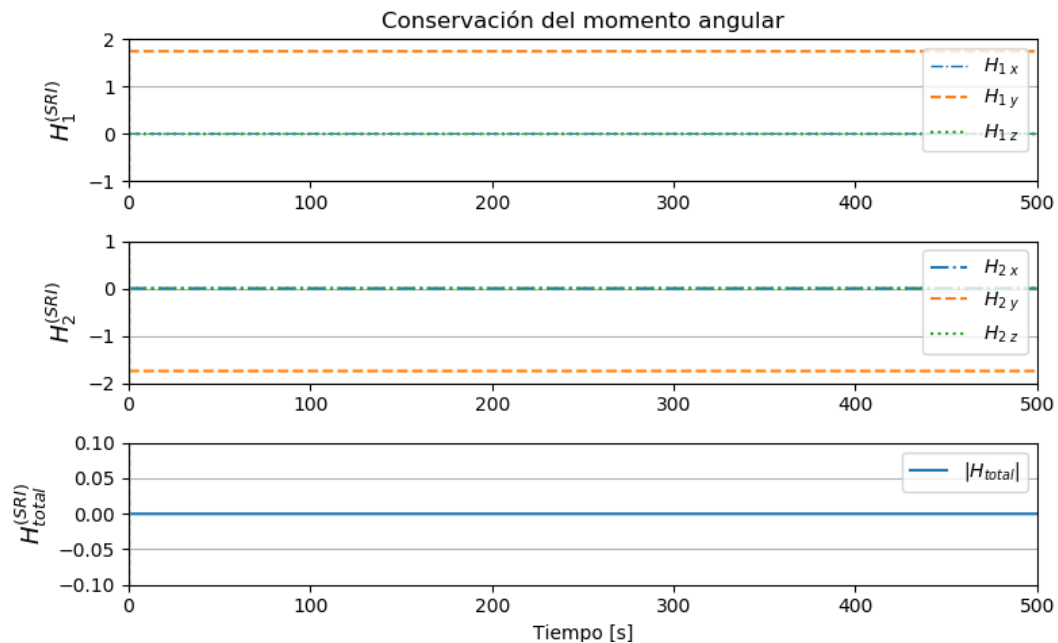


Figura 4.5: Momento angular total del cuerpo 1 y cuerpo 2 expresado en el *SRI*, y momento angular total del sistema en el *SRI*.

En la figura 4.4 se observa que las posiciones de la junta y de los centros de masa se mantienen en su valor inicial, según lo esperado. Por otro lado, el momento angular total se mantiene con valor nulo, como se ve en la tercer gráfica de la figura 4.5, en la que se sumaron las componentes del momento angular de cada cuerpo, expresadas en el *SRI*.

Con inercias cruzadas

Se muestra a continuación una simulación del mismo caso anterior, agregando inercias cruzadas I_{xy} en los tensores de inercia de cada cuerpo, con un valor del 2% de la máxima inercia principal. En la figura 4.6 se muestran las orientaciones relativas entre los cuerpos, y en la figura 4.7 los momentos angulares totales de cada cuerpo y el momento angular total, todos expresados en el *SRI*.

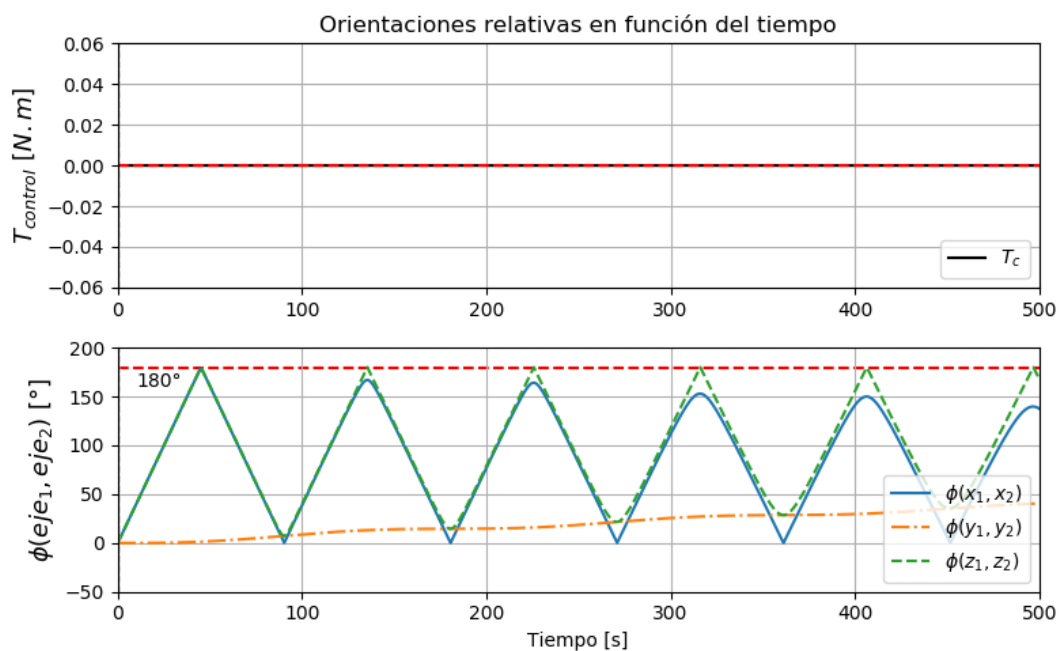


Figura 4.6: Orientación relativa entre los cuerpos, para el caso de cilindros con inercias cruzadas en los tensores de inercia de cada uno.

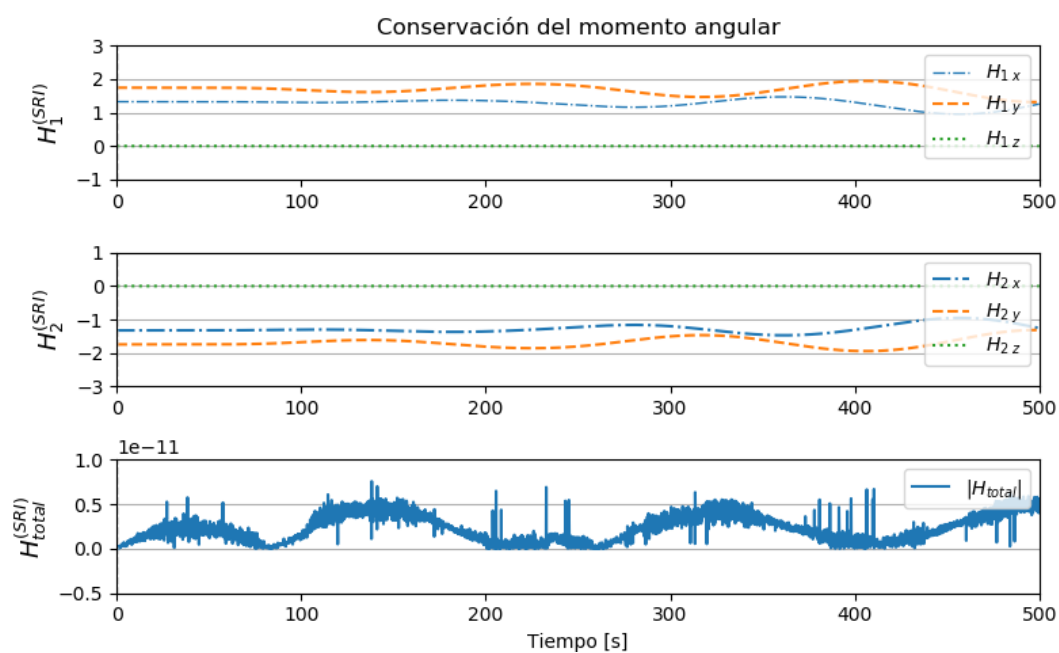


Figura 4.7: Momento angular total del cuerpo 1 y cuerpo 2 expresado en el *SRI*, y momento angular total del sistema en el *SRI*.

Puede observarse en la primer imagen que el efecto de las inercias cruzadas hace que la orientación relativa no sea la misma en todo momento, como consecuencia de la contribución de los términos $w \times H \neq 0$. Lo mismo se ve en la segunda figura, en la que aparece una componente adicional de momento angular sobre cada cuerpo en la dirección x oscilante. Esta variación se hace cada vez menor, a medida que las inercias cruzadas tienden a cero, obteniéndose en el límite el caso simulado anteriormente.

4.1.2. Rotación a lo largo del eje x y eje z

Se presentan las simulaciones realizadas para el caso de rotaciones a lo largo del eje x y z . Dada la simetría del problema, los resultados de rotar en cualquiera de los 2 ejes mencionados son los mismos. Se muestran los resultados para T_j nulo y $T_j = f(t)$.

Sin torque en la junta

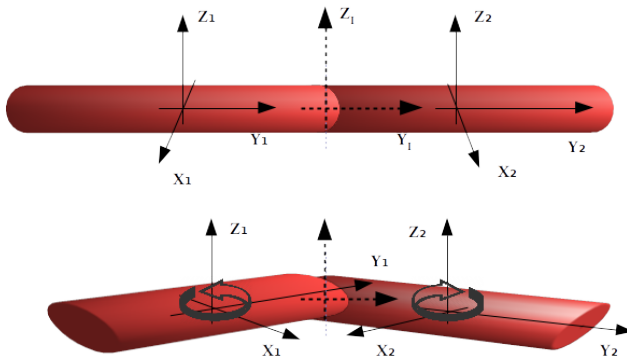


Figura 4.8: Dos cilindros con velocidades angulares iniciales iguales y opuestas en el eje z .

Condición Inicial	Valor
$q_1 = q_2 = q_{12}$	$[0, 0, 0, 1]^T$
$w_1 = -w_2$	$[0, 0, \pm 2]^T$
$v_1 = v_2$	$[0, 0, 0]^T$ [m/s]
$F_1 = F_2$	$[0, 0, 0]^T$ [N]
$T_1 = T_2 = T_j$	$[0, 0, 0]^T$ [Nm]
Inercias cruzadas	nulas

Tabla 4.2: Condiciones iniciales.

Se espera que tanto el momento lineal total como el momento angular total expresado en el SRI se conserve. La posición del SRI se elige coincidente con el CM total del satélite en el momento inicial, que dada la simetría, coincide con la posición de la junta a $t = 0$. En cuanto al movimiento, se espera que este punto se mantenga en su posición inicial, dado que $v_{cm}|_{t=0} = 0$. Para que esto sea posible, los centros de masa de cada cuerpo deberían moverse siempre distancias iguales y en sentido contrario. Como existe la restricción traslacional en la junta, ésta tendería a moverse en la dirección $-x_I$ del SRI en la figura 4.8, con lo cual aparecería una fuerza en la junta tal que los centros de masa individuales se acercan hacia el centro, moviéndose a lo largo del eje y_I del SRI , que contiene al CM total. De la ecuación 2.11 se observa que:

$$F_j|_{t=0} = \alpha^{-1}(C_{2I}\bar{w}_2\tilde{r}_2 - C_{1I}\bar{w}_1\tilde{r}_1 + \cancel{F_{m_{ext}}}^0 + C_{r1}I_1^{-1}\cancel{T_{t1}}^0 - C_{r2}I_2^{-1}\cancel{T_{t2}}^0) \quad (4.1)$$

Puede verificarse que para $t = 0$ la matriz α es diagonal, $C_{2I} = C_{1I} = \mathbf{1}$, y el término $\bar{w}_2\tilde{r}_2 - \bar{w}_1\tilde{r}_1 = w_2 \times (w_2 \times r_2) - w_1 \times (w_1 \times r_1)$ apunta en el sentido $+y$, si se sigue la

regla de la mano derecha. Con lo cual el centro de masa del cuerpo 1 tendrá a F_j como fuerza externa, y el del cuerpo 2 a $-F_j$ como tal. Esto significa que, efectivamente, los centros de masa se moverán hacia el centro a lo largo del eje y del *SRI*. Como no hay modelo de colisiones, los cilindros no interaccionarán entre sí al compartir la misma posición y seguirán su dinámica. Se espera que el movimiento resultante sea con los centros de masa moviéndose cíclicamente en línea recta a lo largo del eje y , al principio acelerándose hacia el centro y frenándose al llegar a los puntos opuestos a su posición inicial (dada la simetría). Por otro lado, la junta debería moverse en línea recta a lo largo del eje x_I del *SRI*.

Puede verse en la figura 4.9 que el comportamiento es el esperado. Los centros de masa se mueven en dirección opuesta a lo largo del eje y del sistema de referencia inercial, entre sus posiciones extremas: la longitud de cada cilindro es de $15m$, con lo que los centros de masa deberían moverse entre $-7.5m$ y $7.5m$. La junta, por otro lado tiene un movimiento cíclico a lo largo del eje x del *SRI*.

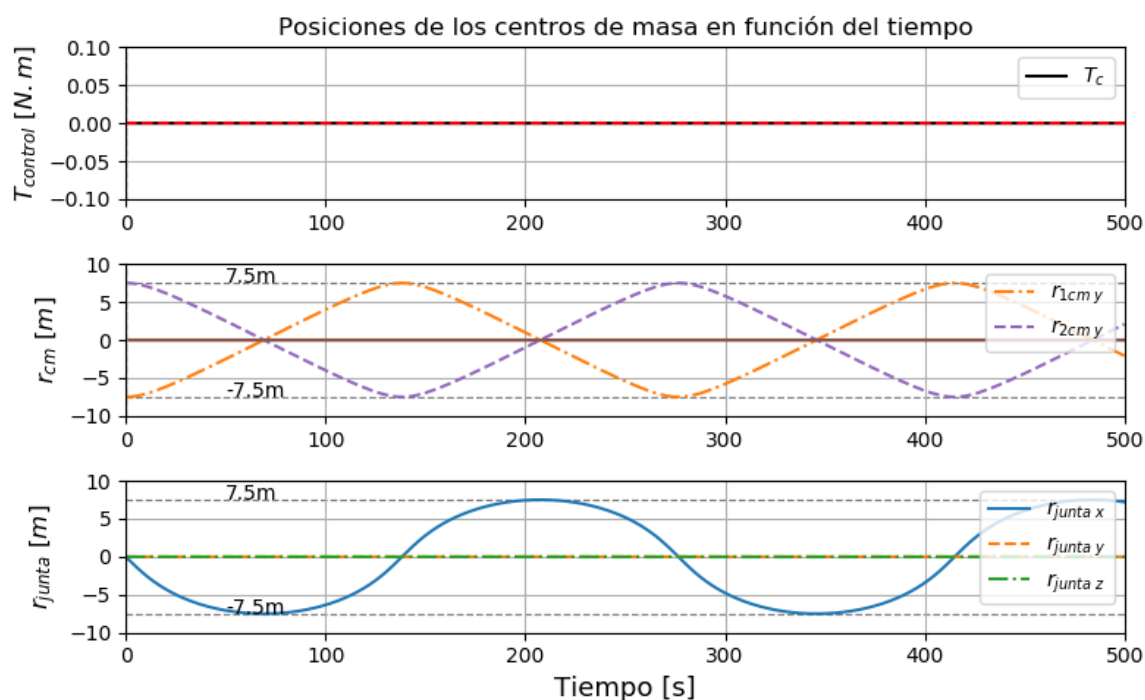


Figura 4.9: Posiciones de los centros de masa y la junta respecto, expresadas en el *SRI*.

En la figura 4.10 se muestran los ángulos entre los ejes del cuerpo 1 los ejes del cuerpo 2. Puede observarse que el ángulo entre ejes z de ambos cuerpos es nulo, como se espera.

Resulta interesante observarse en la figura 4.11 que la energía cinética traslacional es mínima e igual a cero cuando la energía rotacional es máxima, y viceversa. La energía traslacional es cero cuando los centros de masa están en sus posiciones extremas, cuando los cuerpos están en posición horizontal y el ángulo relativo entre ellos es $0 [^\circ]$, dado

que v_{cm} de cada cuerpo es nula en esa posición.

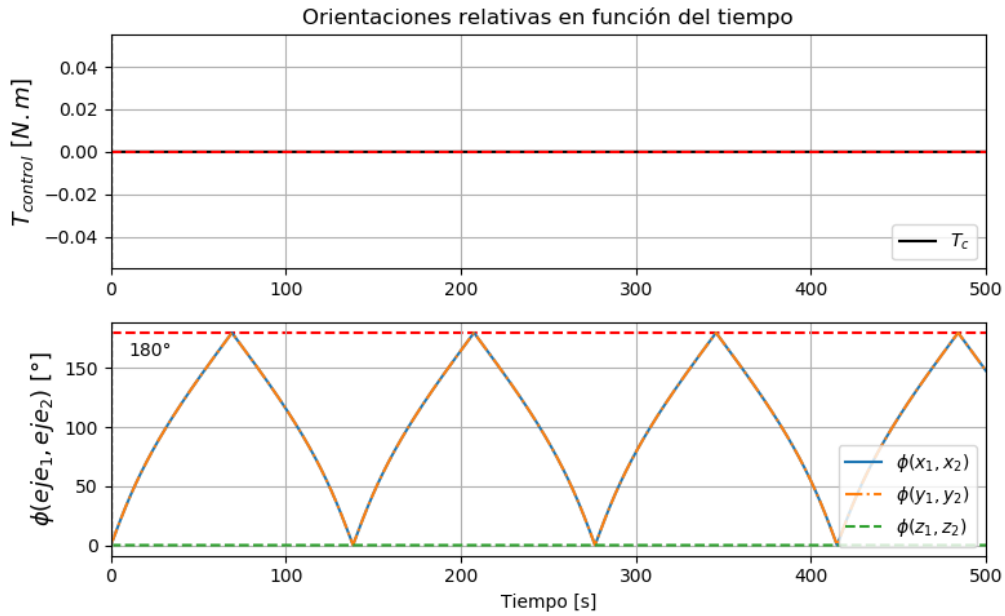


Figura 4.10: Ángulo entre los ejes del cuerpo 1 y cuerpo 2.

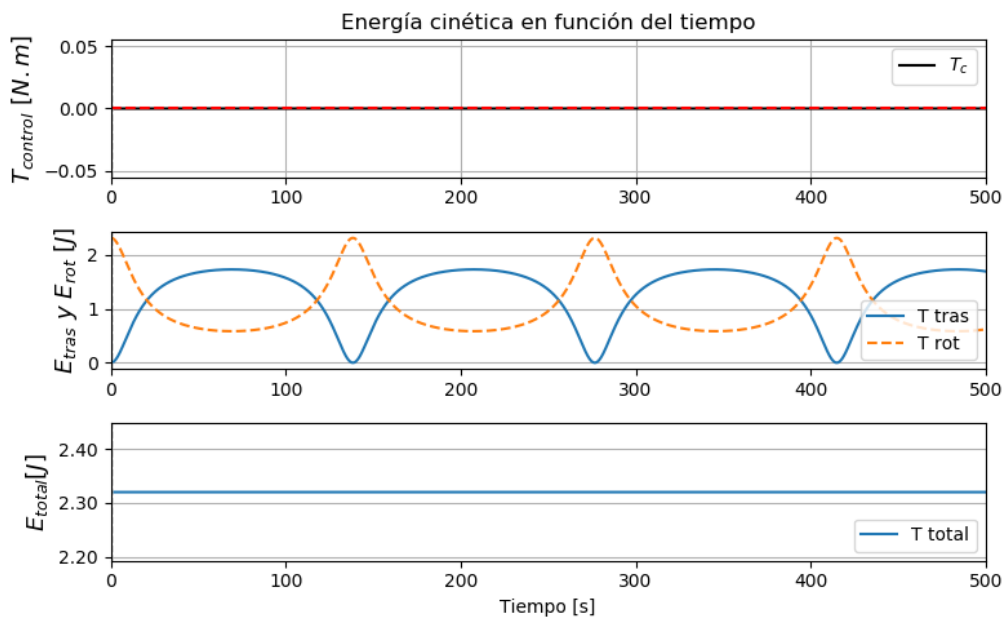


Figura 4.11: Conservación de la energía ante ausencia de acciones externas. Se muestra la energía traslacional total, la rotacional total, y la energía total del sistema.

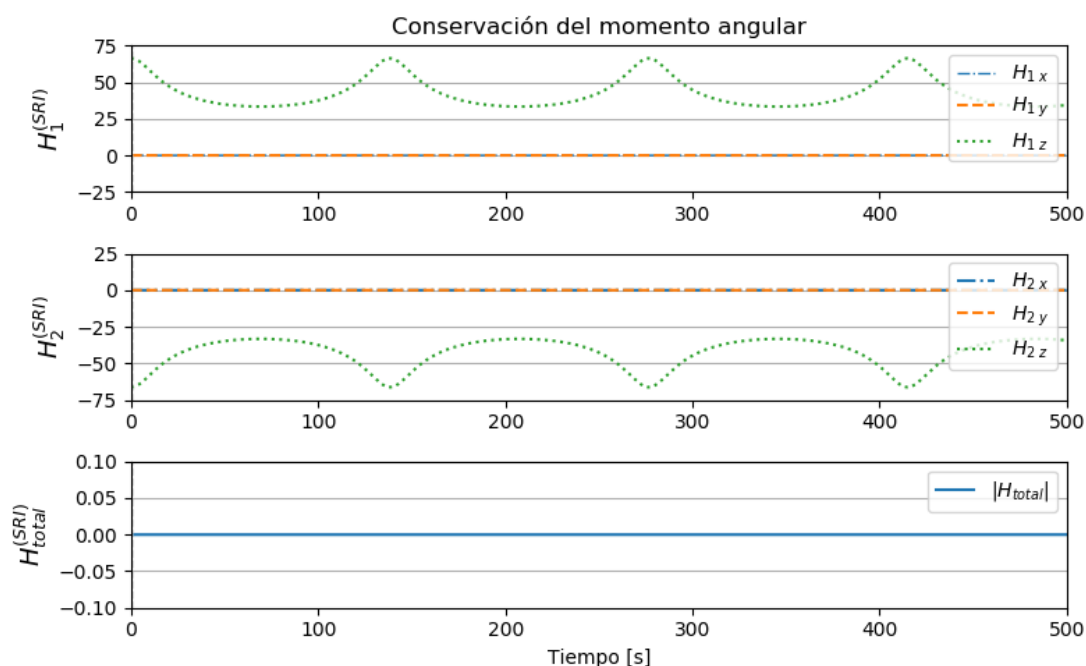


Figura 4.12: Momento angular total del cuerpo 1 y cuerpo 2 expresado en el *SRI*, y momento angular total del sistema en el *SRI*.

Con torque en la junta

Se simuló un caso similar al anterior, aunque inicialmente quieto y con un torque en la junta a lo largo del eje x . Se espera obtener un comportamiento análogo al del caso anterior en los ángulos relativos al dejar de actuar T_j , y luego volver al estado inicial si se aplica un torque opuesto que restaure la energía inicial del sistema. Las condiciones iniciales se muestran a continuación:

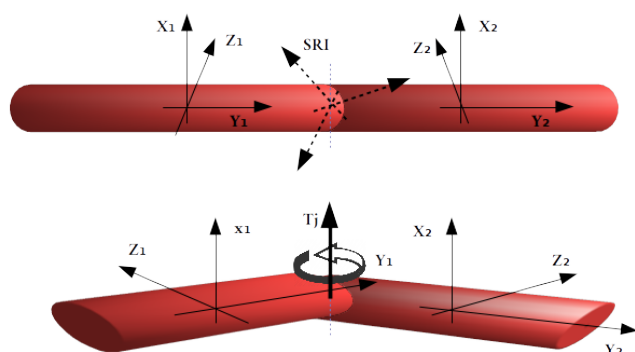


Figura 4.13: Dos cilindros con velocidades angulares iniciales nulas y torque en el eje x .

Condición Inicial	Valor
q_1	arbitraria
q_{12}	$[0, 0, 0, 1]$
$w_1 = w_2$	$[0, 0, 0]$
$v_1 = v_2$	$[0, 0, 0]^T$ [m/s]
$F_1 = F_2$	$[0, 0, 0]^T$ [N]
$T_1 = T_2$	$[0, 0, 0]^T$ [Nm]
T_j	$[f(t), 0, 0]$
Inercias cruzadas	nulas

Tabla 4.3: Condiciones iniciales.

En este caso la orientación absoluta de los dos cuerpos inicialmente es diferente a la del *SRI*, con lo que los vectores r_{cm1} , r_{cm2} y r_j tendrán componentes en los 3 ejes del *SRI*, como se ve en la figura 4.14.

Por otro lado, puede verse en las figuras 4.15 y 4.16 que el comportamiento del

sistema cuando el torque deja de actuar es análogo al observado en el caso anterior, en el que los cilindros tenían velocidades angulares iguales y opuestas.

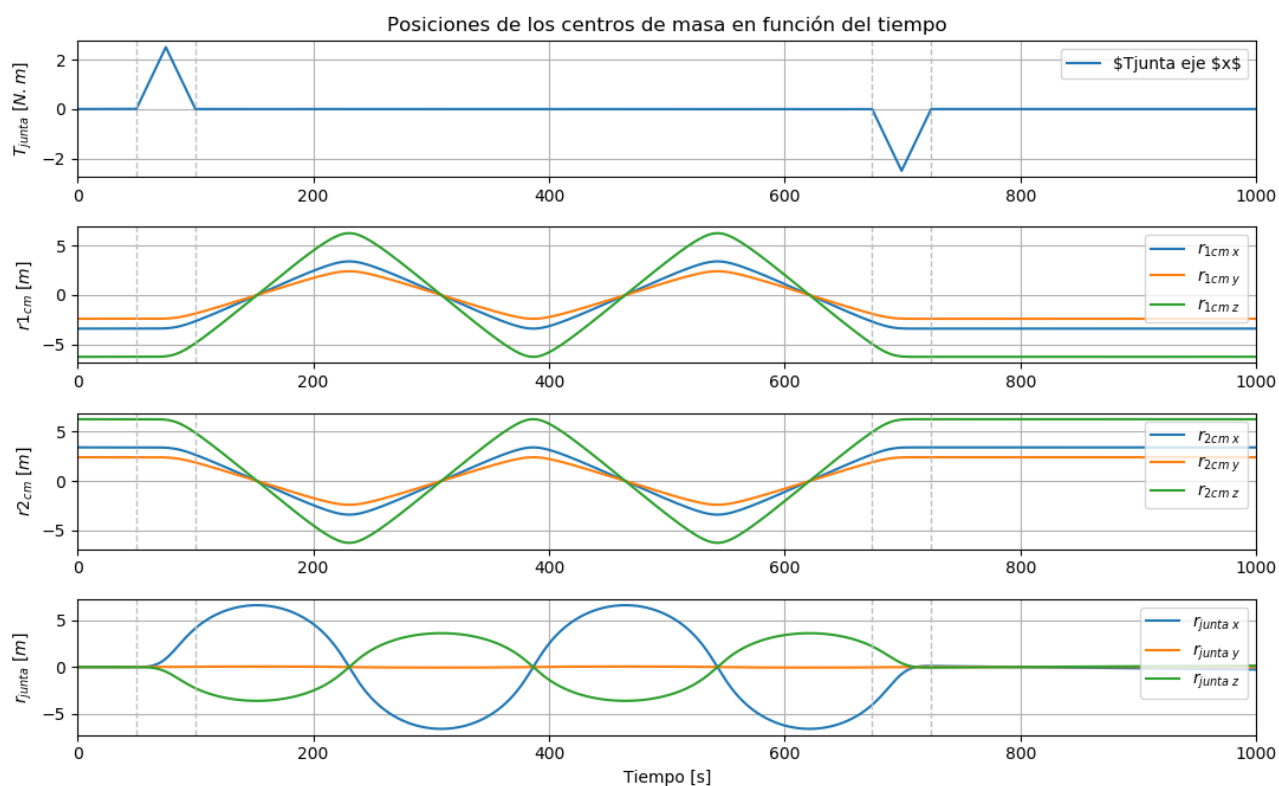


Figura 4.14: Posiciones de los centros de masa y la junta respecto, expresadas en el *SRI*.

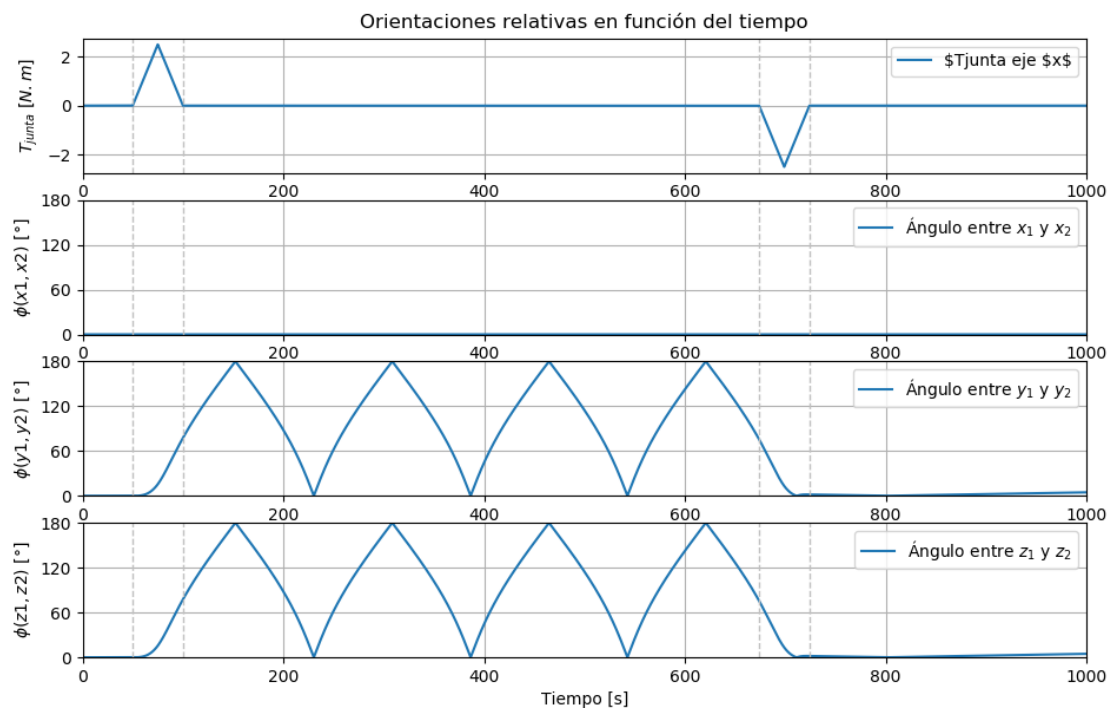


Figura 4.15: Ángulo entre los ejes del cuerpo 1 y cuerpo 2.

En la última gráfica de la Figura 4.16 se observa que al colocar un torque igual y

contrario en la junta, el sistema vuelve a su estado inicial. Si se piensa que un motor está efectuando dicho torque, para que esto sea posible la energía entregada al sistema durante el principio debe ser la misma que la quitada al final. Esto ocurre cuando la suma de energías sobre cada cuerpo $\int_{t_1}^{t_2} (T_j^{(i)} \cdot w_i) dt$ es la misma al principio y al final, con signo contrario. Si bien esto es lo que se observa en esta gráfica, el torque se modeló como una rampa con igual duración al principio y al final, y esto no asegura que la integral tome los mismos valores en todo instante, ya que las velocidades angulares podrían variar, como es el caso. Lo que se hizo para asegurar entregar y quitar la misma energía, fue elegir el instante en que la energía cinética traslacional era cero para la actuación del torque, en el momento en que el sistema se encontraba en el mismo estado que al principio. Puede verse que eligiendo otros instantes, y aplicando la misma rampa, al sistema le queda una energía cinética residual, cuyo valor depende del instante en el que T_j actúa.

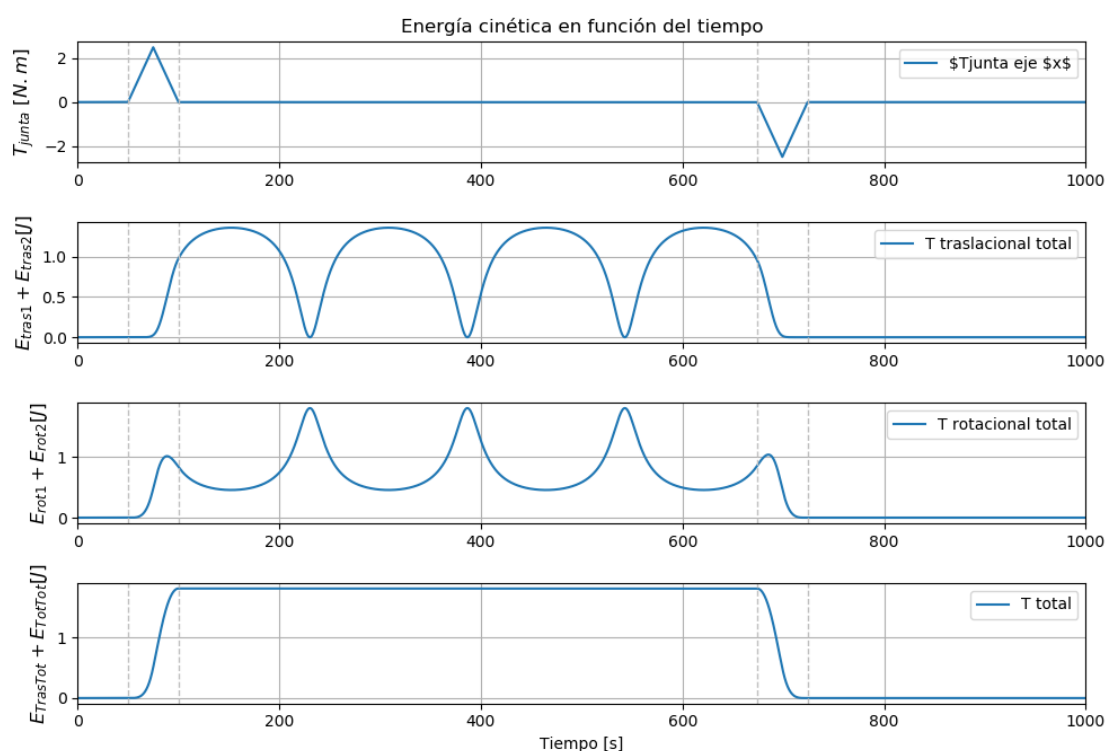


Figura 4.16: Conservación de la energía cuando $T_j = 0$. Se muestra la energía traslacional total, la rotacional total, y la energía total del sistema.

La energía residual del sistema resulta máxima cuando se aplica el torque en el momento en que la energía traslacional es máxima, como en la figura 4.17, mientras que va tendiendo a cero a medida que los cilindros vuelven a su estado inicial, con los centros de masa de cada uno frenándose, como en la figura 4.18. Este resultado será fundamental a la hora de simular despliegues si se desea llevar el sistema al mismo estado energético inicial.

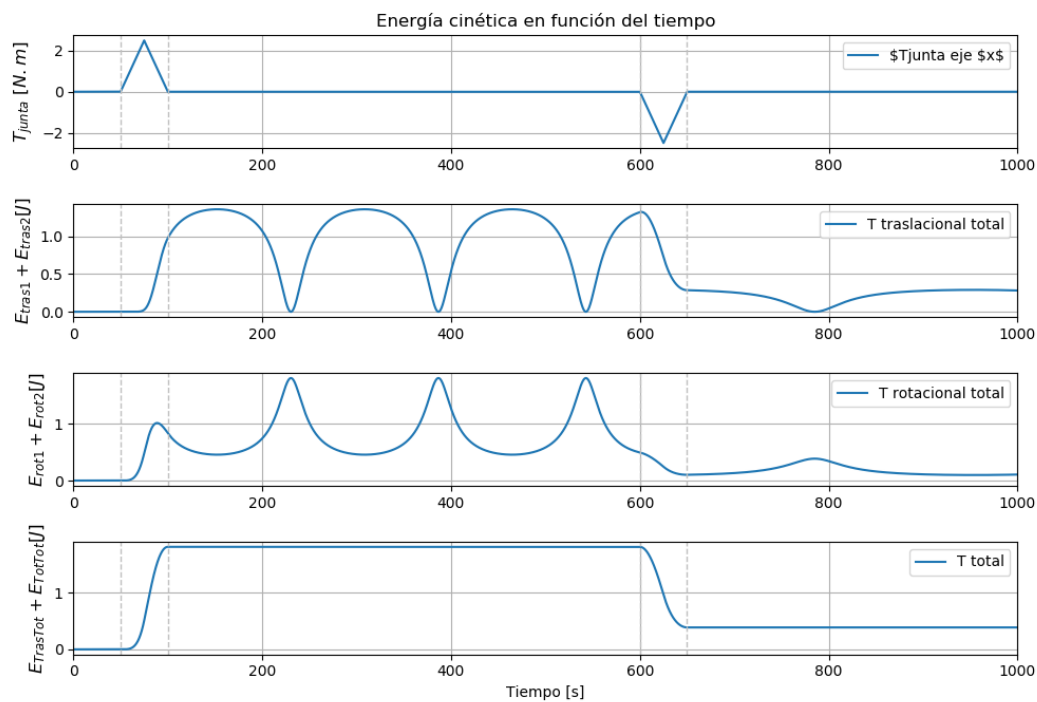


Figura 4.17: Torque de frenado $T_j = f(t)$ en instante en que la energía traslacional es máxima. La energía residual en el sistema es máxima.

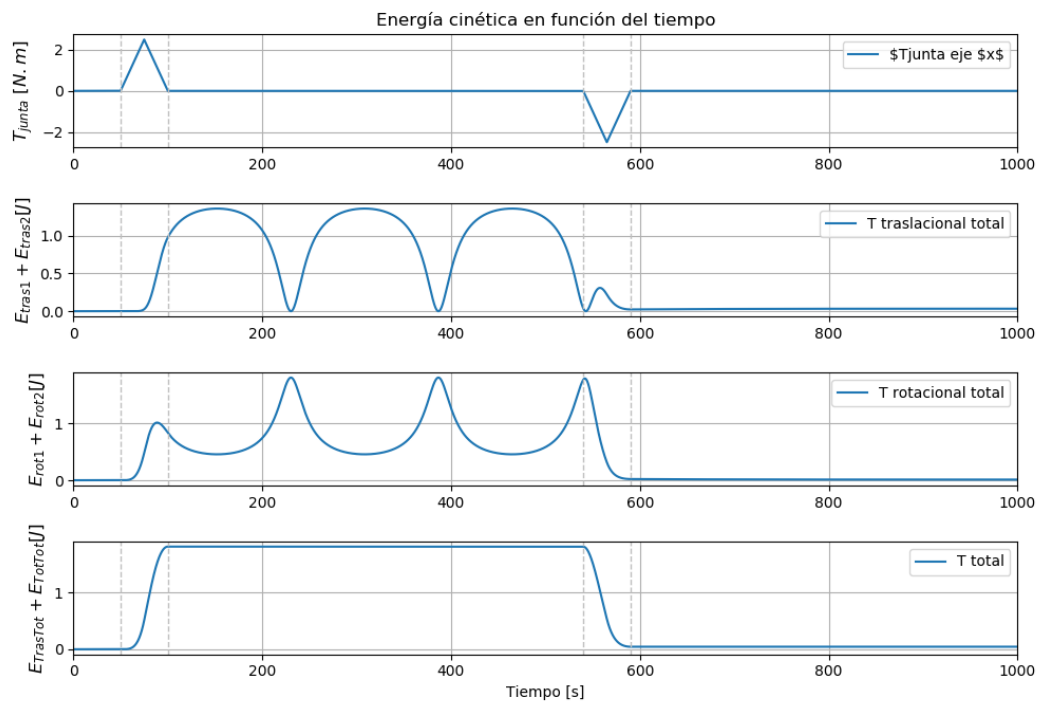


Figura 4.18: Torque de frenado $T_j = f(t)$ en instante en que la energía traslacional es cercana a cero. La energía residual es cercana a cero.

El caso de rotación a lo largo de un eje contenido en el plano xz es análogo a los presentados en los ejes x y z .

4.2. Cilindros - junta de revolución

A continuación, se muestra que se obtuvo el mismo resultado al simular dos cilindros rotando a lo largo del eje y , de forma análoga y con las mismas condiciones iniciales que en la primera simulación que se presentó en la sección 4.1.1, aunque usando el modelo de junta de revolución. En la figura 4.19 se muestra dicho caso simulado con los dos modelos, mostrando la igualdad de resultados. En la figura 4.20 se muestra la comparación entre el módulo de la velocidad angular $w_2^{(2)}$ y el módulo de la variable $u^{(2)} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)^T$ introducida por el modelo de junta esférica.

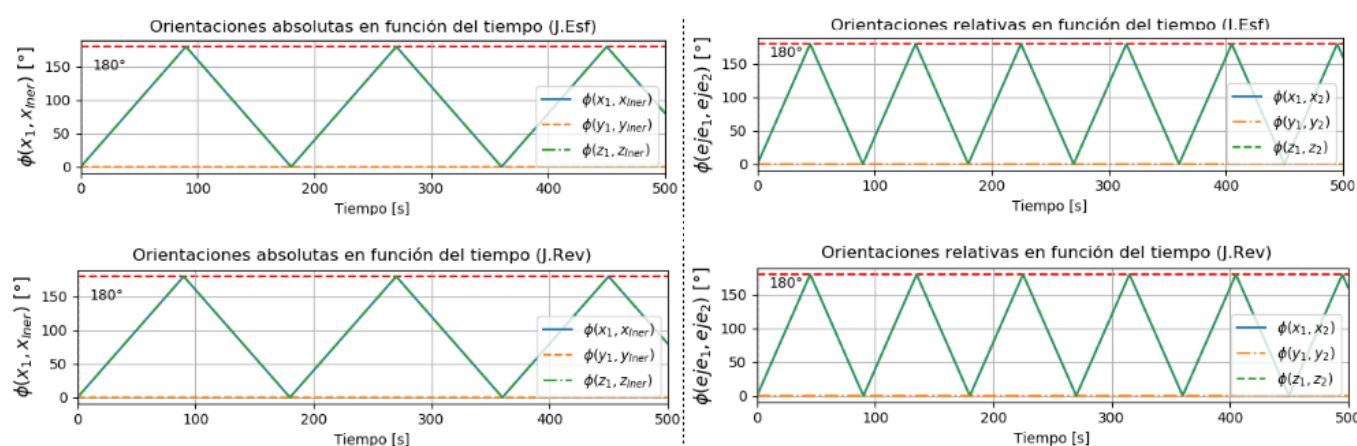


Figura 4.19: Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de junta esférica (gráficas superiores) y el de junta de revolución (gráficas inferiores). Las figuras de la izquierda muestran las orientaciones absolutas de los cilindros, las de la derecha las orientaciones relativas entre ellos.

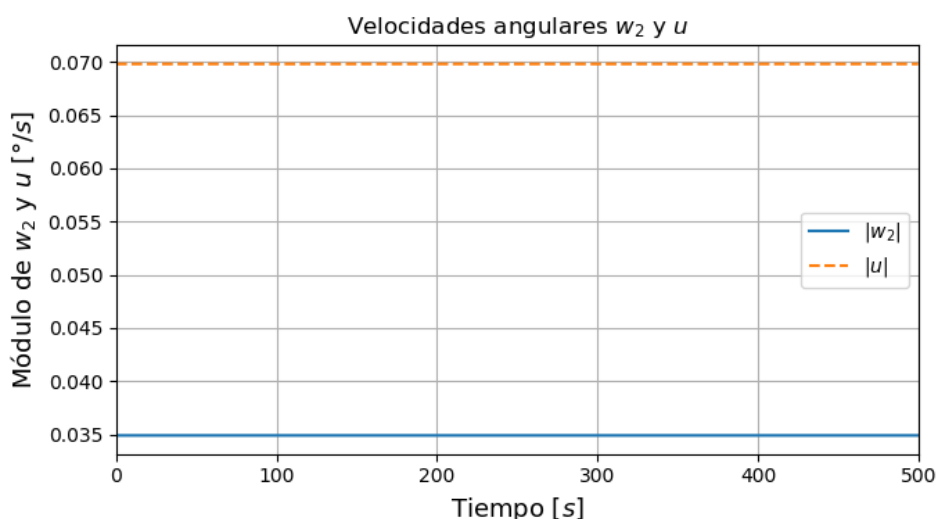


Figura 4.20: Módulo de la velocidad angular $w_2^{(2)}$ y de la razón de cambio de los ángulos de Euler del cuerpo 2 relativos al cuerpo 1 ($u^{(2)}$).

Puede observarse que $|u|$ tiene el doble de valor que $|w_2|$, dado que representa directamente la velocidad relativa entre los cuerpos.

4.3. Geometría de un satélite con un panel - junta esférica

En esta sección se usa una geometría similar a la usada en la próxima sección para el satélite real, como se observa en la figura 4.21. Dado que la junta que vincula ambos cuerpos no restringe la rotación del segundo cuerpo respecto al primero (la placa plana en este caso), las simulaciones se realizaron bajo la condición de que los cuerpos presentan, individualmente, simetrías geométricas. Esto deriva en que, al elegirse los ejes de los *SRC* de cada cuerpo coincidentes con los ejes de simetría, los tensores de inercia calculados respecto a sus centros de masa son diagonales. Por lo tanto, la velocidad angular w y el momento angular intrínseco $H = Iw$ respecto al *CM* tienen la misma dirección, y los términos $w \times H$ de la ecuación 2.9 se anulan. Así, al colocar las condiciones iniciales adecuadamente, puede lograrse que el movimiento de rotación resultante del sistema sea a lo largo del eje que se desee y por lo tanto en un único plano, como lo es un despliegue. Es importante notar que esto es válido para un conjunto de casos limitados, y que cualquier perturbación no será anulada por la junta esférica, aunque resulta importante verificar que la simulación arroje los resultados esperados.

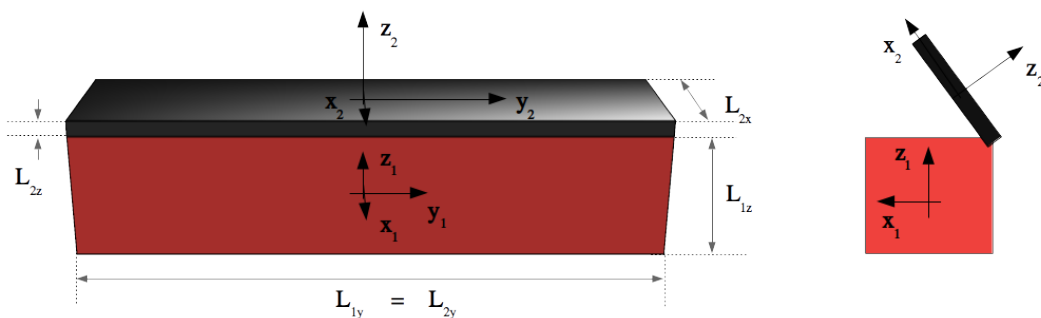


Figura 4.21: Modelo físico con la geometría simplificada de un satélite para la simulación del despliegue de uno de sus paneles.

Rotación a lo largo del eje y un ángulo deseado

Se aplica un torque de control en la junta a lo largo del eje y , común a ambos, primero en un sentido y luego en el otro, hasta lograr un despliegue de 180° . Se usan perfiles tipo escalón, con dos valores diferentes hacia el final, como se ve en la figura 4.22. Se indica la duración en la que actúa el torque de control al principio y al final, y el tiempo en el que es nulo.

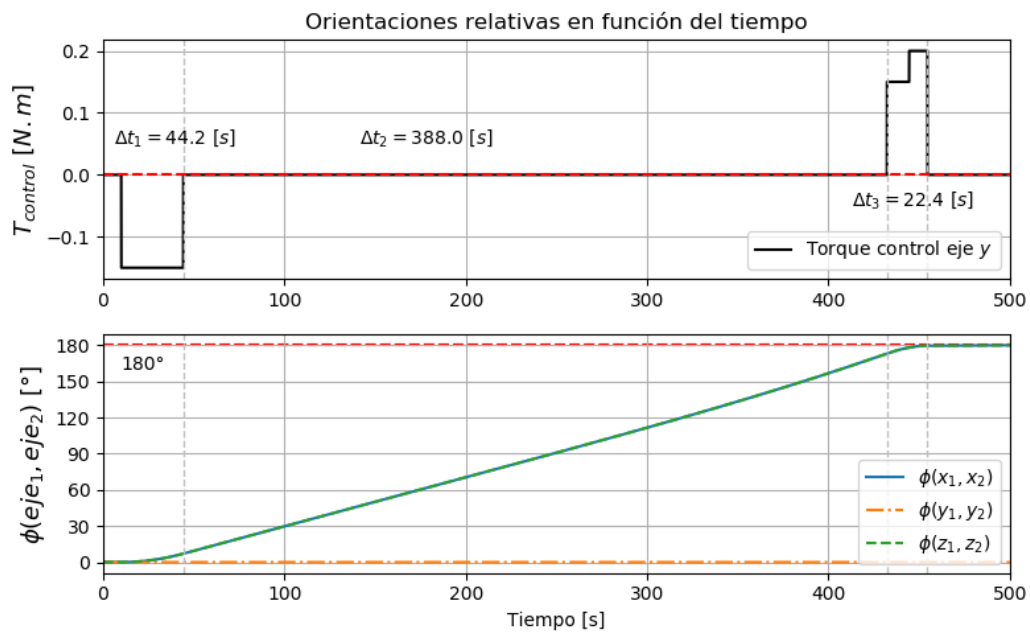


Figura 4.22: Orientación relativa entre los cuerpos del sistema, medido con los ángulos entre los ejes de cada uno.

Puede verse que los ángulos entre los ejes x_1 y x_2 , y z_1 e z_2 , evolucionan de igual forma, mientras que el ángulo entre y_1 e y_2 es siempre nulo, al ser éste el eje de rotación del despliegue.

Capítulo 5

Simulaciones de la dinámica rotacional de un satélite real

“Me gusta aprender, eso es un arte y una ciencia.”

— Katherine Johnson

Para realizar simulaciones de un caso real con el modelo matemático y computacional desarrollado, se solicitaron las condiciones iniciales del despliegue de un radar perteneciente a un satélite real, así como sus propiedades inerciales y geométricas, y se trabajó sobre ellas para simular la dinámica rotacional del mismo. De ahora en adelante, se designará al satélite por las siglas *SAT* y al radar por las siglas *RAD*. No se presentan datos ni mediciones por cuestiones de confidencialidad, aunque los mismos se utilizaron en el proceso de simulación a modo de comparación y validación. El despliegue del radar del *SAT* se realizó en seis despliegues parciales, dos de ellos de 90° y los otros cuatro de 180° . En la figura 5.1 se muestra un esquema del satélite completo, conformado por un cuerpo principal (*bus*), tres paneles solares (en este caso desplegados), y el radar (en este caso desplegado). Por otro lado, se muestra en la figura 5.2 un esquema de las diferentes configuraciones del satélite en los seis despliegues parciales del *RAD*. A cada una de éstas se las denota como *C2*, *C3*, ..., *C7*. En cada caso, la parte componente del radar que despliega se encuentra en color oscuro. Puede notarse que los paneles solares se encuentran totalmente desplegados durante el despliegue completo. A la configuración con el *RAD* completamente plegado, considerada la inicial en las simulaciones, se la denota como *C1* (no se muestra en las figuras). Junto con los esquemas, se muestra un sistema de referencia fijo al cuerpo principal *SGL* (Sistema Global), en el cual se encuentran expresadas las diferentes cantidades del *SAT*. Desde este *SR* deben expresarse las diferentes cantidades en los *SR* considerados en el modelo matemático presentado para poder realizar la simulación.

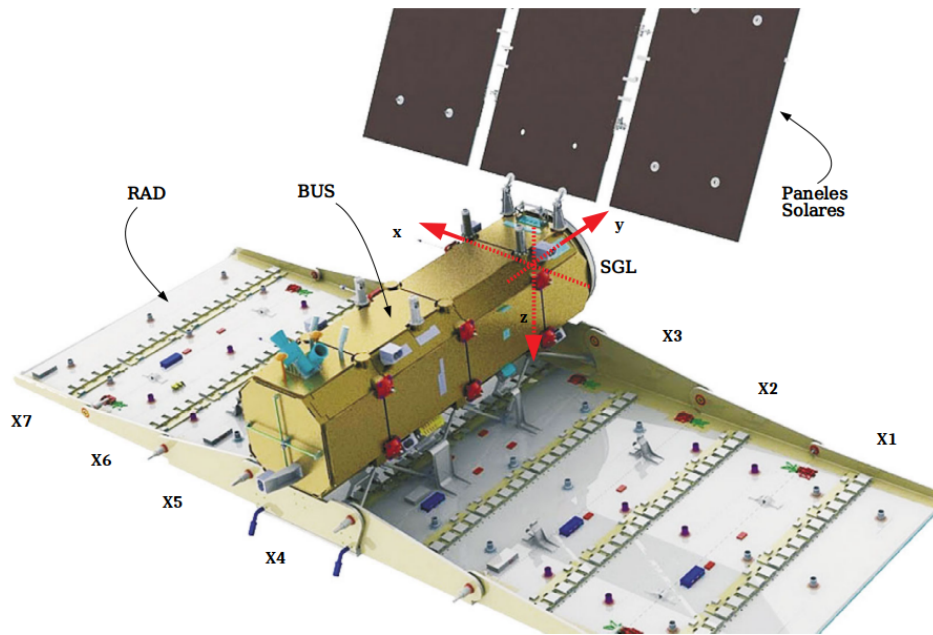


Figura 5.1: Esquema del *SAT* con los paneles solares y el *RAD* desplegados. Se muestra el sistema de referencia *SGL* en el extremo posterior del satélite.

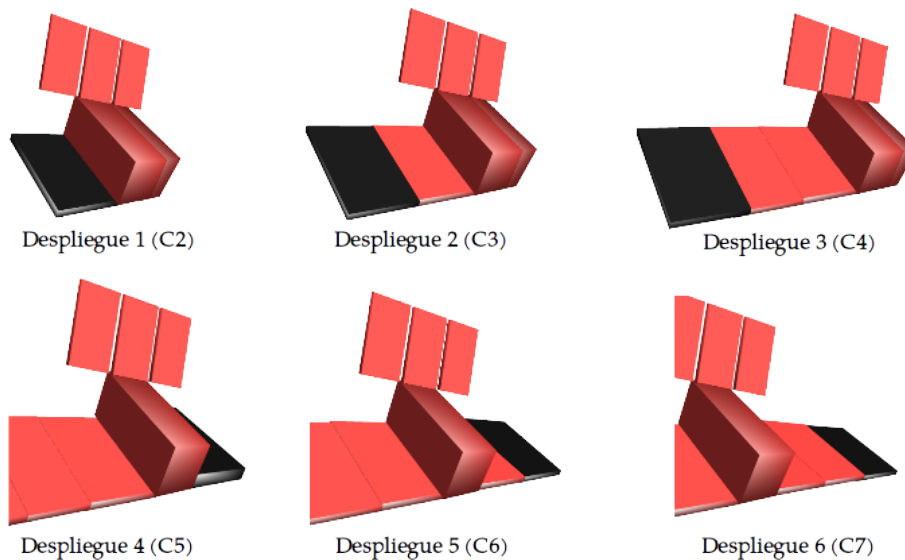


Figura 5.2: Resumen de las diferentes configuraciones del *SAT* en sus seis despliegues. El cuerpo más oscuro es el que se despliega en cada caso.

Como puede verse, en cada despliegue el satélite se comporta como un cuerpo central, compuesto por el *bus*, los paneles solares y el conjunto de componentes del *RAD* unido rígidamente a los anteriores, y un cuerpo secundario que despliega respecto al cuerpo central, en este caso el componente o conjunto de componentes del *RAD* en color oscuro. Esto quiere decir que todos los despliegues pueden simularse con el modelo de dos cuerpos presentado en la sección 2.2. A cada parte componente del *RAD* se la designa como X_1, X_2, \dots, X_7 , según se observa en la Figura 5.1. El orden de despliegues

es el mostrado en la Figura 5.2, desplegándose los conjuntos $X5X6X7$, $X5X6$, $X6$, $X1X2X3$, $X1X2$ y $X1$, respectivamente.

5.1. Determinación de parámetros para la simulación

Para la simulación de los seis despliegues del radar del *SAT*, se necesitó acceso a las condiciones iniciales de orientación y velocidad angular del mismo en cada despliegue. Además, se necesitó conocer las propiedades de masa e inercia de cada configuración, de una forma útil para la simulación, con lo que se trabajó sobre éstas para adaptarlas al modelo desarrollado. Se usaron las mediciones de velocidad angular y orientación en función del tiempo para el *SAT* en órbita, en el mes de octubre del año 2018, y se utilizó información acerca de sus propiedades geométricas.

5.1.1. Geometría

En cuanto a propiedades geométricas, es necesario conocer las dimensiones del *SAT* en cada configuración, así como sus centros de masa respecto a diferentes sistemas de referencia. Por otro lado, debe definirse la posición de la junta para el modelo tal que sea representativa del satélite real. En éste, existen dos bisagras entre cada componente del radar que permiten los despliegues parciales rotando alrededor de un eje único. Sin embargo, el modelo matemático posee una única junta que vincula los dos cuerpos. También es necesario adecuar cada propiedad al modelo físico utilizado. En particular, expresar las cantidades en los sistemas de referencia necesarios para la simulación, que no son los mismos que los disponibles en el *SAT*. Esquemáticamente, lo que se busca es convertir las configuraciones $C2$ a $C7$ en un modelo de dos cuerpos equivalente, especificando la posición de la junta desde los centros de masa de cada uno de ellos, como se observa en la figura 5.3.

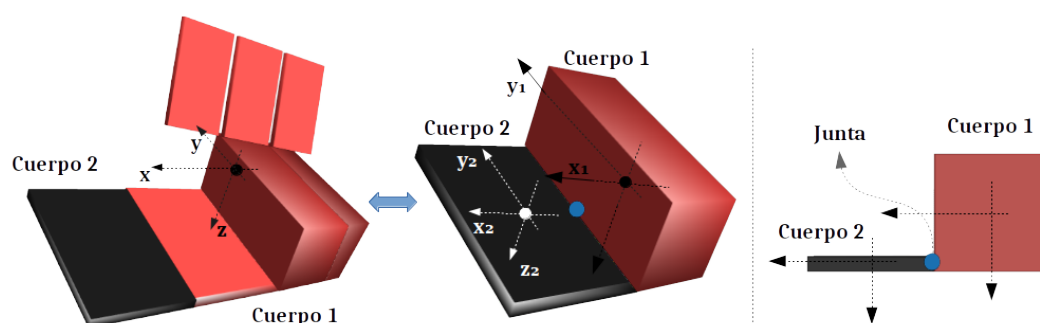


Figura 5.3: Modelo físico equivalente para la geometría del *SAT* en cada configuración.

Posición de los centros de masa

Para cada configuración C_i del SAT se dispone la posición del CM de todo el satélite, medida respecto del SGL . Para la simulación en cambio, se necesita la posición del centro de masa de cada cuerpo (central o secundario), y no del satélite completo. En el caso del cuerpo secundario, que siempre es un componente X_i o un conjunto de componentes X_i del RAD , se asume que su centro de masa se ubica en su centro geométrico, para lo cual se considera una geometría del tipo placa plana con distribución de masa uniforme. El caso más complejo es el del cuerpo central, en el que debe encontrarse el centro de masa del conjunto (*bus*) + (*paneles solares*) + (*componentes del RAD que no despliegan*). En el ejemplo de la figura 5.3, se necesita r_{cm1} desde SGL , formado por el conjunto (*bus*) + (*paneles solares*) + ($X1X2X3X4X5$). Utilizando las masas de cada componente del conjunto, puede realizarse este cálculo (obsérvese la figura 5.4).

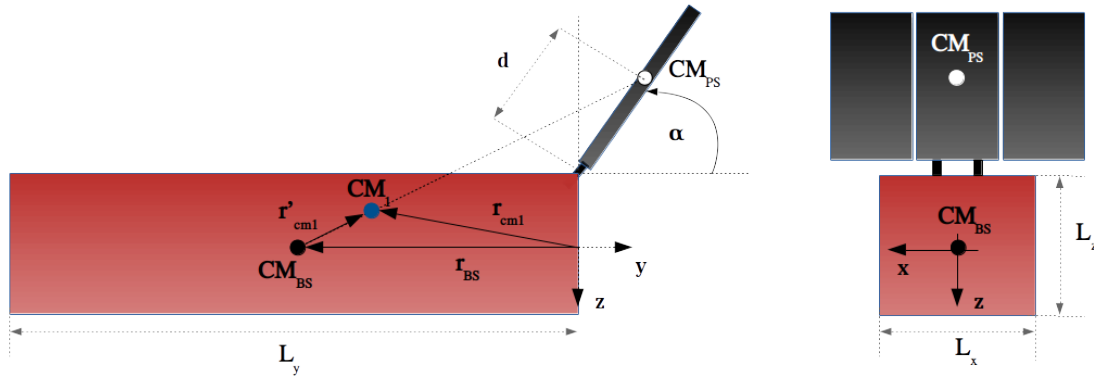


Figura 5.4: Esquema simplificado del cuerpo central del SAT para el cálculo de r_{cm1} , donde se agrupó al conjunto $BS := (bus) + (X1X2X3X4X5)$ en un único cuerpo y al de los paneles solares (PS) en otro.

Se muestra a la izquierda de la Figura 5.4 el conjunto $BS := (bus) + (X1X2X3X4X5)$, como un único cuerpo rígido, junto con los paneles solares (PS), con una inclinación fija y conocida de α [°], una vez desplegados. El centro de masa del conjunto (CM_{BS}) estará en alguna posición (r_{BS}) medida desde el SGL . Así como se consideró a cada componente del RAD con una geometría del tipo placa plana homogénea, se considera al *bus* como un cuerpo tipo paralelepípedo, también homogéneo. Estas consideraciones no son alejadas de la realidad, ya que los componentes individuales del SAT tienen una distribución de masa que puede considerarse homogénea a los fines de este trabajo, según lo consultado oportunamente. Con estas consideraciones, el CM_{BS} se encuentra en el centro geométrico del conjunto BS de la figura. La posición del CM total del cuerpo 1 estará en la línea que une el CM_{BS} con el centro de masa de los paneles solares (CM_{PS}). Respecto al CM_{BS} se obtiene la posición del CM de todo el cuerpo 1 como:

$$r'_{cm1} = \frac{m_{BS}r'_{BS} + m_{PS}r'_{PS}}{m_1},$$

donde $r'_{BS} = 0$, dado que es el origen del sistema usado para el cálculo, m_1 es la masa total del cuerpo 1, y r_{PS} es la posición del CM de los paneles solares desde CM_{BS} , que puede considerarse en el centro geométrico de los tres. Es decir:

$$r'_{cm1} = \left(\frac{m_{PS}}{m_1} \right) r'_{PS} \quad (5.1)$$

$$r'_{PS} = (0, L_y/2 + d \cos \alpha, -(L_z/2 + d \sin \alpha))^T, \quad (5.2)$$

con d y α conocidos de la geometría del SAT . De esta forma, puede obtenerse la posición del centro de masa respecto al SGL :

$$r_{cm1} = r_{BS} + r'_{cm1} \quad (5.3)$$

$$r_{BS} = (0, -L_y/2, 0)^T \quad (5.4)$$

Posición de la junta

Como se mencionó anteriormente, la junta entre cada componente X_i del RAD está compuesta por dos bisagras que permiten rotaciones a lo largo de un único eje. En el caso del modelo, se reemplazan éstas por una única junta posicionada en el centro geométrico entre las reales. Dada la simetría del satélite respecto al bus , desde el SGL las posiciones de la junta en las configuraciones $C2$, $C3$ y $C4$ serán iguales y opuestas en el plano xz que las de las configuraciones $C5$, $C6$ y $C7$ (ésto puede notarse en la figura 5.1). Como los componentes del RAD no son paralelepípedos perfectos, se debe hacer una consideración respecto al tamaño de los mismos para su modelo físico. En la figura 5.5 se muestra la posición de la junta respecto a los centros de masa de los cuerpos 1 (conjunto $bus + X1X2X3X4X5X6 + panles\ solares$) y 2 ($X7$) de un modelo físico aproximado del SAT , y respecto al sistema de coordenadas SGL , para la configuración $C4$. Se supone que el componente $X4$ del modelo es el de mayor longitud en la dirección z , y que $L_z^{X5} = 0.75L_z^{X4}$, $L_z^{X6} = 0.5L_z^{X4}$, $L_z^{X7} = 0.25L_z^{X4}$; de igual manera para $X3$, $X2$ y $X1$, respectivamente. Para el modelo matemático se necesita conocer la posición de la junta respecto a los centros de masa de cada cuerpo. Observando la geometría del SAT , éstas pueden obtenerse según:

$$r_1^{(CM1)} = r_j^{(SGL)} - r_{CM1}^{(SGL)} \quad (5.5)$$

$$r_2 = (-L_x/2, 0, 0)^T ; \text{ configuraciones } C2, C3, C4 \quad (5.6)$$

$$r_2 = (L_x/2, 0, 0)^T ; \text{ configuraciones } C5, C6, C7 \quad (5.7)$$

De la misma manera puede obtenerse la posición de la junta desde los centros de masa de ambos cuerpos en las demás configuraciones, una vez obtenido r_{cm1} y r_{cm2}

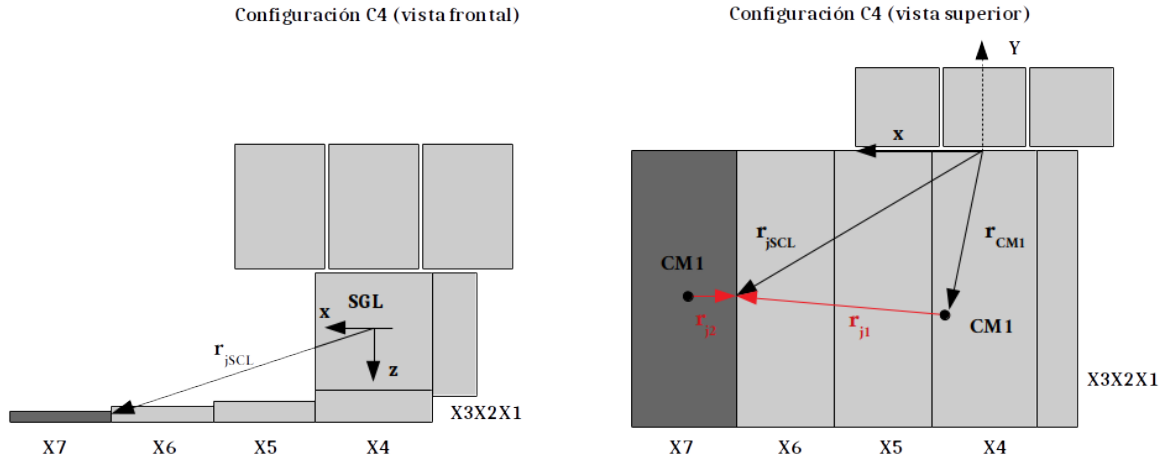


Figura 5.5: Posición de la junta respecto a los centros de masa de los cuerpos 1 y 2 del modelo físico del *SAT*, para la configuración *C4*.

con la expresión 5.3 y considerando que el centro de masa del cuerpo 2 siempre es el centro de masa de un paralelepípedo con dimensiones iguales a X_i o el conjunto X_i que despliegue, siguiendo la aproximación geométrica realizada sobre los componentes del *RAD*.

5.1.2. Tensores de inercia

Los tensores de inercia de cada configuración C_i del *SAT* están disponibles, aunque calculados respecto al centro de masa del satélite completo o al origen del *SGL*. También se dispone de los tensores de inercia del cuerpo central y del apéndice en cada configuración, respecto a los dos *SR* nombrados anteriormente. En el modelo matemático son necesarios los tensores de inercia calculados respecto a los centros de masa de los cuerpos 1 y 2 en cada configuración, los cuales no están disponibles de forma directa. Sin embargo, se pueden calcular siguiendo las consideraciones geométricas descritas en la sección 5.1.1.

Cuerpo 1

Mediante el uso del *teorema de Steiner* (ver ecuación 1.8), se puede obtener:

$$I_{ij}^{(cm1)} = I_{ij}^{(SAT_k)} - M(|R|^2\delta_{ij} - R_i R_j) \quad (5.8)$$

donde M es la masa total del satélite, I_{ij}^{cm1} es la componente ij del tensor calculado respecto al centro de masa del cuerpo 1, $I_{ij}^{SAT_k}$ es la componente ij del tensor calculado respecto al centro de masa del satélite completo en la configuración C_k , R el vector posición del centro de masa $cm1$ respecto al *CM* del *SAT* en esa configuración, medido

desde SGL , y δ_{ij} es la función *delta de Kronecker*¹.

En resumen, para cada configuración es conocido $I_{ij}^{SAT_k}$. Debe calcularse entonces R , que puede escribirse como $R = r_{cm1} - r_{CM_{SAT}}$. Como r_{cm1} se calculó junto con la geometría y $r_{CM_{SAT}}$ es un dato para cada configuración, puede resolverse 5.8.

Cuerpo 2

Para el cuerpo 2, se siguen las consideraciones geométricas en las que se aproximó a cada componente del RAD como un paralelepípedo homogéneo de dimensiones L_x , L_y , $L_{z(Xk)}$ ($k = 1, \dots, 7$). Se recuerda que las dimensiones L_x y L_y son independientes de la configuración, mientras que L_z toma valores según la configuración. De esta manera, el tensor de inercia de cada Xi , calculado respecto a su centro de masa, se aproxima según:

$$I_{2k}^{cm2} = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{12}(L_y^2 + L_{z(Xk)}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{12}(L_x^2 + L_{z(Xk)}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{12}(L_x^2 + L_y^2) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.3. Condiciones iniciales cinemáticas y dinámicas

Por último, son necesarias las condiciones iniciales de velocidad angular y cuaternión para la simulación. De las mediciones disponibles se pudo obtener la orientación inicial $q_1(0)_{N1}$ del cuerpo 1 respecto a un SRI y la velocidad angular inicial $w_1(0)$ del cuerpo central expresada en el SGL , que coincide con aquella expresada en un $SRC1$ con origen en el centro de masa del cuerpo 1, ya que ambos sistemas tiene la misma orientación (ver figura 5.3).

Una vez adecuados los parámetros como se describió, es posible simular los despliegues usando los modelos de junta esférica, si se asumen algunas hipótesis adicionales, y el de junta de revolución.

5.2. Hipótesis consideradas

Se listan las hipótesis consideradas hasta el momento:

- Una única junta entre cuerpos, en lugar de dos bisagras entre componentes Xi del RAD .
- Componentes individuales del SAT homogéneos (sin inercias cruzadas en los tensores de inercia respecto a los ejes de la Figura 5.3). Sin embargo los considerados

¹La función *delta de Kronecker* (δ_{ij}) está definida según sus índices, y puede tomar dos valores: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

cuerpos 1 y 2 de cada configuración pueden tener inercias cruzadas, debido a la falta de simetría geométrica en el *SAT* (dada por los paneles solares, por ejemplo).

- Cada componente X_i del *RAD* es considerado como un paralelepípedo con dimensiones L_x , L_y y $L_{z(Xk)}$. La dimensión $L_{z(Xk)}$ tiene diferentes valores según la configuración k correspondiente: $L_{z(X1)} = L_{z(X7)} = 0.25L_{z(X4)}$, $L_{z(X2)} = L_{z(X6)} = 0.5L_{z(X4)}$, y $L_{z(X3)} = L_{z(X5)} = 0.75L_{z(X4)}$.

5.3. Simulación con modelo de junta esférica

A continuación, se presentan los resultados de los seis despliegues simulados utilizando el modelo de junta esférica. En el caso del primer despliegue se muestran las curvas correspondientes a la orientación relativa entre cuerpos 1 y 2, orientación respecto al *SRI*, velocidades angulares, y verificaciones de conservación. Para el resto de despliegues, las curvas de verificación y orientación relativa son similares, con lo que se muestran los resultados de orientación absoluta y velocidad angular. Las hipótesis adicionales que implica este modelo son:

- Inercias cruzadas consideradas despreciables. Dado que este modelo no tiene restricción sobre la rotación relativa entre cuerpos, una primera aproximación para simular el despliegue es con modelos de cuerpos tales que no aparezcan los llamados *momentos centrífugos* ($w \times H$) al colocar una velocidad angular sobre un eje común a los dos, como es el eje y de la figura 5.3. Esto es posible si los cuerpos tienen tensores de inercia diagonales calculados respecto al origen de los ejes de la figura, ya que w resulta paralela a $H^{(cm)}$ en dichos ejes. Al calcular los tensores de inercia del cuerpo 1 en las diferentes configuraciones, se observa que las inercias cruzadas tienen valores del 10 % de los momentos de inercia de la diagonal, como máximo, con lo cual se considera aceptable despreciarlas en esta simulación aproximada.
- Velocidades angulares iniciales nulas. Si se desea simular un despliegue, en el cual la rotación relativa entre los cuerpos ocurre a lo largo de un único eje, no es posible la colocación de una velocidad angular inicial al satélite con el modelo de junta esférica. Si este fuera el caso, alguno de los cuerpos podría rotar a lo largo de cualquiera de los tres ejes en los que tiene libertad de hacerlo. Esto no se correspondería con el despliegue que se desea simular. En cambio, se supone al satélite inicialmente sin rotación, comenzando el despliegue a partir de la acción de un torque de control en la junta, en la dirección deseada.
- Acciones externas nulas. Para este primer modelo no se considera la acción de la fuerza gravitatoria ni el efecto de torques externos sobre el satélite, como el

debido al gradiente gravitatorio u otros (ver sección 1.1).

- Momento angular de las ruedas de inercia nulo. El *SAT* posee ruedas de inercia que mantienen estable la velocidad angular del satélite una vez abandonado el modo de control del mismo. En esta simulación no se considera el momento angular adicional que éstas aportan al satélite.

El torque en la junta puede pensarse como accionado por un motor interno al satélite, de acción y reacción en cada cuerpo, por lo que el H_{tot} expresado en el *SRI* debe ser constante. Además, se simula que la energía entregada por éste a cada cuerpo sea igual que la quitada al final del despliegue, de manera que el *SAT* vuelva a su estado energético inicial de reposo.

5.3.1. Primer despliegue

En las figuras 5.6 y 5.7 se presentan los resultados obtenidos para la simulación del primer despliegue del *SAT*, yendo desde la configuración *C1* a *C2*, con una rotación de 90° . En la primer figura se puede observar que, tanto el ángulo entre los ejes x_1 y x_2 , como el ángulo entre los ejes z_1 y z_2 de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, evolucionan de 0° a 90° . Al igual que en las mediciones, se comienza el despliegue con un torque de aceleración, y se lo frena en dos etapas hacia el final del despliegue.

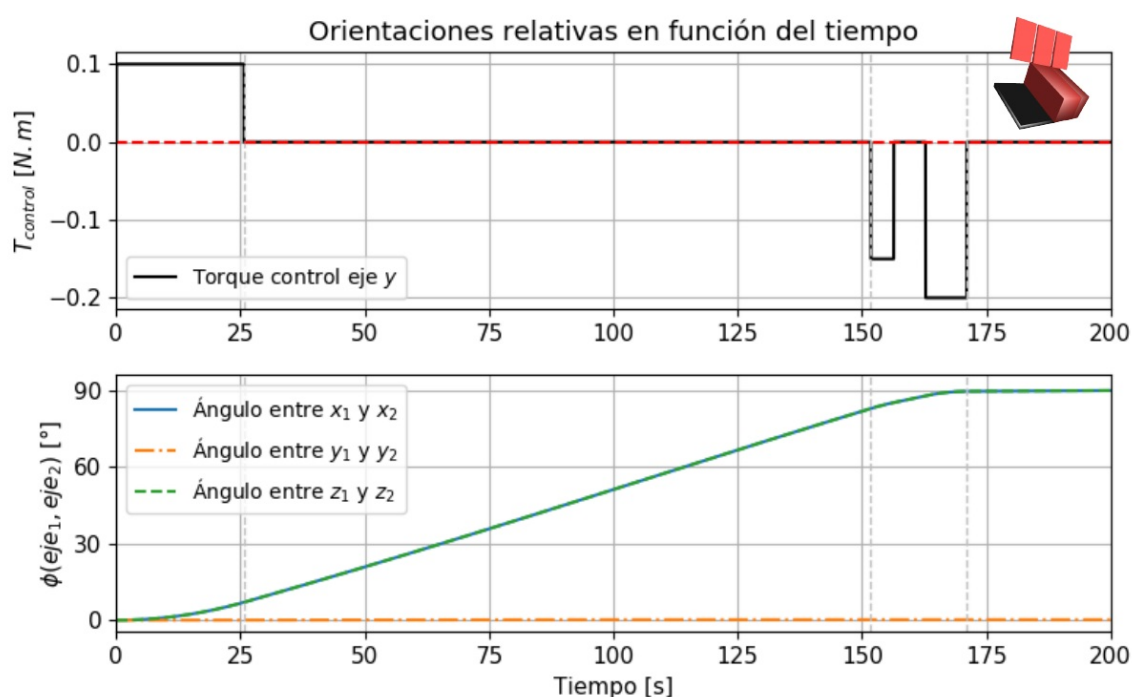


Figura 5.6: Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del *SAT* durante el despliegue 1.

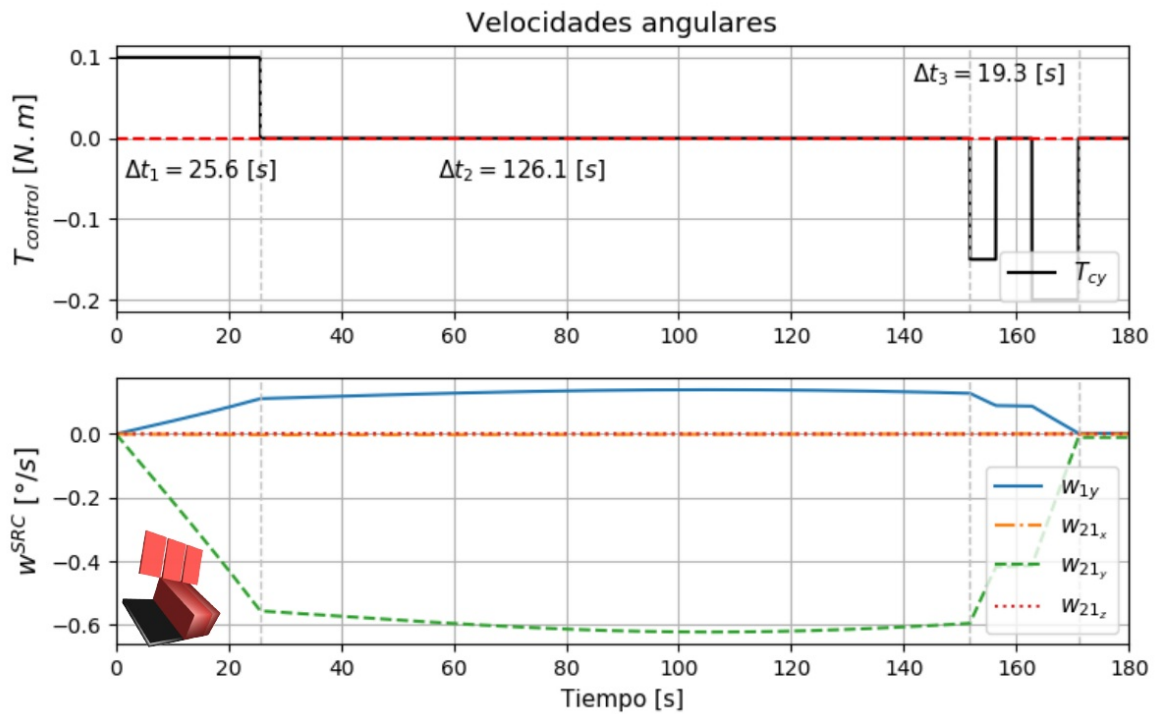


Figura 5.7: Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en SR_1 y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 1.

En la figura 5.7 se muestra la componente y de $w_1^{(1)}$, y las tres componentes de $w_{21}^{(1)}$. Ambas cantidades están expresadas en el mismo SR , con lo que se espera su sentido opuesto. También se muestra la duración de cada intervalo en el despliegue.

Chequeos de conservación

En las Figuras 5.8 a 5.10 se presentan las simulaciones realizadas para verificar las condiciones de conservación planteadas en la sección 1.2.5.

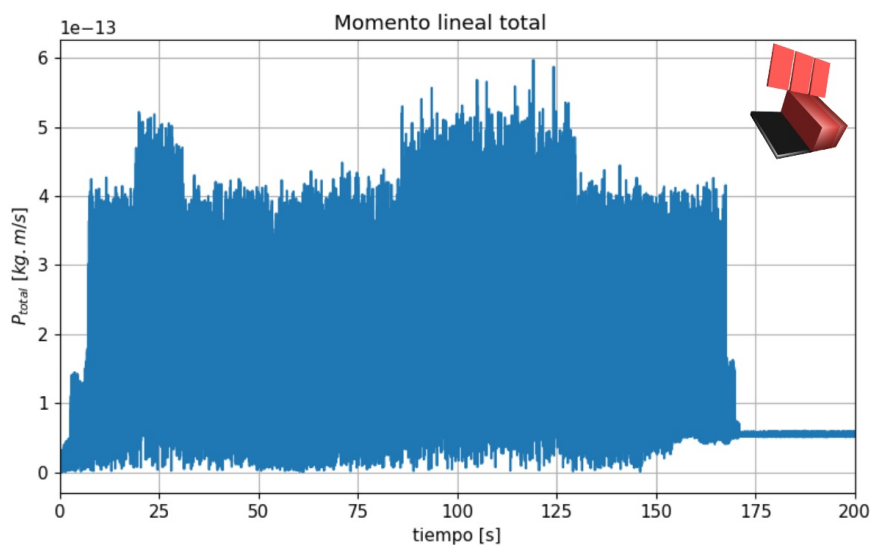


Figura 5.8: Chequeo de conservación del momento lineal ante ausencia de fuerzas externas.

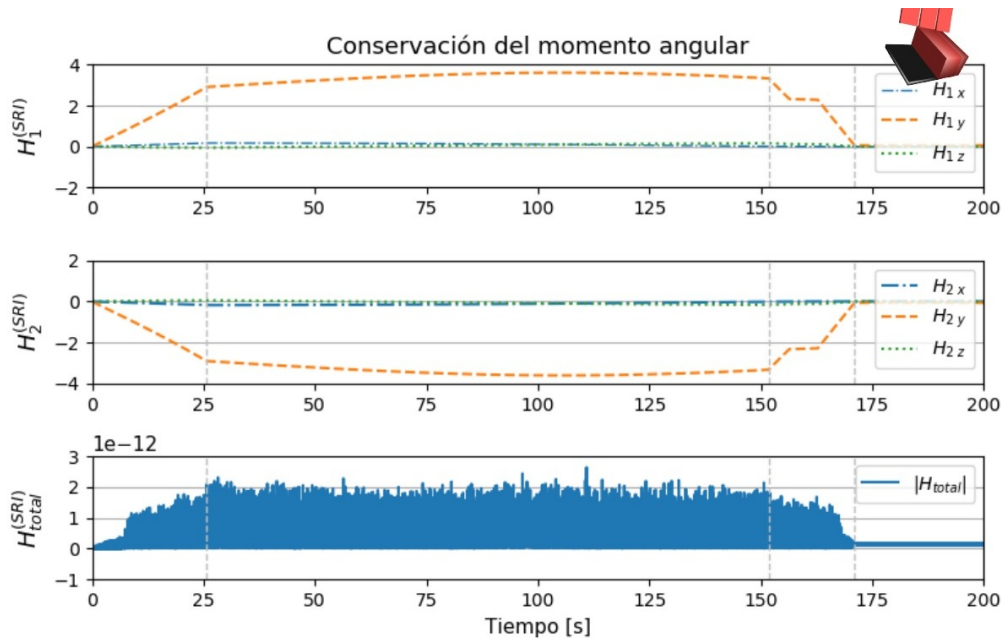


Figura 5.9: Chequeo de conservación del momento angular total del satélite expresado en el *SRI* en ausencia de torques externos.

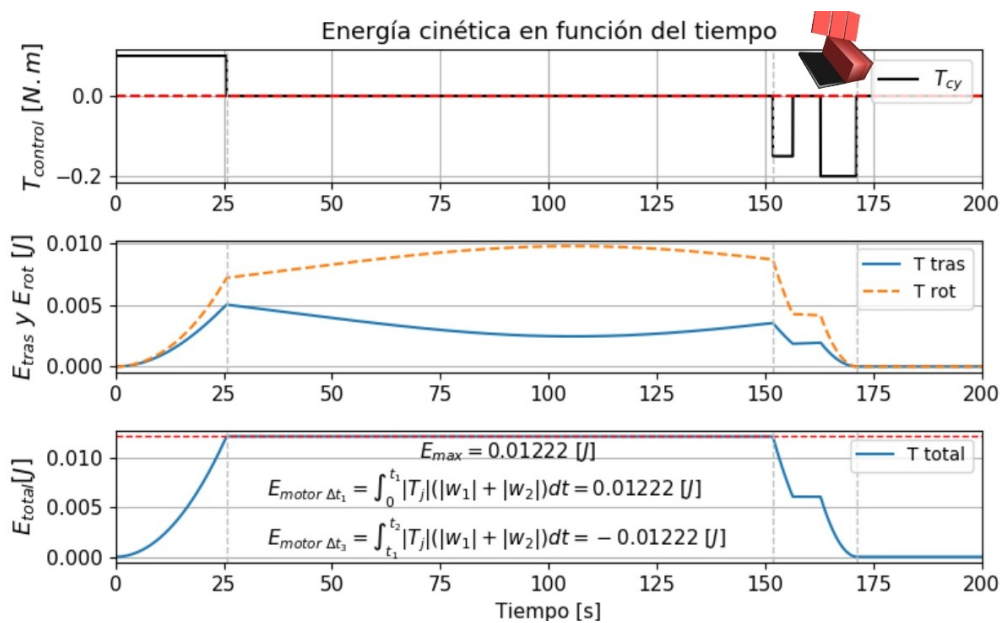


Figura 5.10: Chequeo de conservación de la energía cinética en ausencia de acciones externas, durante la evolución de la dinámica sin acción del torque en la junta. La energía máxima alcanzada es la misma que la entregada al sistema al principio, y la quitada al final del despliegue por el torque en la junta.

Puede notarse en las figuras 5.8 y 5.9, que tanto el momento angular total, expresado en el *SRI*, como el momento lineal total son nulos durante todo el despliegue. La energía cinética, por otro lado, se compone de una contribución debida al movimiento rotacional, y otra al traslacional. Puede verse que la energía agregada y quitada por el motor que produce el torque en la junta es la misma al principio y al final. Además, la energía total del *SAT* es constante mientras deja de actuar el motor.

5.3.2. Segundo despliegue

El segundo despliegue del *SAT* va de la configuración *C2* a *C3*, con una rotación de 180° . En las figuras 5.11 a 5.13 se muestran los resultados simulados de orientación absoluta y relativa, y velocidades angulares.

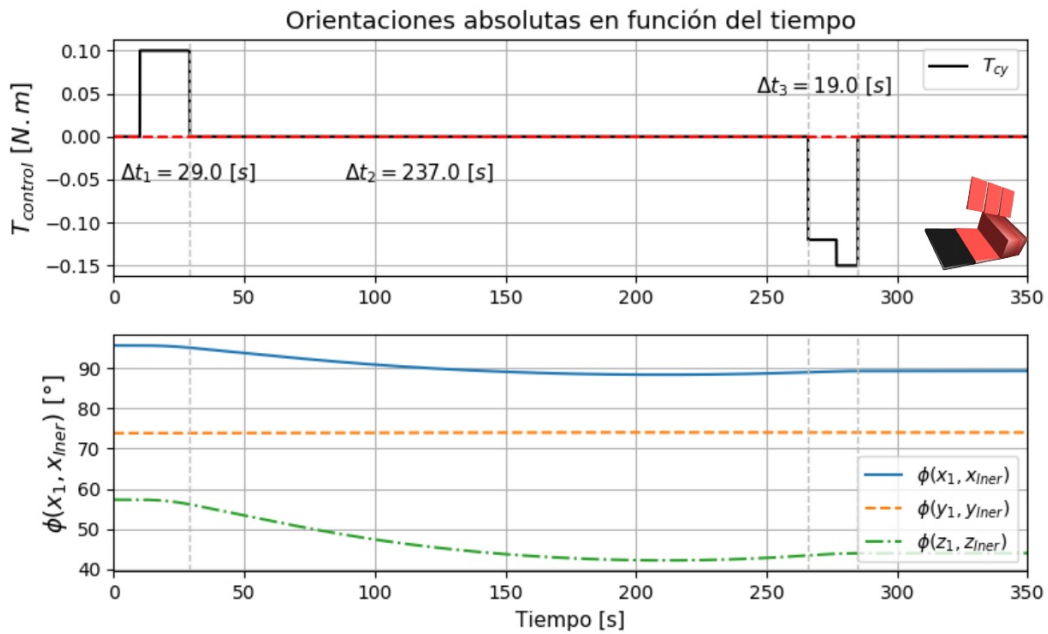


Figura 5.11: Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del *SAT* respecto a un *SRI* durante el despliegue 2.

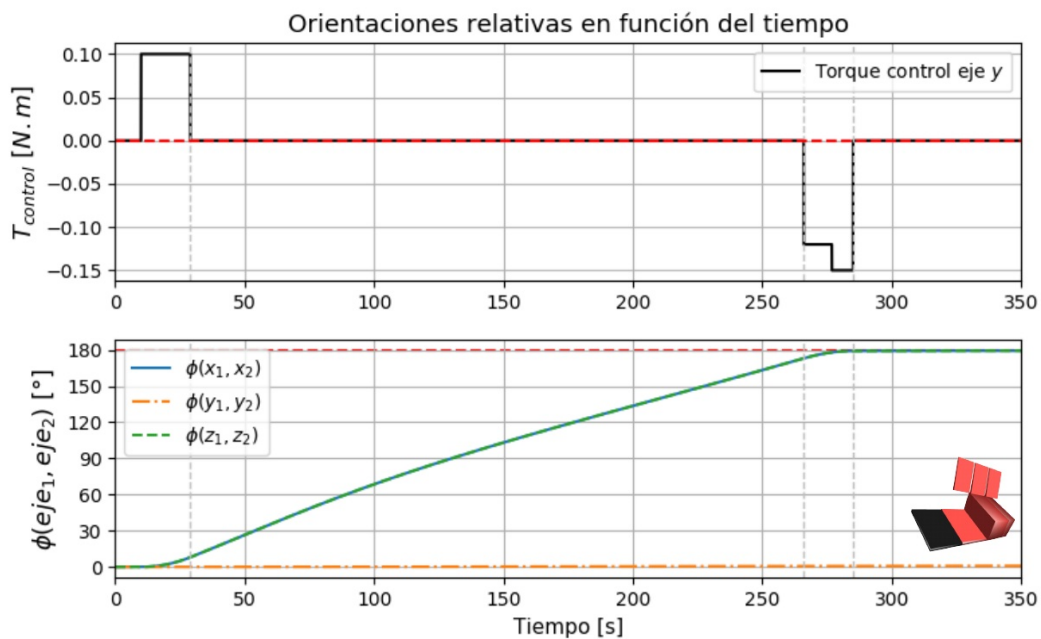


Figura 5.12: Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del *SAT* durante el despliegue 2.

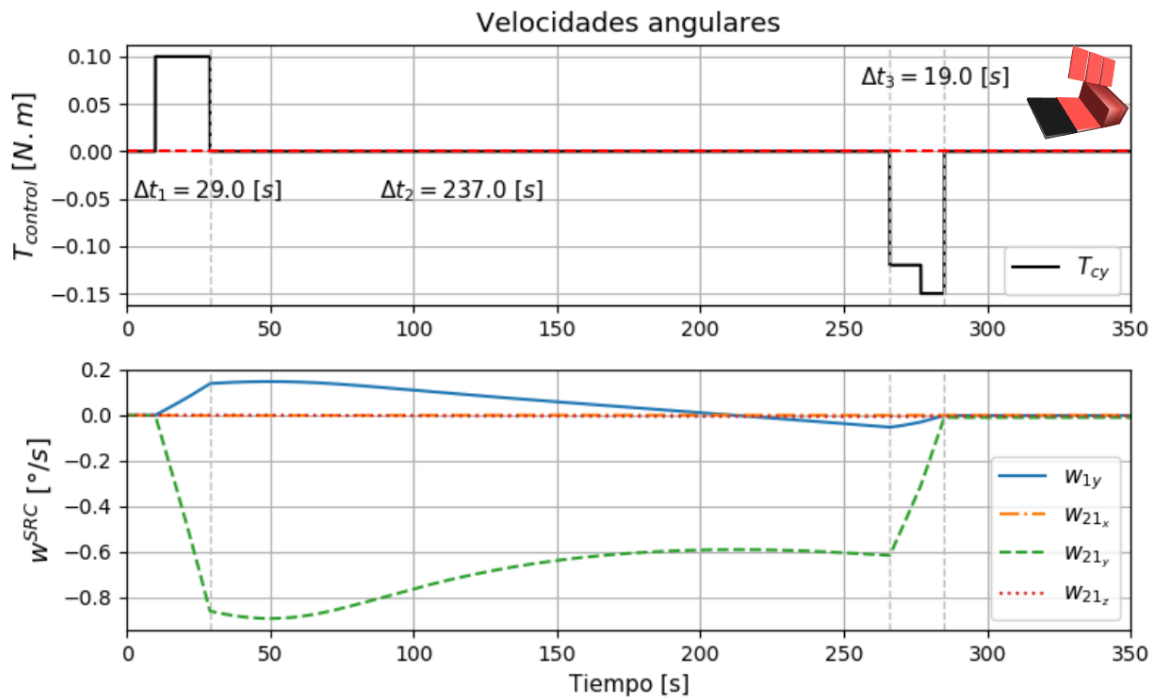


Figura 5.13: Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en $SRC1$ y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 2.

5.3.3. Tercer despliegue

El tercer despliegue del *SAT* va de la configuración $C3$ a $C4$, con una rotación de 180° . En las figuras 5.14 a 5.16 se muestran los resultados simulados de orientación absoluta y relativa, y velocidades angulares.

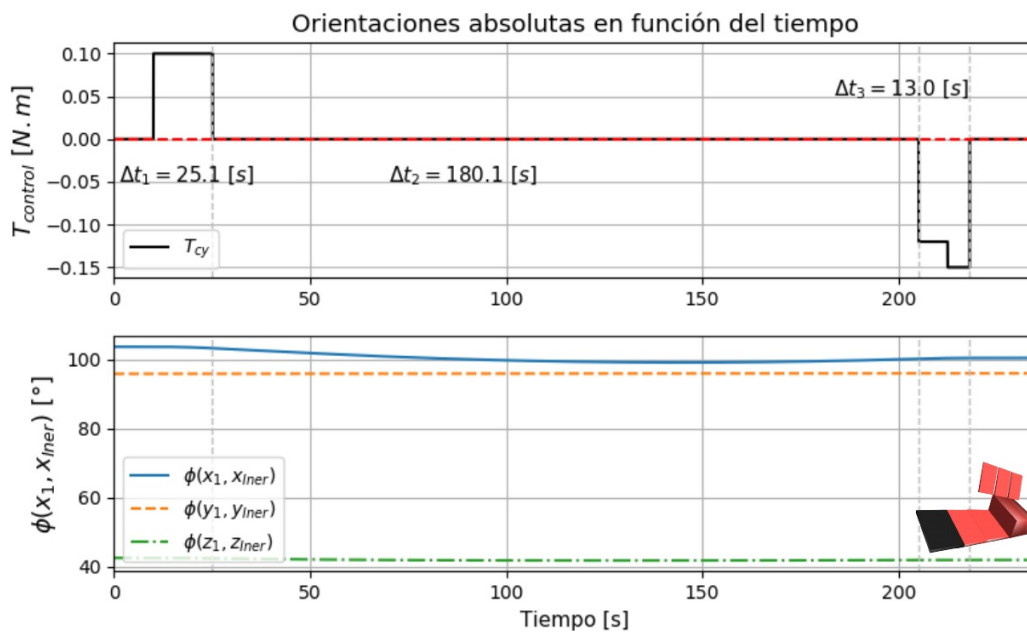


Figura 5.14: Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del *SAT* respecto a un *SRI* durante el despliegue 3.

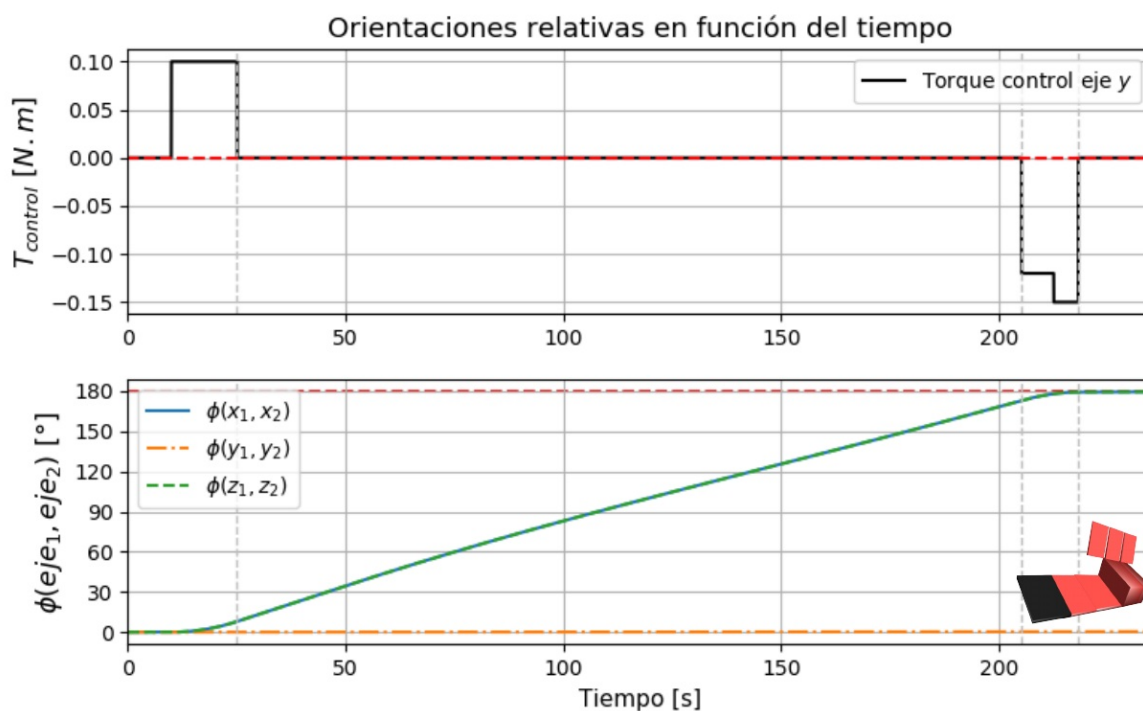


Figura 5.15: Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del modelo del *SAT* durante el despliegue 3.

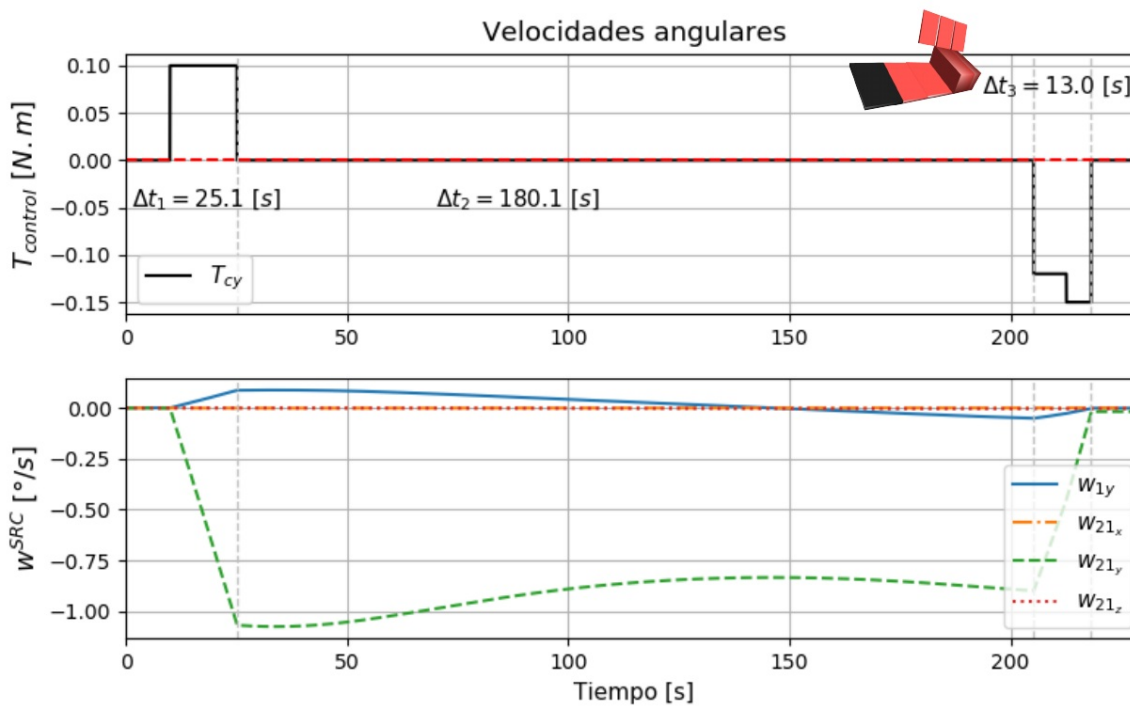


Figura 5.16: Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en *SRC1* y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 3.

5.3.4. Cuarto despliegue

El cuarto despliegue del *SAT* va de la configuración *C4* a *C5*, con una rotación de 90° . Este es el primero de los despliegues en dirección opuesta a los tres anteriores. En las figuras 5.17 a 5.19 se muestran los resultados simulados de orientación absoluta y relativa, y velocidades angulares.

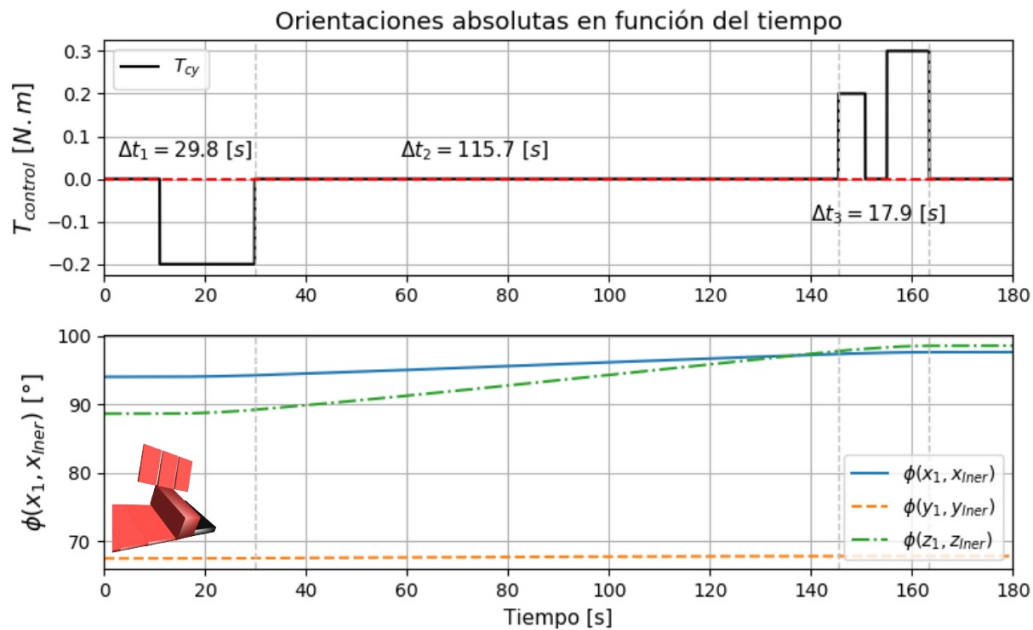


Figura 5.17: Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del *SAT* respecto a un *SRI* durante el despliegue 4.

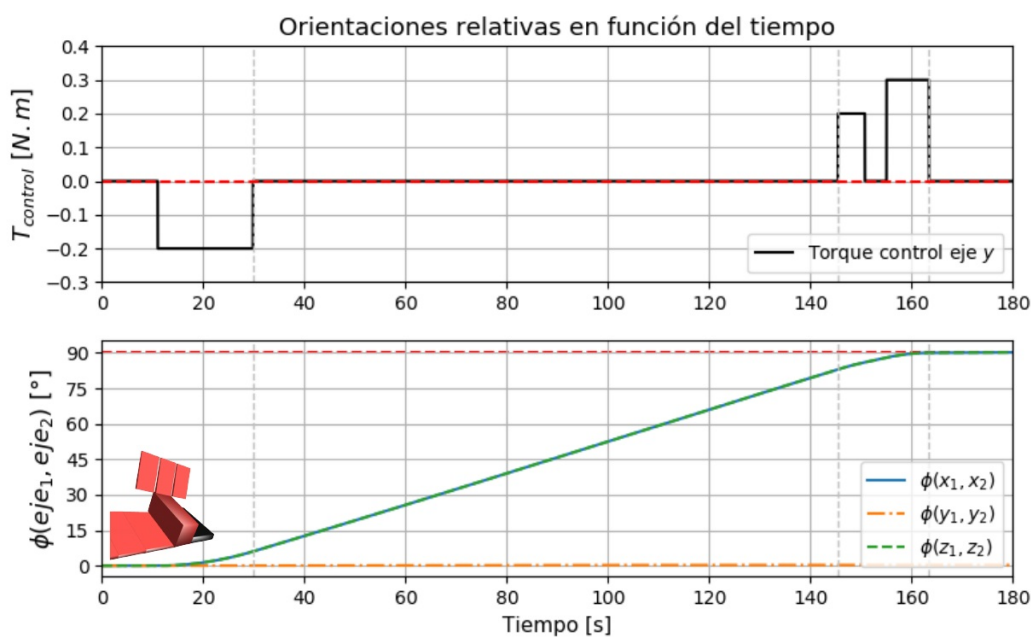


Figura 5.18: Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del *SAT* durante el despliegue 4.

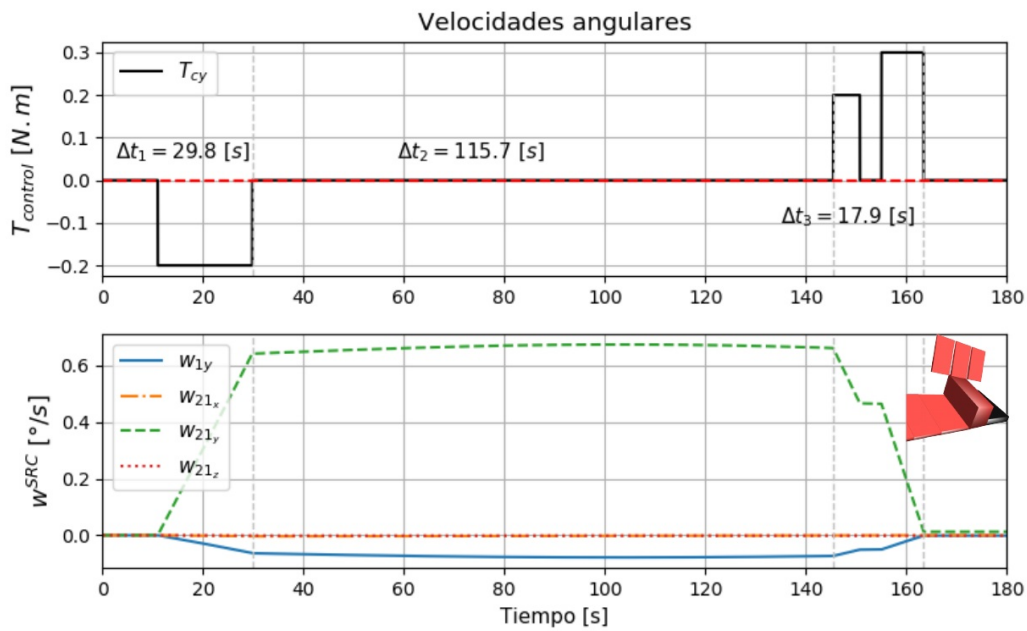


Figura 5.19: Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en $SRC1$ y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 4.

5.3.5. Quinto despliegue

El quinto de los despliegue del *SAT* va de la configuración $C5$ a $C6$, con una rotación de 180° . En las figuras 5.20 a 5.22 se muestran los resultados simulados de orientación absoluta y relativa, y velocidades angulares.

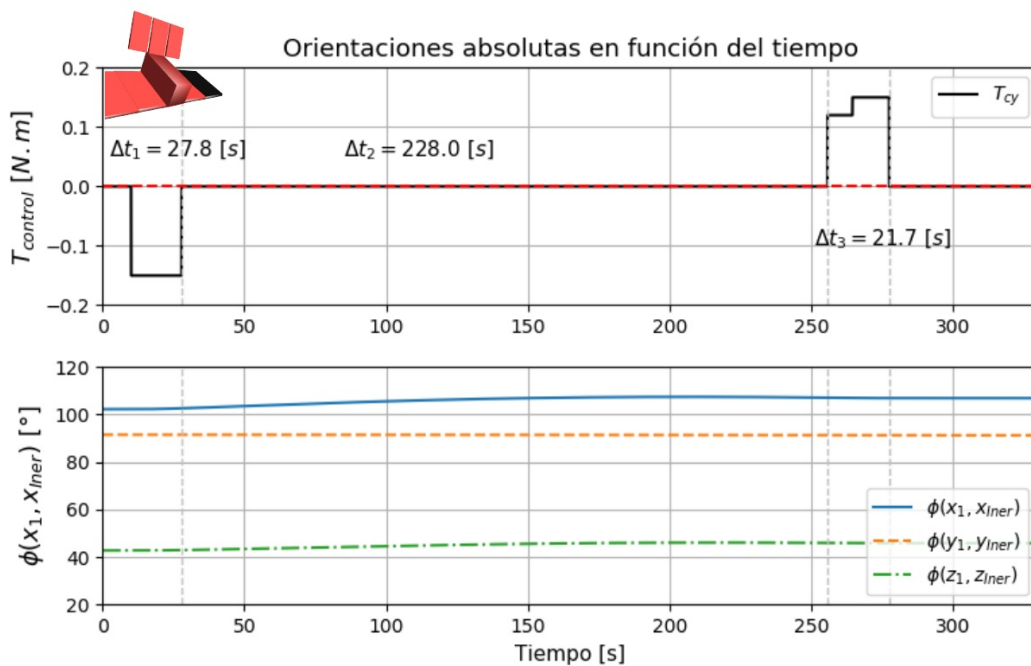


Figura 5.20: Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del *SAT* respecto a un *SRI* durante el despliegue 5.

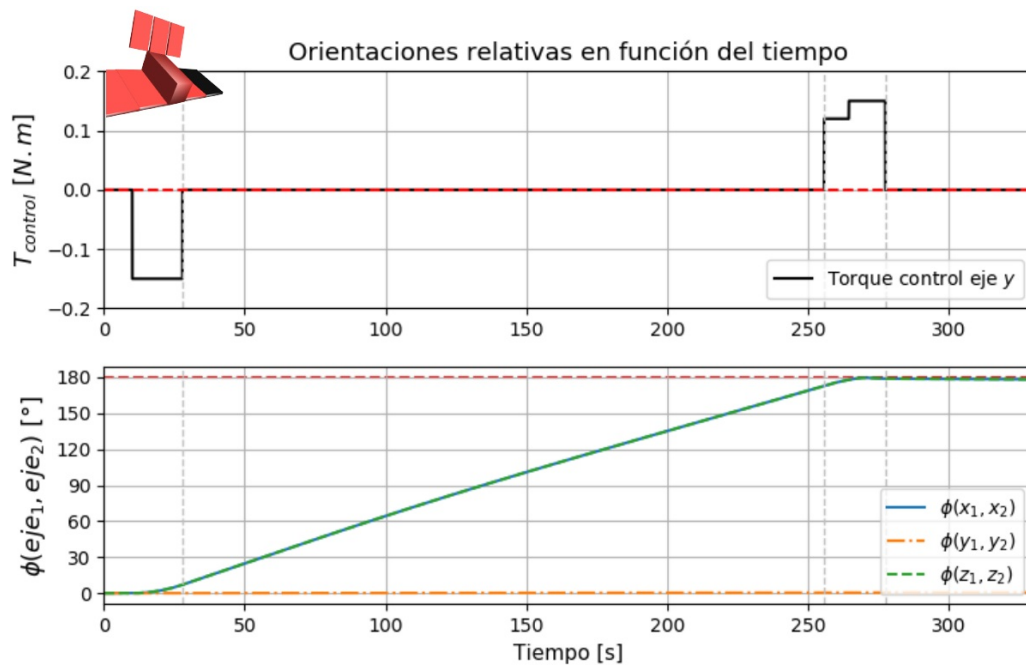


Figura 5.21: Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del *SAT* durante el despliegue 5.

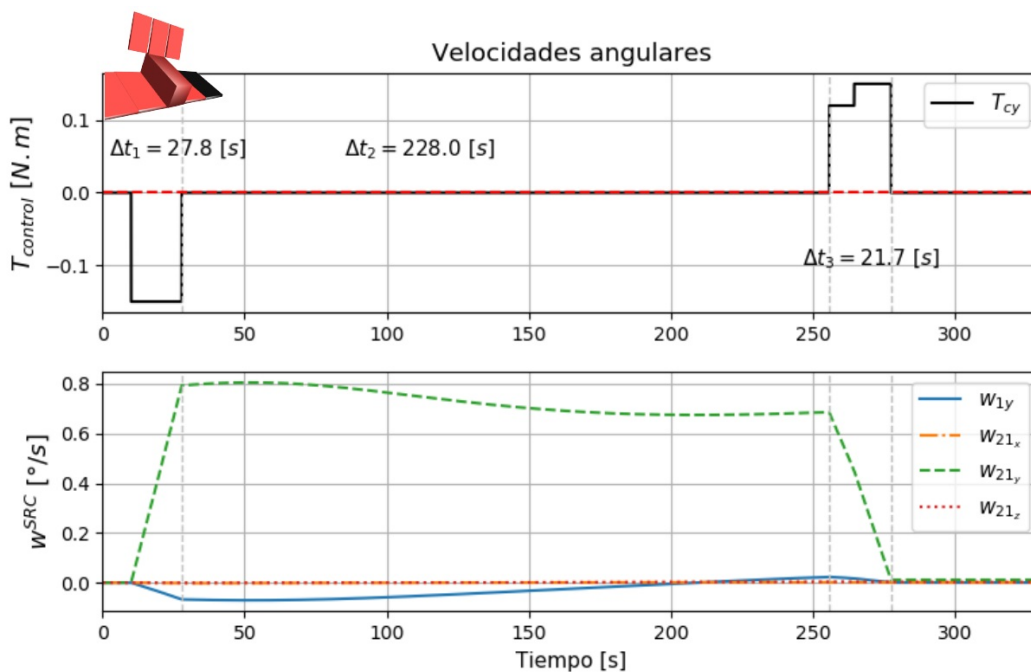


Figura 5.22: Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en *SRC1* y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 5.

5.3.6. Sexto despliegue

El sexto y último despliegue del *SAT* va de la configuración *C6* a *C7*, con una rotación de 180° . En las figuras 5.23 a 5.25 se muestran los resultados simulados de

orientación absoluta y relativa, y velocidades angulares.

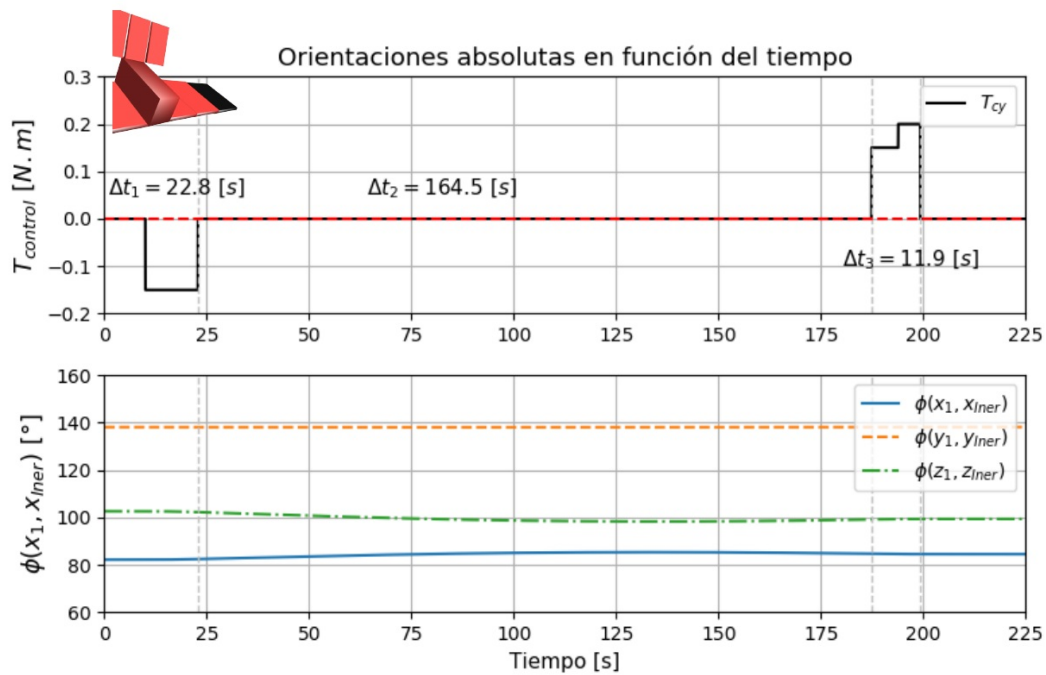


Figura 5.23: Orientaciones de los cuerpos 1 y 2 del modelo del *SAT* respecto a un *SRI* durante el despliegue 6.

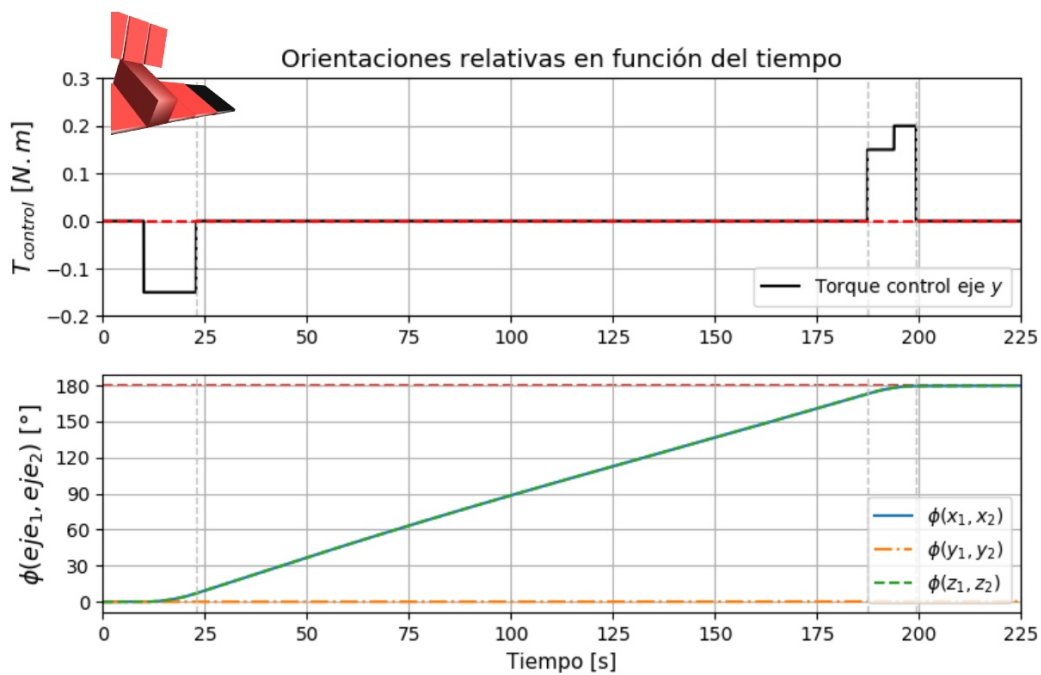


Figura 5.24: Orientaciones relativas entre los cuerpos 1 y 2 del del modelo del *SAT* durante el despliegue 6.

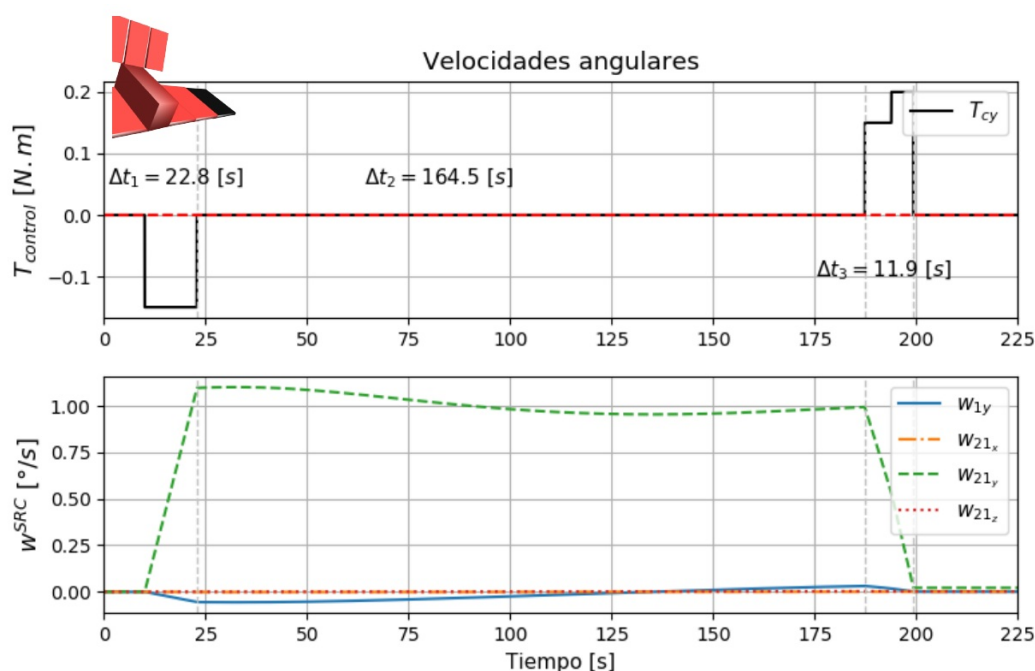


Figura 5.25: Componente y de la velocidad angular $w_1^{(1)}$ expresada en $SRC1$ y velocidad angular de despliegue $w_{21}^{(1)}$ simulada para el despliegue 6.

Discusión sobre las simulaciones con el modelo de junta esférica

Las simulaciones realizadas con este modelo están sujetas a las hipótesis descritas en la sección 5.3. Sin embargo, se encontró un comportamiento similar al observado en las mediciones de velocidad angular del satélite real, con lo que podría tomarse a este desarrollo como una línea de base para agregar complejidades al modelo en futuros trabajos. En la tabla 5.1 se presenta un resumen de los resultados obtenidos de: diferencia entre ángulos de los ejes del $SRC1$ y ejes del SRI ($\Delta\phi := \phi|_{t=t_f} - \phi|_{t=0}$), tiempo total de despliegue (t_d):

	Cuerpo 1	Cuerpo 2	$\Delta\phi_{x_1x_{In}} [^{\circ}]$	$\Delta\phi_{y_1y_{In}} [^{\circ}]$	$\Delta\phi_{z_1z_{In}} [^{\circ}]$	t_d [s]
D1*	X1234	X567	-	-	-	171.0
D2	X12345	X67	6	0	13	285.0
D3	X123456	X7	4	0	1	218.2
D4	X4567	X123	3	0	10	163.4
D5	X45671	X23	5	0	3	277.5
D6	X456712	X3	3	0	2	199.2

Tabla 5.1: Tabla con el resumen de los resultados obtenidos para los seis despliegues simulados.

*No se disponía de los valores de orientación absoluta en el primer despliegue.

Por cuestiones de confidencialidad en los datos reales, no se muestran las gráficas correspondientes a las mediciones. Para la realización de las simulaciones se utilizó información del torque aplicado en la junta, y la velocidad angular relativa promedio, para intentar simular los tiempos totales de cada uno de los despliegues reales. El error

promedio entre los tiempos simulados y reales de los seis despliegues es del 15 %, con errores mínimos y máximos del 7 % y 25 %, respectivamente. Para la orientación absoluta, resulta de mayor utilidad el error definido como la diferencia máxima entre los ángulos existentes entre ejes del cuerpo central y ejes del *SRI* (al finalizar cada despliegue), que el error relativo porcentual. Con dicha consideración, se obtuvo un error máximo de 15°.

Se pudieron implementar diferentes funciones para el torque de control en la junta, como ser función del ángulo de despliegue ϕ , de la velocidad angular relativa w_{21} , del tiempo, de la energía entregada al sistema, o de combinaciones de las anteriores. La velocidad relativa suele ser un dato medido, aproximadamente constante, durante el despliegue, por lo que resulta en esos casos un requerimiento en el diseño de la función de T_j . Para las simulaciones presentadas se efectúa un torque de control de tipo escalón, que actúa durante un $\Delta\phi$ determinado en la primera etapa. Durante esta aceleración, se calcula la energía entregada al *SAT* como la suma sobre la entregada a cada cuerpo: $\int_{t_1}^{t_2} (T_j^{(i)} \cdot w_i) dt$. Luego de actuar por un tiempo correspondiente a la variación $\Delta\phi$, el torque deja de actuar, y se mantiene en valor nulo hasta que el ángulo de despliegue ϕ alcanza un segundo valor, previamente definido. En este momento, actúa en sentido opuesto hasta quitar la energía entregada durante la primer etapa, dejando al satélite en reposo como al inicio.

Otro efecto que puede verse de las simulaciones es la variación máxima en los ángulos entre los ejes del cuerpo principal y el *SRI*. Para el segundo y tercer despliegue, esta variación es de aproximadamente 13° y 4°, respectivamente. Para los despliegues cuatro, cinco y seis, es de 10°, 5° y 3°, respectivamente. Esto indica que la desviación máxima, que se puede pensar como el máximo desvío de la orientación respecto a aquella estabilizada por los sistemas de control antes de realizarse cada despliegue, va disminuyendo según la secuencia empleada. Es posible que esto se deba a que entre los despliegues uno y tres, la masa de componentes del *RAD* que se despliega es cada vez menor, como también su inercia. Lo mismo ocurre para el caso de los despliegues cuatro a seis. Predicciones más precisas en la orientación final de satélites luego de sus despliegues, que incluyan efectos de rotaciones iniciales, o acción de torques externos, resultan de interés para la elección de diferentes estrategias de control de orientación, con lo que se promueve la continuación del presente desarrollo.

Capítulo 6

Conclusiones

“No vemos las cosas como son realmente, sino que más bien las vemos como somos nosotros.”

— Anaïs Nin

En el presente proyecto se estudió la teoría de la cinemática y dinámica rotacional de los cuerpos rígidos, a partir de la investigación de diferentes fuentes^{[1][2][5][8]}, para su aplicación en la realización de un *software* capaz de simular la dinámica rotacional de un satélite con apéndices móviles. En particular, fue de interés la simulación de la dinámica durante el despliegue de dichos apéndices, para obtener información que resulta de utilidad en la elección de diferentes estrategias de control de orientación de los satélites en órbita. Para ejemplificar, una estrategia conservativa es realizar los despliegues de paneles solares o antenas con los sistemas de control de orientación inactivos, y luego corregir la orientación mediante técnicas *pasivas* (no consumen combustible) o *activas*^[1]. Un simulador que permita predecir la orientación y su dinámica antes, durante, y después de un despliegue es una herramienta útil para la determinación de la estrategia más conveniente, según el caso que se considere. Para lograr este objetivo, se trabajó sobre el desarrollo de modelos físicos, matemáticos y computacionales.

En primer lugar se realizó una investigación sobre trabajos de diferentes autores que desarrollaron las ecuaciones de la dinámica rotacional de n cuerpos rígidos a partir de la mecánica *Lagrangiana*¹. Se observó que este enfoque general tiene un gran potencial en la resolución de problemas y sistemas varios. Sin embargo, para el problema específico que se deseaba resolver, se consideró al enfoque tradicional de *Newton* con mayores ventajas, por lo que fue el elegido para la implementación de los modelos. No significa que el enfoque de *Lagrange* deba descartarse, ya que provee ecuaciones

¹La mecánica de *Lagrange* o *Lagrangiana* es un enfoque posterior al enfoque tradicional de *Newton*, que permite analizar los fenómenos físicos de la mecánica clásica a partir del uso de una cantidad denominada *Lagrangiano* (\mathcal{L}), definida como la energía cinética menos la energía potencial de algún sistema mecánico. Conociendo \mathcal{L} , es posible obtener las ecuaciones dinámicas del sistema, de forma analítica, aplicando las ecuaciones de *Lagrange*.

cerradas que pueden utilizarse para facilitar ciertos análisis, como la reducción a problemas equivalentes de un único grado de libertad, mediante un potencial efectivo, por ejemplo. Si se desea en el futuro evaluar la implementación con esta técnica, una buena referencia es la tesis doctoral de *Shen Q.*^[10].

Una vez elegido el enfoque tradicional para el desarrollo de los modelos matemáticos, se trabajó principalmente con bibliografías específicas en el área aeroespacial, como lo son los libros de los autores *Wertz*^[1], *Sidi*^[2], *Markley*^[5] y *Kane*^[7], junto con la publicación usada como referencia principal, de *Stoneking*^[8]. A partir de su lectura, se estudió un modelo matemático de dos cuerpos rígidos, junto con dos modelos de juntas para su vínculo: esférica y de revolución. El trabajo de *Stoneking* resulta computacionalmente práctico e intuitivo. Además, presenta un desarrollo para la extensión a n cuerpos rígidos, que se propone como continuación del presente proyecto para trabajos futuros. Junto con esta publicación, se sugiere la lectura del autor *Kane* en paralelo para un mayor entendimiento. En la generalización a n cuerpos, útil para representar satélites con un número variable de apéndices y despliegues simultáneos, se propone como implementación computacional una estructura de tipo *árbol*, si se desea continuar la implementación en lenguaje *C*, como la descrita en el capítulo 3.

Los resultados se dividieron en dos capítulos: uno de validación del código desarrollado con casos teóricos, donde se pudieron verificar los chequeos de conservación de momento angular total expresado en un sistema de referencia inercial, conservación de la energía y momento lineal total constante en ausencia de fuerzas externas. Por otro lado, un capítulo donde se usó el modelo de junta esférica, para la simulación de los seis despliegues parciales con los que se desplegó la antena radar de un satélite real. Para esta última simulación, se trabajó con datos reales de masas, inercias, y geometrías, y con mediciones de velocidad angular y orientación. Todos estos datos tuvieron que ser adaptados para su uso con los modelos físico, matemático y computacional, y su posterior simulación. Mediante estas simulaciones, se obtuvieron resultados similares a los observados en las mediciones (15% de error promedio en tiempo total de despliegues y error máximo en la orientación absoluta de 15°), aún bajo las hipótesis simplificadoras del modelo usado. Se considera que esta tesis, junto con las bibliografías consultadas, es una buena línea de base para futuras implementaciones, que deberían contemplar: la continuidad en el desarrollo del modelo de junta de revolución y la simulación de los seis despliegues comentados, para su comparación con el modelo de junta esférica y con los datos reales; extensión del trabajo a más cuerpos rígidos vinculados, añadiendo las ecuaciones de n cuerpos al sistema, donde se sugiere el uso de una estructura computacional de tipo *árbol*; la inclusión de un modelo de ruedas de inercia; agregado del efecto de acciones externas; y el estudio y diseño de lazos de control en tres ejes, pensados para mantener la orientación del satélite. Esto es posible ya que las ecuaciones planteadas y el *software* implementado contemplan la posibilidad de su agregado.

Bibliografía

- [1] J. R. Wertz, *Spacecraft attitude determination and control*. Kluwer Academic Pub, 1999. [1](#), [2](#), [8](#), [13](#), [69](#), [70](#)
- [2] M. J. Sidi, *Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach*. Cambridge University Press, 1997. [1](#), [2](#), [69](#), [70](#)
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, vol. 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 1960. [2](#)
- [4] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980. [2](#)
- [5] F. L. Markley and J. L. Crassidis, *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Springer, 2014. [2](#), [11](#), [69](#), [70](#)
- [6] D. A. Vallado and W. D. McClain, *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Microcosm Press, 2013. [8](#)
- [7] T. R. Kane, P. W. Likins, and D. A. Levinson, *Spacecraft dynamics*. McGraw-Hill, 1983. [vii](#), [12](#), [13](#), [21](#), [70](#)
- [8] E. Stoneking, “Newton-euler dynamic equations of motion for a multi-body spacecraft,” *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2007. [16](#), [18](#), [19](#), [21](#), [69](#), [70](#)
- [9] K. Radhakrishnan and A. C. Hindmarsh, “Description and use of lsode, the live-more solver for ordinary differential equations,” 1993. [27](#)
- [10] Q. Shen, *On the dynamics of spacecraft with flexible deployable and slewing appendages*. National Library of Canada, 1994. [70](#)

Agradecimientos

A mi padre, por esas frases motivadoras e inspiradoras. A mi madre, por esa mirada siempre atenta y presente. A mi hermana, por esa eterna y grata compañía. A todos los Manfre, a Susi y Clau, por estar siempre. A Graciela, por su presencia incondicional y consejos. Al Mono, por esos debates en momentos de desesperación. A Uriel, por esos viajes tempranos a *INVAP*, con su correspondiente café. A mis directores Agustín y José, por todo el trabajo en conjunto de dos semestres. A Tobías, por su tiempo para escuchar mis modelos. Al Pampa, por esos consejos alentadores. A mis increíbles amigos *IB16*, por esta gran etapa. Y para cerrar, y muy importante, a Pecash, por esa incondicional compañía y aguante todo este tiempo.

