

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**FLUCTUACIONES CUÁNTICAS DE LA ENERGÍA DEL
VACÍO Y SUS EFECTOS EN LA EXPANSIÓN DEL
UNIVERSO**

Ezequiel Lozano
Maestrando

Dr. Francisco Diego Mazzitelli
Director

Miembros del Jurado
Dr. Gonzalo Torroba (Instituto Balseiro)
Dra. Marina Huerta (Instituto Balseiro)
Dr. Diego Correa (UNLP)

Diciembre de 2019

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica
Universidad Nacional de Cuyo
S.C. de Bariloche, Argentina

A mis padres, Ana y Héctor.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	ix
Abstract	xi
1. Introducción	1
2. El problema de la constante cosmológica	3
2.1. Un universo en expansión	3
2.2. Gravedad semiclásica y gravedad estocástica	7
2.3. Energía de punto cero	8
3. Problema de la constante cosmológica en De Sitter	15
3.1. Campo escalar en la métrica de De Sitter	15
3.2. Traza del tensor de energía-momento	18
3.3. Renormalización del tensor de energía-momento	22
3.4. Ecuación para la curvatura escalar	24
3.5. PCC en De Sitter	26
3.5.1. Campo escalar	27
3.5.2. Campo fermiónico	31
3.5.3. Campo fermiónico y escalar	34
4. Gravedad estocástica y cut-off ultravioleta	39
4.1. Fluctuaciones del vacío	40
4.2. Gravedad estocástica y resonancia paramétrica	42
4.2.1. Constante de Hubble	44
4.2.2. Argumento intuitivo	48
4.3. Trabajos posteriores	50
5. Osciladores estocásticos y movimiento browniano	53
5.1. Resultados clásicos para osciladores armónicos	53

5.1.1.	Osciladores deterministas	54
5.1.2.	Osciladores estocásticos	55
5.2.	Movimiento Browniano cuántico	57
5.2.1.	Desarrollo perturbativo	58
5.2.2.	Frecuencia renormalizada positiva	61
5.2.3.	Frecuencia renormalizada negativa	66
6.	Gravedad estocástica y regularización dimensional	77
6.1.	Campo escalar	78
6.1.1.	Valor medio de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$	78
6.1.2.	Covarianza	82
6.1.3.	Comparación con regularización por cut-off	94
6.1.4.	Transformada de Fourier de la covarianza	96
6.2.	Campo fermiónico	101
6.2.1.	Valor medio de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$	102
6.2.2.	Covarianza	104
6.2.3.	Transformada de Fourier de la covarianza	111
6.3.	N campos	113
6.4.	Influencia sobre la expansión del universo	116
6.4.1.	Condición para frecuencia positiva	116
6.4.2.	Condición para frecuencia negativa	121
7.	Conclusiones	125
A.	Relatividad general	129
A.1.	Definiciones de RG	129
A.2.	Ecuaciones de Friedmann generalizadas	130
A.2.1.	Ecuaciones de Einstein no diagonales	133
A.2.2.	Ecuaciones de Friedmann en FLRW	134
A.3.	Tensores de RG para De Sitter	134
A.3.1.	Curvatura escalar	134
A.3.2.	Tensor de Ricci	134
A.3.3.	Símbolos de Christoffel	135
A.3.4.	Tensor de Riemann	135
A.3.5.	Tensor de Einstein	135
A.3.6.	Contracciones invariantes	135
B.	Cuentas auxiliares para los Cap. 1 a 5	137
B.1.	Tensor energía-momento para un campo escalar	137
B.1.1.	Demstración de identidades	139

B.1.2. Campo escalar en Minkowski	143
B.1.3. Campo escalar sin acoplamiento a la curvatura	144
B.2. Ecuación de estado del modelo	144
B.3. Identidad estadística	145
B.4. Desarrollo de un campo escalar en una métrica conforme general	147
B.5. Cálculo de $R_n(t - t')$	149
B.6. Ruido y disipación para $I(\omega) = \theta(\omega) \omega^n$	151
B.6.1. $D(t - t')$	151
B.6.2. $R_p(t - t')$	153
B.7. Integración de $R_p''''(t)$	154
C. Cuentas auxiliares para el Cap. 6	157
C.1. Convenciones para el campo fermiónico	157
C.2. Esféricas en N dimensiones	158
C.3. Integrales utilizadas	159
C.4. Demostración de la identidad de la covarianza	159
C.5. Integrales para la covarianza del campo escalar	161
C.5.1. Caso no masivo	165
C.5.2. Integrales de la covarianza para separación temporal	166
C.5.3. Integrales de la covarianza para separación espacial	168
C.6. Integrales para la covarianza del campo fermiónico	170
Bibliografía	173
Agradecimientos	177

Resumen

En esta tesis discutimos los efectos de las fluctuaciones del tensor de energía-momento, alrededor de su valor medio, en la expansión acelerada del universo. Primero analizamos la formulación del problema de la constante cosmológica (PCC) en el contexto de gravedad semiclásica, poniendo particular atención a la dependencia de los resultados con la metodología de regularización. Remarcamos también las similitudes/diferencias que aparecen al calcular la energía de punto cero de los campos cuánticos, en el espacio-tiempo de Minkowski o en el de De Sitter, de una forma autoconsistente. Luego, para entender el rol del ruido en el PCC, estudiamos un modelo de juguete de una partícula Browniana acoplada a un entorno (la partícula Browniana emula el factor de escala del universo y el entorno emula los campos cuánticos). Cuando el ruido es multiplicativo, la partícula Browniana satisface la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia estocástica. El oscilador puede ser el usual o uno invertido, dependiendo de los parámetros elegidos. Mostramos que, tomando parámetros correspondientes a un oscilador invertido y bajo las condiciones adecuadas, el ruido puede estabilizar el oscilador a través de un mecanismo similar a la estabilización del péndulo de Kapitza. Finalmente, analizamos críticamente trabajos recientes donde se afirma que las fluctuaciones del tensor de energía-momento de los campos cuánticos, alrededor de su valor medio, pueden resolver el PCC. Trabajando en el contexto de gravedad estocástica, y usando resultados del modelo de juguete para osciladores con frecuencia estocástica, discutimos condiciones bajo las cuales uno podría resolver el PCC, y su dependencia con el método de regularización.

Abstract

In this thesis, we discuss the effects of the fluctuations of the energy momentum tensor, around its mean value, on the accelerated expansion of the universe. We first discuss the formulation of the cosmological constant problem (CCP) in the context of semiclassical gravity, paying particular attention to the dependence of the results with the regularization process. We point out too, the similarities/differences that arise when computing the zero-point energy of the quantum fields in Minkowski or De Sitter spacetimes, in a self-consistent way. Then, in order to understand the role of noise in the CCP, we analyze the toy model of a Brownian particle coupled to an environment (the Brownian particle mimics the scale factor of the universe and the environment mimics the quantum fields). When the noise is multiplicative, the Brownian particle satisfies the equation of a harmonic oscillator with stochastic frequency. The oscillator can be the usual or an inverted one, depending on the choice of certain parameters. We show that, choosing the parameters corresponding to the upside down oscillator and under appropriate conditions, noise can stabilize the oscillator, through a mechanism similar to the stabilization of the Kapitza pendulum. Finally, we analyze critically recent works where it was argued that the fluctuations of the energy-momentum tensor of quantum fields, around its mean value, could resolve the CCP. Working in the context of stochastic gravity, and using the results of the toy model for oscillators with stochastic frequency, we discuss conditions under which one could solve the CCP, and their dependence with the regularization method.

Capítulo 1

Introducción

En el marco de la teoría cuántica de campos (TCC), el estado de vacío cuenta con una densidad de energía no nula. Pero un cálculo directo de la misma para cualquier tipo de campo da infinito. Esto no es un problema si consideramos únicamente la métrica de Minkowski ya que es posible redefinir el cero de energía. Pero incluso así, la energía de vacío en presencia de contornos tiene efectos físicos observables, e.g. efecto Casimir. Por otro lado, como en la teoría general de la relatividad todo tipo de masa-energía gravita, en principio no podríamos ignorar esta energía del vacío. Entonces, sería razonable concluir que el vacío contribuye a la densidad de masa-energía del universo de forma no trivial. Increíblemente el universo se comporta como si hubiera una densidad de energía homogénea en todo punto del espacio. Esta genera, desde el punto de vista de las ecuaciones de campo de Einstein, el efecto de una constante cosmológica. Mediante mediciones astronómicas el valor de dicha constante se ha obtenido con gran precisión, y su efecto en nuestro universo es hacer que se expanda de forma acelerada. Teniendo en cuenta lo anterior, es directo hacer la conexión con la TCC donde la energía del vacío sería la causante de dicha expansión, ya que cumple con la propiedad de ser una densidad de energía homogénea presente en todo el espacio. Pero debido a que es una cantidad no acotada, se debe buscar algún proceso de regularización y renormalización que permita obtener un valor físico.

La forma más simple es considerar la métrica de Minkowski y luego regularizar mediante un cut-off ultravioleta en la escala de Planck. Si realizamos este proceso, el valor de la densidad de energía del vacío nos da unos 122 órdenes de magnitud mayor que el valor medido. Mediante otros métodos, como regularización dimensional, es posible reducir este número hasta “sólo” 54 órdenes de magnitud mayor que el medido. Claramente hay un problema de base en la forma que se está encarando el problema.

En trabajos recientes [1, 2, 3], Wang et al. propusieron una alternativa al método tradicional para solucionar el llamado “problema de la constante cosmológica”. Ellos siguen regularizando con un cut-off ultravioleta, pero ahora tienen en cuenta las fluctuaciones del tensor energía-momento alrededor de su valor medio. Las mismas producirían un efecto de

amplificación paramétrica, logrando así una constante cosmológica, que con el valor de cut-off adecuado, estaría en concordancia con lo observado.

Estos resultados han sido criticados [4, 5] por dos razones. Primero el uso de un método de regularización no invariante de Lorentz, que produce la ecuación de estado de un gas de fotones y no la de una constante cosmológica. Y segundo, que el resultado que obtienen es dependiente del método de regularización que utilizaron, cuando con otros métodos hay elecciones arbitrarias de parámetros que podrían cambiar dicho resultado.

En la presente tesis plantaremos primero el PCC, poniendo énfasis en los métodos de regularización y considerando la energía de punto cero en el espacio-tiempo de De Sitter. Luego analizaremos más en detalle los efectos en la expansión del universo de las fluctuaciones del $T_{\mu\nu}$ alrededor de su valor medio. Para ello comenzaremos estudiando un modelo de juguete, inspirado en el movimiento Browniano, que nos ayudará a entender como ciertas fluctuaciones pueden estabilizar un sistema tipo péndulo invertido. Con los resultados obtenidos, haremos un análisis crítico de la propuesta de Wang et al., pero utilizando un método de regularización que preserva la invariancia, en concreto regularización dimensional con sustracción minimal. Mostraremos como bajo este esquema es posible obtener condiciones para la estabilidad diferentes a las calculadas en [1].

La estructura de la tesis es la siguiente: en el Capítulo 2 daremos una descripción más detallada del problema de la constante cosmológica en Minkowski, enfatizando el rol del método de regularización en los resultados. En el Capítulo 3 repetiremos dicha descripción, pero en la métrica de De Sitter, ya que esta métrica es la solución autoconsistente de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica y en vacío. En el Capítulo 4 comentaremos las propuestas y resultados principales del trabajo de Wang et al., así como las críticas a los mismos. En el Capítulo 5 resumiremos resultados de la literatura relacionados a la estabilización de péndulos clásicos, perturbados de forma determinista o estocástica. También desarrollaremos un modelo de movimiento Browniano, donde se puede observar estos efectos estabilizadores más fácilmente que en el caso gravitatorio. En el Capítulo 6 presentaremos nuestro enfoque al problema de la constante cosmológica comparándolo con el de Wang et al., y finalmente en el Capítulo 7 daremos nuestras conclusiones.

A lo largo de este trabajo se usarán unidades naturales $c = 1$, $\hbar = 1$ y $k_B = 1$ (constante de Boltzmann). Nuestra elección de signos es $(-++)$ en la convención de [6, MTW]. Símbolos en negrita, e.g. \mathbf{k} , indican la parte espacial de los vectores, y sus potencias se sobreentiende que son del módulo $|\mathbf{k}|$. Para los diferenciales de integración se utilizará la notación $|\mathbf{k}| = k$. Se distinguirá esto de los cuadvectores, que usan la misma notación, en todo momento que pueda haber confusión.

Capítulo 2

El problema de la constante cosmológica

“The miracle of physics that I’m talking about here is something that was actually known since the time of Einstein’s general relativity; that gravity is not always attractive.”

— Alan Guth

2.1. Un universo en expansión

Desde 1998, y gracias a observaciones de supernovas tipo Ia, sabemos que nuestro universo se está expandiendo de forma acelerada. Este descubrimiento, que mereció un premio Nobel en el 2011, resultó ser una gran sorpresa para la comunidad científica. Hasta ese momento se creía que la expansión del universo, de la que se tenía constancia desde 1927 gracias al trabajo de Hubble y Lemaître, se estaba desacelerando.

Para explicar este fenómeno se han propuesto diferentes alternativas, incluyendo modificaciones a las ecuaciones de campo de Einstein. Actualmente la hipótesis más aceptada es la llamada “energía oscura”, que en términos simples postula la existencia de una densidad de energía homogénea en todo el espacio. Independientemente de su origen, dicha densidad de energía, al ser espacialmente homogénea (el contenido de energía total no se diluye al expandirse el universo) produciría el efecto de una expansión acelerada. Para entender esto, debemos ver como se introduce la contribución de la energía oscura a las ecuaciones de Einstein.

Actualmente el modelo más usado en cosmología, para describir en primera aproximación el universo en sus escalas más grandes, es el llamado modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). El mismo se formula a partir de dos hipótesis: que el universo es homogéneo y que es isótropo a grandes escalas. Usando únicamente esto, es posible

deducir la métrica de FLRW [7], que en su forma más general es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Sigma^2, \quad (2.1)$$

donde $d\Sigma^2$ es la parte espacial. La misma presenta curvatura constante que puede ser positiva, negativa o cero (espacio cerrado, abierto o plano respectivamente). $a(t)$ es una función solo del tiempo llamada “factor de escala”.

Como resulta que nuestro universo, dentro de la precisión experimental actual, es plano, la parte espacial corresponderá a la de curvatura nula. Entonces en coordenadas cartesianas la métrica queda

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.2)$$

Ahora, es directo ver que el factor de escala nos indica cómo cambia con el tiempo la distancia física entre puntos. Más precisamente, la distancia L entre un punto espacial \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 está dada por

$$L(t) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{a^2(t)} dl = |a(t)| |\Delta \mathbf{x}|, \quad (2.3)$$

donde $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Nótese que la métrica surge únicamente de la hipótesis de homogeneidad e isotropía, las ecuaciones de Einstein no fueron utilizadas.

Ahora, para tener una descripción completa necesitamos obtener el factor de escala. Una ecuación para el mismo se deduce de aplicar las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

donde Λ es la llamada “constante cosmológica”, y el resto de los tensores se definen en el Apéndice A.

Como comentario, es sorprendente que la constante cosmológica haya sido introducida por Einstein ya en 1917 con el objetivo de mantener al universo estático. Esto es posible si usamos una métrica con curvatura espacial no nula. Luego, la constante cosmológica se puede ajustar para balancear el efecto de la curvatura y dar así un universo estático. Lamentablemente para Einstein, esta solución resultó ser inestable, y luego de que Hubble mostrara que el universo se estaba expandiendo, se desechó la idea de una constante cosmológica, para luego resurgir varios años después con el descubrimiento de la expansión acelerada. Desde un punto de vista constructivo, o sea, si dedujéramos las ecuaciones de Einstein desde un principio variacional, la introducción de la constante cosmológica resulta más natural, como el segundo término más simple que se puede colocar luego de la curvatura de Ricci.

Si utilizamos la métrica de la Ec. (2.2) para calcular el tensor de Ricci y la curvatura de

Ricci, las ecuaciones diagonales de Einstein se reducen a dos ecuaciones para el factor de escala, conocidas como ecuaciones de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i\right) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.6)$$

donde $\rho = T_{00}$ y $p_i = T_{ii}/a^2$. Esto se muestra en detalle en el Apéndice A.

Si ahora hacemos los reemplazos

$$\rho \rightarrow \tilde{\rho} - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.7)$$

$$p_i \rightarrow \tilde{p}_i + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.8)$$

se puede eliminar la constante cosmológica de las Ecs. (2.5) y (2.6), quedando

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\tilde{\rho} + \sum_{i=1}^3 \tilde{p}_i\right), \quad (2.10)$$

donde nótese que si $\tilde{\rho} + \sum_{i=1}^3 \tilde{p}_i$ no depende de a , entonces la Ec. (2.10) es la de un oscilador armónico para a .

Es directo ver también como la contribución de la constante cosmológica a la densidad y presión (en las Ecs. (2.7) y (2.8)) genera una ecuación de estado $\rho = -p$. Un gas de radiación de cuerpo negro produciría en cambio $\rho = 3p$. Esto será importante luego.

De la Ec. (2.7) se ve porqué se puede entender a la constante cosmológica como una densidad de energía homogénea presente en todo el espacio. Esta contribución es la llamada energía oscura.

De la Ec. (2.9) es directo ver que si consideramos únicamente la contribución de Λ a $\tilde{\rho}$, el factor de escala será

$$\dot{a} = H a \rightarrow a(t) = a(0) e^{H(t-t_0)}, \quad (2.11)$$

donde $H^2 = \Lambda/3$. H es la llamada constante de Hubble, ya que es el parámetro principal de la ley de Hubble–Lemaître, que da el corrimiento al rojo de las galaxias en función de su distancia a nosotros.

Vemos así que una constante cosmológica, de ser la principal contribución a la densidad de energía del universo, produciría una expansión exponencial del mismo, tal como la observada en nuestro universo.

Mediante observaciones astronómicas se ha determinado que la energía oscura representa el $\sim 69\%$ del contenido de masa-energía del universo, ciertamente no despreciable. Siendo el resto materia oscura ($\sim 26\%$) y materia bariónica ($\sim 5\%$).

Esto se traduce en

$$\Lambda = 4.63 \times 10^{-84} \text{ GeV}^2 \quad \rightarrow \quad \rho_\Lambda = 2.75 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4, \quad (2.12)$$

donde ρ_Λ es la densidad de energía asociada a la constante cosmológica. Esta resulta ser equivalente al contenido de energía en la masa de 3.8 protones por metro cúbico. Ciertamente minúscula para escalas humanas, pero debido a su presencia constante a lo largo de todo el universo, su efecto en la evolución del mismo es enorme.

Ahora, asumiendo que el causante de la expansión acelerada del universo es la energía oscura podemos plantear el “problema de la constante cosmológica” (PCC). Este es la cuestión de porque la misma tiene el valor que tiene, o más concretamente ¿porque es tan pequeña y no exactamente cero?

Esta pregunta podría parecer de carácter metafísico, ya que por un lado, al ser una cantidad dimensional, hay que compararla con otra para poder hablar de “pequeña” o “grande”. Y por otro, uno podría aceptar el valor experimental simplemente como cualquier otra constante de la naturaleza. De hecho, el llamado “modelo estándar de la cosmología”, o modelo Lambda-CDM, toma el porcentaje de la energía total del universo que es la materia bariónica y la materia oscura (y por lo tanto la energía oscura, ya que esas son las únicas tres contribuciones que considera) como dos de los seis parámetros, independientes, que se le deben dar a la teoría de forma experimental.

Más allá de cuestiones epistemológicas, hay un problema adicional que nos permite extender y precisar el PCC. El mismo consiste en preguntarse por qué el valor experimental difiere tanto (de 54 a 122 órdenes de magnitud) del valor calculado teóricamente. Pero, para entender esto mejor, primero tenemos que ver de dónde se teoriza que proviene la energía oscura.

El origen de la energía oscura es uno de los grandes problemas no resueltos de la física teórica, por lo que hay varias propuestas diferentes que se han planteado a lo largo de los años. Una de las posibles soluciones es la que surge naturalmente al estudiar la TCC. Pero antes de ver que tiene para decir sobre la energía oscura el esquema teórico que es la TCC, vamos a ver cómo es posible introducir efectos cuánticos a la teoría general de la relatividad.

2.2. Gravedad semiclásica y gravedad estocástica

Como ya mencionamos las ecuaciones de Einstein están dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (2.13)$$

Por un lado tenemos la geometría, caracterizada por el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. La cuantización de la misma es el área de trabajo de las teorías de gravedad cuántica, que escapan del objetivo de esta tesis. Por otro, está la constante cosmológica Λ , de la que se habló en detalle en la sección anterior. Y finalmente tenemos el contenido de masa y energía caracterizado por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Debido a que en el contexto de la mecánica cuántica existe un formalismo que nos provee de $\hat{T}_{\mu\nu}$ como operador, es directo considerar el procedimiento más simple para introducir efectos cuánticos. Esta metodología es la llamada gravedad semiclásica y conceptualmente consiste en considerar a los campos de materia como cuánticos, mientras que el espacio-tiempo donde viven es clásico [8]. Luego la dinámica de la materia y del espacio-tiempo se resuelve de forma autoconsistente. Para esto colocamos como fuente de las ecuaciones de Einstein el valor medio del $\hat{T}_{\mu\nu}$ en el estado del sistema. Con esto se obtienen las llamadas ecuaciones de Einstein semiclásicas,

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle . \quad (2.14)$$

Cabe destacar que por si solo $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ no está bien definido, debido a que presenta divergencias ultravioletas. Por esto, es siempre necesario algún método de regularización y renormalización, donde en general se deben agregar términos extra a la acción de Einstein–Hilbert para absorber todas las divergencias. Veremos más adelante en este capítulo como diferentes métodos de regularización llevan a resultados diferentes para el PCC.

Gravedad semiclásica es lo que se ha utilizado históricamente para analizar los efectos del vacío cuántico en la evolución del universo, y es lo que haremos en este capítulo y en el Capítulo 3. Pero antes de eso, mencionaremos una alternativa que será más relevante en los Capítulos 4 a 6.

Si se quiere mejorar la aproximación de sólo tener en cuenta el valor medio de $\hat{T}_{\mu\nu}$, se pueden considerar sus fluctuaciones. Esto da lugar a la llamada gravedad estocástica. El procedimiento habitual [9, 10] consiste en obtener un observable que describe las fluctuaciones del $\hat{T}_{\mu\nu}$ al orden más bajo. Este es el bi-tensor núcleo de ruido, definido a partir de la función de correlación de dos puntos del $\hat{T}_{\mu\nu}$,

$$N_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) = \langle \{ \hat{T}_{\mu\nu}(x) - \langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle, \hat{T}_{\rho\sigma}(y) - \langle \hat{T}_{\rho\sigma}(y) \rangle \} \rangle , \quad (2.15)$$

donde $\{ \dots \}$ es el orden simétrico de operadores (1/2 del anticonmutador), y x e y son

puntos del espacio-tiempo. Este núcleo resulta ser real y, para campos cuánticos lineales, está libre de divergencias ultravioletas. Notar que si consideramos a $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ como una variable aleatoria, la Ec. (2.15) es la covarianza entre $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ y $\hat{T}_{\mu\nu}(y)$.

Ahora podemos definir un campo tensorial estocástico (clásico) $\xi_{\mu\nu}(x)$, mediante sus propiedades estadísticas,

$$\langle \xi_{\mu\nu}(x) \rangle_s = 0, \quad (2.16)$$

$$\langle \xi_{\mu\nu}(x) \xi_{\rho\sigma}(y) \rangle_s = N_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y), \quad (2.17)$$

donde $\langle \dots \rangle_s$ significa media estadística. Con lo anterior podemos escribir las llamadas ecuaciones de Einstein-Langevin

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle + \xi_{\mu\nu} \right). \quad (2.18)$$

Nótese que por simplicidad no se está perturbando la métrica a ningún orden, a diferencia del tratamiento formal que considera una perturbación a la métrica $g_{\mu\nu}$ (solución de la ecuaciones semiclásicas) [9, 10].

Las consecuencias de considerar este término estocástico son el objetivo central de esta tesis, y se discutirán en detalle en capítulos subsiguientes. Ahora seguiremos nuestra discusión del PCC, analizando el origen cuántico de la energía oscura.

2.3. Energía de punto cero

De acuerdo con la TCC, los constituyentes fundamentales del universo no son objetos locales, sino los llamados campos cuánticos, los cuales existen extendidos en todo el espacio. Es posible realizar una analogía entre los campos cuánticos libres y un conjunto de infinitos osciladores armónicos cuánticos (OAC). Con esto en mente, es natural que los campos cuánticos puedan presentar excitaciones, al igual que los diferentes niveles de energía de un OAC. Resulta que dichas excitaciones tienen las propiedades de las partículas que observamos en la naturaleza, y es por esto que se dice habitualmente que las partículas son las excitaciones de los campos cuánticos.

En esta analogía con los OAC es donde surge una de las características más sorprendentes de los campos dentro de la TCC. Su estado fundamental tiene una energía no nula, la cual es a veces llamada “energía de punto cero” (EPC). Esto es cierto para todos los tipos de campos: escalares, vectoriales y espinoriales. Pero cuando uno calcula el valor total de la EPC ¡esta resulta ser infinita!

Hay métodos/argumentos, por lo que se puede ignorar esta energía, lo que equivaldría a hacerla cero, si la métrica es la de Minkowski. Pero al conocer su existencia surge

enseguida la posible relación con la constante cosmológica. Como para la teoría general de la relatividad todo tipo de masa-energía gravita, uno se pregunta ¿no será la EPC de los campos cuánticos la energía oscura? Para poder responder eso primero debemos extraer algún valor físico del infinito que predice un tratamiento ingenuo del vacío en la TCC. Recordemos que en esta sección se analizarán los efectos gravitatorios de los campos en el contexto de la gravedad semiclásica y en la métrica de Minkowski.

La cuestión de manejar infinitos no es nueva en la TCC, al calcular amplitudes de dispersión mediante una serie perturbativa, surgen infinitos para cantidades que son físicas. Debido a esto, durante la segunda parte del siglo XX se inventaron diversas técnicas para extraer valores físicos de los infinitos que aparecen en la teoría. Están son las técnicas de regularización y renormalización, de las cuales se han desarrollado muchas variantes a lo largo de los años. Para el problema que nos atañe, nos importan dos métodos de regularización en particular. Por un lado, la utilización de un cut-off ultravioleta, y por otro, regularización dimensional.

Antes de utilizar técnicas más formales para calcular la EPC, podemos ver una forma de estimarla mediante análisis dimensional. Si consideramos el mínimo volumen que tiene sentido en la TCC, tenemos l_p^3 , donde $l_p = \sqrt{G}$ es la longitud de Planck. Luego por la relación inversa entre escala de distancia y de energía, consideraremos presente en dicho volumen la escala de energía de Planck, $E_p = 1/\sqrt{G}$. Entonces la densidad de energía es

$$\frac{E_p}{l_p^3} = \frac{1}{G^2} \approx 2.22 \times 10^{76} \text{ GeV}^4, \quad (2.19)$$

donde al compararla con la densidad medida, $\rho_\Lambda = 2.75 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4$, se obtienen los famosos 122 órdenes de magnitud de diferencia. Este es el problema que se mencionó al final de la sección anterior. Ahora el PCC se puede plantear de forma más concreta, ¿por qué el valor que surge naturalmente en la TCC difiere tanto del medido experimentalmente?

Salvo un factor numérico, irrelevante para la comparación anterior, el uso de regularización mediante un cut-off ultravioleta arroja el mismo resultado que la estimación de la Ec. (2.19). Por simplicidad consideraremos solamente un campo escalar masivo (para un cálculo detallado de los resultados presentados a continuación ver el Apéndice B).

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right), \quad (2.20)$$

donde usamos la relación habitual $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, y donde $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ es el operador de destrucción y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ el de creación de una excitación de momento \mathbf{k} del campo. Notar que k en los exponentes es el cuadvivector k^μ , contraído con x_μ .

A lo largo de este trabajo todos los valores medios calculados, $\langle \dots \rangle$, serán en el estado

de vacío definido como

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}. \quad (2.21)$$

Entonces el valor medio de la densidad de energía en el estado de vacío, la EPC, se obtiene a partir de la componente diagonal temporal del tensor energía-momento. Lo que equivale al valor medio de la densidad hamiltoniana.

$$\langle \rho \rangle = \langle \mathcal{H} \rangle = \langle T_{00} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2 \phi^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega(\mathbf{k})}{2}. \quad (2.22)$$

Si ahora en vez de integrar hasta infinito, lo hacemos hasta un valor fijo del momento espacial (usamos M para el cut-off) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \int d\Omega \int_0^M \frac{dk}{2(2\pi)^3} \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^M dk \mathbf{k}^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{M^4}{16\pi^2} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{M^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{m^4}{M^4} \log \left(\frac{M}{m} + \frac{M}{m} \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} \right) \right) \\ &\approx \frac{M^4}{16\pi^2} \left(1 + \frac{m^2}{M^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

En la última línea se expandió en potencias de m/M .

Enseguida aparece la dependencia en el término principal con la cuarta potencia del cut-off M . Por lo que, si lo llevamos a la escala de Planck, se obtiene, salvo un factor numérico irrelevante, el mismo resultado que con la estimación dimensional.

Antes de analizar qué sucede al utilizar regularización dimensional, hagamos un paréntesis y veamos que ecuación de estado surge si se utiliza un cut-off ultravioleta. Si obtenemos la presión, definida como alguna de las componentes espaciales de la diagonal del tensor energía-momento (para el caso el valor medio de las tres componentes es el mismo) tenemos

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle T_{ii} \rangle = \frac{1}{2} \langle 2(\partial_i\phi)^2 + \dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2 \phi^2 \rangle = \frac{1}{6} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega(\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{6} \int d\Omega \int_0^M \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^4}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{M^4}{16\pi^2} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{M^2} \right) + \frac{3}{2} \frac{m^4}{M^4} \log \left(\frac{M}{m} + \frac{M}{m} \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{3} \frac{M^4}{16\pi^2} \left(1 - \frac{m^2}{M^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si comparamos el término principal de $\langle p \rangle$ con el de $\langle \rho \rangle$ vemos que la ecuación de estado es

$$\langle \rho \rangle = 3 \langle p \rangle, \quad (2.25)$$

por lo que la energía del vacío estaría teniendo una contribución equivalente a la de un gas de fotones, y no a la de una constante cosmológica. Esto se debe a que el método de regularización que utilizamos no respeta invariancia de Lorentz. Es un resultado general [11, 12], que si se utiliza un método de regularización que respeta invariancia de Lorentz, se obtiene la ecuación de estado de una constante cosmológica. Mientras que en otros casos no está asegurado.

Teniendo en cuenta esto, podemos analizar ahora la técnica de regularización dimensional, que tiene la propiedad de ser invariante de Lorentz. Este método se basa en la idea de cambiar las integrales que son divergentes, por otras que se realizan en una dimensión d arbitraria, siendo d cualquier número complejo [13, 14]. Para esto se define la integral en dimensión arbitraria mediante axiomas que aseguran la convergencia de la misma para todo d . Luego en el límite de d tendiendo a un entero estas nuevas integrales coinciden con las de Riemann. Por lo que la validez del resultado (la “igualdad” entre una integral y la otra) se da en el sentido del límite $d \rightarrow 4$.

Para el caso tenemos que la integral de la densidad es

$$\langle \rho \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega(\mathbf{k})}{2} \rightarrow \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2} \int d^{d-1}k \omega(\mathbf{k}), \quad (2.26)$$

donde μ es un parámetro (con unidades de energía) que introducimos para mantener correctas las unidades de la expresión.

Es posible realizar la integral de forma directa pasando a coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= -\frac{1}{2^{d+1}} \frac{\mu^4}{\pi^{d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \left(\frac{m}{\mu}\right)^d \\ &\approx -\frac{m^4}{64\pi^2} \left(\frac{2}{4-d} + \frac{3}{2} - \gamma_{EM} + \log(4\pi) - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \dots\right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde en la última línea se expandió alrededor de $d = 4$. Ahora podemos, dentro del esquema de sustracción minimal, eliminar el término divergente $\propto (4-d)^{-1}$. Si ignoramos las constantes aditivas, tenemos que

$$\langle \rho \rangle = \frac{m^4}{32\pi^2} \log\left(\frac{m}{\mu}\right). \quad (2.28)$$

Vemos que la contribución va como la cuarta potencia de la masa del campo, en vez de la cuarta potencia del cut-off. Otra cosa a notar es que μ no desapareció del resultado, como uno tal vez hubiera esperado. Esto significa que, por un lado se le debe dar algún

significado físico como escala de energía, y por otro, que el signo de $\langle \rho \rangle$ puede cambiar dependiendo de si $\mu > m$ o $\mu < m$.

Si ahora calculamos la presión,

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2(d-1)} \int d^{d-1}k \frac{\mathbf{k}^2}{\omega(\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{2^{d+1}} \frac{\mu^4}{\pi^{d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \left(\frac{m}{\mu}\right)^d \\ &\approx \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\frac{2}{4-d} + \frac{3}{2} - \gamma_{EM} + \log(4\pi) - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

vemos explícitamente de las Ecs. (2.27) y (2.29), que surge la ecuación de estado correcta para una constante cosmológica, $\langle \rho \rangle = -\langle p \rangle$.

Ahora, si queremos estimar mediante este método el valor de la densidad de energía oscura, no nos alcanzaría con el campo escalar, como en el caso del cut-off, ya que el resultado es fuertemente dependiente de la masa de cada campo. En el caso del cut-off, considerar diferentes campos hubiera cambiado factores numéricos, irrelevantes para la comparación final.

A pesar de eso, resulta que al considerar campos espinoriales y vectoriales, sus contribuciones a $\langle \rho \rangle$ en regularización dimensional son

$$\langle \rho \rangle = n \frac{m^4}{32\pi^2} \log\left(\frac{m}{\mu}\right), \quad (2.30)$$

donde n es un número cuyo módulo es igual a la cantidad de grados de libertad del campo, y cuyo signo es dependiente del tipo de campo (> 0 para bosones y < 0 para fermiones). Para una justificación y cálculos detallados de la Ec. (2.30) y lo que resta del capítulo ver [15].

La expresión de la Ec. (2.30) es válida para todos los campos del modelo estándar, y es correcta incluso para un espacio-tiempo de De Sitter, bajo ciertas consideraciones que analizaremos en el Capítulo 3. Por lo que, utilizándola se tiene que la densidad de energía del vacío es

$$\langle \rho \rangle = \sum_i n_i \frac{m_i^4}{32\pi^2} \log\left(\frac{m_i}{\mu}\right) \approx -2 \times 10^8 \text{ GeV}^4, \quad (2.31)$$

donde la suma es sobre todos los campos del modelo estándar y donde se usó $\mu = 3 \times 10^{-16} \text{ eV}$. Este valor se obtiene mediante análisis dimensional [16], donde $\mu = \sqrt{E_\gamma E_{grav}}$, $E_{grav} = H_0$ es la constante de Hubble y E_γ es la energía de fotones de 500 nm, que son los que provienen de las supernovas usadas para medir la constante cosmológica.

Ahora tenemos “solamente” 54 órdenes de magnitud de diferencia con el valor medido de $\rho_\Lambda = 2.75 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4$. Por lo que, aunque el método de regularización dimensional

mejoró considerablemente la situación, y salvando el cambio de signo, sigue habiendo una gran disparidad entre experimento y teoría.

Acá se puede plantear otro problema que surge con el esquema habitual. Si luego de regularizar elegimos renormalizar, lo que habría que hacer es decir que

$$\Lambda_m = \Lambda_t + \Lambda_B, \quad (2.32)$$

donde Λ_m es el valor medido de la constante cosmológica, Λ_t es el calculado y Λ_B es la constante desnuda (*bare cosmological constant*).

Uno podría ajustar Λ_B para anular precisamente Λ_t y así obtener exactamente el valor medido. Esta es la idea detrás de la renormalización en la TCC. Pero si así se quisiera hacer, se debería ajustar la constante desnuda con una precisión enorme. Por lo menos 122 dígitos para la regularización por cut-off ó 54 dígitos para regularización dimensional. Este es el llamado “problema del ajuste fino”, y nos muestra que, incluso renormalizando, los problemas persisten.

Claramente es necesario un enfoque nuevo si se quiere poder solucionar el PCC. De una nueva propuesta para lograrlo [1, 2, 3], hablaremos en el Capítulo 4.

Con esto concluimos este capítulo, volviendo a recordar que todo lo calculado aquí fue en un espacio-tiempo de Minkowski. Más correcto sería hacerlo en el espacio-tiempo de De Sitter, ya que es la métrica que surge a nivel clásico de considerar una constante cosmológica. Especialmente considerando que De Sitter es una solución autoconsistente de las ecuaciones de Einstein, por lo que se está teniendo en cuenta el *backreaction* de forma completa. En este espacio el cálculo es considerablemente más engorroso, y presenta varias sutilezas que serán estudiadas en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Problema de la constante cosmológica en De Sitter

3.1. Campo escalar en la métrica de De Sitter

En este capítulo vamos a analizar el PCC en un espacio de De Sitter, en particular veremos el valor de la constante cosmológica como función de la masa de los campos. Esto fue estudiado previamente por otros autores [17, 18], pero a diferencia ellos nosotros pondremos énfasis en comparar la solución que se obtiene cuando se consideran los campos en Minkowski, con la que se obtiene al considerar De Sitter. Y de este modo, estudiaremos bajo qué condiciones sucede o no el PCC en De Sitter.

Primero debemos calcular el valor medio del tensor energía-impulso, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Para esto necesitamos $T_{\mu\nu}$ como función del campo, y a su vez, dicho campo desarrollado en operadores de creación y destrucción. Todos los cálculos serán realizados utilizando regularización dimensional, por lo que todo estará expresado en d dimensiones.

La métrica de De Sitter se puede definir como una hipérbola en un espacio de Minkowski de $d + 1$ dimensiones, o sea

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_i dx_i \quad i = 1; \dots; d, \quad (3.1)$$

con la condición

$$\alpha^2 = -x_0^2 + x_i x_i. \quad (3.2)$$

Realizando un cambio de coordenadas adecuado (*flat slicing*, [19])

$$x_0 = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \frac{\mathbf{y}^2}{2\alpha} e^{t/\alpha}, \quad (3.3)$$

$$x_d = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) - \frac{\mathbf{y}^2}{2\alpha} e^{t/\alpha}, \quad (3.4)$$

$$x_i = e^{t/\alpha} y_i \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad (3.5)$$

se puede llevar la métrica a una forma explícitamente conforme.

Este cambio de coordenadas no cubre todo el espacio, sino solo la parte correspondiente a $x_0 + x_d > 0$, lo que es esperable ya que se está pasando de $d+1$ coordenadas a d coordenadas.

Los diferenciales para el caso son

$$dx_0 = dt \left(\cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \frac{\mathbf{y}^2}{2\alpha^2} e^{t/\alpha} \right) + \frac{e^{t/\alpha}}{\alpha} y_i dy_i, \quad (3.6)$$

$$dx_d = dt \left(\sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) - \frac{\mathbf{y}^2}{2\alpha^2} e^{t/\alpha} \right) - \frac{e^{t/\alpha}}{\alpha} y_i dy_i, \quad (3.7)$$

$$dx_i = \frac{1}{\alpha} e^{t/\alpha} y_i dt + e^{t/\alpha} dy_i, \quad (3.8)$$

con lo que es directo obtener que

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_0^2 - dx_d^2 - dx_i^2 \\ &= dt^2 - e^{2t/\alpha} dy_i dy_i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta métrica se puede escribir explícitamente conforme a Minkowski usando

$$\eta = -\alpha e^{-t/\alpha} \implies d\eta = e^{-t/\alpha} dt, \quad (3.10)$$

queda

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2t/\alpha} (d\eta^2 - dy_i dy_i) \\ &= \frac{\alpha^2}{\eta^2} (d\eta^2 - dy_i dy_i). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ahora consideremos un campo escalar masivo con un acoplamiento a la curvatura ξ , cuyo lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2 \right). \quad (3.12)$$

Es directo entonces obtener su ecuación de movimiento

$$(\square + m^2 - \xi R) \phi = 0. \quad (3.13)$$

Para una métrica conforme de la forma general

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx_i dx_i), \quad (3.14)$$

el campo escalar se expande como

$$\phi(x) = \int d^{d-1}k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x) \right). \quad (3.15)$$

Donde

$$u_{\mathbf{k}}(x) = (2\pi)^{\frac{1-d}{2}} C(\eta)^{\frac{2-d}{4}} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \chi_k(\eta), \quad (3.16)$$

y

$$\chi_k = \frac{\sqrt{\pi \eta}}{2} H_a^{(2)}(k \eta), \quad (3.17)$$

$$a^2 = \frac{1}{4} - \alpha^2 m^2 - d(d-1)(\xi - \xi(d)), \quad (3.18)$$

$$\xi(d) = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}, \quad (3.19)$$

donde $H_a^{(2)}(z)$ es la función de Hankel del segundo tipo, $k = |\mathbf{k}|^2$ y se usó el vacío de Bunch–Davies [19]. Desarrollamos este cálculo en detalle en el Apéndice B.

Para nuestro caso (métrica de De Sitter), tenemos que

$$C(\eta) = \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^2. \quad (3.20)$$

Quedando

$$u_{\mathbf{k}}(x) = (2\pi)^{\frac{1-d}{2}} \left(\frac{\alpha}{|\eta|} \right)^{\frac{2-d}{2}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\sqrt{\pi \eta}}{2} H_a^{(2)}(k \eta). \quad (3.21)$$

Por la simetría del vacío elegido para obtener la Ec. (3.17), resulta que $\langle T_{\mu\nu} \rangle \propto g_{\mu\nu}$, por lo tanto tenemos que

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \kappa g_{\mu\nu} \implies g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu} \rangle = \kappa g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \kappa d, \quad (3.22)$$

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = \kappa d \implies \kappa = \frac{\langle T^\mu{}_\mu \rangle}{d}. \quad (3.23)$$

Quedando finalmente

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{\langle T^\mu{}_\mu \rangle}{d} g_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Vemos que para obtener el valor medio del tensor energía-momento en De Sitter, solo necesitamos el valor medio de su traza.

3.2. Traza del tensor de energía-momento

En el Apéndice B deducimos que el tensor de energía-momento para el caso es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (m^2 \phi^2 - \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi) + \\ & + \xi \phi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \xi (g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \nabla_\mu \partial_\nu \phi^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por lo que su traza será

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\mu = & g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ = & \left(1 - \frac{d}{2} \right) (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \xi R \phi^2) + (d-1) \square \phi^2 \xi + \frac{d}{2} m^2 \phi^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De la ecuación de movimiento, Ec. (3.13),

$$\phi \square \phi = (\xi R - m^2) \phi^2, \quad (3.27)$$

y de

$$\square \phi^2 = \nabla_\mu \partial^\mu \phi^2 = \nabla_\mu (2 \phi \partial^\mu \phi) = 2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 2 \phi \square \phi. \quad (3.28)$$

Tenemos que

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{\square \phi^2}{2} - \phi \square \phi = \frac{\square \phi^2}{2} + (m^2 - \xi R) \phi^2. \quad (3.29)$$

Reemplazando la Ec. (3.29) en la Ec. (3.26), queda que la traza del tensor energía-momento es

$$T^\mu{}_\mu = \phi^2 m^2 + (d-1) (\xi - \xi(d)) \square \phi^2, \quad (3.30)$$

donde

$$\xi(d) = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}. \quad (3.31)$$

Ahora, el valor medio de la traza será

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = m^2 \langle \phi^2 \rangle + (d-1) (\xi - \xi(d)) \square \langle \phi^2 \rangle. \quad (3.32)$$

Necesitamos calcular el valor medio del campo al cuadrado. Vemos que de la Ec. (3.15) se obtiene

$$\langle \phi^2 \rangle = \int d^{d-1}k |u_{\mathbf{k}}(x)|^2, \quad (3.33)$$

donde

$$|u_{\mathbf{k}}(x)|^2 = \left(\frac{2\pi}{|\eta|} \right)^{1-d} \frac{\pi}{4} \alpha^{2-d} |H_a^{(2)}(k\eta)|^2. \quad (3.34)$$

Entonces podemos escribir

$$\langle \phi^2 \rangle = \left(\frac{2\pi}{|\eta|} \right)^{1-d} \frac{\pi}{4} \alpha^{2-d} \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}} \mu^{4-d}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} I_A, \quad (3.35)$$

donde

$$I_A = \int_0^\infty dk \mathbf{k}^{d-2} |H_a^{(2)}(k\eta)|^2. \quad (3.36)$$

Esta integral se puede llevar a una forma más conveniente, con sucesivos cambios de variables

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^{-\infty} dx \frac{x^{d-2}}{\eta^{d-1}} |H_a^{(2)}(x)|^2 \\ &= \frac{1}{\eta^{d-1}} \int_0^\infty (-dy) (-y)^{d-2} |H_a^{(2)}(-y)|^2 \\ &= \frac{(-1)^{d-1}}{\eta^{d-1}} \int_0^\infty dy y^{d-2} |H_a^{(2)}(-y)|^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

en la primera igualdad se usó $x = k\eta$ y en la segunda $y = -x$.

Con las identidades, [20, Ec. 10.11.5],

$$H_a^{(2)}(-y) = -e^{i\pi a} H_a^{(1)}(y), \quad (3.38)$$

$$|H_a^{(2)}(-y)|^2 = e^{i\pi(a-a^*)} |H_a^{(1)}(y)|^2, \quad (3.39)$$

donde $H_a^{(1)}(z)$ es la función de Hankel del primer tipo.

Obtenemos

$$I_A = \frac{e^{i\pi(a-a^*)}}{|\eta|^{d-1}} I_B. \quad (3.40)$$

Donde se usó el hecho de que $\eta < 0$ y

$$I_B = \int_0^\infty dy y^{d-2} |H_a^{(1)}(y)|^2. \quad (3.41)$$

Queda entonces

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{\pi^{\frac{3-d}{2}} 2^{-d} \alpha^{2-d}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \mu^{4-d} e^{i\pi(a-a^*)} I_B. \quad (3.42)$$

Con el objetivo de llevar I_B a una forma más conveniente, usamos identidades de [20, Ec. 10.11.9] para obtener

$$\begin{aligned} |H_a^{(1)}(y)|^2 &= H_a^{(1)}(y) (H_a^{(1)}(y))^* \\ &= H_a^{(1)}(y) H_{a^*}^{(2)}(y^*) \\ &= H_a^{(1)}(y) H_{a^*}^{(2)}(y), \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde se consideró que y es real.

Y luego usando, [20, Ec. 10.4.7 y 10.4.8],

$$H_a^{(1)}(z) = i \csc(a\pi) (e^{-ia\pi} J_a(z) - J_{-a}(z)), \quad (3.44)$$

$$H_a^{(2)}(z) = i \csc(a\pi) (J_{-a}(z) - e^{ia\pi} J_a(z)), \quad (3.45)$$

donde $J_a(z)$ es la función de Bessel del primer tipo, reescribimos el integrando con estas funciones.

Vemos primero el caso $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |H_a^{(1)}(y)|^2 &= H_a^{(1)}(y) H_a^{(2)}(y) \\ &= -\csc^2(a\pi) (e^{-ia\pi} J_a(y) J_{-a}(y) - J_{-a}(y)^2 - \\ &\quad - J_a(y)^2 + e^{ia\pi} J_a(y) J_{-a}(y)) \\ &= \csc^2(a\pi) (J_{-a}(y)^2 + J_a(y)^2 - 2 \cos(\pi a) J_a(y) J_{-a}(y)) \\ &= \csc^2(a\pi) (I_C + I_D - 2 \cos(\pi a) I_E). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donde tenemos las siguientes integrales

$$I_C = \int_0^\infty dy y^{d-2} J_a(y)^2, \quad (3.47)$$

$$I_D = \int_0^\infty dy y^{d-2} J_{-a}(y)^2, \quad (3.48)$$

$$I_E = \int_0^\infty dy y^{d-2} J_a(y) J_{-a}(y). \quad (3.49)$$

Usando la integral general [20, Ec. 10.22.57]

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dy y^{d-2} J_\mu(y) J_\nu(y) \\ &= \frac{2^{d-2} \Gamma(2-d) \Gamma\left(\frac{1}{2}(d+\mu+\nu-1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(3+\mu-\nu-d)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(3+\nu-\mu-d)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(3+\mu+\nu-d)\right)}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Obtenemos

$$I_C = \frac{2^{d-2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2} + a\right) \Gamma(2-d)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} + a\right)}, \quad (3.51)$$

$$I_D = \frac{2^{d-2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2} - a\right) \Gamma(2-d)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} - a\right)}, \quad (3.52)$$

$$I_E = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} - a\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} + a\right)}. \quad (3.53)$$

Y, juntando las tres,

$$I_B = \frac{d\sqrt{\pi} \cos(a\pi) \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \sec\left(\frac{d\pi}{2}\right)}{(\cos(2\pi a) + \cos(d\pi)) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} - a\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} + a\right)}. \quad (3.54)$$

Quedando finalmente

$$\langle \phi^2 \rangle = -\frac{2^{-d} d \pi^{1-\frac{d}{2}} \alpha^{2-d} \mu^{4-d} \cos(a\pi) \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)}{(\cos(2\pi a) + \cos(d\pi)) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} - a\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} + a\right)}. \quad (3.55)$$

Nótese que $\langle \phi^2 \rangle$ no depende de x^μ por lo tanto $\square \langle \phi^2 \rangle = 0$.

Recordando que

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = m^2 \langle \phi^2 \rangle \implies \langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{m^2}{d} \langle \phi^2 \rangle g_{\mu\nu}. \quad (3.56)$$

El valor medio de la traza del tensor de energía-momento en d dimensiones queda

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -g_{\mu\nu} \frac{m^2 2^{-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \alpha^{2-d} \mu^{4-d} \cos(a\pi) \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)}{(\cos(2\pi a) + \cos(d\pi)) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} - a\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{2} + a\right)}. \quad (3.57)$$

Resulta que mediante técnicas más generales [17], se puede mostrar que este resultado es válido para todo a .

3.3. Renormalización del tensor de energía-momento

Para renormalizar $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ seguiremos el procedimiento de [19]. Usando la expansión de DeWitt-Schwinger para la función de Green de Feynman, la misma se puede separar en una parte divergente en coincidencia (con 3 términos) y una parte convergente. Resulta que los tres términos de la parte divergente son puramente geométricos (dependen de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ y sus contracciones). Por eso es posible absorberlos en la acción gravitatoria, y de este modo renormalizarla. Procedimentalmente, definimos primero la expansión adiabática de la función de Green, truncada para contener solo los términos divergentes,

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{DS} = & \mu^{4-d} m^{d-4} (4\pi)^{-d/2} \left(a_0(x) m^2 \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\ & \left. + a_1(x) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + a_2(x) m^{-2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde

$$a_0(x) = 1, \quad (3.59)$$

$$a_1(x) = \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} a_2(x) = & \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{180} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi\right) \square R + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \xi\right)^2 R^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

y donde a_0 renormalizará la constante cosmológica, a_1 la constante de gravitación universal y a_2 requiere de agregar términos con derivadas de orden superior a la acción de Einstein-

Hilbert.

Para De Sitter en d dimensiones (de las Ecs. (A.53) y (A.54)) queda

$$a_0(x) = 1, \quad (3.62)$$

$$a_1(x) = -\frac{d(d-1)}{\alpha^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right), \quad (3.63)$$

$$a_2(x) = \frac{d(d-1)}{360\alpha^2} \left(6 + d \left(180\xi^2(d-1) - 60\xi(d-1) + 5d - 7 \right) \right). \quad (3.64)$$

En la expresión de ${}^{(4)}G_{DS}$ ya se incluyeron las constantes necesarias, para que la resta

$$\langle \phi^2 \rangle_{re} = \langle \phi^2 \rangle - {}^{(4)}G_{DS}, \quad (3.65)$$

extraiga las divergencias del $T_{\mu\nu}$, que son del mismo orden y tipo que las que presenta la función de Green de Feynman.

Haciendo la resta de la Ec. (3.65), expandiendo alrededor de $d = 4$ y dejando solo el orden más bajo, lo que formalmente escribimos como

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{re} = \frac{m^2}{4} g_{\mu\nu} \lim_{d \rightarrow 4} \left(\langle \phi^2 \rangle - {}^{(4)}G_{DS} \right), \quad (3.66)$$

queda [19, 17]

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{re} = & \frac{g_{\mu\nu}}{64\pi^2} \left(m^2 \left(m^2 - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right) \left(\Psi \left(\frac{3}{2} + \nu \right) + \Psi \left(\frac{3}{2} - \nu \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \log \left(-\frac{12m^2}{R} \right) \right) + m^2 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \frac{m^2}{18} R - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 + \frac{R^2}{2160} \right), \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde $\nu = 9/4 + 12m^2/R - 12\xi$.

Ahora, haremos un cambio al procedimiento encontrado en la literatura [17, 18, 19]. En estos trabajos se renormaliza la constante cosmológica con a_0 , donde no solo se elimina la divergencia correspondiente, sino que también se pone a cero la energía de vacío que aparece en el espacio-tiempo de Minkowski. Notar que esto equivale realizar un ajuste fino para eliminar el PCC. Nosotros no restaremos ese término y solo aplicaremos sustracción minimal. Así dejaremos explícito el término proporcional a m^4 que surge naturalmente del cálculo en Minkowski, y de este modo podremos compararlo con la nueva contribución que se agrega al considerar un espacio de De Sitter.

Concretamente, solo restando el término de a_1 y a_2 queda

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{m^4}{64\pi^2} \left(\frac{d-6}{d-4} - \gamma_{EM} + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right) g_{\mu\nu} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{re}, \quad (3.68)$$

donde $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{re}$ es el de la Ec. (3.67) y γ_{EM} es la constante de Euler–Mascheroni.

Extrayendo el polo según la prescripción de sustracción minimal queda

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{m^4}{32\pi^2} \log\left(\frac{\tilde{\mu}}{m}\right) g_{\mu\nu} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{re}, \quad (3.69)$$

donde

$$\tilde{\mu} = \mu e^c, \quad (3.70)$$

$$c = -\frac{1}{2}\gamma_{EM} + \frac{1}{2}\log(4\pi). \quad (3.71)$$

A partir de ahora escribiremos μ en vez de $\tilde{\mu}$ ya que la distinción es irrelevante.

3.4. Ecuación para la curvatura escalar

Considerando la ecuación de Einstein sin constante cosmológica (el término de m^4 cumplirá este rol), tenemos que para N campos iguales

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle N. \quad (3.72)$$

Luego de la Ec. (A.45) tenemos que $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} R/4$ por lo que queda

$$R = -8\pi G N \langle T^\mu{}_\mu \rangle. \quad (3.73)$$

Esta ecuación se puede adimensionalizar fácilmente, lo que formalmente equivale a medir todas las cantidades dimensionales en unidades de Planck (recordemos que $G = 1/m_P^2$), o sea

$$\begin{aligned} \frac{R}{m_P^2} &= -8\pi \frac{1}{m_P^2} N \langle T^\mu{}_\mu \rangle \frac{1}{m_P^2}, \\ &= -8\pi N \frac{\langle T^\mu{}_\mu \rangle}{m_P^4}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Luego incorporando m_P^4 en la expresión de $\langle T^\mu{}_\mu \rangle$, Ec. (3.67), podemos adimensionalizar todos los parámetros, en concreto m , R , μ y ν . Por lo que queda exactamente la misma expresión, pero ahora todas las cantidades con dimensiones están en unidades de la masa de Planck.

Con un procedimiento equivalente al realizado para el campo escalar se puede obtener las expresiones de $\langle T^\mu_\mu \rangle_{re}$ para campos de espín arbitrario [17]. Dejando el término proporcional a m^4 , se tiene que las expresiones explícitas de la traza del tensor energía-momento son (para campo escalar y fermiónico respectivamente)

$$\begin{aligned} \langle T^\mu_\mu \rangle_{s=0} = & -\frac{m^4}{8\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{m}\right) + \frac{1}{16\pi^2} \left(m^2 \left(m^2 - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right) \times \right. \\ & \times \left(\Psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \Psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) - \log\left(-\frac{12m^2}{R}\right) \right) + \\ & \left. + m^2 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \frac{m^2}{18} R - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 + \frac{R^2}{2160} \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \langle T^\mu_\mu \rangle_{s=1/2} = & \frac{m^4}{2\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{m}\right) - \frac{m^2 R}{48\pi^2} \left(1 - \frac{12m^2}{R} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} \log\left(-\frac{12m^2}{R}\right) - \operatorname{Re} \left\{ \Psi \left(i \sqrt{-\frac{12m^2}{R}} \right) \right\} \right) - \\ & - \frac{m^2 R}{576\pi^2} + \frac{11 R^2}{69120\pi^2}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde $\Psi(z)$ es la función digamma y nótese el cambio de signo del término proporcional a m^4 , que ya habíamos visto en el Capítulo 2.

Entonces, de la Ec. (3.73), las ecuaciones explícitas para R son (campo escalar y fermiónico respectivamente)

$$\begin{aligned} R = & \frac{N m^4}{\pi} \log\left(\frac{\mu}{m}\right) - \frac{N}{2\pi} \left(m^2 \left(m^2 - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right) \times \right. \\ & \times \left(\Psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \Psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) - \log\left(-\frac{12m^2}{R}\right) \right) + \\ & \left. + m^2 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \frac{m^2}{18} R - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 + \frac{R^2}{2160} \right), \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} R = & -\frac{4 N m^4}{\pi} \log\left(\frac{\mu}{m}\right) + \frac{N m^2 R}{6\pi} \left(1 - \frac{12m^2}{R} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} \log\left(-\frac{12m^2}{R}\right) - \operatorname{Re} \left\{ \Psi \left(i \sqrt{-\frac{12m^2}{R}} \right) \right\} \right) + \\ & + \frac{N m^2 R}{72\pi} - \frac{11 R^2 N}{8640\pi}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Para ambos casos queda que la ecuación de R es de la forma

$$R = \frac{\tilde{N} m^4}{\pi} \log\left(\frac{\mu}{m}\right) + f(R), \quad (3.79)$$

donde $\tilde{N} = n_e - 4n_f$, n_e número de campos escalares, n_f número de campos fermiónicos y la forma particular de $f(R)$ también depende del contenido de campos.

El primer término (proporcional a m^4) es el que se obtiene en espacio de Minkowski, por lo que en dicho caso la ecuación de R es trivial, y sumando todas las contribuciones del modelo estándar se obtiene el resultado ya mencionado de 54 órdenes de magnitud mayor al medido [15].

Por último mencionamos que si consideramos el caso $m = 0$, las Ecs. (3.77) y (3.78), mediante el límite adecuado, se reducen a [17]

$$R \left(1 + \frac{R}{4320\pi}\right) = 0, \quad (3.80)$$

$$R \left(1 + \frac{11R}{8640\pi}\right) = 0, \quad (3.81)$$

donde la primera es para el campo escalar, y la segunda para el fermiónico.

Es directo que se tienen dos soluciones, la trivial $R = 0$ y una de curvatura alta $R \approx -13600$ (escalar) y $R \approx -2470$ (fermiónico). Esto nos muestra que cuando los campos cuánticos se consideran en De Sitter, los no masivos pueden tener una contribución al PCC, a diferencia de cuando se consideran en Minkowski donde no hay contribución por parte de estos campos.

3.5. PCC en De Sitter

Ahora que tenemos las ecuaciones que nos dan la curvatura escalar producida por la EPC de los campos cuánticos en De Sitter, Ec. (3.79), podremos compararla con la obtenida considerando Minkowski. Como la Ec. (3.79) no se pueden resolver analíticamente, buscaremos caracterizar el alejamiento de la solución obtenida en De Sitter de la obtenida en Minkowski. Para ello definimos

$$s = \left| \frac{f(R_{\text{Minkowski}})}{R_{\text{Minkowski}}} \right|, \quad (3.82)$$

$$R_{\text{Minkowski}} = \frac{\tilde{N} m^4}{\pi} \log\left(\frac{\mu}{m}\right). \quad (3.83)$$

donde $R_{\text{Minkowski}}$ es la curvatura que se obtiene de usar como fuente de las ecuaciones de Einstein la EPC calcula en Minkowski.

Dicha definición está motivada en lo siguiente. Si asumimos que f es despreciable, tenemos que $R \approx R_{\text{Minkowski}}$. Ahora, si dicha aproximación es autoconsistente, se debería tener $f(R_{\text{Minkowski}}) \ll R_{\text{Minkowski}}$, o sea, $s \ll 1$.

De este modo el tamaño del parámetro adimensional s nos da una medida de cuanto nos alejamos de la solución de Minkowski. En particular, si para un set de los parámetros de los que depende s (ξ , μ , N etc.) tenemos que $s \ll 1$. Entonces, para dicho set es correcto afirmar que $R \sim R_{\text{Minkowski}}$ y por lo tanto el PCC estará presente como en el análisis habitual.

Ahora estudiaremos numéricamente el espacio de parámetros del problema a modo de entender bajo qué condiciones la solución de Minkowski sigue siendo válida, e independientemente de eso, bajo qué condiciones persiste o no el PCC. Todo ello para el campo escalar, el fermiónico, y el conjunto de escalar más fermiónico.

En todo lo que sigue cabe recordar que $-R = \Lambda$ (constante cosmológica), por lo que el PCC ocurre si $|R| \sim 1$ o mayor. Mientras que no ocurre si $R \ll 1$, o si la única solución es $R = 0$.

3.5.1. Campo escalar

De la Ec. (3.77) vemos que las soluciones $R = R(m)$, van a depender de tres parámetros: N , μ y ξ .

Los casos se pueden clasificar fácilmente en tres situaciones, $\mu < m$, $\mu = m$ y $\mu > m$. En todo lo que sigue se considerara un único campo escalar ($N = 1$) a menos que se indique lo contrario.

$\mu = m$

En este caso el término proporcional a m^4 se anula, por lo que es directo que las soluciones de la Ec. (3.77) no van a coincidir con las de Minkowski. Ocurre entonces lo mismo que en el caso $m = 0$, donde tampoco hay contribución en Minkowski pero si la puede haber en De Sitter.

Observamos que habrá soluciones no triviales ($R \neq 0$) para $\xi = 1/6$ y para $0 \leq \xi \lesssim 0.1$ únicamente. Y sólo habrá soluciones para masa arbitrariamente chica si $\xi = 0$ ó $\xi = 1/6$. Un ejemplo de estas soluciones se muestra en la Figura 3.1 donde se observa que para toda masa $R \gg 1$. Por esto, en este caso particular, el PCC persiste dentro de un rango finito de ξ en De Sitter.

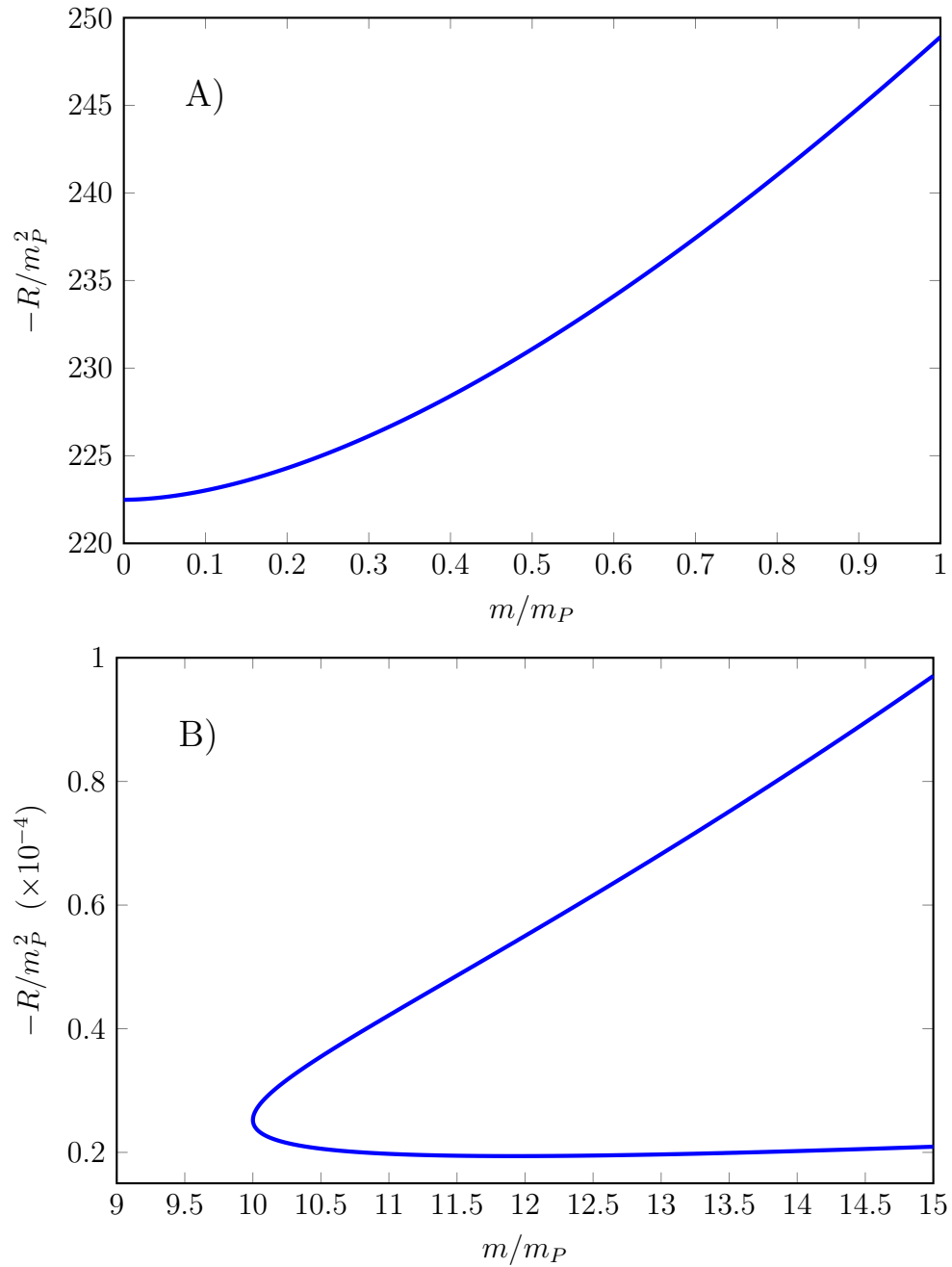


Figura 3.1: Curvatura escalar versus la masa, para un campo escalar con $\mu = m$. La gráfica A) corresponde a $\xi = 0$ y la gráfica B) corresponde a $\xi = 1/40$. Se observa en ambos casos que $R \gg 1$ para cualquier masa

$\mu > m$

Para analizar este caso consideraremos que $\mu = 10m$. Debido al logaritmo de la solución en Minkowski tenemos que $R_{\text{Minkowski}} > 0$. Pero simultáneamente todas las soluciones de la Ec. (3.77) (para todo m , ξ y N) son negativas (recordar que, en nuestra convención de signos, y para De Sitter, $R = -12/\alpha^2$). Así, nuevamente las soluciones en De Sitter nunca van a coincidir con las obtenidas considerando los campos en Minkowski.

Al igual que antes habrá soluciones no triviales ($R \neq 0$) para $\xi = 1/6$ y para $0 \leq \xi \lesssim 0.02$ únicamente. Y sólo habrá soluciones para masa arbitrariamente chica si $\xi = 0$ ó $\xi = 1/6$. Ejemplos de estas soluciones se muestran en las Figura 3.2 donde se observa que para toda masa se tiene $R \gg 1$.

Olvidándonos del signo de R , analizamos si hay algún caso en el que $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$. Resulta que esto ocurre, pero el valor de la curvatura a partir del que sucede es $R \gg 1$ (y la masa a la que ocurre también es $m \gg 1$). Únicamente si consideramos $N \gg 1$, podemos reducir el valor de $|R|$ donde $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$, como se muestra en la Figura 3.3.

Vemos entonces que para este caso ($\mu > m$) el PCC sigue presente (dentro de un rango finito de ξ), pero con una cantidad muy grande de campos es posible aminorarlo. Siendo que esta situación no es tema central de esta tesis, no lo exploraremos en mayor profundidad.

 $\mu < m$

Para analizar este caso consideraremos que $\mu = m/10$. Recordamos que una estimación de μ dada en la literatura [16] (proveniente de un análisis dimensional) es $\mu = 3 \times 10^{-16}$ eV. Vemos que corresponde $\mu < m$ para cualquier partícula del modelo estándar, por lo que esta será la situación de mayor interés.

En este caso resulta que las soluciones en De Sitter tienen igual signo que las de Minkowski por lo que tiene sentido analizar s . En particular sucede que s es creciente con m , N y ξ crecientes. Pero para $N = 1$, y una masa suficientemente chica tenemos que $s \ll 1$. Por lo tanto, considerar $R \approx R_{\text{Minkowski}}$ es una buena aproximación para un campo escalar con $m \ll 1$ (recordar que se mide todas las magnitudes en unidades de Planck, por lo que se está diciendo en realidad que $m \ll m_P$, donde m_P es la masa de Planck).

Particularmente para parámetros del orden de los del modelo estándar, $N \leq 100$, $\xi \leq 50$ y $m \leq 0.01$ tenemos que $s \leq 0.0005$. Esto significa que, bajo condiciones físicas, y si $\mu < m$, el valor de $R = -\Lambda$ calculado con los campos en Minkowski es una buena aproximación para el calculado en espacio de De Sitter, y por lo tanto en De Sitter el PCC aparece de la forma tradicional.

Considerando que con $\mu < m$ tenemos soluciones no triviales para todo ξ positivo, analizaremos ahora bajo qué condiciones $R_{\text{De Sitter}} < R_{\text{Minkowski}}$.

Para $\xi = 0$ ó $\xi = 1/6$, tenemos que existen dos soluciones en De Sitter hasta cierto valor de

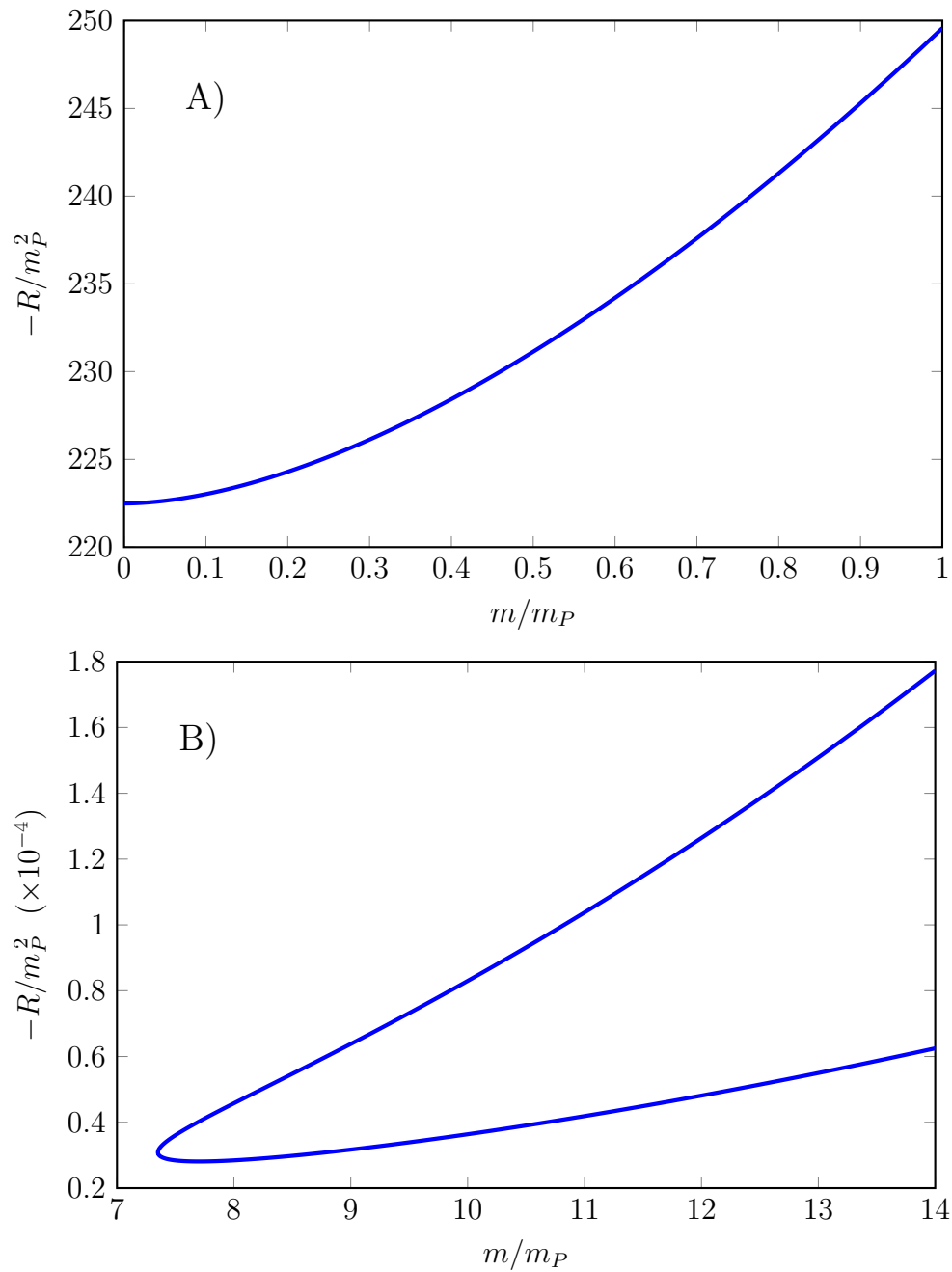


Figura 3.2: Curvatura escalar versus la masa, para un campo escalar con $\mu = 10 m$. La gráfica A) corresponde a $\xi = 0$ y la gráfica B) corresponde a $\xi = 1/70$

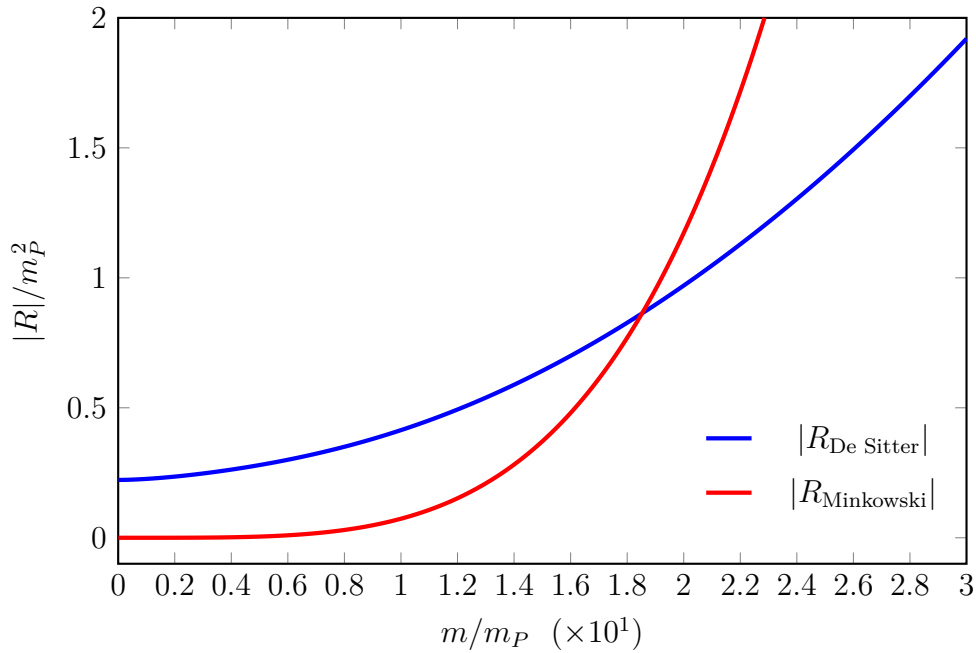


Figura 3.3: Módulo de la curvatura escalar versus la masa, para $N = 10^3$, $\mu = 10m$ y $\xi = 0$

masa, luego del cual ya no hay soluciones. Una solución cumple con $|R_{\text{De Sitter}}| > |R_{\text{Minkowski}}|$, mientras que la otra, cuando $m \rightarrow 0$, coincide con la de Minkowski. Estos dos casos se muestran en la Figura 3.4.

Para $0 < \xi < 1/6$ se puede obtener $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$ si m es suficientemente grande (aunque la masa mínima que lo consigue se reduce con ξ creciente). Un ejemplo de esto se observa en la Figura 3.5.

Finalmente, para $\xi > 1/6$ se da igual que en el caso anterior, pero ahora con un ξ suficientemente grande, se puede hacer la masa mínima a la que ocurre $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$ sea tan chica como uno quiera. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 3.6. Vemos que para un acoplamiento a la curvatura de $\xi = 10^3$ (como ocurre en algunos modelos inflacionarios), la solución en De Sitter tiene un mejor comportamiento con respecto al PCC que la de Minkowski, o sea, con un ξ suficientemente grande, se puede hacer la curvatura tan chica como se quiera, a $m \ll 1$.

3.5.2. Campo fermiónico

El caso del campo fermiónico por separado sigue las líneas del escalar de forma prácticamente idéntica. La única diferencia está en que el cambio de signo en el término del logaritmo, Ec. (3.78), hace que lo que explicamos para $\mu > m$ en el escalar, corresponda a lo que sucede en el caso de $\mu < m$ para el fermiónico, y viceversa. Los valores numéricos precisos naturalmente también cambian, pero el comportamiento cualitativo es el mismo.

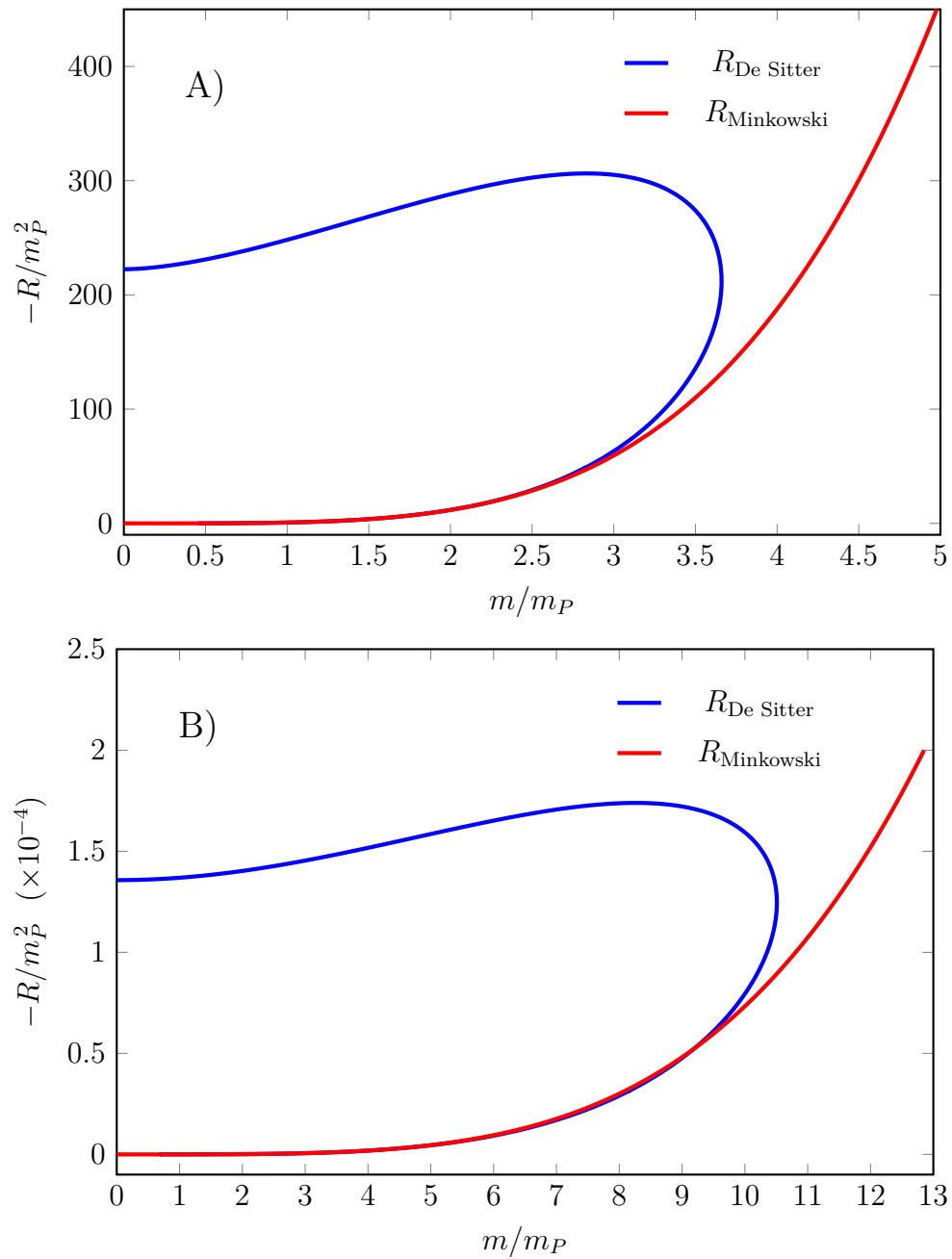


Figura 3.4: Curvatura escalar versus la masa, para un campo escalar con $\mu = m/10$. La gráfica A) corresponde a $\xi = 0$ y la gráfica B) corresponde a $\xi = 1/6$

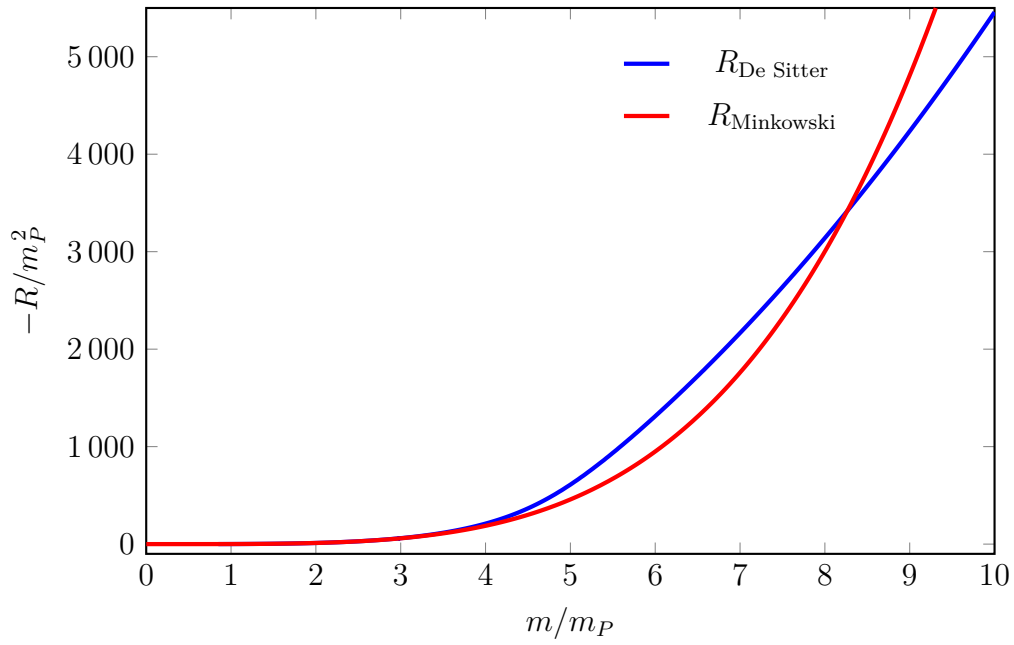


Figura 3.5: Curvatura escalar versus la masa, para un campo escalar con $\mu = m/10$ y $\xi = 1/40$

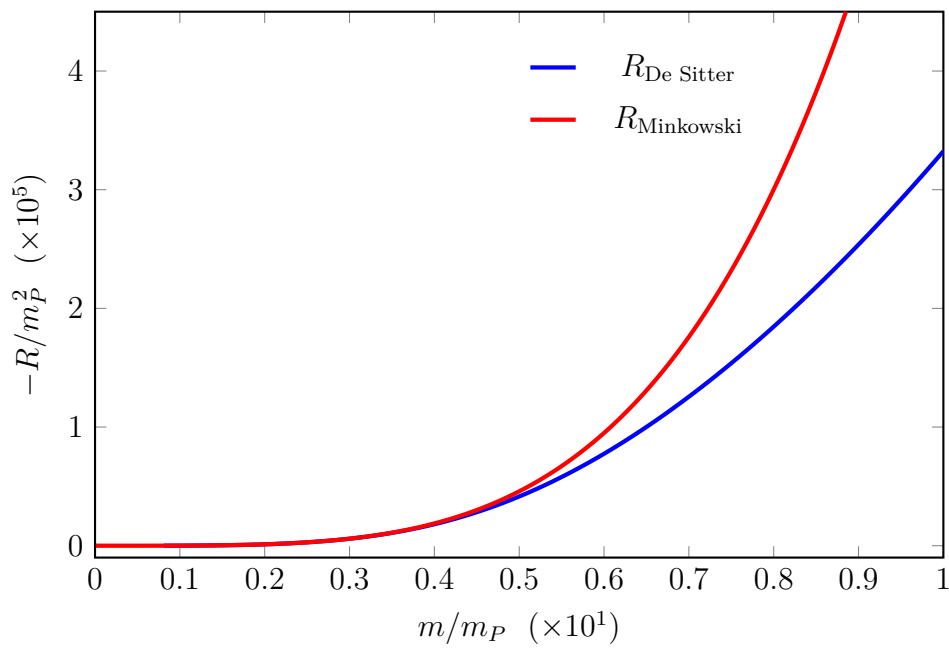


Figura 3.6: Curvatura escalar versus la masa, para un campo escalar con $\mu = m/10$ y $\xi = 1000$

3.5.3. Campo fermiónico y escalar

Ahora analizaremos el conjunto de campos escalares y fermiónicos, bajo una condición de interés particular.

Vamos a considerar un set de parámetros tal que el término logarítmico total (fermiónico más escalar) sea casi nulo, en semejanza con la propuesta de supersimetría. Donde, gracias a la igualdad de masas y balance de grados de libertad, se anula completamente esta contribución. Usando

$$m_\phi = m + \epsilon, \quad (3.84)$$

$$m_\psi = m, \quad (3.85)$$

$$N_\phi = 4N, \quad (3.86)$$

$$N_\psi = N, \quad (3.87)$$

$$\mu = \frac{m_\phi}{10} = \frac{m + \epsilon}{10}, \quad (3.88)$$

donde el subíndice ϕ indica campo escalar y el subíndice ψ campo fermiónico, tenemos que el término logarítmico es pequeño. En concreto, si la desviación ϵ fuera 0, el término logarítmico se anularía exactamente. En lo que sigue usaremos $N = 1$ y $\epsilon = 0.01$.

Resulta que en este caso tenemos soluciones no triviales para todo ξ .

Si $\xi = 0$ hay dos soluciones para De Sitter hasta cierto valor de masa, luego del cual no hay más soluciones. Una de ellas cumple con $|R_{\text{De Sitter}}| > |R_{\text{Minkowski}}|$ en todo el rango de masas, y otra coincide con la de Minkowski cuando $m \rightarrow 0$. Como se observa en la Figura 3.7.

Si $0 < \xi \lesssim 0.12$ ocurre que $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$ para un rango de masas. La masa mínima a la que ocurre esto se reduce con ξ creciente. Ejemplo de esto con $\xi = 1/40$ y $\xi = 1/20$ se observa en la Figura 3.8.

Si $0.12 \lesssim \xi \lesssim 0.21$ aparecen dos soluciones para De Sitter. Una corresponde a $|R| \gg 1$ para todo m , pero dentro de un rango de masa ($m \gg 1$) se da $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$. La segunda solución tiene $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$ y coincide con Minkowski cuando $m \rightarrow 0$. Ejemplo de esto con $\xi = 1/6$ se muestra en la Figura 3.9.

Finalmente, si $\xi \gtrsim 0.21$ se obtiene el mismo comportamiento que en el rango $0 < \xi \lesssim 0.12$, pero ahora con ξ suficientemente grande la masa mínima a la que $|R_{\text{De Sitter}}| < |R_{\text{Minkowski}}|$ se puede hacer tan chica como uno quiera. Ejemplo de esto para $\xi = 10^4$ se muestra en la figura Figura 3.10.

Como conclusión destacaremos dos puntos. Primero, que bajo condiciones físicas (valores de los parámetros del orden de los encontrados en el modelo estándar) usar el R calculado

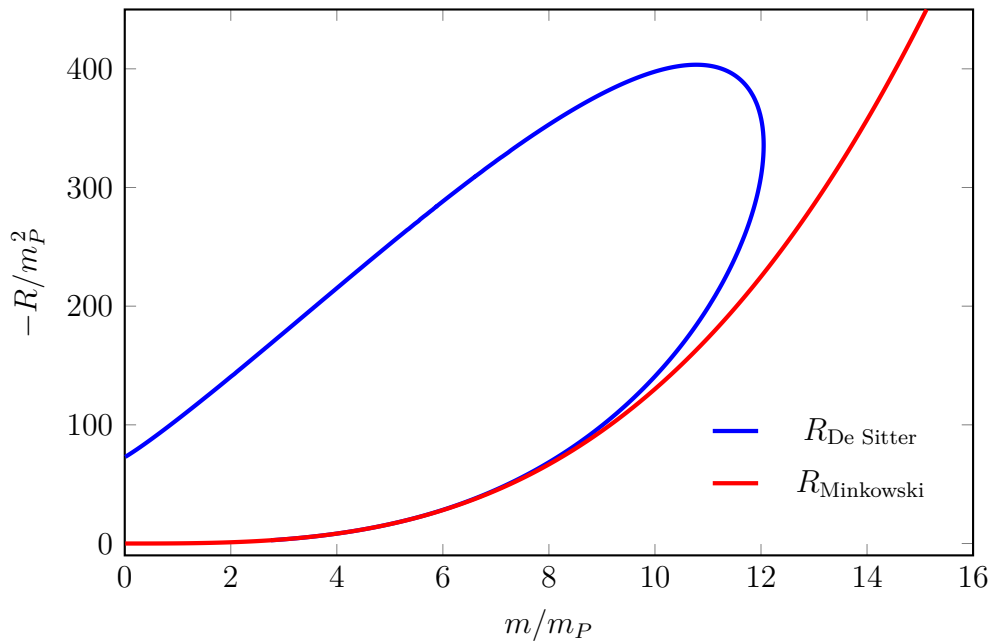


Figura 3.7: Curvatura escalar versus la masa, para un campo fermiónico y cuatro escalares con $\mu = m_\phi/10$ y $\xi = 0$

en Minkowski es válido también para De Sitter. Esto se observó en el hecho de que $s \ll 1$, donde s es el parámetro que mide el alejamiento de las soluciones calculadas considerando un espacio u otro. Fue así tanto para el campo escalar como el fermiónico. Por lo tanto, bajo estas condiciones el PCC ocurre de igual manera en De Sitter a como ocurre en Minkowski.

Y segundo, que hay condiciones bajo las cuales los campos en De Sitter generan menor curvatura que en Minkowski, a masas bajas. Un ejemplo de esto es cuando, siendo μ menor que la masa y el campo es escalar, un ξ muy grande logra $R \ll 1$. De todas maneras, esta situación sigue presentando un problema de ajuste fino, ya que se tendría que tener un ξ muy grande y con un valor preciso a muchos dígitos para obtener $R = -\Lambda$ con el mismo valor que en los experimentos. En particular con $m \sim 10^{-17}$ ($m \sim 100$ GeV), $\mu \sim 10^{-44}$ ($\mu \sim 3 \times 10^{-16}$ eV [15]) y un único campo escalar, se requiere $\xi \sim 10^{89}$ para tener $R \sim 10^{-122}$.

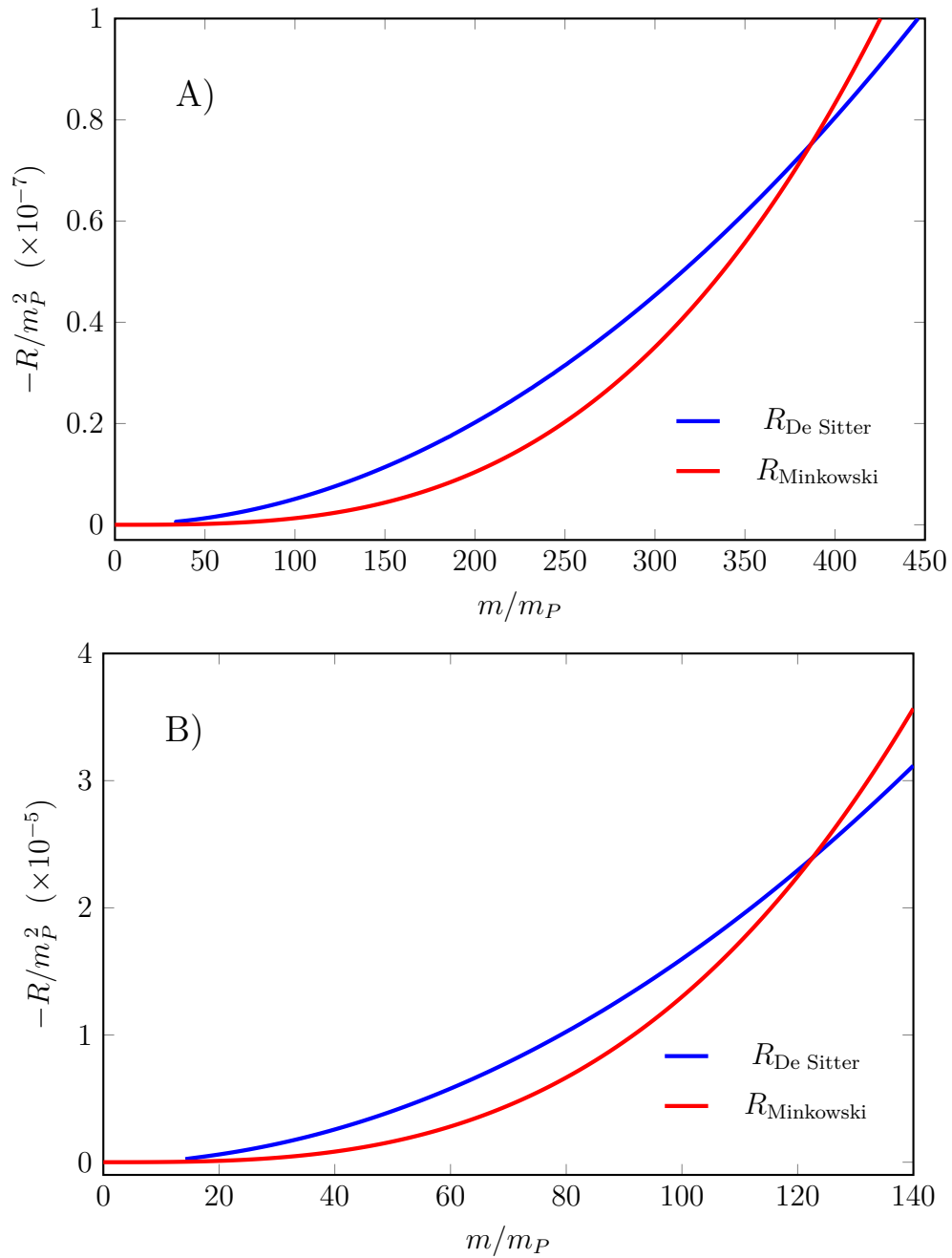


Figura 3.8: Curvatura escalar versus la masa, para un campo fermiónico y cuatro escalares con $\mu = m_\phi/10$. La gráfica A) es con $\xi = 1/40$ y la B) es con $\xi = 1/20$

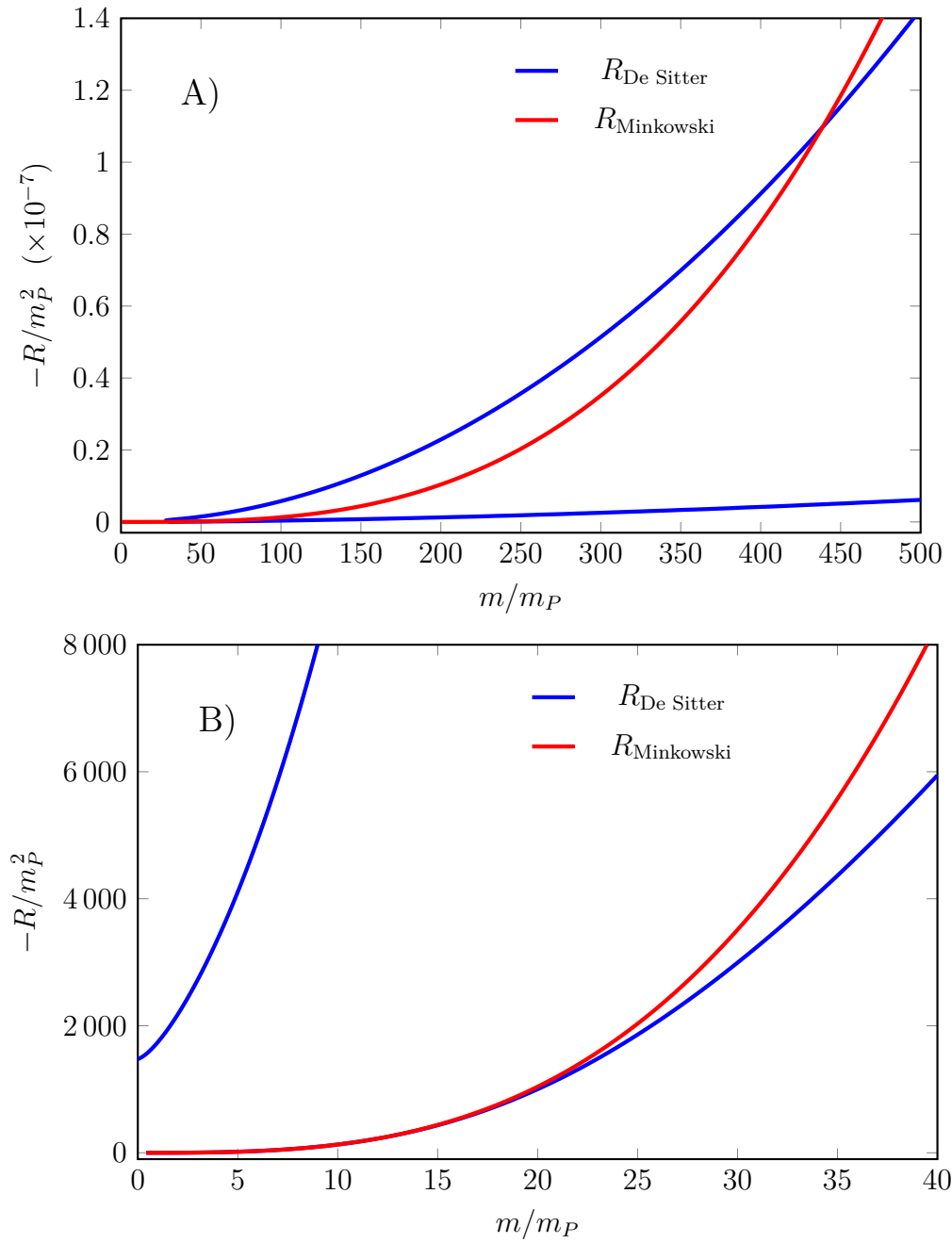


Figura 3.9: Curvatura escalar versus la masa, para un campo fermiónico y cuatro escalares con $\mu = m_\phi/10$ y $\xi = 1/6$. La gráfica B) es una ampliación de la gráfica A) en la zona de $m < 40$

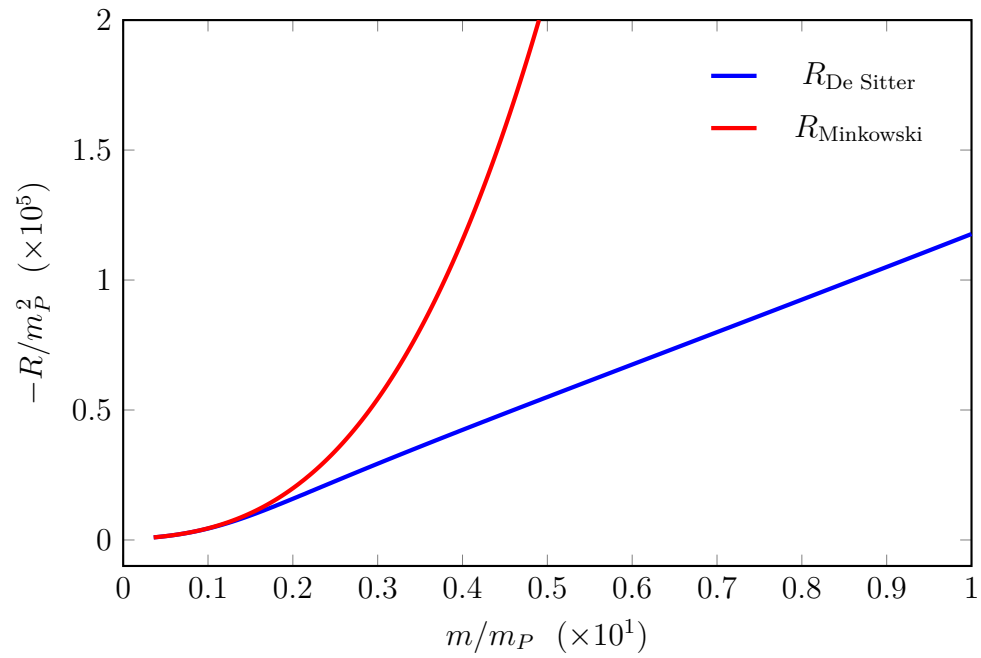


Figura 3.10: Curvatura escalar versus la masa, para un campo fermiónico y cuatro escalares con $\mu = m_\phi/10$ y $\xi = 10^4$

Capítulo 4

Gravedad estocástica y cut-off ultravioleta

“If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.”

— Sir Isaac Newton

Como motivación para las ideas presentadas en capítulos posteriores, en este capítulo resumiremos artículos recientes donde se planteó usar el ruido como posible resolución del PCC. Primero haremos una descripción detallada de las ideas planteadas en [1], para luego al final hacer un comentario sobre desarrollos más recientes [3].

La idea principal de [1] consiste en considerar los efectos gravitatorios, no sólo del valor medio del $\hat{T}_{\mu\nu}$, sino también de sus fluctuaciones. Central a esta propuesta es la elección de regularizar con un cut-off ultravioleta y el hecho de considerar físicas las cantidades regularizadas, sin renormalización. Esto rompe invarianza de Lorentz, y deja una dependencia explícita con la escala de cut-off en los resultados.

El análisis realizado se puede separar en dos partes. Primero los autores argumentan que el espacio es muy inhomogéneo ya que, a escalas suficientemente pequeñas, las fluctuaciones del tensor energía-momento resultan ser del orden del valor medio. Reproduciremos este análisis en la Sección 4.1. Luego proponen una métrica alternativa a la de FLRW, donde el factor de escala dependerá no sólo del tiempo sino también de las coordenadas espaciales. Con ella analizan la correlación espacio-temporal de las fluctuaciones, así como la posibilidad de que un efecto de resonancia paramétrica produzca una expansión acelerada pequeña, tal como la observada. Esto lo mostraremos en la Sección 4.2. Este último punto es central a la propuesta de Wang et al., ya que en un trabajo posterior [3] realizan modificaciones a su propuesta, por ejemplo usando una métrica más general a la recién descrita, pero siempre mantienen la idea de que un efecto de resonancia paramétrica es el causante de la lenta expansión acelerada el universo.

Todo el análisis lo realizan con un modelo de juguete, que consiste en un único campo escalar libre y no masivo. El mismo puede desarrollarse en espacio de Minkowski como

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right), \quad (4.1)$$

donde $\omega = |\mathbf{k}|$ y k en las exponenciales es el cuadvivector k^μ .

4.1. Fluctuaciones del vacío

Para mostrar que las fluctuaciones del tensor energía-momento no deberían despreciarse, calculan primero la varianza del tensor. Usando la definición funcional de $T_{\mu\nu}$ en espacio curvo, es directo obtener que para el campo escalar (ver el Apéndice B)

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi. \quad (4.2)$$

Entonces, en Minkowski la densidad de energía está dada por

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 \right). \quad (4.3)$$

Luego usando la expansión del campo, Ec. (4.1), tenemos

$$\begin{aligned} T_{00}(t, \mathbf{x}) = & \frac{1}{2} \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3} \left(\sqrt{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\sqrt{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}} \right) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i(|\mathbf{k}|-|\mathbf{k}'|)t - (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + \right. \\ & + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{i(|\mathbf{k}|-|\mathbf{k}'|)t - (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-i(|\mathbf{k}+|\mathbf{k}'|)t - (\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - \\ & \left. - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{i(|\mathbf{k}+|\mathbf{k}'|)t - (\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Considerando el conmutador $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ es directo obtener el valor medio de la densidad de energía

$$\langle \rho \rangle = \langle T_{00} \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega(\mathbf{k})}{2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^3. \quad (4.5)$$

Recordando que se utiliza regularización por medio de un cut-off M , queda entonces que

$$\langle T_{00} \rangle = \frac{M^4}{16\pi^2}. \quad (4.6)$$

Ahora, considerando la varianza estadística de T_{00} definida como

$$\sigma_\rho^2 = \langle (T_{00} - \langle T_{00} \rangle)^2 \rangle. \quad (4.7)$$

Es posible calcularla de forma directa, obteniéndose así el primer resultado

$$\sigma_\rho^2 = \frac{2}{3} \langle T_{00} \rangle^2. \quad (4.8)$$

Vemos que las fluctuaciones de la densidad de energía del vacío son del mismo orden que el valor medio. Por lo tanto, es razonable considerarlas al analizar los efectos gravitatorios de dicha energía. Cabe mencionar que este argumento se apoya en la decisión de los autores de considerar al cut-off M como un parámetro físico finito, o sea para ellos tiene sentido hablar de σ_ρ^2 (covarianza en coincidencia) sin renormalización debido a que se está integrando hasta una escala física M .

Ahora, para analizar la inhomogeneidad espacial, calculan el valor medio del cuadrado de la diferencia de densidad de energía entre dos puntos espaciales diferentes, $\Delta\rho^2(\Delta x)$, definido como

$$\Delta\rho^2(\Delta x) = \frac{\langle \{ (T_{00}(t, \mathbf{x}) - T_{00}(t, \mathbf{x}'))^2 \} \rangle}{\frac{4}{3} \langle T_{00}(t, \mathbf{x}) \rangle^2}, \quad (4.9)$$

donde $\Delta x = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $\{ \dots \}$ es el orden simétrico de operadores y se ha normalizado por el valor asintótico a M grande: $(4/3) \langle T_{00}(t, \mathbf{x}) \rangle^2$.

El resultado es

$$\begin{aligned} \Delta\rho^2(\Delta x) = & 1 - \frac{12}{(M \Delta x)^8} \left(\cos(2 M \Delta x) \left(2(M \Delta x)^4 - 34(M \Delta x)^2 + 33 \right) - \right. \\ & - \sin(2 M \Delta x) \left(12(M \Delta x)^3 - 50 M \Delta x \right) + 16 \cos(M \Delta x) \times \\ & \left. \times \left((M \Delta x)^2 - 6 \right) - 64 \sin(M \Delta x) M \Delta x + 63 \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Su gráfico se muestra en la Figura 4.1.

Vemos que en una escala de distancia de orden $1/M$, la magnitud de la diferencia de densidad de energía rápidamente llega a orden $\langle T_{00} \rangle$.

Esto mostraría que el vacío es altamente inhomogéneo, al menos a escalas suficientemente pequeñas, por lo que los autores concluyen que utilizar la métrica de FLRW, que asume homogeneidad espacial, es una mala aproximación si se quiere ver los efectos gravitatorios del vacío.

Como se indicó en los párrafos anteriores tanto $\Delta\rho^2(\Delta x)$ como σ_ρ^2 se pueden calcular de forma directa a partir de sus definiciones y la expansión del campo. Alternativamente uno podría calcular la covarianza entre $T_{00}(x)$ y $T_{00}(x')$, y luego usar

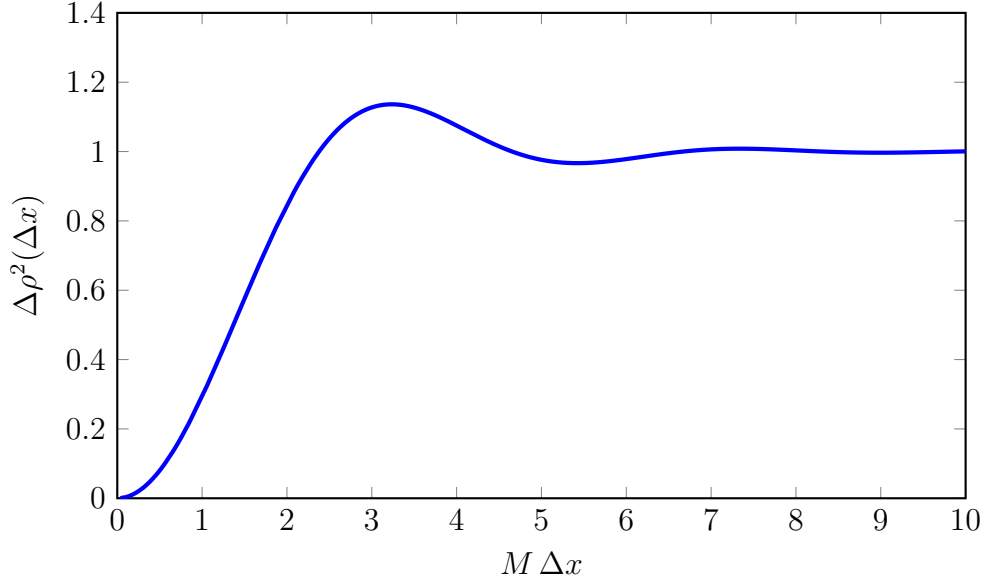


Figura 4.1: Gráfico del valor medio del cuadrado de la diferencia en densidad de energía entre dos puntos espacialmente separados

$$\sigma_\rho^2 = \lim_{x \rightarrow x'} (\text{Cov}(T_{00}(x), T_{00}(x'))), \quad (4.11)$$

$$\Delta \rho^2(\Delta x) = 1 - \frac{\text{Cov}(T_{00}(x), T_{00}(x'))}{\sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')} \Big|_{t'=t}, \quad (4.12)$$

donde $x = (t, \mathbf{x})$ y $x' = (t', \mathbf{x}')$.

La Ec. (4.11) se obtiene directamente de las definiciones y la Ec. (4.12) se demuestra en el Apéndice B. De esta forma sólo con el cálculo de la covarianza se obtiene toda la información estadística relevante, y como extra uno puede analizar cómo se correlacionan las fluctuaciones en puntos espacio-temporales separados. Para expresiones explícitas de la covarianza de T_{00} cuando la separación es solo temporal o solo espacial, consultar el apéndice A de [1].

4.2. Gravedad estocástica y resonancia paramétrica

Ahora, para analizar los efectos gravitatorios de las fluctuaciones los autores plantean una generalización de la métrica de FLRW, que considera la inhomogeneidad espacial

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t, \mathbf{x}) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.13)$$

donde vemos que el factor de escala depende tanto del tiempo como de las coordenadas espaciales.

Utilizando esta métrica y las ecuaciones de Einstein es posible obtener una ecuación para

el factor de escala (cálculos detallados se realizan en el Apéndice A).

$$\ddot{a} + \Omega^2(t, \mathbf{x}) a = 0, \quad (4.14)$$

donde

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right), \quad (4.15)$$

con $\rho = T_{00}$ y $p_i = T_{ii}/a^2$.

Notar que como se mencionó en el Capítulo 2, al usar un cut-off para regularizar, $\langle \rho \rangle = 3 \langle p_i \rangle$. Por lo tanto es directo que $\langle \Omega^2 \rangle \propto \langle \rho \rangle$. Por otro lado si hiciéramos regularización dimensional, se tendría $\langle \rho \rangle = -\langle p_i \rangle$, por lo que $\langle \Omega^2 \rangle \propto -\langle \rho \rangle$. En general $\langle \rho \rangle > 0$ al usar un cut-off, mientras que en regularización dimensional depende del contenido de materia.

Para el caso, $\Omega^2(t, \mathbf{x})$ no depende de a (se muestra explícitamente en el Apéndice A), por lo tanto la Ec. (4.14) es la de un oscilador armónico con frecuencia Ω . Si $\Omega^2 > 0$, como plantean los autores, se tendría un oscilador armónico tradicional y por lo tanto el $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ generaría un universo oscilante. Mientras que si $\Omega^2 < 0$, se tiene la ecuación de un oscilador invertido, y por lo tanto el $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ produciría una expansión exponencial, que es la situación habitual del PCC. Ahora es donde entra en juego la teoría de gravedad estocástica. La idea clave es reemplazar los operadores de las magnitudes que se cuantizaron por su valor medio, como en gravedad semiclásica, pero agregándoles una componente estocástica. En concreto hacemos el reemplazo

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) \rightarrow \langle \Omega^2(t, \mathbf{x}) \rangle + \xi(t, \mathbf{x}), \quad (4.16)$$

donde $\xi(t, \mathbf{x})$ se define de forma equivalente a como se hizo en el Capítulo 2.

O sea,

$$\langle \xi(x) \xi(y) \rangle_s = \langle \{ \Omega^2(x) - \langle \Omega^2(x) \rangle, \Omega^2(y) - \langle \Omega^2(y) \rangle \} \rangle, \quad (4.17)$$

$$\langle \xi(x) \rangle_s = 0, \quad (4.18)$$

donde $\langle \dots \rangle_s$ significa media estadística.

Según los autores el rol principal del ruido sería darle al sistema una expansión exponencial suprimida, que sin el mismo se comportaría de forma oscilante. Esto se analiza por dos caminos. Por un lado, realizan un cálculo explícito de la constante de Hubble (bajo varias simplificaciones) obteniendo finalmente la supresión exponencial buscada. Y, por otro lado, analizan la covarianza de Ω^2 , Ec. (4.17), y mediante resultados de la literatura para osciladores con frecuencia variable, argumentan a favor de la presencia de resonancia

paramétrica débil. Esto lo plantean como el mecanismo por el cual se da el resultado obtenido para la constante de Hubble.

4.2.1. Constante de Hubble

Veamos primero esquemáticamente el cálculo de la constante de Hubble.

Dado que el factor de escala depende tanto del espacio como del tiempo, la distancia física entre puntos, y por lo tanto la constante de Hubble, se expresan de forma diferente a la habitual. Por un lado, tenemos que

$$L(t) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl, \quad (4.19)$$

donde $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Entonces, como

$$H = \frac{\dot{L}}{L}, \quad (4.20)$$

queda que H en función de $a(t, \mathbf{x})$ es (cálculos detallados se realizan en el Apéndice A)

$$H = \left(\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \frac{\dot{a}(t, \mathbf{x})}{a(t, \mathbf{x})} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl \right) \left(\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl \right)^{-1}. \quad (4.21)$$

Vemos que es necesario obtener $a(t, \mathbf{x})$ de la Ec. (4.14). Para ello los autores argumentan que es válido usar resultados de la literatura para osciladores armónicos (deterministas) con frecuencia periódica en el tiempo. Esto se sustenta en dos afirmaciones, por un lado, que Ω^2 es positivo, por lo que la analogía de la Ec. (4.14) con la de un oscilador armónico es correcta. Por otro, que Ω se comporta de forma cuasiperiódica, en el sentido de que varía alrededor de su valor medio en una escala de tiempo fija.

La primera afirmación se justifica con un cálculo explícito de las componente diagonales de $T_{\mu\nu}$. Para la métrica de la Ec. (4.13), se obtiene

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i = 2 \dot{\phi}^2. \quad (4.22)$$

Por lo que según los autores se tiene

$$\Omega^2 = \frac{8\pi G}{3} \dot{\phi}^2 > 0. \quad (4.23)$$

Acá es importante notar una sutileza. En la Ec. (4.23) se está abusando de la notación, ya que los objetos involucrados son operadores, por lo que habría que precisar en qué sentido se entiende la positividad. Lo natural es asumir que se está queriendo decir $\langle \Omega^2 \rangle \propto \langle \dot{\phi}^2 \rangle > 0$, lo que es válido si regularizamos por un cut-off ultravioleta, pero no necesariamente si lo hacemos por otro método (como veremos explícitamente en el Capítulo 6).

La segunda afirmación tiene que ver con el comportamiento de Ω^2 . Debido a su naturaleza estocástica, lo único que podemos ver es cómo se comporta ξ , en particular, los autores analizan la Ec. (4.17) calculando la covarianza normalizada entre tiempos distintos

$$\begin{aligned}\chi(\Delta t) &= \text{Cov}(\Omega^2(t_1, \mathbf{x}), \Omega^2(t_2, \mathbf{x})) \\ &= \frac{\langle \{\Omega^2(t_1, \mathbf{x}) - \langle \Omega^2(t_1, \mathbf{x}) \rangle, \Omega^2(t_2, \mathbf{x}) - \langle \Omega^2(t_2, \mathbf{x}) \rangle\} \rangle}{\langle (\Omega^2 - \langle \Omega^2 \rangle)^2 \rangle}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Un cálculo directo da

$$\begin{aligned}\chi(\Delta t) &= \frac{16}{M^8 \Delta t^8} \left(36 (-2 + M^2 \Delta t^2) \cos(M \Delta t) + \right. \\ &\quad + (36 - 72 M^2 \Delta t^2 + 21 M^4 \Delta t^4 - M^6 \Delta t^6) \cos(2 M \Delta t) + \\ &\quad + 6 (6 + 2 M \Delta t (-6 + M^2 \Delta t^2) \sin(M \Delta t) + \\ &\quad \left. + M \Delta t (12 - 8 M^2 \Delta t^2 + M^4 \Delta t^4) \sin(2 M \Delta t) \right).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Su gráfico se muestra en la Figura 4.2.

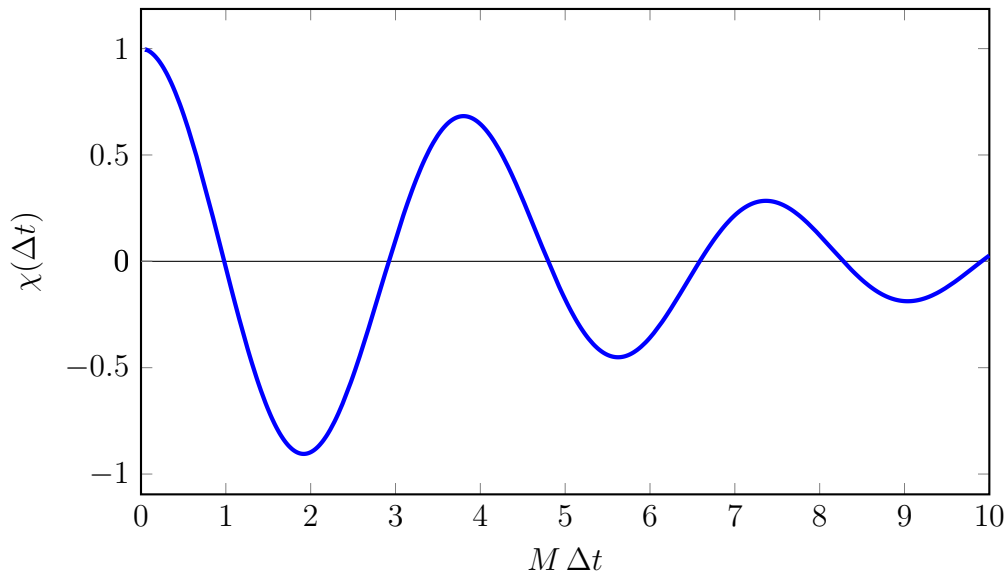


Figura 4.2: Gráfico de la covarianza normalizada entre tiempos distintos de Ω^2

Ahora conviene entender cuál es el significado de la covarianza. Una correlación negativa entre dos variables aleatorias implica que están, más probablemente, en lados opuestos del valor medio. Mientras que una correlación positiva indica que están, más probablemente, del mismo lado del valor medio. Con esto en mente, la Figura 4.2 nos dice que los Ω^2 a tiempos diferentes están fuertemente correlacionados, cuando la escala de tiempo es pequeña. En concreto, la correlación negativa es máxima cuando $\Delta t \sim 2/M$. Esto implica que si a $t = 0$, Ω^2 está por arriba de su valor medio, luego a $t \sim 2/M$ lo más probable es

que este por debajo de $\langle \Omega^2 \rangle$. Es por esto que los autores afirman que Ω^2 varía alrededor de su valor medio de forma cuasiperiódica, en una escala de tiempo $T \sim 1/M$. Nótese que al ser ξ un campo estocástico, lo que la Figura 4.2 nos está mostrando es como varían las *probabilidades* y no los valores concretos de ξ , y por consiguiente Ω^2 . Es por esto que los autores hablan de cuasiperiódico y no periódico.

Ahora que analizamos en detalle los argumentos a favor de usar los resultados de la literatura para osciladores armónicos deterministas, asumamos que son válidos para ver a donde llegan los autores.

Si consideremos un oscilador armónico con frecuencia dependiente de tiempo, se tiene que la solución general a la Ec. (4.14) es [21, 22]

$$a(t, \mathbf{x}) = C_1 e^{H_x t} P_1(t, \mathbf{x}) + C_2 e^{-H_x t} P_2(t, \mathbf{x}), \quad (4.26)$$

donde $H_x > 0$, C_1 y C_2 son constantes y P_1 y P_2 son funciones puramente periódicas del tiempo. La Ec. (4.26) es válida si ocurre el fenómeno de resonancia paramétrica. Por ahora asumamos que es así, incluso para nuestro sistema cuasiperiódico.

El segundo término del lado derecho de la Ec. (4.26) decrece exponencialmente, mientras que el primero crece, por lo que el primer término se vuelve dominante y la solución queda

$$a(t, \mathbf{x}) \approx e^{H_x t} P(t, \mathbf{x}), \quad (4.27)$$

donde se absorbió la constante C_1 dentro de $P_1(t, \mathbf{x})$, $P(t, \mathbf{x}) = C_1 P_1(t, \mathbf{x})$.

Como Ω^2 , no es estrictamente periódica, los autores proponen modificar la Ec. (4.27) con

$$a(t, \mathbf{x}) \simeq \exp\left(\int_0^t H_x(t') dt'\right) P(t, \mathbf{x}), \quad (4.28)$$

donde ahora H_x depende del tiempo y $P(t, \mathbf{x})$ es también cuasiperiódica a escala de tiempo $T \sim 1/M$.

Utilizando la Ec. (4.28) en la Ec. (4.19) se obtiene que

$$L = \tilde{L} e^{H t}. \quad (4.29)$$

Donde

$$\tilde{L} = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{P^2(t, \mathbf{x})} dl, \quad (4.30)$$

$$H = \frac{1}{t} \int_0^t H_x(t') dt. \quad (4.31)$$

Ahora los autores muestran que se cumple la condición

$$T \frac{d\Omega}{dt} \ll \Omega, \quad (4.32)$$

conocida como condición adiabática [23].

Usando que

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{G M^4}{6\pi} \longrightarrow \Omega \sim \sqrt{G} M^2, \quad (4.33)$$

$$\left\langle \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{G M^6}{9\pi} \longrightarrow \frac{d\Omega}{dt} \sim \sqrt{G} M^3, \quad (4.34)$$

y por consiguiente

$$T \sim \frac{2\pi}{\Omega} \sim (\sqrt{G} M^2)^{-1}. \quad (4.35)$$

Se tiene que en orden de magnitud se cumple la Ec. (4.32)

$$T \frac{d\Omega}{dt} \sim M \ll \sqrt{G} M^2 \sim \Omega. \quad (4.36)$$

Entonces, gracias a que se cumple la condición adiabática, la solución de la Ec. (4.14) para un oscilador armónico con frecuencia que varía lentamente, se puede obtener con la aproximación de WKB a primer orden. Esta aproximación ignora el factor exponencial en la Ec. (4.28) y las derivadas de Ω , por lo que queda

$$a(t, \mathbf{x}) = P(t, \mathbf{x}) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t, \mathbf{x})}} \cos\left(\int_0^t \Omega(t', \mathbf{x}) dt' + \theta_x\right), \quad (4.37)$$

donde las constantes A_0 y θ_x se obtienen con los valores iniciales $a(0, \mathbf{x})$ y $\dot{a}(0, \mathbf{x})$.

A partir de acá los autores hacen toda una serie de simplificaciones y estimaciones de orden de magnitud, en analogía con el cálculo del error en el invariante adiabático en [23]. No reproduciremos estas operaciones, y sólo mostraremos el resultado final al que llegan. Las estimaciones involucradas son altamente dependientes de la forma particular que los autores eligieron regularizar, por lo que en la sección siguiente analizaremos el camino alternativo que presentaron y que pensamos es más relevante, y en particular, más extensible al método de regularización que veremos en el Capítulo 6.

El resultado final al que llegan es

$$H = \alpha M e^{-\beta \sqrt{G} M}, \quad (4.38)$$

donde H es la constante de Hubble y α y β son dos constantes adimensionales que dependen de como varía $\Omega(t, \mathbf{x})$.

Vemos que la constante de Hubble esta exponencialmente suprimida por el cut-off M . Esto implica que con un M suficientemente grande, siempre será posible reproducir el resultado experimental de H .

4.2.2. Argumento intuitivo

Como camino alternativo al cálculo que los autores realizan para obtener la Ec. (4.38), y como justificación para la presencia de amplificación paramétrica, se analiza la condición para que ocurra este fenómeno.

Consideremos un oscilar armónico con frecuencia dependiente del tiempo

$$\ddot{x} + \omega^2(t) x = 0. \quad (4.39)$$

Si la frecuencia está dada por

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + h \cos(\gamma t)), \quad (4.40)$$

la Ec. (4.39) se puede resolver perturbativamente en h . Luego, el fenómeno de resonancia paramétrica ocurre si la frecuencia γ con la que varía ω es cercana a $2\omega_0/n$, explícitamente

$$\gamma \sim \frac{2\omega_0}{n}, \quad (4.41)$$

donde n es un número natural.

La intensidad de la resonancia paramétrica es máxima para $n = 1$, y disminuye con el aumento de n . En el límite de $n \rightarrow \infty$, el sistema se reduce a un oscilador de frecuencia constante, sin resonancia paramétrica.

Para el caso del campo escalar, la frecuencia del “oscilador” no varía con una única frecuencia, sino con un espectro de frecuencias, acotado entre 0 y $2M$. Esto se obtiene de llevar la expresión de $\Omega(t, \mathbf{0})$ a la forma de la Ec. (4.40). Se evalúa en el origen, ya que el espectro no debería depender del punto del espacio y hacerlo en el origen simplifica las cuentas. Queda

$$\Omega^2(t, \mathbf{0}) = \Omega_0^2 \left(1 + \int_0^{2M} d\gamma (f(\gamma) \cos(\gamma t) + g(\gamma) \sin(\gamma t)) \right). \quad (4.42)$$

Donde

$$f(\gamma) d\gamma = \frac{16\pi^2}{M^4} \left(\int_{\gamma \leq \omega + \omega' \leq \gamma + d\gamma} \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} (-\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger) \right), \quad (4.43)$$

$$g(\gamma) d\gamma = \frac{16\pi^2}{M^4} \left(\int_{\gamma \leq \omega + \omega' \leq \gamma + d\gamma} \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} i (\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger) \right) \quad (4.44)$$

y $\Omega_0^2 = \langle \Omega^2 \rangle$.

Notar que la región de integración $\gamma \leq \omega + \omega' \leq \gamma + d\gamma$ surge simplemente de aproximar la delta $\delta(\gamma - (\omega + \omega'))$ con un escalón de ancho $d\gamma$.

El espectro de frecuencias está dado por el valor medio del cuadrado de los factores que multiplican los senos y cosenos en la Ec. (4.42). Al calcularlo se obtiene

$$\langle (f(\gamma) d\gamma)^2 \rangle = \langle (g(\gamma) d\gamma)^2 \rangle = \begin{cases} A(\gamma) & \text{si } 0 \leq \gamma \leq M \\ B(\gamma) & \text{si } M \leq \gamma \leq 2M \end{cases}, \quad (4.45)$$

donde

$$A(\gamma) = \frac{4}{35} \left(\frac{\gamma}{M} \right)^7 \frac{d\gamma}{2M}, \quad (4.46)$$

$$B(\gamma) = -\frac{4}{35} \left(40 - 140 \frac{\gamma}{M} + 168 \left(\frac{\gamma}{M} \right)^2 - 70 \left(\frac{\gamma}{M} \right)^3 + \left(\frac{\gamma}{M} \right)^7 \right) \frac{d\gamma}{2M}. \quad (4.47)$$

Y se muestra graficado en la Figura 4.3. Se observa que hay un rango de frecuencias que contribuyen, pero acotado a $(0, 2M)$.

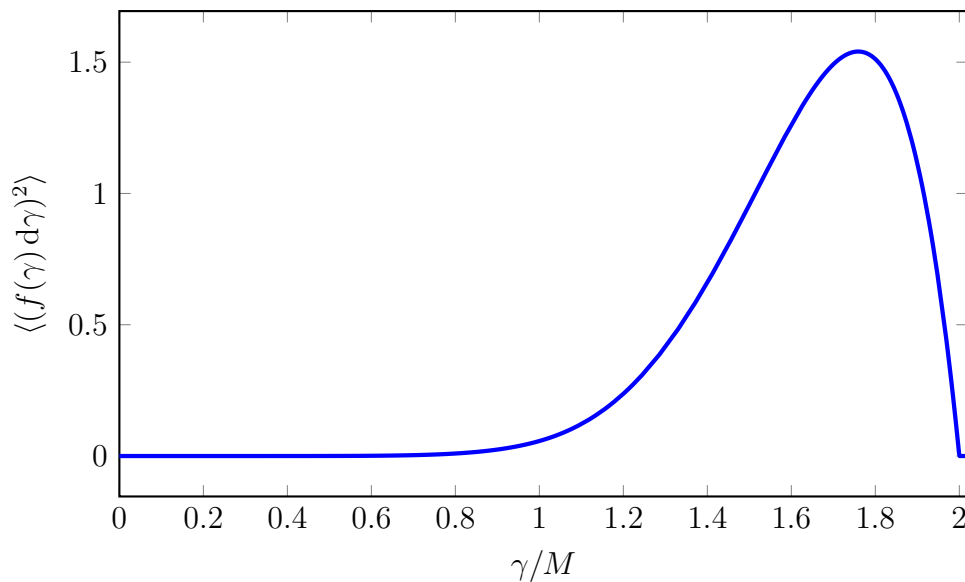


Figura 4.3: Gráfico de la densidad espectral de potencia de Ω^2

Ahora podemos analizar si se dará la condición de la Ec. (4.41). Para el caso, la parte constante de la frecuencia, “ ω_0^2 ”, es

$$\Omega_0^2 = \langle \Omega^2 \rangle = \frac{GM^4}{6\pi}. \quad (4.48)$$

Por lo que es directo, que si se cumple

$$n \geq \sqrt{\frac{G}{6\pi}} M = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \frac{M}{m_P}, \quad (4.49)$$

se tiene

$$\frac{2\Omega_0}{n} \in (0, 2M). \quad (4.50)$$

Lo que equivale a que exista una frecuencia “ γ ” en el intervalo $(0, 2M)$ para la que se cumple la Ec. (4.41) y por lo tanto ocurra amplificación paramétrica.

De la Ec. (4.49) vemos que $M \gg m_P$, con m_P la masa de Planck, implica que $n \gg 1$, por lo que la amplificación paramétrica será débil. Produciendo así una expansión exponencial pequeña, como se buscaba. Este punto es esencial al argumento planteado por Wang et al., ya que si $n \sim 1$ (amplificación paramétrica no suprimida) reaparecería el PCC, entonces para ellos es central que la escala de cut-off sea mucho mayor que la escala de Planck.

Nótese también que, debido a la elección de regularización, el efecto de las fluctuaciones del vacío no es el de una constante cosmológica, que tendría $\Omega^2 < 0$ y por lo tanto una expansión exponencial. Aquí $\Omega^2 > 0$ y por lo tanto el factor de escala es oscilante. Las fluctuaciones son las que producen la expansión exponencial mediante resonancia paramétrica. Por lo tanto, lo que crece exponencialmente (de forma suprimida si $n \gg 1$) es la amplitud de la oscilación, haciendo que, al menos a pequeña escala, el factor de escala pase por 0.

4.3. Trabajos posteriores

Las nuevas ideas propuestas en [1] son muy interesantes y originales, pero hay algunos aspectos técnicos aún no dilucidados, además de los que discutimos en esta tesis. Por completitud, mencionaremos aquí un trabajo posterior [3] en el que se intentó seguir desarrollando esta solución al PCC.

Una de las críticas al modelo descrito en este capítulo es que se considera una métrica muy particular, dada por la Ec. (4.13). A partir de esta se obtiene una ecuación para el factor de escala (ahora inhomogéneo) del universo, pero no están presentes en el modelo los vínculos de la relatividad general (ecuaciones de Einstein no diagonales en el Apéndice A).

Para subsanar parcialmente este problema, en [3] se consideran métricas más generales de la forma

$$ds^2 = dt^2 - h_{ij}(t, \mathbf{x}) dx^i dx^j. \quad (4.51)$$

Definiendo el factor de escala a partir del determinante de la métrica espacial, $a^6 = \det(h_{ij})$, la ecuación dinámica tiene la misma forma que la considerada hasta aquí,

Ec. (4.14), con

$$\Omega^2 = \frac{1}{3} \left(4\pi G (\rho + \text{tr } T) + 2\sigma^2 - \Lambda_B \right), \quad (4.52)$$

donde Λ_B es la constante cosmológica desnuda, σ^2 una cantidad geométrica que se construye a partir de la curvatura extrínseca de la hipersuperficie a tiempo constante, ρ es la densidad de materia y $\text{tr } T$ la traza espacial del tensor de energía-impulso.

Hasta aquí la generalización es más o menos directa. El punto crucial es que con esta métrica es posible incluir los vínculos de la relatividad general dentro de la teoría. El estudio de estos vínculos es complicado y ha sido realizado originalmente en [24]. Tomando un promedio espacial de los vínculos se puede ver que es *en principio* posible que el promedio de las fluctuaciones de la curvatura extrínseca se compense con un valor muy grande y negativo de la constante cosmológica desnuda. De esta manera el promedio de la 3-curvatura espacial sería mucho menor que la curvatura de Planck. Con este resultado es posible argumentar que el valor de Ω^2 está dominado por $-\Lambda_B$, y en consecuencia su valor medio es positivo, mientras que las fluctuaciones de $\rho + \text{tr } T$ generan la amplificación paramétrica descrita anteriormente. O sea, la consideración de los vínculos daría un argumento extra para afirmar que $\Omega^2 > 0$ y un mecanismo particular por el cual la constante cosmológica desnuda podría compensarse con fluctuaciones propias de la métrica, a la escala de Planck.

Estos resultados deben tomarse con cuidado, ya que la compensación parece involucrar un ajuste fino. Además, con $\Omega^2 > 0$ el factor de escala se vuelve singular en cada oscilación, y es necesario proveer una explicación de por qué estas singularidades no son observables a escala macroscópica. Estos problemas abiertos van más allá de los aspectos estudiados en la presente tesis, en la que nos focalizaremos en analizar en detalle los efectos del ruido en la ecuación dinámica.

Con esto concluimos el resumen de la propuesta de Wang et al. En el Capítulo 6 mostraremos nuestro intento de considerar las fluctuaciones del $T_{\mu\nu}$, pero utilizando regularización dimensional y renormalizando.

Capítulo 5

Osciladores estocásticos y movimiento browniano

“All of physics is either impossible or trivial. It is impossible until you understand it, and then it becomes trivial.”

— Ernest Rutherford

En este capítulo analizaremos un modelo de juguete basado en el movimiento Browniano donde podremos observar, con más facilidad que en el caso gravitatorio, los efectos del ruido en la estabilidad. En particular, utilizaremos resultados de la literatura para osciladores clásicos con frecuencia estocástica. Estos nos darán condiciones cuantitativas para las cuales un sistema equivalente al de los osciladores clásicos (igual ecuación de movimiento) será estable.

Primero haremos un breve resumen de estos resultados encontrados en la literatura, incluyendo por completitud osciladores con frecuencia variable de forma armónica. Cabe destacar que en el trabajo de Wang et al. el resultado que utilizan para estudiar el fenómeno de amplificación paramétrica es para osciladores deterministas. En el Capítulo 6 veremos en más detalle las diferencias entre su planteo y el nuestro.

Después estudiaremos un modelo de movimiento Browniano hasta llegar a sus ecuaciones de movimiento, aproximándolas de forma que sea posible analizar el sistema con los resultados de la literatura mencionados. Veremos tanto el caso de frecuencia positiva (oscilador tradicional) como negativa (oscilador invertido). Con lo obtenido en este capítulo estudiaremos en el Capítulo 6 las situaciones equivalentes en el contexto del PCC.

5.1. Resultados clásicos para osciladores armónicos

En esta sección resumiremos resultados de la literatura referentes a osciladores con frecuencia tanto determinista como estocástica, y su estabilidad en el tiempo.

5.1.1. Osciladores deterministas

Oscilador armónico tradicional

Consideremos un oscilador armónico con la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} + \beta \epsilon^2 \dot{\theta} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \cos(\omega t)) \theta = 0, \quad (5.1)$$

donde θ es el ángulo de desviación de la vertical y β (amortiguamiento), ω_0 (frecuencia natural) y ϵ son constantes positivas.

Cabe mencionar que los resultados a continuación se obtienen en la aproximación de $\epsilon \ll 1$, o sea los resultados son válidos al orden más bajo en ϵ . Siguiendo el procedimiento de [25], con condiciones iniciales $\theta(0) = 1$ y $\dot{\theta}(0) = 0$, hay dos posible situaciones.

a) Si $\omega = 2\omega_0$ (resonancia) no hay estabilidad, en particular la solución a las ecuaciones de movimiento es

$$\theta(t) = \cos(kt) \cosh\left(\frac{kt\epsilon}{4}\right) - \sin(kt) \sinh\left(\frac{kt\epsilon}{4}\right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.2)$$

Nótese que a este orden no hay dependencia con β y el sistema es oscilante con una amplitud que crece en el tiempo. O sea, se da el fenómeno de resonancia paramétrica. Si ahora trabajáramos a orden superior, la resonancia ocurriría para $\omega = 2\omega_0/n$. Esta es la situación estudiada por Wang et al., la que les permite suprimir el crecimiento exponencial con el cut-off, haciéndolo tan pequeño como el observado (ver Capítulo 4).

b) Si $\omega \neq 2\omega_0$, el sistema es estable, siendo que la solución a las ecuaciones es

$$\theta(t) = \exp\left(-\frac{t}{2} \beta \epsilon^2\right) \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 t \epsilon^2}{16\omega_0^2 - 4\omega^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.3)$$

Nótese que si el amortiguamiento es distinto de cero el sistema tiende a quedarse quieto.

Oscilador armónico invertido

Consideremos un oscilador armónico con la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2 (1 - \epsilon \sin(\omega t)) \theta = 0. \quad (5.4)$$

De [26, 27] tenemos que la condición de estabilidad es

$$\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0} < \epsilon < 0.45 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (5.5)$$

donde se asume que $\omega/\omega_0 \gg 1$.

O sea, si la frecuencia de la perturbación es mucho más grande que la natural y si su amplitud cae dentro de cierto rango de valores, el sistema se mantendrá estable. En particular, como no se considera disipación, el sistema será oscilante.

5.1.2. Osciladores estocásticos

Oscilador armónico tradicional

Consideremos un oscilador armónico con la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta}(t) + \beta \epsilon^2 \dot{\theta} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \xi(t)) \theta = 0. \quad (5.6)$$

donde ξ es una función estocástica del tiempo con media nula.

De [25] la condición de estabilidad para el sistema es

$$\beta \geq \omega_0^2 \operatorname{Re}\{S(2\omega_0)\}, \quad (5.7)$$

donde R es la función de correlación de ξ , y S la transformada de Fourier de R . Explícitamente

$$S(x) = \int_0^\infty R(\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma, \quad (5.8)$$

$$R(t - t') = \langle \xi(t) \xi(t') \rangle. \quad (5.9)$$

Este resultado se obtiene de resolver la ecuación diferencial al orden más bajo para ϵ , mediante el método de los dos tiempos o escalas múltiples. Concretamente se llega a

$$\begin{aligned} \langle \theta(t)^2 \rangle &= \frac{1}{2} \exp\left(\left(\frac{\omega_0^2}{2} (\operatorname{Re}\{S(2\omega_0)\} - S(0)) - \beta\right) \epsilon^2 t\right) \times \\ &\quad \times \cos\left(\left(2\omega_0 - \frac{\epsilon^2 \omega_0^2}{2} \operatorname{Im}\{S(2\omega_0)\}\right) t\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp\left((\omega_0^2 \operatorname{Re}\{S(2\omega_0)\} - \beta) \epsilon^2 t\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

De donde es directo que la condición de la Ec. (5.7) es necesaria para que no haya un crecimiento exponencial (resonancia paramétrica en un oscilador estocástico). También observamos que el caso límite $\beta = \omega_0^2 \operatorname{Re}\{S(2\omega_0)\}$ resulta en una amplitud cuadrada media, $\langle \theta^2 \rangle$, oscilante y decreciente en el tiempo. Por lo que al orden de aproximación usado ($\epsilon \ll 1$), este caso es también estable.

Oscilador armónico invertido

Consideremos ahora un oscilador armónico invertido con ecuación de movimiento dada por

$$\ddot{\theta}(t) + \beta \dot{\theta} - \omega_0^2 (1 + \xi''(t)) \theta = 0, \quad (5.11)$$

donde $\xi''(t) = d^2\xi/dt^2$ y $\xi(t)$ es una función estocástica del tiempo con media nula (amplitud de la perturbación aplicada al péndulo). Este sistema es el llamado péndulo de Kapitza.

En [28] se demuestra que para tener estabilidad a $t \rightarrow \infty$, de deben cumplir simultáneamente

$$\sigma_{\xi'}^2 > \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (5.12)$$

$$\beta \geq \gamma. \quad (5.13)$$

En las condiciones de las Ecs. (5.12) y (5.13) se usaron las siguientes definiciones

$$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle, \quad (5.14)$$

$$\sigma_{\xi'}^2 = -\sigma^2 \left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right) \Big|_{t=0}, \quad (5.15)$$

$$R = \frac{1}{\sigma^2} \langle \xi(s) \xi(s+t) \rangle, \quad (5.16)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{k^2} \left(16 k^4 \Phi_{11}(2k) - 4 k^2 (\Phi_{12}(2k) + \Phi_{21}(2k)) + \Phi_{22}(2k) \right), \quad (5.17)$$

$$k^2 = \omega_0^4 \sigma_{\xi'}^2 - \omega_0^2, \quad (5.18)$$

$$\Phi_{ij}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(t) e^{ixt} dt, \quad (5.19)$$

$$R_{ij}(t) = \langle \eta_i(s) \eta_j(s+t) \rangle, \quad (5.20)$$

$$\eta_1(t) = \omega_0^2 \xi(t), \quad (5.21)$$

$$\eta_2(t) = \omega_0^4 \xi''(t) \xi(t) - \omega_0^4 \langle \xi''(t) \xi(t) \rangle. \quad (5.22)$$

La primera condición de estabilidad, Ec. (5.12), es la habitualmente encontrada en la literatura [21, 29]. Como se observa, la varianza de la velocidad de la perturbación tiene que ser tanto más grande cuanto menor sea la frecuencia natural. O sea, es la condición sobre el ruido para que el sistema se comporte como un oscilador tradicional.

La segunda condición, Ec. (5.13), es necesaria para asegurar la estabilidad a largo plazo. O sea, es la condición para evitar resonancia paramétrica. Esta se obtiene de la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} + \beta \mathcal{E} = \gamma \mathcal{E}, \quad (5.23)$$

donde la función \mathcal{E} es la modulación de la distribución en frecuencia de la energía del

péndulo. Y T es la escala de tiempo en donde actúa esta modulación (mucho mayor que la escala de tiempo de la perturbación y la de la frecuencia natural).

Es directo que, si no se cumple la segunda condición, la energía del péndulo se incrementará exponencialmente. Por otro lado, vemos que en el caso límite $\beta = \gamma$ (asumiendo que se cumple la primera condición) la distribución en frecuencia de la energía del sistema se mantiene constante en el tiempo, o sea, el sistema se encuentra en un estado oscilante. Este estado, aunque no estrictamente estable en el sentido clásico, no crece exponencialmente como sucedería si $\beta < \gamma$. Por lo tanto es estable, si esto se entiende como la situación en la que el ángulo de desviación de la vertical θ se mantiene acotado para $t \rightarrow \infty$.

Las Ecs. (5.7), (5.12) y (5.13) son las condiciones de estabilidad que usaremos para analizar los sistemas centrales a esta tesis.

5.2. Movimiento Browniano cuántico

Consideremos la acción dada por

$$S = S_B + S_E + S_{int}, \quad (5.24)$$

$$S_B = \int dt \frac{M}{2} \dot{x}^2 - \frac{M}{2} \Omega^2 x^2, \quad (5.25)$$

$$S_E = \sum_n \int dt \frac{m_n}{2} \dot{q}_n^2 - \frac{m_n}{2} \omega_n^2 q_n^2, \quad (5.26)$$

$$S_{int} = - \sum_n \int dt \frac{\lambda_n}{2} x^2 q_n^2, \quad (5.27)$$

donde S_E es la acción del entorno (conjunto de osciladores armónicos), S_B es la acción del cuerpo de masa M perturbado por el entorno y S_{int} es la acción de la interacción entre ambos. λ_n , ω_n y Ω son constantes positivas.

Para resolver este sistema usaremos un método perturbativo (λ_n pequeños) y consideraremos a x como una variable clásica y a los q_n como operadores cuánticos. De este modo se desarrolla un modelo de juguete análogo al PCC, donde la métrica se toma clásica y los campos de materia se toman cuánticos. En particular x hará las veces del factor de escala $a(t)$, mientras que los q_n harán las veces de los campos de materia, ya que como veremos, los q_n renormalizarán la frecuencia, al igual que lo hacen los campos con Ω en el caso gravitatorio. Así es como en este modelo tenemos un sistema equivalente al dado por la Ec. (4.14), que nos permitirá estudiar los efectos estabilizadores del ruido cuántico sin las complejidades introducidas por la TCC.

De la acción es directo obtener la ecuación de movimiento para las variables x y q_n

$$M \ddot{x} + M \Omega^2 x + x \sum_n \lambda_n q_n^2 = 0, \quad (5.28)$$

$$m_n \ddot{q}_n + m_n \omega_n^2 q_n + \lambda_n x^2 q_n = 0 \quad \forall n. \quad (5.29)$$

Definiendo $\xi_n(t) = q_n^2 - \langle q_n^2 \rangle$ y de la Ec. (5.28) obtenemos

$$M \ddot{x} + \left(M \Omega^2 + \sum_n \lambda_n \langle q_n^2 \rangle \right) x = -x \sum_n \lambda_n \xi_n(t). \quad (5.30)$$

Paralelamente definimos también la función de correlación R_n ,

$$\begin{aligned} R_n(t, t') &= \langle \{ \xi_n(t), \xi_n(t') \} \rangle \\ &= \langle \{ q_n^2(t), q_n^2(t') \} \rangle - \langle q_n^2(t) \rangle \langle q_n^2(t') \rangle, \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde los corchetes son el orden simétrico de operadores.

5.2.1. Desarrollo perturbativo

Considerando ahora la expansión genérica en operadores de creación y destrucción para \hat{q}_n

$$\hat{q}_n = f_n \hat{a}_n + f_n^* \hat{a}_n^\dagger, \quad (5.32)$$

donde f_n es una función del tiempo. Tenemos que al combinar las Ecs. (5.29) y (5.32) queda

$$m_n \ddot{f}_n + (m_n \omega_n^2 + \lambda_n x^2) f_n = 0. \quad (5.33)$$

Ahora consideremos el desarrollo en serie

$$f_n = f_n^{(0)} + f_n^{(1)} + \dots \quad (5.34)$$

El término de orden más bajo $f_n^{(0)}$ se obtiene de considerar $\lambda_n = 0$, por lo que es directo que los $f_n^{(0)}$ cumplen con

$$\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n = 0, \quad (5.35)$$

$$f_n \dot{f}_n^* - \dot{f}_n f_n^* = \frac{i}{m_n}, \quad (5.36)$$

donde la segunda ecuación viene de pedir $[\hat{q}_n, \dot{\hat{q}}_n] = i/m_n$. La solución a este sistema es

$$f_n^{(0)} = \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n m_n}}. \quad (5.37)$$

Ahora, colocando la Ec. (5.34), en la Ec. (5.33) obtenemos

$$\underbrace{m_n \ddot{f}_n^{(0)} + m_n \omega_n^2 f_n^{(0)}}_{=0} + \lambda_n x^2 f_n^{(0)} + m_n \ddot{f}_n^{(1)} + (m_n \omega_n^2 + \underbrace{\lambda_n x^2}_{\text{orden superior}}) f_n^{(1)} = 0. \quad (5.38)$$

Quedando una ecuación para los $f_n^{(1)}$

$$\ddot{f}_n^{(1)} + \omega_n^2 f_n^{(1)} = -\frac{\lambda_n}{m_n} x^2 f_n^{(0)}. \quad (5.39)$$

Esta ecuación la resolveremos con la función de Green \ddot{G}_{ret} que se obtiene de

$$\ddot{G}_{ret}(t) + \omega^2 G_{ret}(t) = \delta(t). \quad (5.40)$$

En particular usaremos

$$G_{ret}(t) = \frac{\theta(t)}{\omega} \sin(\omega t), \quad (5.41)$$

donde $\theta(t)$ es la función de Heaviside.

Entonces de la Ec. (5.39) queda

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}(t) &= \int^t dt' G_{ret}(t-t') \left(-\frac{\lambda_n}{m_n} x^2 f_n^{(0)} \right) \\ &= -\frac{\lambda_n}{\omega_n m_n} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n m_n}} \int dt' \sin(\omega_n(t-t')) x^2 e^{-i\omega_n t'}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ahora calcularemos $\langle \hat{q}_n^2 \rangle$ a este orden, pero queremos este resultado a temperatura arbitraria, por lo que las relaciones habituales $\langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rangle = 0$ y $\langle \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger \rangle = 1$ ya no serán válidas.

A T arbitraria tenemos que el valor medio de un operador \hat{O} es $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}\{\hat{O} \rho\}$ donde

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_n (i+\frac{1}{2})} |i\rangle \langle i|, \quad (5.43)$$

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_n (i+\frac{1}{2})}, \quad (5.44)$$

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad (5.45)$$

y donde consideramos un sistema con un conjunto infinito de estados discretos $|i\rangle$, como

por ejemplo el oscilador armónico.

Para nuestro caso tenemos $\hat{O} = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n$, por lo que resulta

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rangle &= \text{Tr}\{\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rho\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_n (i+\frac{1}{2})} \langle j | \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n | i \rangle \underbrace{\langle i | j \rangle}_{\delta_{ij}} \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_n (i+\frac{1}{2})} \underbrace{\langle i | \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n | i \rangle}_i \\
&= \frac{1}{e^{\beta \omega_n} - 1}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Y por lo tanto

$$\langle \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger \rangle = 1 + \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rangle = \frac{e^{\beta \omega_n}}{e^{\beta \omega_n} - 1}, \tag{5.47}$$

$$\langle \hat{a}_n \hat{a}_n \rangle = \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n^\dagger \rangle = 0. \tag{5.48}$$

Queda entonces

$$\begin{aligned}
\langle \hat{q}_n^2 \rangle &= |f_n|^2 \left(\frac{e^{\beta \omega_n}}{e^{\beta \omega_n} - 1} + \frac{1}{e^{\beta \omega_n} - 1} \right) \\
&= |f_n|^2 \coth\left(\frac{\beta \omega_n}{2}\right).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Considerando hasta primer orden y con la Ec. (5.37) tenemos que

$$\begin{aligned}
|f_n|^2 &= |f_n^{(0)} + f_n^{(1)}|^2 = (f_n^{(0)} + f_n^{(1)})(f_n^{*(0)} + f_n^{*(1)}) \\
&= |f_n^{(0)}|^2 + 2 \text{Re}\{f_n^{*(0)} f_n^{(1)}\} + \text{orden superior} \\
&\approx \frac{1}{2 m_n \omega_n} + 2 \text{Re}\{f_n^{*(0)} f_n^{(1)}\}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Y de las Ecs. (5.37) y (5.42) tenemos

$$2 \text{Re}\{f_n^{*(0)} f_n^{(1)}\} = -\frac{\lambda_n}{2 \omega_n^2 m_n^2} \int^t dt' \sin(2 \omega_n (t - t')) x^2. \tag{5.51}$$

Por lo tanto, queda

$$\langle \hat{q}_n^2 \rangle = \frac{Y_n}{2 m_n \omega_n} - \frac{Y_n \lambda_n}{2 m_n^2 \omega_n^2} \int^t dt' \sin(2 \omega_n (t - t')) x^2, \tag{5.52}$$

donde $Y_n = \coth(\beta \omega_n / 2)$.

Poniéndolo en la Ec. (5.30), obtenemos finalmente

$$M \ddot{x} + M \Omega_{ren}^2 x + x \int dt' D(t-t') x(t')^2 = \tilde{\xi} x. \quad (5.53)$$

Donde

$$\Omega_{ren}^2 = \Omega^2 + \sum_n \frac{Y_n \lambda_n}{2 M m_n \omega_n}, \quad (5.54)$$

$$D(t-t') = - \sum_n \frac{Y_n \lambda_n^2}{2 m_n^2 \omega_n^2} \sin(2 \omega_n (t-t')), \quad (5.55)$$

$$\tilde{\xi}(t) = - \sum_n \lambda_n \xi_n(t), \quad (5.56)$$

$$Y_n = \coth\left(\frac{\beta \omega_n}{2}\right). \quad (5.57)$$

Vemos claramente que este modelo muestra los tres fenómenos producidos por el entorno sobre un oscilador clásico: disipación, ruido y cambio en la frecuencia. Este resultado ya habían sido obtenidos en la literatura [30, 31] mediante una metodología más compleja.

Ahora podemos hacer una analogía entre los distintos términos de la Ec. (5.53) y el caso gravitatorio. De la expresión de Ω_{ren}^2 , vemos que Ω^2 hace las veces de la constante cosmológica mientras que el término de la sumatoria sobre n hace las veces de la EPC proveniente de los campos de materia. Considerando lo anterior, el término del ruido haría entonces las veces de las fluctuaciones de la EPC.

Teniendo ya la ecuación para nuestro modelo de movimiento Browniano podemos ver que nos dicen los resultados de la Sección 5.1 para diferentes signos de Ω_{ren}^2 . Para ambas posibilidades no consideraremos los efectos de la disipación, ya que la misma entra en la Ec. (5.53) de forma diferente a como entra en las Ecs. (5.6) y (5.11), dificultando su comparación.

Como se mencionó el modelo de movimiento Browniano es de especial interés para analizar el caso del oscilador invertido ($\Omega_{ren}^2 < 0$), pero por completitud veremos la condición de estabilidad también en el caso $\Omega_{ren}^2 > 0$.

5.2.2. Frecuencia renormalizada positiva

La Ec. (5.53) se puede reescribir como

$$\ddot{x} + \Omega_{ren}^2 \left(1 + \frac{-\tilde{\xi}(t)}{M \Omega_{ren}^2}\right) x + x \int dt' \frac{D(t-t')}{M} x(t')^2 = 0. \quad (5.58)$$

Al compararla con la Ec. (5.6), tenemos los siguientes mapeos

$$\omega_0 \longleftrightarrow \Omega_{ren}, \quad (5.59)$$

$$\epsilon \longleftrightarrow \frac{1}{M \Omega_{ren}^2}, \quad (5.60)$$

$$\xi(t) \longleftrightarrow -\tilde{\xi}(t). \quad (5.61)$$

De la condición de estabilidad en la Ec. (5.7), tomando $\beta = 0$, queda

$$0 \geq \text{Re}\{S(2\Omega_{ren})\}. \quad (5.62)$$

Caso discreto

Primero analizaremos el problema con el sistema discretizado (dejando las sumas sobre n como tales). En todo lo que sigue usaremos f_n al orden más bajo ($f_n = f_n^{(0)}$) para simplificar las cuentas.

De la definición en la Ec. (5.9) y el mapeo en la Ec. (5.61) tenemos que R será

$$R(t - t') = \langle \{ \tilde{\xi}(t), \tilde{\xi}(t') \} \rangle, \quad (5.63)$$

donde se introdujo el orden de simétrico de operadores para tener en cuenta el hecho de que $\xi(t)$ es una función clásica mientras que $\tilde{\xi}(t)$ es un operador cuántico.

Ahora, en función de R_n queda

$$\begin{aligned} R(t - t') &= \langle \{ \tilde{\xi}(t), \tilde{\xi}(t') \} \rangle \\ &= \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m \langle \{ \xi_n(t), \xi_m(t') \} \rangle \\ &= \sum_n \lambda_n^2 \langle \{ \xi_n(t), \xi_n(t') \} \rangle \\ &= \sum_n \lambda_n^2 R_n(t - t'). \end{aligned} \quad (5.64)$$

En el Apéndice B mostramos que

$$R_n(t - t') = \frac{1}{4 m_n^2 \omega_n^2} \left(\cos(2\omega_n(t - t')) (Y_n^2 + 1) + Y_n^2 - 1 \right), \quad (5.65)$$

donde recordamos que $Y_n = \coth(\beta\omega_n/2)$.

Por lo que R es

$$\begin{aligned} R(t-t') &= \sum_n \lambda_n^2 R_n(t-t') \\ &= \sum_n \frac{\lambda_n^2}{4m_n^2 \omega_n^2} \left(\cos(2\omega_n(t-t')) (Y_n^2 + 1) + Y_n^2 - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.66)$$

Ahora realizando la transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^\infty R(\sigma) e^{ix\sigma} \\ &= \sum_n \frac{\lambda_n^2}{4m_n^2 \omega_n^2} (A + B + C + D), \end{aligned} \quad (5.67)$$

donde

$$A = \int_0^\infty \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \cos(2\omega_n\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma, \quad (5.68)$$

$$B = \int_0^\infty \cos(2\omega_n\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma, \quad (5.69)$$

$$C = \int_0^\infty \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) e^{ix\sigma} d\sigma, \quad (5.70)$$

$$D = - \int_0^\infty e^{ix\sigma} d\sigma. \quad (5.71)$$

La integral B es

$$\int_0^\infty \cos(2\omega_n\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma = \frac{1}{2} \left(\hat{\theta}(x + 2\omega_n) + \hat{\theta}(x - 2\omega_n) \right), \quad (5.72)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(x) &= \int_{-\infty}^\infty \theta(\sigma) e^{ix\sigma} \\ &= \pi \delta(x) + \frac{i}{x}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Por lo tanto, queda

$$\int_0^\infty \cos(2\omega_n\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma = \frac{ix}{x^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\pi}{2} (\delta(x + 2\omega_n) + \delta(x - 2\omega_n)). \quad (5.74)$$

Y entonces tenemos que

$$A + B = (Y_n^2 + 1) \left(\frac{ix}{x^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\pi}{2} (\delta(x + 2\omega_n) + \delta(x - 2\omega_n)) \right). \quad (5.75)$$

Y luego

$$\begin{aligned}
C + D &= (Y_n^2 - 1) \int_0^\infty e^{ix\sigma} d\sigma \\
&= (Y_n^2 - 1) \int_{-\infty}^\infty \theta(\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma \\
&= (Y_n^2 - 1) \left(\frac{i}{x} + \pi \delta(x) \right).
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Por lo que juntando todo queda que

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_n \frac{\lambda_n^2}{4m_n^2 \omega_n^2} \left((Y_n^2 - 1) \left(\frac{i}{x} + \pi \delta(x) \right) \right. \\
&\quad \left. + (Y_n^2 + 1) \left(\frac{ix}{x^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\pi}{2} (\delta(x + 2\omega_n) + \delta(x - 2\omega_n)) \right) \right).
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Evaluando en $2\Omega_{ren}$, tomando la parte real y asumiendo que $\Omega_{ren} \neq 0$, queda

$$\boxed{\text{Re}\{S(2\Omega_{ren})\} = \frac{\pi}{16} \sum_n \frac{\lambda_n^2}{m_n^2 \omega_n^2} (Y_n^2 + 1) (\delta(\Omega_{ren} - \omega_n) + \delta(\Omega_{ren} + \omega_n))}, \tag{5.78}$$

donde $Y_n = \coth(\beta \omega_n/2)$.

Ahora, considerando la condición de la Ec. (5.62), notemos que la Ec. (5.78) será siempre mayor o igual que 0. Entonces, de no haber disipación, el sistema será estable solo en el caso de $\text{Re}\{S(2\Omega_{ren})\} = 0$, y esto sucede si $\Omega_{ren} \neq \pm \omega_n$ para todo n . O sea, la frecuencia renormalizada tiene que ser diferente al conjunto de frecuencias ω_n para que no haya amplificación paramétrica en este sistema.

Caso continuo

En el marco del movimiento browniano cuántico, se suelen considerar entornos con un espectro continuo de frecuencias. En ese caso, es conveniente introducir la denominada densidad espectral

$$I(\omega) = \sum_n \delta(\omega - \omega_n) \frac{\lambda_n^2}{(2m_n \omega_n)^2}. \tag{5.79}$$

Entonces es posible reescribir las Ecs. (5.55) y (5.66) como funciones de $I(\omega)$,

$$R(t - t') = \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) \left((Y^2 + 1) \cos(2\omega(t - t')) + Y^2 - 1 \right), \tag{5.80}$$

$$D(t - t') = 2 \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) Y \sin(2\omega(t - t')), \tag{5.81}$$

donde $Y = \coth(\beta \omega/2)$. En el Apéndice B obtenemos R y D explícitamente para $I(\omega) = \omega^n$ con n natural, como ejemplo de este tipo de cálculo.

Ahora, la transformada de Fourier de R es

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^\infty d\sigma R(\sigma) e^{ix\sigma} \\ &= \int_0^\infty d\sigma \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) e^{ix\sigma} \left((Y^2 + 1) \cos(2\omega\sigma) + Y^2 - 1 \right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) (Y^2 + 1) A + \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) (Y^2 - 1) B. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Donde, de las Ecs. (5.72) y (5.73), tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^\infty d\sigma \theta(\sigma) e^{ix\sigma} \cos(2\omega\sigma) \\ &= \frac{ix}{x^2 - 4\omega^2} + \frac{\pi}{2} (\delta(x - 2\omega) + \delta(x + 2\omega)) \\ &= \frac{ix}{x^2 - 4\omega^2} + \frac{\pi}{4} \left(\delta\left(\omega - \frac{x}{2}\right) + \delta\left(\omega + \frac{x}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$B = \int_{-\infty}^\infty d\sigma \theta(\sigma) e^{ix\sigma} = \frac{i}{x} + \pi \delta(x). \quad (5.84)$$

Queda entonces

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) (Y^2 + 1) \frac{ix}{x^2 - 4\omega^2} + \\ &+ \frac{\pi}{4} \left(I\left(\frac{x}{2}\right) \left(Y\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \right) + I\left(-\frac{x}{2}\right) \left(Y\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \right) \right) + \\ &+ \frac{i}{x} \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) (Y^2 - 1) + \pi \delta(x) \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) (Y^2 - 1). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Tomando la parte real y considerando que $I(\omega) \in \mathbb{R}$ queda

$$\begin{aligned} \text{Re}\{S(x)\} &= \frac{\pi}{4} \left(I\left(\frac{x}{2}\right) \left(Y\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \right) + I\left(-\frac{x}{2}\right) \left(Y\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \right) \right) + \\ &+ \pi \delta(x) \int_{-\infty}^\infty d\omega I(\omega) (Y^2 - 1). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Finalmente, tomando $\Omega_{ren} \neq 0$ y asumiendo que $I(\omega) = 0$ si $\omega < 0$ queda

$$\boxed{\text{Re}\{S(2\Omega_{ren})\} = \frac{\pi}{4} I(\Omega_{ren}) \left(\coth^2\left(\frac{\beta}{2} \Omega_{ren}\right) + 1 \right)}. \quad (5.87)$$

Por completitud vemos los límites de baja y alta temperatura,

$$T \rightarrow \infty \implies Y^2 \approx \frac{4T^2}{\omega^2}, \quad (5.88)$$

$$T \rightarrow 0 \implies Y^2 \approx 1. \quad (5.89)$$

Quedando

$T \rightarrow \infty$:

$$\text{Re}\{S(2\Omega_{ren})\} = \frac{T^2 \pi}{\Omega_{ren}^2} I(\Omega_{ren}). \quad (5.90)$$

$T \rightarrow 0$:

$$\text{Re}\{S(2\Omega_{ren})\} = \frac{\pi}{2} I(\Omega_{ren}). \quad (5.91)$$

Vemos que la condición dependerá de la forma funcional de $I(\omega)$, en particular los ceros que tenga y su signo. Pero considerando que una $I(\omega)$ razonable será positiva para todo ω , y descontando los efectos de la disipación, estamos en una situación igual a la del caso discreto. Habrá estabilidad cuando $I(\Omega_{ren}) = 0$. Un ejemplo de esto se vio en el caso discreto donde $I(\omega) = 0$ para toda frecuencia diferente a un cierto conjunto de valores ω_n . Otro ejemplo sería si $I(\omega)$ fuera una función ventana, tal que Ω_{ren} se encuentre fuera del rango donde $I(\omega)$ es diferente de cero.

5.2.3. Frecuencia renormalizada negativa

Para este caso reescribimos la Ec. (5.53) como

$$\ddot{x} - (-\Omega_{ren}^2) \left(1 + \frac{-\tilde{\xi}''(t)}{M\Omega_{ren}^2}\right) x + x \int dt' \frac{D(t-t')}{M} x(t')^2 = 0. \quad (5.92)$$

Donde el uso de $\tilde{\xi}''(t)$ es simplemente un cambio de nombre de ξ para facilitar la comparación con la Ec. (5.11).

Por claridad recordamos que en esta nueva nomenclatura se tiene

$$\tilde{\xi}''(t) = -\sum_n \lambda_n \xi_n'', \quad (5.93)$$

$$\xi_n'' = q_n^2 - \langle q_n^2 \rangle. \quad (5.94)$$

Para reutilizar lo calculado en la Sección 5.2.2 y por consistencia con la nomenclatura de esta sección definimos

$$R_p''''(t - t') = \langle \{ \tilde{\xi}''(t), \tilde{\xi}''(t') \} \rangle . \quad (5.95)$$

Y por lo tanto, de la Ec. (5.80) tenemos

$$R_p''''(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left((Y^2 + 1) \cos(2\omega(t - t')) + Y^2 - 1 \right) . \quad (5.96)$$

Al comparar la Ec. (5.92) con la Ec. (5.11), tenemos los siguientes mapeos

$$\omega_0^2 \longleftrightarrow -\Omega_{ren}^2 , \quad (5.97)$$

$$\xi''(t) \longleftrightarrow -\frac{\tilde{\xi}''(t)}{M \Omega_{ren}^2} . \quad (5.98)$$

De dichas equivalencias y de las Ecs. (5.14) y (5.16) queda

$$\sigma^2 = \frac{1}{M^2 \Omega_{ren}^4} \langle \tilde{\xi}^2 \rangle , \quad (5.99)$$

$$R = \frac{\langle \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t') \rangle}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} = \frac{R_p(t - t')}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} , \quad (5.100)$$

$$R'' = -\frac{\langle \tilde{\xi}'(t) \tilde{\xi}'(t') \rangle}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} = \frac{R_p''(t - t')}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} , \quad (5.101)$$

$$R'''' = \frac{\langle \tilde{\xi}''(t) \tilde{\xi}''(t') \rangle}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} = \frac{R_p''''(t - t')}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} . \quad (5.102)$$

Primera condición

La primera condición de estabilidad, Ec. (5.12), es la que nos dice como debe ser el ruido para que el sistema pase a comportarse como un oscilador armónico tradicional. La misma

la reescribiremos usando que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi'}^2 &= -\sigma^2 R'' \Big|_{t=0} \\
 &= -\frac{1}{M^2 \Omega_{ren}^4} \langle \tilde{\xi}^2 \rangle \frac{R_p'' \Big|_{t=0}}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} \\
 &= -\frac{1}{M^2 \Omega_{ren}^4} R_p'' \Big|_{t=0}.
 \end{aligned} \tag{5.103}$$

Y

$$\frac{1}{\omega_0^2} = -\frac{1}{\Omega_{ren}^2}. \tag{5.104}$$

Por lo tanto, la condición queda

$$R_p'' \Big|_{t=0} < M^2 \Omega_{ren}^2. \tag{5.105}$$

Debemos entonces calcular R_p'' . Para ello partimos de la Ec. (5.96), y trasformamos Fourier a ambos lados

$$\text{L.I. : } \int_{-\infty}^{\infty} dt R_p''''(t) e^{-i\nu t} = \nu^4 \hat{R}(\nu), \tag{5.106}$$

$$\text{L.D. : } \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left((Y^2 + 1) \cos(2\omega t) + Y^2 - 1 \right) e^{-i\nu t}, \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.D. : } & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left((Y^2 + 1) \cos(2\omega t) + Y^2 - 1 \right) e^{-i\nu t} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 + 1) \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos(2\omega t) e^{-i\nu t} + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\nu t} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 + 1) \pi (\delta(\nu - 2\omega) + \delta(\nu + 2\omega)) + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 - 1) 2\pi \delta(\nu).
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Por lo tanto, queda

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_p(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 + 1) \left(\frac{\delta(\nu - 2\omega)}{\nu^4} + \frac{\delta(\nu + 2\omega)}{\nu^4} \right) + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 - 1) 2\pi \frac{\delta(\nu)}{\nu^4}.
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

De lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
R_p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \hat{R}_p(\nu) e^{i\nu t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 + 1) \frac{\cos(2\omega t)}{16\omega^4} + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) (Y^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{\delta(\nu)}{\nu^4} e^{i\nu t}.
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Debido a la divergencia en el segundo término, vemos primero el caso límite $T \rightarrow 0 \Rightarrow Y^2 \rightarrow 1$, quedando

$$R_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \frac{\cos(2\omega t)}{8\omega^4}. \tag{5.111}$$

Tenemos entonces que la segunda derivada es

$$R_p''(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \frac{\cos(2\omega t)}{2\omega^2}. \tag{5.112}$$

Ahora, en el caso de temperatura arbitraria vimos que el método de resolución de la ecuación diferencial con Fourier es inadecuado, pero una integración directa es perfectamente posible. Por consistencia debemos elegir las constantes de integración de tal forma que en el límite $T \rightarrow 0$, los resultados se reduzcan a las Ecs. (5.111) y (5.112).

En el Apéndice B demostramos que se obtiene

$$R_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left((Y^2 + 1) \frac{\cos(2\omega t)}{16\omega^4} + (Y^2 - 1) \frac{t^4}{24} \right), \tag{5.113}$$

$$R_p''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left(- (Y^2 + 1) \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega^2} + (Y^2 - 1) \frac{t^2}{2} \right). \tag{5.114}$$

Por lo que finalmente

$$R_p''(t) \Big|_{t=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{I(\omega)}{4\omega^2} (Y^2 + 1). \tag{5.115}$$

Entonces a T cualquiera y para $I(\omega)$ genérica, la primera condición queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{I(\omega)}{4\omega^2} (Y^2 + 1) > M^2 |\Omega_{ren}^2|. \tag{5.116}$$

Donde recordemos que $\Omega_{ren}^2 < 0$.

Segunda condición

La segunda condición de estabilidad, Ec. (5.13), es la que de cumplirse evita el fenómeno de amplificación paramétrica, o sea, asegura la estabilidad a tiempos largos. Con $c = 0$, la condición queda simplemente

$$0 \geq \gamma. \quad (5.117)$$

Para este caso, de la Ec. (5.17) y las Ecs. (5.18) a (5.22) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{11}(t - t') &= \omega_0^4 \langle \xi(t) \xi(t') \rangle \\ &= \frac{1}{M^2} \langle \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t') \rangle, \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\begin{aligned} R_{12}(t - t') &= \omega_0^6 \langle \xi(t) (\xi''(t') \xi(t') - \langle \xi''(t') \xi(t') \rangle) \rangle \\ &= \omega_0^6 \langle \xi(t) \xi''(t') \xi(t') \rangle - \omega_0^6 \underbrace{\langle \xi(t) \rangle}_{=0} \langle \xi''(t') \xi(t') \rangle \\ &= \frac{1}{M^3} \langle \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}''(t') \tilde{\xi}(t') \rangle, \end{aligned} \quad (5.119)$$

$$R_{21}(t - t') = \frac{1}{M^3} \langle \tilde{\xi}''(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t') \rangle, \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned} R_{22}(t - t') &= \omega_0^8 \langle (\xi''(t) \xi(t) - \langle \xi''(t) \xi(t) \rangle) (\xi''(t') \xi(t') - \langle \xi''(t') \xi(t') \rangle) \rangle \\ &= \omega_0^8 (\langle \xi''(t) \xi(t) \xi''(t') \xi(t') \rangle - 2 \langle \xi''(t) \xi(t) \rangle \langle \xi''(t') \xi(t') \rangle + \\ &\quad + \langle \xi''(t) \xi(t) \rangle \langle \xi''(t') \xi(t') \rangle) \\ &= \frac{1}{M^4} \langle \tilde{\xi}''(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}''(t') \tilde{\xi}(t') \rangle - \frac{1}{M^4} \langle \tilde{\xi}''(t) \tilde{\xi}(t) \rangle \langle \tilde{\xi}''(t') \tilde{\xi}(t') \rangle. \end{aligned} \quad (5.121)$$

De [28] tenemos que en función de R_p y sus derivadas queda

$$R_{12} = R_{21} = 0, \quad (5.122)$$

$$R_{11} = \frac{R_p(t)}{M^2}, \quad (5.123)$$

$$R_{22} = \frac{1}{M^4} R_p(t) R_p''''(t) - \frac{1}{M^4} R_p''(0)^2. \quad (5.124)$$

Ahora, en vez de calcular las expresiones para los Φ_{ij} en el caso de $I(\omega)$ general, veremos casos particulares de $I(\omega)$. Para cada uno evaluaremos R_p y sus derivadas, con lo que obtendremos los R_{ij} y subsecuentemente los Φ_{ij} , necesarios para calcular γ . Evaluaremos también la primera condición y analizaremos en qué casos se cumple o no la segunda.

Consideraremos en todos los casos $T = 0$, a fin de simplificar las cuentas. Entonces, de las Ecs. (5.96), (5.113) y (5.114) queda

$$R_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \frac{\cos(2\omega t)}{8\omega^4}, \quad (5.125)$$

$$R_p''(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \frac{\cos(2\omega t)}{2\omega^2}, \quad (5.126)$$

$$R_p''''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) 2 \cos(2\omega t). \quad (5.127)$$

Densidad espectral gaussiana

Consideremos

$$I(\omega) = \frac{\omega^4}{\tau} e^{-\omega^2 \tau^2} \theta(\omega), \quad (5.128)$$

donde τ es alguna escala temporal.

En este caso tenemos que

$$R_p(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{16 \tau^2} e^{-t^2/\tau^2}, \quad (5.129)$$

$$R_p''(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{8 \tau^6} e^{-t^2/\tau^2} (\tau^2 - 2t^2), \quad (5.130)$$

$$R_p''''(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4 \tau^{10}} e^{-t^2/\tau^2} (4t^4 - 12t^2 \tau^2 + 3\tau^4). \quad (5.131)$$

Y por lo tanto de las Ecs. (5.122) a (5.124) tenemos que

$$R_{12} = R_{21} = 0, \quad (5.132)$$

$$R_{11} = \frac{\sqrt{\pi}}{16 M^2} \frac{e^{-t^2/\tau^2}}{\tau^2}, \quad (5.133)$$

$$R_{22} = \frac{\pi}{64 M^4 \tau^8} \left(\frac{1}{\tau^4} e^{-2t^2/\tau^2} (4t^4 - 12t^2 \tau^2 + 3\tau^4) - 1 \right). \quad (5.134)$$

Cuyas transformadas son

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0, \quad (5.135)$$

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt R_{11}(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{32 M^2 \tau} \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}\right), \quad (5.136)$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt R_{22}(t) e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-\omega^2 \tau^2/8)}{8192 M^4 \tau^7} - \frac{\pi \delta(\omega)}{64 M^4 \tau^8}. \quad (5.137)$$

Ahora de las Ecs. (5.18), (5.97) y (5.103) tenemos que

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega_0^4 \sigma_{\xi'}^2 - \omega_0^2 \\ &= -\frac{R_p''(0)}{M^2} + \Omega_{ren}^2 \\ &= \Omega_{ren}^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{8 M^2 \tau^4}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Finalmente, considerando $\omega > 0$ y de la Ec. (5.17), queda que

$$\gamma = \frac{\pi \exp(-k^2 \tau^2)}{1024 k^2 M^4 \tau^7} \left(512 k^4 M^2 \tau^6 + \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{k^2 \tau^2}{2}\right) (k^4 \tau^4 + 6 k^2 \tau^2 + 3) \right). \quad (5.139)$$

De la Ec. (5.116) y la Ec. (5.130) tenemos que la primera condición es

$$\tau^4 < \frac{\sqrt{\pi}}{8 M^2 |\Omega_{ren}^2|}. \quad (5.140)$$

De la Ec. (5.138) vemos que de cumplirse la primera condición tendríamos $k^2 > 0$. Y de la Ec. (5.139) es directo que un k^2 positivo implica que $\gamma \geq 0$. Por lo tanto para esta $I(\omega)$ particular, si se cumple la primera condición, habrá estabilidad solo si $\gamma = 0$. O sea, aquellos τ que resuelvan $\gamma(\tau) = 0$ mantendrán al sistema estable.

Ahora, de la Ec. (5.139), tenemos que vale el siguiente límite

$$\tau \rightarrow 0 \implies \gamma \rightarrow 0, \quad (5.141)$$

para todo $M > 0$ y para todo Ω_{ren}^2 .

Esto implica que para un τ suficientemente chico, se puede hacer γ tan pequeño como uno quiera, ralentizando el crecimiento exponencial. Notar que cuanto más chico es el τ

más ancha es la distribución $I(\omega)$. Entonces, descontando efectos de la disipación y con la elección adecuada de parámetros, el sistema tendrá un crecimiento exponencial suprimido tanto como uno quiera.

Densidad espectral discreta (peine de Dirac)

Consideremos la densidad espectral discreta de la Ec. (5.79),

$$I(\omega) = \sum_n \delta(\omega - \omega_n) \frac{\lambda_n^2}{(2m_n \omega_n)^2}. \quad (5.142)$$

En este caso queda

$$R_p(t) = \sum_n \frac{\lambda_n^2 \cos(2\omega_n t)}{32 m_n^2 \omega_n^6}, \quad (5.143)$$

$$R_p''(t) = - \sum_n \frac{\lambda_n^2 \cos(2\omega_n t)}{8 m_n^2 \omega_n^4}, \quad (5.144)$$

$$R_p''''(t) = \sum_n \frac{\lambda_n^2 \cos(2\omega_n t)}{2 m_n^2 \omega_n^2}. \quad (5.145)$$

Y por lo tanto de las Ecs. (5.122) a (5.124) tenemos que

$$R_{12} = R_{21} = 0, \quad (5.146)$$

$$R_{11} = \sum_n \frac{\lambda_n^2 \cos(2\omega_n t)}{32 M^2 m_n^2 \omega_n^6}, \quad (5.147)$$

$$R_{22} = \sum_p \sum_n \frac{\lambda_p^2 \lambda_n^2 (\omega_p^2 \cos(2t\omega_p) \cos(2t\omega_n) - \omega_n^2)}{64 M^4 m_p^2 m_n^2 \omega_p^4 \omega_n^6}. \quad (5.148)$$

Cuyas transformadas son

$$\Phi_{12}(\nu) = \Phi_{21}(\nu) = 0, \quad (5.149)$$

$$\Phi_{11}(\nu) = \sum_n \frac{\lambda_n^2}{64 M^2 m_n^2 \omega_n^6} (\delta(\nu - 2\omega_n) + \delta(\nu + 2\omega_n)), \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{22}(\nu) = \sum_p \sum_n \frac{\lambda_p^2 \lambda_n^2}{64 M^4 m_p^2 m_n^2 \omega_p^4 \omega_n^6} & \left(-\delta(\nu) \omega_n^2 + \frac{\omega_p^2}{4} (\delta(\nu + 2\omega_p - 2\omega_n) + \right. \\ & \left. + \delta(\nu - 2\omega_p + 2\omega_n) + \delta(\nu - 2\omega_p - 2\omega_n) + \delta(\nu + 2\omega_p + 2\omega_n)) \right). \end{aligned} \quad (5.151)$$

Ahora de las Ecs. (5.18), (5.97) y (5.103) tenemos que

$$\begin{aligned} k^2 &= -\frac{R_p''(0)}{M^2} + \Omega_{ren}^2 \\ &= \Omega_{ren}^2 + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{8 M^2 m_n^2 \omega_n^4}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Al igual que antes la primera condición equivale a decir $k^2 > 0$, en concreto

$$\sum_n \frac{\lambda_n^2}{8 M^2 m_n^2 \omega_n^4} > |\Omega_{ren}^2|. \quad (5.153)$$

Ahora, considerando la Ec. (5.17) y las Ecs. (5.149) a (5.151) vemos que γ será una suma de deltas. Por lo tanto, es fácil ver que si k es diferente de $\pm \omega_n$, $\pm(\omega_n + \omega_p)$ y $\pm(\omega_n - \omega_p)$ para todo n y p , entonces $\gamma = 0$. Siendo entonces esta la condición sobre el k para la estabilidad del sistema.

En este caso resulta que se pueden repetir las cuentas para temperatura arbitraria (los resultados son considerablemente más engorrosos) y comprobar que las conclusiones recién expresadas no cambian. Se agregan términos extra a Φ_{11} y Φ_{22} , pero son todos deltas de Dirac equivalentes a las obtenidas para $T = 0$.

Densidad espectral tipo ventana

Consideremos una densidad espectral dada por

$$I(\omega) = \begin{cases} \kappa, & \text{si } \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}, \quad (5.154)$$

donde κ es una constante positiva.

En este caso R_p y sus derivadas resultan tener expresiones mucho más engorrosas que en los casos anteriores, por eso no daremos la forma explícita de γ a pesar de que es posible hacer todos los cálculos de forma analítica. Con respecto a la segunda condición solo enunciaremos las conclusiones.

De todas formas, k si resulta tener una expresión compacta

$$k^2 = \frac{\kappa}{2 M^2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + \Omega_{ren}^2. \quad (5.155)$$

Por lo que, la primera condición queda

$$\frac{\kappa}{2 M^2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) > |\Omega_{ren}^2|. \quad (5.156)$$

Ahora, resulta que Φ_{11} es una suma de términos proporcionales a deltas, por lo que

$\Phi_{11}(2k)$ será nulo solamente si k es distinto de $\pm\omega_1$ y $\pm\omega_2$. Por otro lado Φ_{22} es una suma de deltas, pero también de funciones signo, funciones escalón y funciones continuas. Considerando todo, resulta que $\Phi_{22}(2k)$ será nulo si k cumple con alguna de las siguientes condiciones

$$-2\omega_1 < k < \omega_1 - \omega_2, \quad (5.157)$$

$$\omega_2 - \omega_1 < k < 2\omega_1, \quad (5.158)$$

$$k \geq 2\omega_2, \quad (5.159)$$

$$k \leq -2\omega_2. \quad (5.160)$$

Agregando a estas condiciones la ya mencionada de $k \neq \omega_1$ y $k \neq \omega_2$, se tiene el sistema completo de condiciones sobre el k que hacen estable al sistema (hacen el γ nulo). Por ejemplo, un caso particular sería si $k = 0$, donde se cumple que $k \neq \pm\omega_1$ y $k \neq \pm\omega_2$ por lo que $\Phi_{11} = 0$ y que k cae dentro del rango de la Ec. (5.157) por lo que $\Phi_{22} = 0$. De este modo $\gamma = 0$ y el sistema es estable.

Por fuera de los rangos mencionados, Φ_{22} resulta ser una función continua, por lo que en este caso, con la elección adecuada de parámetros, sucede nuevamente que uno se puede acercar tanto a como quiera a $\gamma = 0$.

En los tres ejemplos dados ($I(\omega)$ continua, gaussiana y ventana) pudimos ver que con la elección adecuada de parámetros se puede estabilizar el sistema que normalmente sería inestable. Por otro lado, de ser γ una función continua como en el caso de $I(\omega)$ gaussiana o el caso de $I(\omega)$ una función ventana, uno puede hacer γ tan pequeño como se quiera, y por lo tanto suprimir el crecimiento exponencial dado por la amplificación paramétrica.

Finalmente, recordemos de la primera sección donde resumimos los resultados clásicos, que si consideramos los osciladores deterministas, como hicieron Wang et al., tenemos que para que haya resonancia paramétrica la frecuencia de la perturbación tiene que ser igual a dos veces la frecuencia natural (ó $1/n$ veces este valor con n un número natural). Por otro lado, si consideramos osciladores estocásticos (que emulan más fielmente la Ec. (4.14) del factor de escala), vemos que para que haya resonancia paramétrica la transformada de Fourier del ruido debe tener componentes en dos veces la frecuencia natural. Esta diferencia será significativa en lo que sigue, donde utilizando los resultados de este capítulo reanalizaremos el caso gravitatorio.

Capítulo 6

Gravedad estocástica y regularización dimensional

“Nothing in life is to be feared, it is only to be understood. Now is the time to understand more, so that we may fear less”

— Maria Skłodowska-Curie

En este capítulo utilizaremos los resultados del modelo de movimiento Browniano para estudiar el PCC en el marco de la gravedad estocástica. Usando regularización dimensional, analizaremos las propiedades estadísticas de las fluctuaciones del tensor energía-momento alrededor de su valor medio, y su eventual influencia en la expansión del universo. Para ello calcularemos varias cantidades estadísticas de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$, para entender el comportamiento del factor de escala a dado por

$$\ddot{a} + \Omega^2(t, \mathbf{x}) a = 0. \quad (6.1)$$

En analogía con el trabajo de Wang et al. [1] evaluaremos dichas cantidades en la métrica de Minkowski para simplificar las cuentas. Mientras que la métrica tipo FLRW dada por la Ec. (4.13) quedara únicamente como fuente de la Ec. (6.1), como se muestra en el Apéndice A.

Para nuestros cálculos consideraremos campos escalares y fermiónicos. Solo los campos masivos contribuyen al valor medio del $T_{\mu\nu}$, pero como tanto los masivos como los no masivos contribuyen a las fluctuaciones, analizaremos ambas situaciones. Al principio asumiremos $\langle \Omega^2 \rangle > 0$, a modo de poder comparar con el trabajo de Wang et al. donde realizan esta suposición. Luego, considerando los resultados del Capítulo 5, discutiremos el caso opuesto ya que en general el signo de $\langle \Omega^2 \rangle$ depende del contenido de materia.

Para el análisis que considera $\langle \Omega^2 \rangle > 0$ utilizaremos, al igual que en el Capítulo 5, los resultados de [25]. Por lo tanto la magnitud central a calcular es la transformada de Fourier de la covarianza a separación temporal, según las definiciones de las Ecs. (5.8) y (5.9).

Por completitud y para tener un panorama general de como fluctúa $a(t, \mathbf{x})$ calcularemos también el valor medio de Ω^2 y su covarianza a separación espacial.

En este capítulo se usará la notación $g = \det(g_{\mu\nu})$.

6.1. Campo escalar

Como se vio en la Sección 2.3, se usará la expansión en operadores de creación y destrucción dada por

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right), \quad (6.2)$$

donde usamos la relación habitual $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Notar que la expansión anterior es válida como solución de la ecuación de Klein-Gordon sólo para la métrica de Minkowski. Como se mencionó utilizamos esto como primera aproximación.

Usaremos el lagrangiano con acoplamiento ξ a la curvatura escalar dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2 \right). \quad (6.3)$$

6.1.1. Valor medio de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$

Necesitamos una forma explícita del tensor energía-momento en función de los campos si queremos calcular el valor medio y otras cantidades estadísticas de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$. En el Apéndice B se deduce que el tensor de energía-momento para un campo escalar masivo en Minkowski es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi (1 - 2\xi) - 2\xi \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi + \\ & + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(m^2 \phi^2 - \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi (1 - 4\xi) + 4\xi \phi \square \phi \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Y por lo tanto las componentes diagonales que necesitamos para obtener $\Omega^2(t, \mathbf{x})$ son

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2 \right) + \frac{1}{2} (1 - 4\xi) (\nabla \phi)^2 - 2\xi \phi \Delta \phi, \quad (6.5)$$

y

$$\begin{aligned} T_{\underline{ii}} = & \partial_{\underline{i}} \phi \partial_{\underline{i}} \phi (1 - 2\xi) - 2\xi \phi \partial_{\underline{i}} \partial_{\underline{i}} \phi + \\ & + \frac{1}{2} \left((1 - 4\xi) \left(\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 \right) - m^2 \phi^2 - 4\xi \phi \left(\ddot{\phi} - \Delta \phi \right) \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde ∇ y Δ son los operadores (espaciales) habituales, gradiente y laplaciano, e índices subrayados indican que no se suma sobre índices repetidos.

De la Ec. (4.15), $\Omega^2(t, \mathbf{x})$ en función del campo queda

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G}{3} \left(2\dot{\phi}^2 (1 - 3\xi) - m^2 \phi^2 + 2\xi \left((\nabla\phi)^2 + \phi \Delta\phi - 3\phi\ddot{\phi} \right) \right). \quad (6.7)$$

De la Ec. (6.2) es fácil obtener las derivadas del campo que necesitamos para calcular explícitamente $\Omega^2(t, \mathbf{x})$

$$\phi^2 = \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k'-k)} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{ix(k-k')} \right), \quad (6.8)$$

$$\dot{\phi}^2 = \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} \omega\omega' \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k'-k)} - \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ix(k+k')} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{ix(k-k')} \right), \quad (6.9)$$

$$(\nabla\phi)^2 = \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k'-k)} - \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ix(k+k')} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{ix(k-k')} \right), \quad (6.10)$$

$$\Delta\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-\mathbf{k}^2) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right), \quad (6.11)$$

$$\phi \Delta\phi = \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} (-\mathbf{k}^2) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k'-k)} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{ix(k-k')} \right), \quad (6.12)$$

$$\ddot{\phi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-\omega^2) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right), \quad (6.13)$$

$$\phi \ddot{\phi} = \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} (-\omega^2) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k'-k)} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k+k')} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{ix(k-k')} \right). \quad (6.14)$$

Ahora con las definiciones

$$A(k, k', x) = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k'-k)}, \quad (6.15)$$

$$B(k, k', x) = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ix(k+k')}, \quad (6.16)$$

$$C(k, k', x) = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ix(k+k')}, \quad (6.17)$$

$$D(k, k', x) = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{i x (k - k')}, \quad (6.18)$$

y

$$P_1(k, k') = 2\omega\omega'(1 - 3\xi) - m^2 + 2\xi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \mathbf{k}^2 + 3\omega^2), \quad (6.19)$$

$$P_2(k, k') = -2\omega\omega'(1 - 3\xi) - m^2 + 2\xi(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \mathbf{k}^2 + 3\omega^2). \quad (6.20)$$

Queda

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G}{3} \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} (A P_1 + B P_2 + C P_2 + D P_1), \quad (6.21)$$

cuyo valor medio es (solo $A P_1$ sobrevive)

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2 \rangle &= \frac{4\pi G}{3} \iint \frac{d^3k d^3k'}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{i x (k' - k)} (2\omega\omega'(1 - 3\xi) - \\ &\quad - m^2 + 2\xi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \mathbf{k}^2 + 3\omega^2)) \\ &= \frac{2\pi G}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(2\omega - \frac{m^2}{\omega} \right) \\ &= \lim_{d \rightarrow 4} \left(\frac{2\pi G}{3} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \mu^{4-d} \left(2\omega - \frac{m^2}{\omega} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Donde en el último paso empleamos regularización dimensional. Cabe recordar que agregamos el parámetro μ para mantener las unidades correctas. A partir de ahora se dará por entendido que las igualdades con expresiones d -dimensionales son en el sentido del límite.

Para resolver las dos integrales que quedan consideremos un espacio euclídeo $d - 1$ dimensional, donde d es la dimensión del espacio-tiempo. Usando coordenadas esféricas es posible simplificar la integral, como en la Ec. (C.14), ya que el integrando es función únicamente del módulo del $(d - 1)$ -vector, por lo que la parte angular factoriza y queda una integral radial fácilmente evaluable.

Entonces, la Ec. (6.22) queda

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2 \rangle &= \frac{2\pi G}{3(2\pi)^{d-1}} \mu^{4-d} \int d\Omega \int dk \mathbf{k}^{d-2} \left(2\omega - \frac{m^2}{\omega} \right) \\ &= \frac{(4\pi)^{\frac{3-d}{2}} G}{3\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \mu^{4-d} \int_0^\infty dk \frac{\mathbf{k}^{d-2}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} (2\mathbf{k}^2 + m^2). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Donde dk es el diferencial del módulo de la parte espacial de k^μ y $d\Omega$ es el diferencial de la parte angular en esféricas, cuya integral, Ec. (C.13), es la superficie de una esfera

en $d - 1$ dimensiones. La integral que queda por resolver debe separarse en dos, ya que cada parte tiene una región de convergencia (rango en d) diferente. Haciendo uso de la Ec. (C.16), resulta

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{2^{3-d} G m^d \pi^{1-\frac{d}{2}} \mu^{4-d}}{3d} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right). \quad (6.24)$$

Ahora lo desarrollamos alrededor de $d = 4$ al orden más bajo,

$$\langle \Omega^2 \rangle_{d \rightarrow 4} = \frac{G m^4}{12\pi} \left(\frac{1}{d-4} + \log\left(\frac{m}{\tilde{\mu}}\right) \right) + \mathcal{O}(d-4), \quad (6.25)$$

con

$$\tilde{\mu} = \mu e^c, \quad (6.26)$$

$$c = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \gamma_{EM} + \frac{1}{2} \log(4\pi) \approx 1.23. \quad (6.27)$$

Se aprecia claramente la presencia del polo en $d = 4$, así como la dependencia del término finito con la masa a la cuarta.

Utilizando el esquema de substracción minimal (descartamos el polo), obtenemos

$$\langle \Omega^2 \rangle = -\frac{G m^4}{12\pi} \log\left(\frac{m}{\mu}\right), \quad (6.28)$$

donde se sobreentiende que se absorbió una constante dentro del μ .

Notar que, como se vio en el Capítulo 2, el signo de $\langle \Omega^2 \rangle$ dependerá de la relación entre los valores de m y de μ .

Ahora, de la Ec. (6.23), podemos ver fácilmente el caso de $m = 0$

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2 \rangle &= \frac{2\pi G}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(2\omega - \frac{m^2}{\omega} \right) \\ &= \frac{4\pi G}{3(2\pi)^{d-1}} \mu^{4-d} \int d^{d-1} k |\mathbf{k}| \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

donde la última igualdad se obtiene de la Ec. (C.15).

6.1.2. Covarianza

La covarianza se define como

$$\text{Cov} \left(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2) \right) = \left\langle \left\{ \Omega^2(x_1) - \langle \Omega^2(x_1) \rangle, \Omega^2(x_2) - \langle \Omega^2(x_2) \rangle \right\} \right\rangle, \quad (6.30)$$

donde los corchetes son el orden simétrico de operadores.

Notar que a diferencia de Wang et al. no normalizamos por la varianza, Ec. (4.24), ya que en nuestro caso (donde no regularizamos con un cut-off) pierde sentido dicha normalización.

Para el caso tenemos que

$$\text{Cov} \left(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2) \right) = \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)), \quad (6.31)$$

donde

$$F(a, b) = \langle \Omega^2(a) \Omega^2(b) \rangle - \langle \Omega^2(a) \rangle \langle \Omega^2(b) \rangle. \quad (6.32)$$

Demostramos la Ec. (6.31) en el Apéndice C.

Nótese que el segundo término de F es simplemente el valor medio de Ω^2 al cuadrado, ya que el mismo no depende de x^μ ,

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{2^{3-d} G m^d \pi^{1-\frac{d}{2}} \mu^{4-d} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{3d}. \quad (6.33)$$

Luego, el primer término de F lo obtendremos de

$$\Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) = \frac{16 \pi^2 G^2}{9} \iiint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4}{4(2\pi)^6 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} (V_1 + V_2), \quad (6.34)$$

donde solo se dejaron los términos que sobrevivirán al aplicar el valor medio y donde

$$V_1 = \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_4}^\dagger e^{i x_1 (k_2 - k_1)} e^{i x_2 (k_4 - k_3)} P_1(k_1, k_2) P_1(k_3, k_4), \quad (6.35)$$

$$V_2 = \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_4}^\dagger e^{-i x_1 (k_1 + k_2)} e^{i x_2 (k_3 + k_4)} P_2(k_1, k_2) P_2(k_3, k_4). \quad (6.36)$$

Los valores medios de V_1 y V_2 están dados por

$$\langle V_1 \rangle = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) e^{i x_1 (k_2 - k_1)} e^{i x_2 (k_4 - k_3)} P_1(k_1, k_2) P_1(k_3, k_4), \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \langle V_2 \rangle &= \left(\delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) + \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2) \right) \times \\ &\times e^{-i x_1 (k_1 + k_2)} e^{i x_2 (k_3 + k_4)} P_2(k_1, k_2) P_2(k_3, k_4). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Por lo que integrando las deltas queda

$$\langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle = \frac{16\pi^2 G^2}{9} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{4(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} (T_1 + T_2 + T_3), \quad (6.39)$$

donde

$$T_1 = P_1(k_1, k_1) P_1(k_2, k_2), \quad (6.40)$$

$$T_2 = P_2(k_1, k_2) P_2(k_2, k_1) e^{-i x_1 (k_1+k_2)} e^{i x_2 (k_1+k_2)}, \quad (6.41)$$

$$T_3 = P_2(k_1, k_2) P_2(k_1, k_2) e^{-i x_1 (k_1+k_2)} e^{i x_2 (k_1+k_2)}. \quad (6.42)$$

Paralelamente notemos lo siguiente. De la Ec. (6.22) podemos escribir $\langle \Omega^2 \rangle$ como

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{4\pi G}{3} \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega} P_1(k, k). \quad (6.43)$$

Por lo que tenemos que el segundo término de F se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2 \rangle^2 &= \frac{16\pi^2 G^2}{9} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{4(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} P_1(k_1, k_1) P_1(k_2, k_2) \\ &= \frac{16\pi^2 G^2}{9} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{4(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} T_1. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Por lo que es directo que

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle - \langle \Omega^2 \rangle^2 \\ &= \frac{16\pi^2 G^2}{9} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{4(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} (T_2 + T_3). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Ahora, de las Ecs. (6.19), (6.20), (6.41) y (6.42) podemos escribir explícitamente la suma

$$\begin{aligned} \frac{T_2 + T_3}{2\omega_1 \omega_2} &= e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \left(\frac{m^4}{\omega_1 \omega_2} (4\xi^2 - 4\xi + 1) + 4m^2 (6\xi^2 - 5\xi + 1) + \right. \\ &\quad + 4\omega_1 \omega_2 (11\xi^2 - 6\xi + 1) + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} 4m^2 (-2\xi^2 + \xi) + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{\omega_2} 6m^2 (2\xi^2 - \xi) + \frac{\omega_2}{\omega_1} 2m^2 (2\xi^2 - \xi) + \\ &\quad + 8\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 (-3\xi^2 + \xi) + 12\omega_1^2 (3\xi^2 - \xi) + 4\omega_2^2 (3\xi^2 - \xi) + \\ &\quad \left. + \frac{\omega_1^3}{\omega_2} 8\xi^2 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(3\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) (-4\xi^2) + \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{\omega_1 \omega_2} 4\xi^2 \right). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Colocando esto en la Ec. (6.45) tenemos

$$F(x_1, x_2) = \frac{8 \pi^2 G^2}{9(2\pi)^6} \sum_{i=1}^{12} C_i I_i. \quad (6.47)$$

Donde las constantes son

$$C_1 = m^4 (4 \xi^2 - 4 \xi + 1), \quad (6.48)$$

$$C_2 = 4 m^2 (6 \xi^2 - 5 \xi + 1), \quad (6.49)$$

$$C_3 = 4 (11 \xi^2 - 6 \xi + 1), \quad (6.50)$$

$$C_4 = -\frac{2}{3} C_5 = -2 C_6 = -4 m^2 (2 \xi^2 - \xi), \quad (6.51)$$

$$C_7 = -\frac{2}{3} C_8 = -2 C_9 = -8 (3 \xi^2 - \xi), \quad (6.52)$$

$$C_{10} = -2 C_{11} = 2 C_{12} = 8 \xi^2. \quad (6.53)$$

Y para escribir las integrales primero definimos

$$I_a(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \sin(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x^\gamma} \right), \quad (6.54)$$

$$I_b(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \cos(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x^\gamma} \right), \quad (6.55)$$

donde $\Delta x = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ y $\Delta t = t_1 - t_2$.

Entonces, en el Apéndice C, demostramos que queda

$$I_1 = 16 \pi^2 I_a^2(1, 1, 1), \quad (6.56)$$

$$I_2 = 16 \pi^2 I_a^2(1, 0, 1), \quad (6.57)$$

$$I_3 = 16 \pi^2 I_a^2(1, -1, 1), \quad (6.58)$$

$$I_4 = 16 \pi^2 (I_a(1, 1, 2) + I_b(2, 1, 1))^2, \quad (6.59)$$

$$I_5 = I_6 = 16 \pi^2 I_a(1, 1, 1) I_a(1, -1, 1), \quad (6.60)$$

$$I_7 = 16 \pi^2 (I_a(1, 0, 2) + I_b(2, 0, 1))^2, \quad (6.61)$$

$$I_8 = I_9 = 16 \pi^2 I_a(1, 0, 1) I_a(1, -2, 1), \quad (6.62)$$

$$I_{10} = 16 \pi^2 I_a(1, 1, 1) I_a(1, -3, 1), \quad (6.63)$$

$$I_{11} = -64 \pi^2 (I_a(1, 1, 2) + I_b(2, 1, 1)) (I_a(1, -1, 2) + I_b(2, -1, 1)), \quad (6.64)$$

$$I_{12} = 16 \pi^2 \left(\sqrt{6} I_b(2, 1, 2) + I_a(3, 1, 1) - \sqrt{6} I_a(1, 1, 3) \right)^2 + \quad (6.65)$$

$$+ 16 \pi^2 (4 - 2 \sqrt{6}) I_a(3, 1, 1) (I_b(2, 1, 2) - I_a(1, 1, 3)).$$

Ahora como todo está escrito en función de I_a e I_b , con resolverlas tendríamos la covarianza para un campo escalar en un intervalo espacio-temporal arbitrario. Pero resulta que es muy complicado hacer el cálculo en el caso general cuando $m \neq 0$. Entonces, en su lugar obtendremos la covarianza para una separación solo temporal, y luego para una separación solo espacial. En el caso no masivo las cuentas se simplifican considerablemente, al punto de poder calcular la covarianza para el caso general de un intervalo espacio-temporal arbitrario. Tanto para $m = 0$ como $m \neq 0$ veremos tres casos particulares de ξ , $\xi = 0$, $\xi = 1/6$ y $\xi = 50$.

Covarianza para el campo escalar no masivo

Es directo que cuando $m = 0$ las constantes de la Ec. (6.47) son

$$C_1 = C_2 = C_4 = C_5 = C_6 = 0, \quad (6.66)$$

$$C_3 = 4 (11 \xi^2 - 6 \xi + 1), \quad (6.67)$$

$$C_7 = -\frac{2}{3} C_8 = -2 C_9 = -8 (3 \xi^2 - \xi), \quad (6.68)$$

$$C_{10} = -2 C_{11} = 2 C_{12} = 8 \xi^2, \quad (6.69)$$

por lo que solo nos interesaran las integrales $I_3, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}$ y I_{12} .

Para el caso las integrales I_a y I_b se pueden hacer en general, quedando

$$I_a(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^{\alpha-\beta}}{\Delta x^\gamma} \sin(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i |\mathbf{k}| \Delta t) \right)$$

$$= \left(\Delta t \Delta x^{1-\gamma} \Gamma(\alpha - \beta + 2) (i \Delta t)^{-\alpha+\beta-2} \left(1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \right)^{\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-1)} \right) \times \quad (6.70)$$

$$\times \sinh \left((\alpha - \beta + 1) \tanh^{-1} \left(\frac{|\Delta x|}{\Delta t} \right) \right) / |\Delta x| (\alpha - \beta + 1),$$

$$\begin{aligned}
I_b(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^{\alpha-\beta}}{\Delta x^\gamma} \cos(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i |\mathbf{k}| \Delta t) \right) \\
&= \Delta x^{-\gamma} \Gamma(\alpha - \beta + 1) (i \Delta t)^{-\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \right)^{\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-1)} \times \\
&\quad \times \cosh \left((\alpha - \beta + 1) \tanh^{-1} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \right).
\end{aligned} \tag{6.71}$$

En el Apéndice C mostramos explícitamente como quedan las integrales I_1 a I_{12} . Al reemplazarlas en la Ec. (6.47) obtenemos

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= \frac{32 G^2 (3 \Delta t^2 + \Delta x^2)}{9 \pi^2 (\Delta t^2 - \Delta x^2)^6} \left(\Delta x^2 (18 \xi^2 - 6 \xi + 1) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t^2 (102 \xi^2 - 34 \xi + 3) \right).
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Que es par en Δx y Δt , por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2)) &= \frac{32 G^2 (3 \Delta t^2 + \Delta x^2)}{9 \pi^2 (\Delta t^2 - \Delta x^2)^6} \left(\Delta x^2 (18 \xi^2 - 6 \xi + 1) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t^2 (102 \xi^2 - 34 \xi + 3) \right).
\end{aligned} \tag{6.73}$$

De acá es directo evaluar para un intervalo solo temporal y para uno solo espacial

$\Delta x = 0$ y $\Delta t \neq 0$

$$\text{Cov}(\Delta t) = \frac{32 G^2}{3 \pi^2 \Delta t^8} (102 \xi^2 - 34 \xi + 3). \tag{6.74}$$

$\Delta x \neq 0$ y $\Delta t = 0$

$$\text{Cov}(\Delta x) = \frac{32 G^2}{9 \pi^2 \Delta x^8} (18 \xi^2 - 6 \xi + 1). \tag{6.75}$$

Notar que si queremos adimensionalizar estas expresiones con simplemente eliminar el término G^2 de las mismas alcanza. Entonces todas las cantidades dimensionales van a estar en unidades de Planck (recordemos que en unidades de naturales $l_P = t_P = E_P^{-1} = \sqrt{G}$). Mostraremos esto más explícitamente cuando reobtemos estos resultados como el límite $m \rightarrow 0$ del caso masivo.

Covarianza para separación temporal ($m \neq 0$)

Primero estudiaremos el caso $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ y $t_1 \neq t_2$, o sea $\Delta x = 0$ y $\Delta t \neq 0$. En principio uno podría tratar de hacer el límite $\Delta x \rightarrow 0$ en I_a y I_b pero resulta que este límite solo

está bien definido para $I_a(\alpha, \beta, 1)$, concretamente

$$\begin{aligned}
I_a(\alpha, \beta, 1) &= \tilde{I}_a(\alpha, \beta) \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \sin(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x} \right) \right) \\
&= \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^{\alpha+1} \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta} \right).
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Esto nos permite ya reescribir 8 de las 12 integrales.

$$I_1 = 16 \pi^2 \tilde{I}_a(1, 1)^2, \tag{6.77}$$

$$I_2 = 16 \pi^2 \tilde{I}_a(1, 0)^2, \tag{6.78}$$

$$I_3 = 16 \pi^2 \tilde{I}_a(1, -1)^2, \tag{6.79}$$

$$I_5 = I_6 = 16 \pi^2 \tilde{I}_a(1, 1) \tilde{I}_a(1, -1), \tag{6.80}$$

$$I_8 = I_9 = 16 \pi^2 \tilde{I}_a(1, 0) \tilde{I}_a(1, -2), \tag{6.81}$$

$$I_{10} = 16 \pi^2 \tilde{I}_a(1, 1) \tilde{I}_a(1, -3), \tag{6.82}$$

Para los otros casos el límite de las integrales I_a e I_b no está bien definido por separado pero las combinaciones que aparecen en las diferentes integrales (I_4 , I_7 , I_{11} e I_{12}) si tienen bien definido el límite. Otra forma sería partir de las expresiones originales (Ecs. (C.30) a (C.39)) y tomar desde el principio $\Delta x = 0$. De ambas formas se obtiene el mismo resultado. Mostramos esto explícitamente en el Apéndice C, donde también mostramos que queda

$$I_4 = 0, \tag{6.83}$$

$$I_7 = 0, \tag{6.84}$$

$$I_{11} = 0, \tag{6.85}$$

$$I_{12} = \frac{16 \pi^2}{3} \tilde{I}_a(3, 1)^2. \tag{6.86}$$

Ahora para evaluar todas las integrales que no son nulas, tenemos que calcular $\tilde{I}_a(\alpha, \beta)$

$$\tilde{I}_a(\alpha, \beta) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^{\alpha+1} \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta} \right). \quad (6.87)$$

Con el cambio de variables

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \quad \longrightarrow \quad dk = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} d\omega. \quad (6.88)$$

Podemos reescribir \tilde{I}_a como

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a(\alpha, \beta) &= \int_m^\infty d\omega \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \exp(-i \omega \Delta t)}{\omega^{\beta-1}} \right) \\ &= \int_m^\infty d\omega \left(\omega^{1-\beta} (\omega^2 - m^2)^{\frac{\alpha}{2}} \exp(-i \omega \Delta t) \right). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Entonces de las Ecs. (6.77) a (6.82) y (6.86) las integrales concretas a realizar son $\tilde{I}_a(1, 1)$, $\tilde{I}_a(1, 0)$, $\tilde{I}_a(1, -1)$, $\tilde{I}_a(1, -2)$, $\tilde{I}_a(1, -3)$ e $\tilde{I}_a(3, 1)$. Mostramos cuanto dan estas integrales en el Apéndice C). Al reemplazar estos resultados en la Ec. (6.47) queda

$$\begin{aligned} F &= \frac{2 G^2 m^3}{9 \pi^2 \Delta t^5} \left(\Delta t \left(\xi^2 (120 m - 72 m^3 \Delta t^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi 36 m^3 \Delta t^2 - 5 m^3 \Delta t^2 \right) K_1(i m \Delta t)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 24 i \left(\xi^2 (21 m^2 \Delta t^2 - 20) - \xi 9 m^2 \Delta t^2 + m^2 \Delta t^2 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times K_1(i m \Delta t) K_2(i m \Delta t) - 4 m \Delta t \left(\xi^2 (18 m^2 \Delta t^2 - 246) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \xi (9 m^2 \Delta t^2 - 102) + m^2 \Delta t^2 - 9 \right) K_2(i m \Delta t)^2 \right). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Lo que a su vez nos da

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2) \right) &= \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)) \\ &= \frac{G^2 m^3}{9 \pi^2 \Delta t^5} \left(\Delta t \left(\xi^2 (120 m - 72 m^3 \Delta t^2) + \xi 36 m^3 \Delta t^2 - 5 m^3 \Delta t^2 \right) \times \right. \\ &\quad \times \left(K_1(-i m \Delta t)^2 + K_1(i m \Delta t)^2 \right) + 24 i \left(\xi^2 (21 m^2 \Delta t^2 - 20) - \right. \\ &\quad \left. - \xi 9 m^2 \Delta t^2 + m^2 \Delta t^2 \right) \left(K_1(i m \Delta t) K_2(i m \Delta t) - \right. \\ &\quad \left. - K_1(-i m \Delta t) K_2(-i m \Delta t) \right) - 4 m \Delta t \left(\xi^2 (18 m^2 \Delta t^2 - 246) \right. \\ &\quad \left. - \xi (9 m^2 \Delta t^2 - 102) + m^2 \Delta t^2 - 9 \right) \left(K_2(-i m \Delta t)^2 + K_2(i m \Delta t)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (6.91)$$

Para analizar casos especiales adimensionalizamos la covarianza con $G^2 m^8$ y usamos la variable $g = m \Delta t$, quedando

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & \frac{1}{9 g^5 \pi^2} \left((\xi^2 (120 g - 72 g^3) + \xi 36 g^3 - 5 g^3) \times \right. \\ & \times \left(K_1(-i g)^2 + K_1(i g)^2 \right) - 4 g \left(\xi^2 (18 g^2 - 246) - \right. \\ & \left. - \xi (9 g^2 - 102) + g^2 - 9 \right) \left(K_2(-i g)^2 + K_2(i g)^2 \right) + \\ & + 24 i \left(\xi^2 (21 g^2 - 20) - \xi 9 g^2 + g^2 \right) \times \\ & \left. \times \left(K_1(i g) K_2(i g) - K_1(-i g) K_2(-i g) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Comprobamos ahora que si hacemos el límite de $m \rightarrow 0$ adecuadamente obtenemos el mismo resultado que en la Ec. (6.74)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \text{Cov} = \frac{32 G^2}{3 \pi^2 \Delta t^8} (102 \xi^2 - 34 \xi + 3). \quad (6.93)$$

El cual es también fácilmente adimensionalizable,

$$\frac{\text{Cov}}{E_P^4} = \frac{32}{3 \pi^2 \widetilde{\Delta t}^8} (102 \xi^2 - 34 \xi + 3), \quad (6.94)$$

donde $\widetilde{\Delta t} = \Delta t/t_P$, y E_P es la energía de Planck y t_P el tiempo de Planck.

En la Figura 6.1 mostramos la Ec. (6.94) para tres valores concretos de ξ .

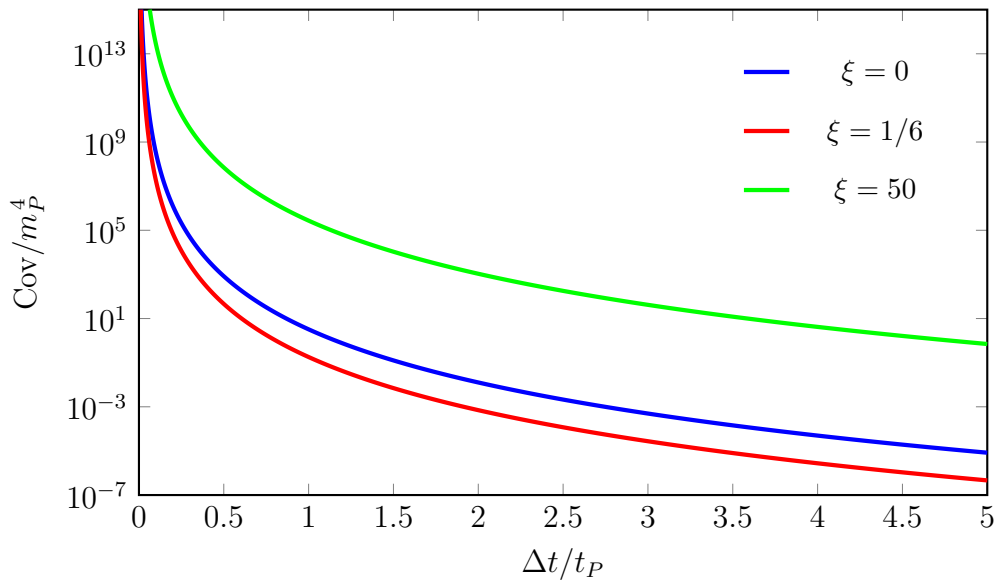


Figura 6.1: Covarianza adimensionalizada en función de Δt , en unidades de Planck, para el campo escalar no masivo

Si ahora vemos el caso masivo, para los mismos tres valores de ξ .

Para $\xi = 0$ (sin acoplamiento) queda

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & -\frac{1}{9 g^4 \pi^2} \left(5 g^2 \left(K_1(-i g)^2 + K_1(i g)^2 \right) + \right. \\ & + 4 \left(g^2 - 9 \right) \left(K_2(-i g)^2 + K_2(i g)^2 \right) + \\ & \left. + 24 i g \left(K_1(-i g) K_2(-i g) - K_1(i g) K_2(i g) \right) \right), \end{aligned} \quad (6.95)$$

cuyo gráfico se muestra en la Figura 6.2.

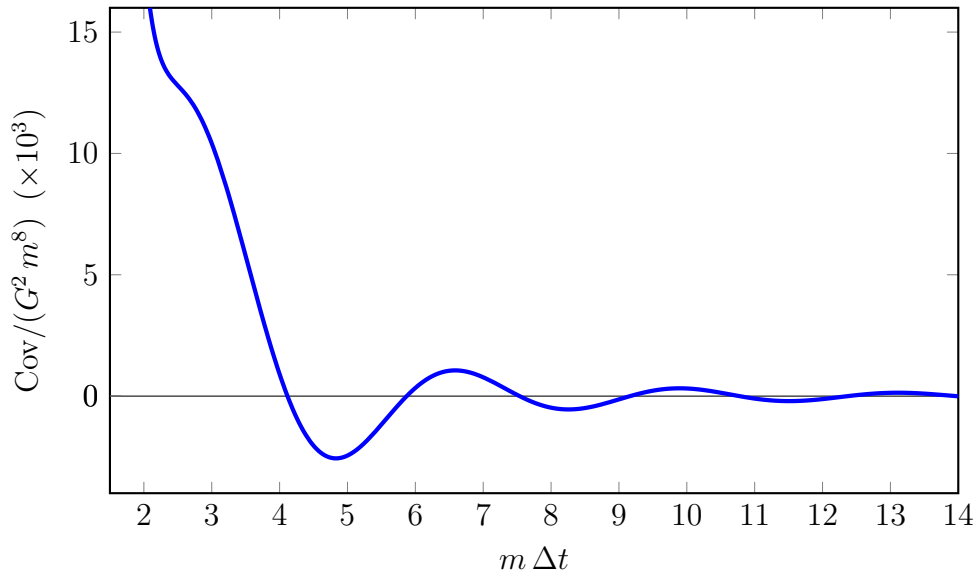


Figura 6.2: Covarianza adimensionalizada en función del parámetro $m \Delta t$ para un campo escalar masivo y para $\xi = 0$

Para $\xi = 1/6$ (caso conforme) queda

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & \frac{1}{27 g^5 \pi^2} \left(g \left(10 - 3 g^2 \right) \left(K_1(-i g)^2 + K_1(i g)^2 \right) - \right. \\ & - 14 g \left(K_2(-i g)^2 + K_2(i g)^2 \right) + 2 i \left(3 g^2 - 20 \right) \times \\ & \left. \times \left(K_1(i g) K_2(i g) - K_1(-i g) K_2(-i g) \right) \right), \end{aligned} \quad (6.96)$$

cuyo gráfico se muestra en la Figura 6.3.

Para $\xi = 50$ (acoplamiento grande) queda

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & -\frac{1}{9 g^5 \pi^2} \left(5 g \left(35641 g^2 - 60000 \right) \left(K_1(-i g)^2 + K_1(i g)^2 \right) + \right. \\ & + 4 g \left(44551 g^2 - 609909 \right) \left(K_2(-i g)^2 + K_2(i g)^2 \right) + \\ & \left. + 24 i \left(52051 g^2 - 50000 \right) \left(K_1(-i g) K_2(-i g) - K_1(i g) K_2(i g) \right) \right), \end{aligned} \quad (6.97)$$

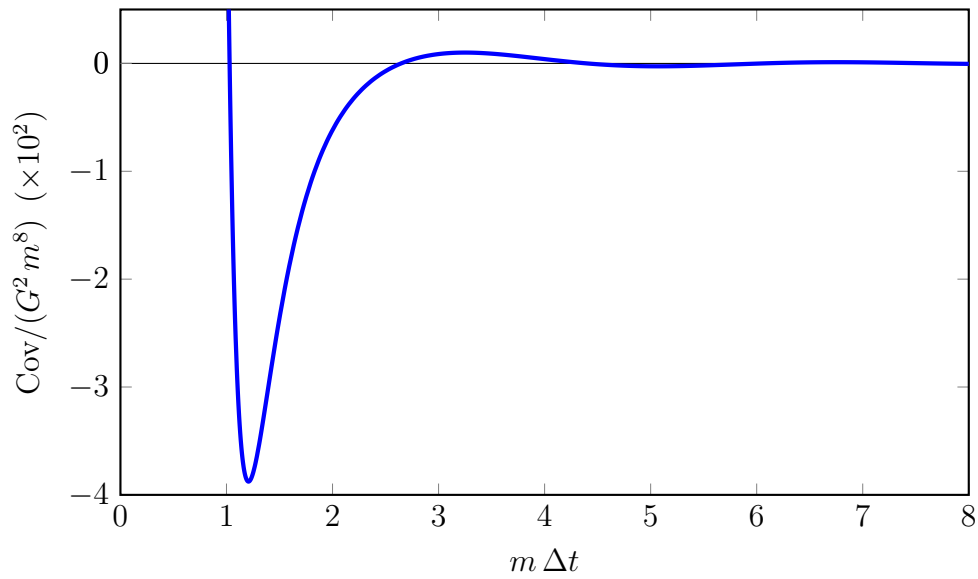


Figura 6.3: Covarianza adimensionalizada en función del parámetro $m \Delta t$ para un campo escalar masivo y para $\xi = 1/6$

cuyo gráfico se muestra en la Figura 6.4.

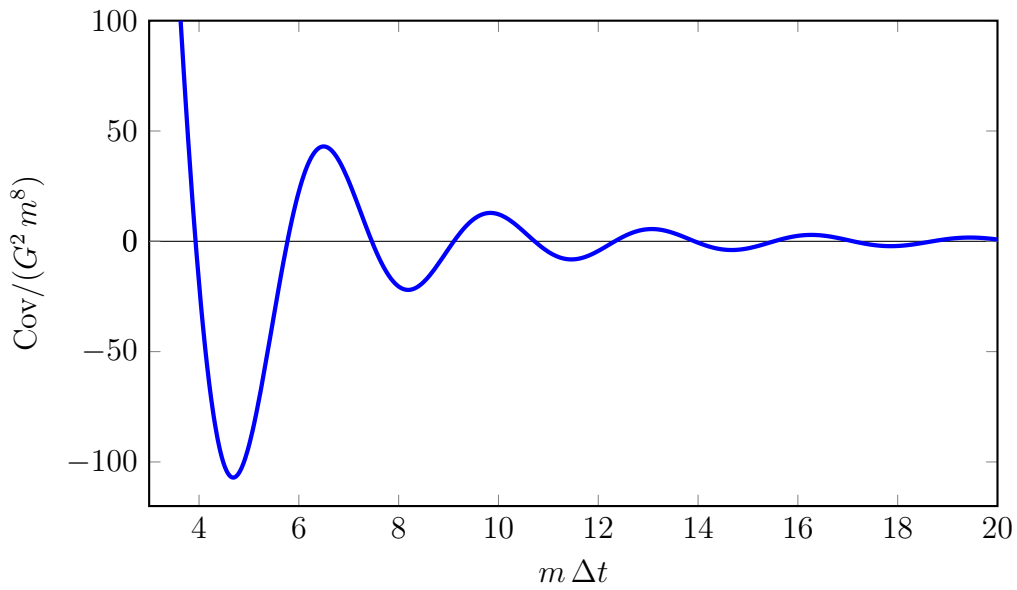


Figura 6.4: Covarianza adimensionalizada en función del parámetro $m \Delta t$ para un campo escalar masivo y para $\xi = 50$

Vemos que en semejanza con lo obtenido en [1], la covarianza oscila con una escala de tiempo de orden $\sim 1/m$. Por lo que el argumento sobre la inhomogeneidad del vacío, en separación temporal, se mantiene. Notar también como las expresiones divergen para $\Delta t \rightarrow 0$, al igual que sucedía en el caso no masivo (donde esto ya se veía de la dependencia con $1/\Delta t^8$), como es esperable para la covarianza en coincidencia.

Covarianza para separación espacial ($m \neq 0$)

Veremos ahora el caso $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ y $t_1 = t_2$, o sea $\Delta x \neq 0$ y $\Delta t = 0$.

En este caso el límite $\Delta t \rightarrow 0$ en I_a y I_b es directo, simplemente eliminando los términos exponenciales.

$$I_a(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \sin(\mathbf{k} \Delta x)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x^\gamma} \right), \quad (6.98)$$

$$I_b(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x^\gamma} \right). \quad (6.99)$$

En particular resulta que lo más simple es resolver de forma escalonada. Primero hacemos las integrales para los diferentes α que aparecen (1, 2 y 3), con β y γ genéricos. Luego, dichos resultados generales se evalúan en los diferentes β que aparecen (-3, -2, -1, 0 y 1) y finalmente se hace la evaluación en los diferentes γ (1, 2 y 3), al reemplazar los resultados en la expresión de F . Los resultados parciales del primer y segundo paso los mostramos en el Apéndice C.

F queda entonces

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = & \frac{2G^2 m^2}{9\pi^2 \Delta x^6} \left(4m^2 \Delta x^2 (\xi^2 (2m^2 \Delta x^2 - 6) - \xi m^2 \Delta x^2) K_0(m|\Delta x|)^2 + \right. \\ & + (\xi^2 (8m^4 \Delta x^4 + 40m^2 \Delta x^2 + 96) - \xi 4m^4 \Delta x^4 + m^4 \Delta x^4) \times \\ & \times K_1(m|\Delta x|)^2 + 4m^2 \Delta x^2 (12\xi^2 - 6\xi + 1) K_2(m|\Delta x|)^2 + \\ & \left. + 8m^3 (3\xi^2 - \xi) K_0(m|\Delta x|) K_1(m|\Delta x|) |\Delta x|^3 \right). \end{aligned} \quad (6.100)$$

Por lo que la covarianza adimensionalizada con $g = m \Delta x$ como variable es

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & \frac{2}{9g^6 \pi^2} \left(4g^2 (2\xi^2 (g^2 - 3) - \xi g^2) K_0(|g|)^2 + \right. \\ & + (8\xi^2 (g^4 + 5g^2 + 12) - 4\xi g^4 + g^4) K_1(|g|)^2 + \\ & + 4g^2 (12\xi^2 - 6\xi + 1) K_2(|g|)^2 + 8(3\xi^2 - \xi) \times \\ & \left. \times K_0(|g|) K_1(|g|) |g|^3 \right). \end{aligned} \quad (6.101)$$

Notar que las funciones que aparecen, K_0 , K_1 y K_2 están evaluadas en valores reales, por lo tanto, no serán oscilantes como en el caso de separación temporal (donde se evaluaban

en valores imaginarios). Esto es consecuencia de la forma de las integrales, Ecs. (6.98) y (6.99). Las mismas tiene senos y cosenos evaluados en el módulo del momento, en vez de en la frecuencia ω como en la Ec. (6.89). Naturalmente esta diferencia desaparece cuando $m = 0$, como ya se vio al calcular ese caso.

Comprobamos ahora que, haciendo el límite $m \rightarrow 0$, obtenemos el mismo resultado que en la Ec. (6.75)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \text{Cov} = \frac{32 G^2}{9 \pi^2 \Delta x^8} (18 \xi^2 - 6 \xi + 1), \quad (6.102)$$

el cual se puede adimensionalizar de forma idéntica que en el caso de separación temporal.

En la Figura 6.5 mostramos este resultado para tres valores concretos de ξ .

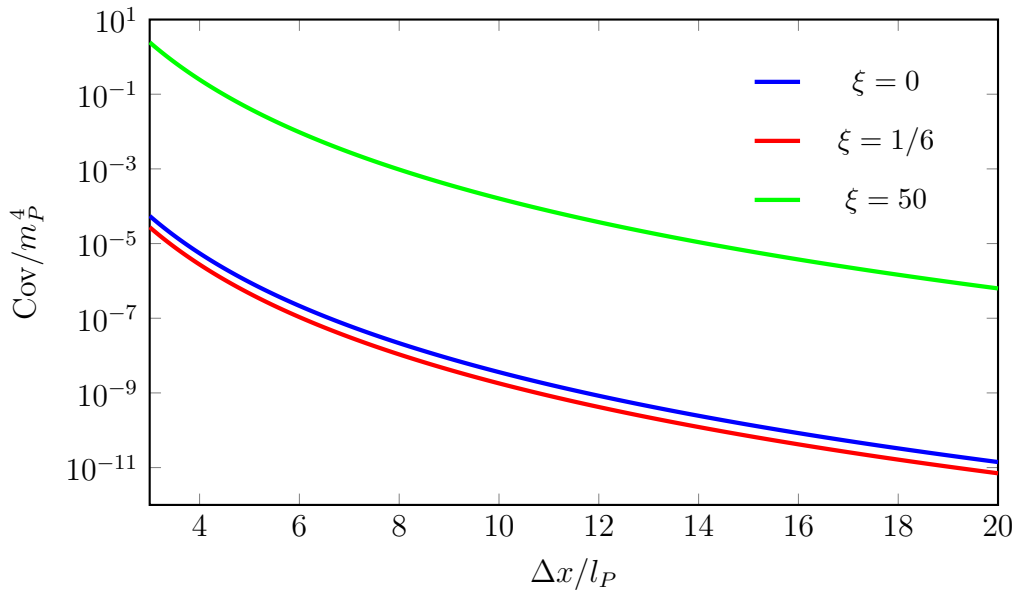


Figura 6.5: Covarianza adimensionalizada en función de Δx , en unidades de Planck, para el campo escalar no masivo

Ahora, vemos los tres valores de ξ para el caso de $m \neq 0$.

Para $\xi = 0$ (sin acoplamiento) queda

$$\frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = \frac{2}{9 g^4 \pi^2} (g^2 K_1(|g|)^2 + 4 K_2(|g|)^2). \quad (6.103)$$

Para $\xi = 1/6$ (caso conforme) queda

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & \frac{1}{81 g^6 \pi^2} \left(-4 g^2 (2 g^2 + 3) K_0(|g|)^2 + \right. \\ & + 2 (5 g^4 + 10 g^2 + 24) K_1(|g|)^2 + 24 g^2 K_2(|g|)^2 - \\ & \left. - 12 K_0(|g|) K_1(|g|) |g|^3 \right). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Para $\xi = 50$ (acoplamiento grande) queda

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} = & \frac{1}{9 g^6 \pi^2} \left(1200 g^2 (33 g^2 - 100) K_0(|g|)^2 + \right. \\ & + (39602 g^4 + 200000 g^2 + 480000) K_1(|g|)^2 + \\ & \left. + 237608 g^2 K_2(|g|)^2 + 119200 K_0(|g|) K_1(|g|) |g|^3 \right). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Los gráficos para los tres valores de ξ se muestra en la Figura 6.6.

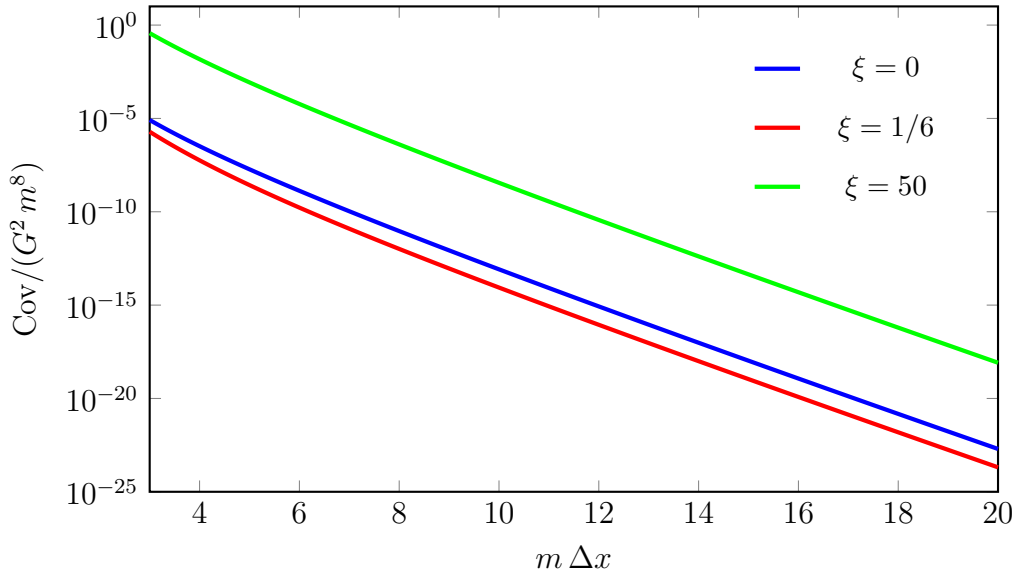


Figura 6.6: Covarianza adimensionalizada en función del parámetro $m \Delta x$ para un campo escalar masivo

Como se mencionó anteriormente, se ve claramente que no hay oscilaciones como las encontradas en el caso de intervalo temporal. La covarianza aquí es siempre positiva y decae muy rápidamente con la separación espacial. Por lo tanto, el comportamiento cualitativo de la covarianza es el mismo tanto para $m \neq 0$ como para $m = 0$.

Como la covarianza en separación espacial no será necesaria para las condiciones de estabilidad que analizaremos, no la estudiaremos en más detalle.

6.1.3. Comparación con regularización por cut-off

En esta sección mostraremos cómo los resultados para la covarianza a separación temporal obtenidos por Wang et al. equivalen a los nuestros en el caso correspondiente (campo escalar no masivo y con $\xi = 0$), y cómo la diferencia aparente proviene del orden en el que se realizan ciertos límites.

De la Ec. (6.74) para $\xi = 0$, tenemos que la covarianza es

$$\text{Cov} = \frac{32 G^2}{\pi^2 \Delta t^8}. \quad (6.106)$$

Y de la Ec. (4.24) tenemos que Wang et al. normalizan la covarianza con la varianza

$$\chi = \frac{\text{Cov}}{\sigma_{\Omega^2}^2}. \quad (6.107)$$

De la expresión de χ

$$\begin{aligned} \chi(\Delta t) = & \frac{16}{M^8 \Delta t^8} \left(36 \left(-2 + M^2 \Delta t^2 \right) \cos(M \Delta t) + \right. \\ & + \left(36 - 72 M^2 \Delta t^2 + 21 M^4 \Delta t^4 - M^6 \Delta t^6 \right) \cos(2 M \Delta t) + \\ & + 6 \left(6 + 2 M \Delta t \left(-6 + M^2 \Delta t^2 \right) \sin(M \Delta t) + \right. \\ & \left. \left. + M \Delta t \left(12 - 8 M^2 \Delta t^2 + M^4 \Delta t^4 \right) \sin(2 M \Delta t) \right) \right), \end{aligned} \quad (6.108)$$

vemos que no han hecho el límite $M \rightarrow \infty$. Por lo que formalmente la relación entre lo que ellos calculan y lo que nosotros obtuvimos es

$$\chi \sigma_{\Omega^2}^2 \Big|_{M \rightarrow \infty} = \text{Cov}. \quad (6.109)$$

De [1] tenemos que

$$\sigma_{\Omega^2}^2 = \frac{M^8 G^2}{18 \pi^2}. \quad (6.110)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi \sigma_{\Omega^2}^2 = & \frac{8 G^2}{9 \pi^2 \Delta t^8} \left(36 \left(\Delta t^2 M^2 - 2 \right) \cos(\Delta t M) + \right. \\ & + \left(-\Delta t^6 M^6 + 21 \Delta t^4 M^4 - 72 \Delta t^2 M^2 + 36 \right) \cos(2 \Delta t M) + \\ & + 6 \left(6 + 2 \Delta t M \left(\Delta t^2 M^2 - 6 \right) \sin(\Delta t M) + \right. \\ & \left. \left. + \Delta t M \left(\Delta t^4 M^4 - 8 \Delta t^2 M^2 + 12 \right) \sin(2 \Delta t M) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.111)$$

Ahora consideremos lo siguiente, si es cierto que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\infty dx \left(A e^{-xM} \right) = 0, \quad (6.112)$$

para algún A , entonces podemos decir que, en el sentido de las distribuciones,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} A = 0. \quad (6.113)$$

Ahora, en general se tiene que

$$\int_0^\infty d\Delta t \cos(a M \Delta t) \text{pol}(M) e^{-\Delta t M} = \frac{b}{M}, \quad (6.114)$$

$$\int_0^\infty d\Delta t \sin(c M \Delta t) \text{pol}(M) e^{-\Delta t M} = \frac{d}{M}, \quad (6.115)$$

donde a , b , c y d son constantes y $\text{pol}(M)$ es un polinomio cualquiera de M .

Por ejemplo

$$\int_0^\infty d\Delta t (36 \Delta t^2 M^2 - 72) \cos(\Delta t M) e^{-\Delta t M} = -\frac{54}{M}, \quad (6.116)$$

$$\int_0^\infty d\Delta t (2 \Delta t^3 M^3 - 12 \Delta t M) \sin(\Delta t M) e^{-\Delta t M} = -\frac{6}{M}. \quad (6.117)$$

Entonces en el sentido de las distribuciones

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \cos(a M \Delta t) \text{pol}(M) = 0, \quad (6.118)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sin(b M \Delta t) \text{pol}(M) = 0. \quad (6.119)$$

De esta forma es directo que aplicando el límite $M \rightarrow \infty$ queda

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \chi \sigma_{\Omega^2}^2 = \frac{32 G^2}{\pi^2 \Delta t^8}. \quad (6.120)$$

Que coincide con el resultado obtenido por regularización dimensional.

Este cálculo nos muestra claramente la diferencia entre tomar el límite de coincidencia manteniendo el cut-off finito, en lugar de evaluar la covarianza para puntos separados. En este último caso la covarianza está bien definida como distribución, por lo que no necesita de regularización y es divergente en el límite de coincidencia.

6.1.4. Transformada de Fourier de la covarianza

Como mencionamos al principio del capítulo, nos interesa la transformada de la covarianza definida en la Ec. (5.8). Para obtenerla, en vez de tratar de calcularla directamente con la expresión analítica de la covarianza, Ec. (6.92), vamos a ir un par de pasos atrás y escribiremos F en función de las distintas integrales \tilde{I}_a , usando las Ecs. (6.77) a (6.82) y (6.86). Queda

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = & \frac{8 \pi^2 G^2}{9(2\pi)^6} 16 \pi^2 \left(C_1 \tilde{I}_a(1, 1)^2 + C_2 \tilde{I}_a(1, 0)^2 + C_3 \tilde{I}_a(1, -1)^2 + \right. \\ & + (C_5 + C_6) \tilde{I}_a(1, 1) \tilde{I}_a(1, -1) + (C_8 + C_9) \tilde{I}_a(1, 0) \tilde{I}_a(1, -2) + \\ & \left. + C_{10} \tilde{I}_a(1, 1) \tilde{I}_a(1, -3) + \frac{C_{12}}{3} \tilde{I}_a(3, 1)^2 \right). \end{aligned} \quad (6.121)$$

Como la integral \tilde{I}_a para el caso tiene la forma

$$\tilde{I}_a(\alpha, \beta) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^{\alpha+1} \exp(-i \omega \Delta t)}{\omega^\beta} \right). \quad (6.122)$$

F se puede reescribir como

$$F(x_1, x_2) = \frac{2 G^2}{9 \pi^2} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 f(k_1, k_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2) \Delta t}, \quad (6.123)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\omega_1, \omega_2) = & C_1 \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_1 \omega_2} + C_2 \mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 + C_3 \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_1^{-1} \omega_2^{-1}} + (C_5 + C_6) \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_1 \omega_2^{-1}} + \\ & + (C_8 + C_9) \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_2^{-2}} + C_{10} \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_1 \omega_2^{-3}} + C_{12} \frac{\mathbf{k}_1^4 \mathbf{k}_2^4}{\omega_1 \omega_2}. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Ahora hacemos el cambio de variables

$$(|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2|) \longrightarrow (\omega_1, \nu = \omega_1 + \omega_2), \quad (6.125)$$

$$dk_1 dk_2 \longrightarrow |\det(J)| d\omega_1 d\nu. \quad (6.126)$$

Donde el módulo del determinante de la matriz jacobiana está dado por

$$|\det(J)| = \frac{\omega_1 (\nu - \omega_1)}{\sqrt{(\omega_1^2 - m^2) ((\nu - \omega_1)^2 - m^2)}}. \quad (6.127)$$

Los límites de integración en las variables originales eran $|\mathbf{k}_1| \in (0, \infty)$ y $|\mathbf{k}_2| \in (0, \infty)$, por lo que en las nuevas variables ν y ω_1 son $\omega_1 \in (m, \infty)$ y $\nu \in (m + \omega_1, \infty)$. Lo que alternativamente se puede escribir como

$$\omega_1 \in (m, \nu - m), \quad (6.128)$$

$$\nu \in (2m, \infty). \quad (6.129)$$

Notar que la región de integración es la misma, solo se invirtió la interdependencia de las variables para poder llegar a la forma deseada.

Con lo anterior, tenemos que F es

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= \frac{2G^2}{9\pi^2} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 f(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)\Delta t} \\
&= \frac{2G^2}{9\pi^2} \int_m^\infty d\omega_1 \int_{m+\omega_1}^\infty d\nu |\det(J)| f(\omega_1, \nu - \omega_1) e^{-i\nu\Delta t} \\
&= \int_{2m}^\infty d\nu e^{-i\nu\Delta t} \left(\frac{2G^2}{9\pi^2} \int_m^{\nu-m} d\omega_1 |\det(J)| f(\omega_1, \nu - \omega_1) \right) \\
&= \int_0^\infty d\nu e^{-i\nu\Delta t} \widetilde{\text{Cov}},
\end{aligned} \tag{6.130}$$

donde

$$\widetilde{\text{Cov}}(\nu) = \theta(u - 2) \frac{2G^2}{9\pi^2} \int_m^{\nu-m} d\omega_1 |\det(J)| f(\omega_1, \nu - \omega_1). \tag{6.131}$$

Notar que se introdujo la función de Heaviside, $\theta(\nu - 2m)$, para tener el límite de integración inferior igual a 0 en la integral de ν .

Ahora podemos escribir la covarianza en la forma deseada

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2)) &= \lim_{d \rightarrow 4} \left(\frac{F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)}{2} \right) \\
&= \int_0^\infty d\nu \cos(\nu\Delta t) \widetilde{\text{Cov}}(\nu).
\end{aligned} \tag{6.132}$$

Sólo las componentes pares tienen una contribución, como es esperable ya que la covarianza es par por construcción.

Nos queda por resolver la integral de la Ec. (6.131), para ello hacemos los cambios de variable $\omega_1 \rightarrow g$ y $\nu \rightarrow u$, dados por

$$g = \frac{\omega_1}{m} - 1, \tag{6.133}$$

$$u = \frac{\nu}{m}. \tag{6.134}$$

Los límites de integración de ω_1 son $\omega_1 \in (m, \nu - m)$. Lo que se traduce en $g \in (0, u - 2)$, en la nueva variable. Por lo tanto $\widetilde{\text{Cov}}$ queda

$$\begin{aligned}
\widetilde{\text{Cov}} &= \theta(u - 2) \frac{2G^2}{9\pi^2} \int_0^{u-2} dg |\det(J)| f(m(g+1), m(u-g-1)) \\
&= \theta(u - 2) G^2 m^7 \int_0^{u-2} dg K(u, g).
\end{aligned} \tag{6.135}$$

Que adimensionalizado es

$$\frac{\widetilde{\text{Cov}}}{G^2 m^7} = \theta(u-2) \int_0^{u-2} dg K(u, g), \quad (6.136)$$

donde

$$\begin{aligned} K(u, g) = & \frac{2 \sqrt{g(g+2)(g-u)(g-u+2)}}{27 \pi^2} \left(\xi^2 \left(16 g^4 + (-32 u + 64) g^3 + \right. \right. \\ & + \left. \left. (-8 u^2 - 96 u + 64) g^2 + (24 u^3 - 16 u^2 - 64 u) g + \right. \right. \\ & + \left. \left. 12 u^4 + 24 u^3 + 12 u^2 \right) - \xi \left(24 g^4 + (-48 u + 96) g^3 + \right. \right. \\ & + \left. \left. (-144 u + 108) g^2 + (24 u^3 - 108 u + 24) g + 24 u^3 + \right. \right. \\ & + \left. \left. 12 u^2 - 12 u \right) + 12 g^4 + (-24 u + 48) g^3 + \right. \\ & + \left. \left(12 u^2 - 72 u + 60 \right) g^2 + (24 u^2 - 60 u + 24) g + \right. \\ & \left. + 12 u^2 - 12 u + 3 \right). \end{aligned} \quad (6.137)$$

Nótese que la integral de la Ec. (6.136), es en una región finita de una función sin polos, por lo tanto, es necesariamente convergente. Sin embargo, su evaluación, especialmente en los límites, es muy difícil (la primitiva si tiene polos en los límites de integración). Debido a esto la resolvimos numéricamente. Presentamos los resultados en la Figura 6.7, para tres valores concretos de ξ .

Nótese que solo las frecuencias con $u = \nu/m > 2$ tienen una contribución, a diferencia de la densidad espectral obtenida por Wang et al., Figura 4.3, donde las contribuciones tienen una cota superior (en particular dos veces el cut-off). Más adelante veremos cómo esta diferencia produce distintas condiciones para la amplificación paramétrica.

Ahora podemos ver el caso particular de $m = 0$, donde $C_1 = C_2 = C_5 = C_6 = 0$, por lo que f es

$$f(\omega_1, \omega_2) = C_3 \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_1^{-1} \omega_2^{-1}} + (C_8 + C_9) \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_2^{-2}} + C_{10} \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\omega_1 \omega_2^{-3}} + C_{12} \frac{\mathbf{k}_1^4 \mathbf{k}_2^4}{\omega_1 \omega_2}. \quad (6.138)$$

Al igual que antes hacemos

$$(|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2|) \longrightarrow (\omega_1, \nu = \omega_1 + \omega_2), \quad (6.139)$$

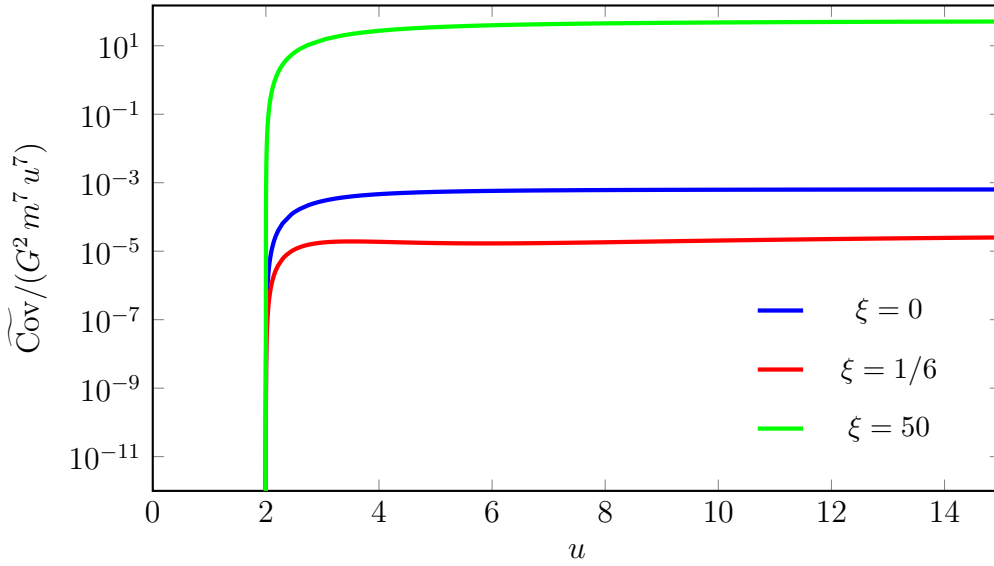


Figura 6.7: Transformada de Fourier adimensionalizada de la covarianza, a separación temporal, para un campo escalar masivo

$$dk_1 dk_2 \longrightarrow |\det(J)| d\omega_1 d\nu, \quad (6.140)$$

donde $|\det(J)| = 1$, por lo que queda

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_0^\infty d\nu e^{-i\nu \Delta t} \left(\frac{2G^2}{9\pi^2} \int_0^\nu d\omega_1 f(\omega_1, \nu - \omega_1) \right) \\ &= \int_0^\infty d\nu e^{-i\nu \Delta t} \widetilde{\text{Cov}}, \end{aligned} \quad (6.141)$$

con

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Cov}} &= \frac{2G^2}{9\pi^2} \int_0^\nu d\omega_1 f(\omega_1, \nu - \omega_1) \\ &= G^2 \int_0^\nu d\omega_1 \frac{8(\nu - \omega_1)\omega_1}{27\pi^2} \left(3\nu^4 \xi^2 + 6\nu^3 (\xi^2 - \xi) \omega_1 + \right. \\ &\quad \left. + \nu^2 (3 - 2\xi^2) \omega_1^2 - 2\nu (4\xi^2 - 6\xi + 3) \omega_1^3 + (4\xi^2 - 6\xi + 3) \omega_1^4 \right). \end{aligned} \quad (6.142)$$

Resulta que en este caso la integral es simplemente un polinomio de ω_1 , por lo que es posible realizarla analíticamente, dando

$$\widetilde{\text{Cov}} = \frac{2\nu^7 G^2}{945\pi^2} (102\xi^2 - 34\xi + 3). \quad (6.143)$$

Por la simplicidad de este caso también podemos realizar la transformada de la expresión analítica de la covarianza, Ec. (6.74). Como es esperable, de esta forma se obtiene el mismo resultado.

Al igual que antes adimensionalizamos el resultado de la siguiente manera

$$\frac{\widetilde{\text{Cov}}}{E_P^3} = \frac{2(\nu/E_P)^7}{945\pi^2} (102\xi^2 - 34\xi + 3). \quad (6.144)$$

Vemos esto para tres valores de ξ diferentes en la Figura 6.8.

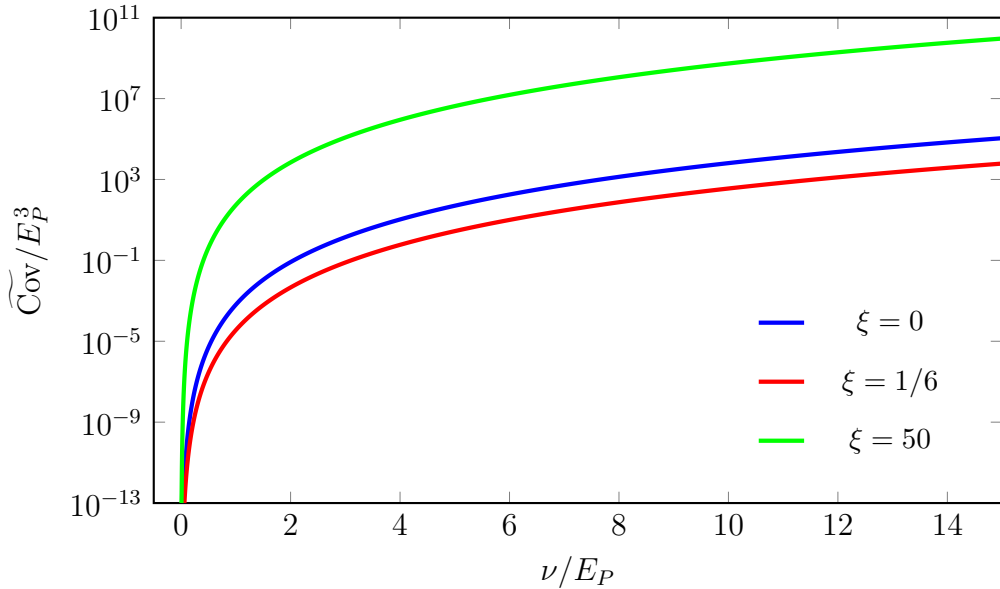


Figura 6.8: Transformada de Fourier adimensionalizada de la covarianza, a separación temporal, para un campo escalar no masivo

6.2. Campo fermiónico

Para el caso del campo fermiónico usaremos el lagrangiano dado por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi. \quad (6.145)$$

Y las expansiones en operadores de creación y destrucción dadas por

$$\psi = \sum_r \int d^3k \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_k}} (c_{r,\mathbf{k}} u_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + d_{r,\mathbf{k}}^\dagger v_r(\mathbf{k}) e^{ikx}), \quad (6.146)$$

$$\bar{\psi} = \sum_r \int d^3k \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_k}} (d_{r,\mathbf{k}} \bar{v}_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + c_{r,\mathbf{k}}^\dagger \bar{u}_r(\mathbf{k}) e^{ikx}), \quad (6.147)$$

donde consideramos la relación habitual $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

En el Apéndice C indicamos las convenciones utilizadas para los operadores, las matrices gammas y los espinores.

6.2.1. Valor medio de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$

Al igual que con el campo escalar necesitamos una forma explícita del tensor energía-momento en función de los campos si queremos calcular el valor medio y otras cantidades estadísticas de $\Omega^2(t, \mathbf{x})$. De [19] tenemos que

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left(\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi + \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi \right). \quad (6.148)$$

Por lo que es directo que las componentes diagonales son

$$T_{00} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi - (\partial_0 \bar{\psi}) \gamma_0 \psi \right), \quad (6.149)$$

$$T_{ii} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_{\underline{i}} \partial_{\underline{i}} \psi - (\partial_{\underline{i}} \bar{\psi}) \gamma_{\underline{i}} \psi \right), \quad (6.150)$$

donde los índices subrayados indican que no se suma sobre índices repetidos.

Debido a la simplicidad del $T_{\mu\nu}$ se puede calcular el valor medio de Ω^2 de forma directa. De las expansiones en las Ecs. (6.146) y (6.147) es directo que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle &= \sum_{r,r'} \int d^3k \int d^3k' \left(\frac{m}{(2\pi)^3} \frac{i E_{k'}}{\sqrt{E_k E_{k'}}} \langle d_{r,\mathbf{k}} d_{r',\mathbf{k}'}^\dagger \rangle \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-i x k} e^{i x k'} \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_0 v_{r'}(\mathbf{k}') \right) \\ &= \frac{2i}{(2\pi)^3} \int d^3k E_k. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Y como

$$\langle (\partial_0 \bar{\psi}) \gamma_0 \psi \rangle = - \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle. \quad (6.152)$$

Tenemos que

$$\langle T_{00} \rangle = \langle \rho \rangle = -4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2}. \quad (6.153)$$

De forma equivalente tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma_{\underline{i}} \partial_{\underline{i}} \psi \rangle &= \sum_{r,r'} \int d^3k \int d^3k' \left(\frac{m}{(2\pi)^3} \frac{i k'_i}{\sqrt{E_k E_{k'}}} \langle d_{r,\mathbf{k}} d_{r',\mathbf{k}'}^\dagger \rangle \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-i x k} e^{i x k'} \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_i v_{r'}(\mathbf{k}') \right) \\ &= \frac{2i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k_i^2}{E_k}, \end{aligned} \quad (6.154)$$

y

$$\langle (\partial_i \bar{\psi}) \gamma_i \psi \rangle = - \langle \bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi \rangle. \quad (6.155)$$

Por lo que queda

$$\langle T_{ii} \rangle = -2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_i^2}{E_k}, \quad (6.156)$$

cuya suma es

$$\sum_i \langle p_i \rangle = \sum_i \langle T_{ii} \rangle = -2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{E_k}. \quad (6.157)$$

Entonces queda que el valor medio de Ω^2 es

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2 \rangle &= \frac{4\pi G}{3} \left(\langle \rho \rangle + \sum_i \langle p_i \rangle \right) \\ &= \frac{8\pi G}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{-2\mathbf{k}^2 - m^2}{E_k} \right). \end{aligned} \quad (6.158)$$

Resolviendo la integral al igual que lo hicimos con el campo escalar, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2 \rangle &= -\frac{8\pi G}{3} \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1} k \left(\frac{2\mathbf{k}^2 + m^2}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \right) \\ &= -\frac{2^{5-d} G m^d \pi^{1-\frac{d}{2}} \mu^{4-d} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{3d}. \end{aligned} \quad (6.159)$$

Expandiendo alrededor de $d = 4$, queda

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{G m^4}{3\pi} \left(\frac{1}{d-4} + \log\left(\frac{m}{\tilde{\mu}}\right) \right), \quad (6.160)$$

donde

$$\tilde{\mu} = \mu e^c, \quad (6.161)$$

$$c = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \gamma_{EM} + \frac{1}{2} \log(4\pi) \approx 1.23. \quad (6.162)$$

Utilizando el esquema de substracción minimal (descartamos el polo), obtenemos

$$\boxed{\langle \Omega^2 \rangle = \frac{G m^4}{3\pi} \log\left(\frac{m}{\mu}\right)}, \quad (6.163)$$

donde se sobreentiende que se absorbió una constante dentro del μ .

Nótese que el resultado tiene un factor -4 de diferencia con la Ec. (6.28), como es esperable por el conteo de grados de libertad y el carácter fermiónico del campo.

6.2.2. Covarianza

Al igual que con el campo escalar, usamos la covarianza definida como

$$\text{Cov} \left(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2) \right) = \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)), \quad (6.164)$$

donde

$$F(a, b) = \langle \Omega^2(a) \Omega^2(b) \rangle - \langle \Omega^2(a) \rangle \langle \Omega^2(b) \rangle. \quad (6.165)$$

Por lo que primero obtendremos la expresión de Ω^2 en función de los campos, en una notación conveniente para calcular $\langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle$,

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{4\pi G}{3} \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi - (\partial_0 \bar{\psi}) \gamma_0 \psi + \bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi - (\partial_i \bar{\psi}) \gamma_i \psi \right) \right) \\ &= \frac{2i\pi G}{3} \left(\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi \right). \end{aligned} \quad (6.166)$$

Reemplazando las expansiones de los campos queda

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{2\pi i G}{3} \sum_{r,r'} \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_k E_{k'}}} (A P_1 + B P_2 + C P_3 + \\ &+ D P_4 - A Q_1 - B Q_2 - C Q_3 - D Q_4), \end{aligned} \quad (6.167)$$

donde

$$A = d_{r,\mathbf{k}} c_{r',\mathbf{k}'}, \quad (6.168)$$

$$B = d_{r,\mathbf{k}} d_{r',\mathbf{k}'}^\dagger, \quad (6.169)$$

$$C = c_{r,\mathbf{k}}^\dagger c_{r',\mathbf{k}'}, \quad (6.170)$$

$$D = c_{r,\mathbf{k}}^\dagger d_{r',\mathbf{k}'}^\dagger, \quad (6.171)$$

y

$$P_1 = \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu u_{r'}(\mathbf{k}') (-i k'_\mu) e^{-ix(k+k')}, \quad (6.172)$$

$$P_2 = \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu v_{r'}(\mathbf{k}') (i k'_\mu) e^{-ix(k-k')}, \quad (6.173)$$

$$P_3 = \bar{u}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu u_{r'}(\mathbf{k}') (-i k'_\mu) e^{i x (k-k')}, \quad (6.174)$$

$$P_4 = \bar{u}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu v_{r'}(\mathbf{k}') (i k'_\mu) e^{i x (k+k')}, \quad (6.175)$$

$$Q_1 = \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu u_{r'}(\mathbf{k}') (-i k_\mu) e^{-i x (k+k')}, \quad (6.176)$$

$$Q_2 = \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu v_{r'}(\mathbf{k}') (-i k_\mu) e^{-i x (k-k')}, \quad (6.177)$$

$$Q_3 = \bar{u}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu u_{r'}(\mathbf{k}') (i k_\mu) e^{i x (k-k')}, \quad (6.178)$$

$$Q_4 = \bar{u}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu v_{r'}(\mathbf{k}') (i k_\mu) e^{i x (k+k')}. \quad (6.179)$$

Ahora, al calcular el valor medio $\langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle$ vemos que, de las combinaciones posibles de operadores de creación y destrucción, los únicos términos que sobreviven son aquellos de la forma BB y AD .

Escribiendo $\Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2)$ solo con las componentes que sobrevivirán, queda

$$\begin{aligned} \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) = & -\frac{4\pi^2 G^2}{9} \sum_{\substack{r_1, r_2 \\ r_3, r_4}} \iiint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4 m^2}{(2\pi)^6 \sqrt{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} E_{k_4}}} \times \\ & \times (A_{12} D_{34} (P_1 - Q_1)_{12} (P_4 - Q_4)_{34} + 4 B_{12} B_{34} (P_2)_{12} (P_2)_{34}), \end{aligned} \quad (6.180)$$

donde el doble índice numérico indica el primer y segundo conjunto de índices $\{r, k\}$ que le corresponde a cada término, por ejemplo se tiene que $A_{12} = d_{r_1, \mathbf{k}_1} c_{r_2, \mathbf{k}_2}$.

Y se utilizó también que

$$P_2 - Q_2 = 2 \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma_\mu v_{r'}(\mathbf{k}') (i k'_\mu) e^{-i x (k-k')} = 2 P_2. \quad (6.181)$$

Ahora, los valores medios de $B_{12} B_{34}$ y $A_{12} D_{34}$ son

$$\langle B_{12} B_{34} \rangle = \langle d_{r_1, \mathbf{k}_1} d_{r_2, \mathbf{k}_2}^\dagger d_{r_3, \mathbf{k}_3} d_{r_4, \mathbf{k}_4}^\dagger \rangle = \delta_{r_1 r_2} \delta_{r_3 r_4} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4), \quad (6.182)$$

$$\langle A_{12} D_{34} \rangle = \langle d_{r_1, \mathbf{k}_1} c_{r_2, \mathbf{k}_2} c_{r_3, \mathbf{k}_3}^\dagger d_{r_4, \mathbf{k}_4}^\dagger \rangle = \delta_{r_2 r_3} \delta_{r_1 r_4} \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4). \quad (6.183)$$

Por lo tanto, integrando las deltas queda que

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle = & -\frac{4\pi^2 G^2}{9} \sum_{r_1, r_2} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 m^2}{(2\pi)^6 E_{k_1} E_{k_2}} \times \\ & \times ((P_1 - Q_1)_{12} (P_4 - Q_4)_{21} + 4 (P_2)_{11} (P_2)_{22}). \end{aligned} \quad (6.184)$$

Al igual que sucedió con el campo escalar, nótese que si escribimos $\langle \Omega^2 \rangle$ como una integral,

queda

$$\begin{aligned}
\langle \Omega^2 \rangle &= \frac{2i\pi G}{3} \sum_{r_1, r_2} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{k_1} E_{k_2}}} \langle B \rangle (P_2 - Q_2) \\
&= \frac{2i\pi G}{3} \sum_{r_1, r_2} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{k_1} E_{k_2}}} \delta_{r_1 r_2} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (P_2 - Q_2) \\
&= \frac{2i\pi G}{3} \sum_{r_1} \int \frac{d^3 k_1 m}{(2\pi)^3 E_{k_1}} 2 (P_2)_{11}.
\end{aligned} \tag{6.185}$$

Y por lo tanto tenemos que su cuadrado es

$$\langle \Omega^2 \rangle^2 = -\frac{4\pi^2 G^2}{9} \sum_{r_1, r_2} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 m^2}{(2\pi)^6 E_{k_1} E_{k_2}} (4 (P_2)_{11} (P_2)_{22}). \tag{6.186}$$

Lo que hace que F se reduzca a

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= \langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle - \langle \Omega^2 \rangle^2 \\
&= -\frac{4\pi^2 G^2}{9} \sum_{r_1, r_2} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 m^2}{(2\pi)^6 E_{k_1} E_{k_2}} (P_1 - Q_1)_{12} (P_4 - Q_4)_{21}.
\end{aligned} \tag{6.187}$$

En el Apéndice C mostramos que esto se puede reescribir de la siguiente manera

$$\langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle - \langle \Omega^2 \rangle^2 = -\frac{4\pi^2 G^2}{9} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} f(k_1, k_2) e^{-i(x_1 - x_2)(k_1 + k_2)}, \tag{6.188}$$

donde

$$\begin{aligned}
f(k_1, k_2) &= -\frac{2}{E_{k_1} (m + E_{k_1}) E_{k_2} (m + E_{k_2})} \times \\
&\quad \times \left((\Delta E_1 k_{1z} (m + E_{k_2}) - \Delta E_2 k_{2z} (m + E_{k_1}))^2 + \right. \\
&\quad + (\Delta E_1 K_1^- (m + E_{k_2}) - \Delta E_2 K_2^- (m + E_{k_1})) \times \\
&\quad \left. \times (\Delta E_1 K_1^+ (m + E_{k_2}) - \Delta E_2 K_2^+ (m + E_{k_1})) \right),
\end{aligned} \tag{6.189}$$

y donde se utilizó la siguiente notación

$$K_1^- = k_{1x} - i k_{1y}, \tag{6.190}$$

$$K_1^+ = k_{1x} + i k_{1y}, \tag{6.191}$$

$$K_2^- = k_{2x} - i k_{2y}, \tag{6.192}$$

$$K_2^+ = k_{2x} + i k_{2y}, \quad (6.193)$$

y

$$\Delta E_1 = m + E_{k_1} - E_{k_2}, \quad (6.194)$$

$$\Delta E_2 = m - E_{k_1} + E_{k_2}. \quad (6.195)$$

Solo hasta aquí es posible llegar manteniendo el caso general de masa cualquiera y de una separación espacio-temporal arbitraria. Por otro lado, si miramos casos particulares es posible resolver las integrales pasando a esféricas, para primero integrar en las variables angulares y luego en las radiales.

Veremos primero el caso de separación temporal con $m \neq 0$, y luego para el caso de $m = 0$ bastara con hacer el límite. No veremos la situación de separación solo espacial para $m \neq 0$, ya que es muy difícil regularizar las divergencias que aparecen. Aunque la expresión final sabemos que es convergente, los términos parciales que hay que integrar tienen divergencias que, aunque se deberían anular entre sí, en la práctica complican enormemente el cálculo. Por otro lado, si tomamos $m = 0$ desde el principio es posible hacer las integrales con un procedimiento idéntico al que mostraremos para el caso de separación temporal. Pero como esta cantidad no es de interés para el análisis que queremos hacer, solo daremos el resultado final.

Covarianza para separación temporal

Como para este caso la exponencial no depende de las variables angulares, se pueden hacer las integrales angulares de f pasando a esféricas

$$\begin{aligned} \langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle - \langle \Omega^2 \rangle^2 &= -\frac{4\pi^2 G^2}{9(2\pi)^6} \iint d^3k_1 d^3k_2 f(k_1, k_2) e^{-i\Delta t(E_{k_1} + E_{k_2})} \\ &= -\frac{4\pi^2 G^2}{9(2\pi)^6} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-i\Delta t(E_{k_1} + E_{k_2})} \times \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 |J| f(k_1, k_2) \\ &= \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-i\Delta t(E_{k_1} + E_{k_2})} A, \end{aligned} \quad (6.196)$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{4\pi^2 G^2}{9(2\pi)^6} \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \left(\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) f(k_1, k_2) \right) \\
&= -\frac{4G^2 \mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{9\pi^2 \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2}} \left(\mathbf{k}_1^2 \left(2\mathbf{k}_2^2 + m^2 - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\mathbf{k}_2^2 + m^2 \right) \left(\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2} - m^2 \right) \right). \tag{6.197}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= -\frac{4\pi^2 G^2}{9\pi^2} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 e^{-i\Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})}}{\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2}} \times \\
&\quad \times \left(\mathbf{k}_1^2 \left(2\mathbf{k}_2^2 + m^2 - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\mathbf{k}_2^2 + m^2 \right) \left(\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2} - m^2 \right) \right). \tag{6.198}
\end{aligned}$$

Al expandir el integrando se tienen 7 términos con dos posibles formas

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \frac{k_1^a k_2^b e^{-i\Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})}}{\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2}} \\
&= \int_m^\infty dE_{k_1} \int_m^\infty dE_{k_2} \left(\sqrt{E_{k_1}^2 - m^2} \right)^{a-1} \left(\sqrt{E_{k_2}^2 - m^2} \right)^{b-1} e^{-i\Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})}, \tag{6.199}
\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \mathbf{k}_1^a \mathbf{k}_2^b e^{-i\Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})} \\
&= \int_m^\infty dE_{k_1} \int_m^\infty dE_{k_2} E_{k_1} E_{k_2} \left(\sqrt{E_{k_1}^2 - m^2} \right)^{a-1} \left(\sqrt{E_{k_2}^2 - m^2} \right)^{b-1} e^{-i\Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})}, \tag{6.200}
\end{aligned}$$

donde se utilizó el cambio de variables $dk = \frac{E}{|\mathbf{k}|} dE$.

Como es habitual las integrales no son convergentes, pero se pueden regularizar fácilmente usando $\Delta t \rightarrow -i\Delta\tau + \Delta t$. En concreto las 4 integrales particulares que aparecen son

$$\begin{aligned}
I_a &= \int_m^\infty dE_k \left(\sqrt{E_k^2 - m^2} e^{-i(\Delta t - i \Delta \tau) E_k} \right) \\
&= -\frac{i m K_1(m(i \Delta t + \Delta \tau))}{\Delta t - i \Delta \tau},
\end{aligned} \tag{6.201}$$

$$\begin{aligned}
I_b &= \int_m^\infty dE_k \left(\left(\sqrt{E_k^2 - m^2} \right)^3 e^{-i(\Delta t - i \Delta \tau) E_k} \right) \\
&= -\frac{3 m^2 K_2(m(i \Delta t + \Delta \tau))}{(\Delta t - i \Delta \tau)^2},
\end{aligned} \tag{6.202}$$

$$\begin{aligned}
I_c &= \int_m^\infty dE_k \left(E_k \sqrt{E_k^2 - m^2} e^{-i(\Delta t - i \Delta \tau) E_k} \right) \\
&= -\frac{i m^2 K_2(m(i \Delta t + \Delta \tau))}{\Delta t - i \Delta \tau},
\end{aligned} \tag{6.203}$$

$$\begin{aligned}
I_d &= \int_m^\infty dE_k \left(E_k \left(\sqrt{E_k^2 - m^2} \right)^3 e^{-i(\Delta t - i \Delta \tau) E_k} \right) \\
&= -\frac{3 m^3 K_3(m(i \Delta t + \Delta \tau))}{(\Delta t - i \Delta \tau)^2},
\end{aligned} \tag{6.204}$$

donde $K_\nu(z)$ es la función de Bessel modificada del segundo tipo.

Por lo que F queda

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= \frac{2 G^2}{9 \pi^2} \left(4 I_d I_c + 2 m^2 I_c I_c - 4 I_b I_b - 4 m^2 I_a I_b - 2 m^4 I_a I_a \right) \\
&= \frac{4 G^2 m^4}{9 \pi^2 (i \Delta t + \Delta \tau)^4} \left(m^2 (\Delta t - i \Delta \tau)^2 K_1(m(i \Delta t + \Delta \tau))^2 + \right. \\
&\quad \left. + (6 - m^2 (\Delta t - i \Delta \tau)^2) K_2(m(i \Delta t + \Delta \tau))^2 \right) \\
&= \frac{4 G^2 m^4}{9 \pi^2 \Delta t^4} \left(m^2 \Delta t^2 K_1(i m \Delta t)^2 + (6 - m^2 \Delta t^2) K_2(i m \Delta t)^2 \right),
\end{aligned} \tag{6.205}$$

donde en la tercera igualdad se hizo el límite $\Delta \tau \rightarrow 0$.

Y la covarianza entonces es

$$\begin{aligned} \text{Cov} &= \frac{F(\Delta t) + F(-\Delta t)}{2} \\ &= \frac{2G^2 m^4}{9\pi^2 \Delta t^4} \left(m^2 \Delta t^2 \left(K_1(-im\Delta t)^2 + K_1(im\Delta t)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(6 - m^2 \Delta t^2 \right) \left(K_2(-im\Delta t)^2 + K_2(im\Delta t)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (6.206)$$

Usando la variable $g = m \Delta t$ y adimensionalizando la covarianza queda

$$\begin{aligned} \frac{\text{Cov}}{G^2 m^8} &= \frac{2}{9g^4 \pi^2} \left(g^2 \left(K_1(-ig)^2 + K_1(ig)^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(g^2 - 6 \right) \left(K_2(-ig)^2 + K_2(ig)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (6.207)$$

El caso de $m = 0$ se obtiene haciendo el límite,

$$\lim_{m \rightarrow 0} \text{Cov} = \frac{32G^2}{3\pi^2 \Delta t^8}. \quad (6.208)$$

Vemos que coincide con la Ec. (6.74) salvo por un factor numérico, concretamente $3 \text{Cov}_\psi(\Delta t) = \text{Cov}_\phi(\Delta t)$, donde los subíndices ψ y ϕ indican campo fermiónico y campo escalar respectivamente. Por lo tanto, cuando $m = 0$, la transformada de Fourier de la covarianza para el campo escalar (en $\xi = 0$) y para el fermiónico tendrán igual comportamiento cualitativo. El gráfico para el caso $m \neq 0$ se muestra en la Figura 6.9.

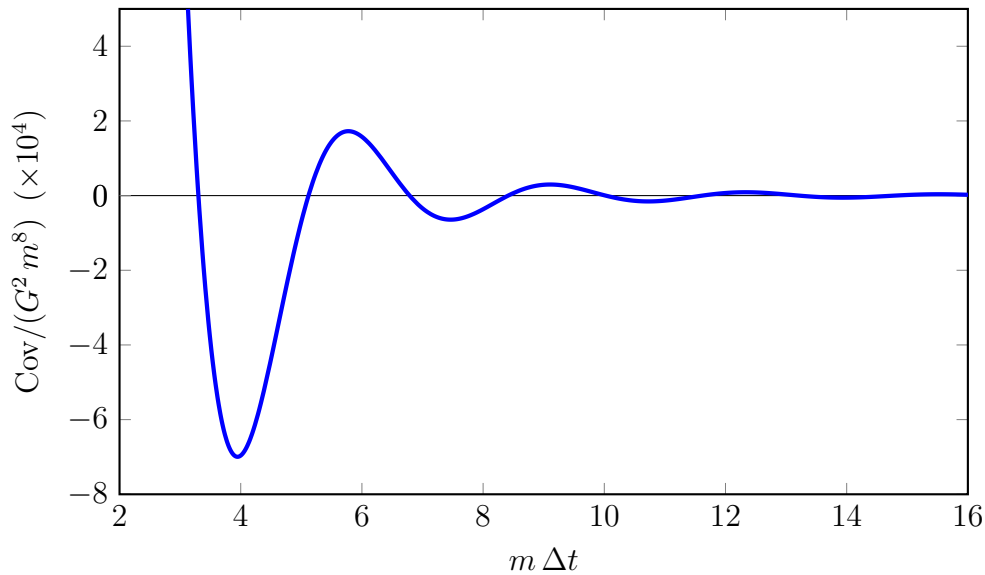


Figura 6.9: Covarianza adimensionalizada en función del parámetro $m \Delta t$ para un campo fermiónico

Finalmente mencionaremos que si tomamos $m = 0$ desde el principio, las integrales para el caso de separación espacial, se pueden hacer con un procedimiento idéntico al usado en

esta sección. Haciendo esto se obtiene

$$\text{Cov}(\Delta x) = \frac{32 G^2}{3 \pi^2 \Delta x^8}. \quad (6.209)$$

Nótese como a diferencia del campo escalar, se obtiene lo mismo que a separación temporal, Ec. (6.208). Y si lo comparamos con el resultado correspondiente para el campo escalar ($m = 0$ y $\xi = 0$) se tiene $\text{Cov}_\psi(\Delta x) = 3 \text{Cov}_\phi(\Delta x)$.

6.2.3. Transformada de Fourier de la covarianza

Al igual que con el campo escalar partimos de una expresión integral de F , en particular usando las Ecs. (6.196) y (6.197) tenemos que

$$F(x_1, x_2) = -\frac{4 \pi^2 G^2}{9 \pi^2} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-i \Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})} \tilde{f}, \quad (6.210)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2}} \left(\mathbf{k}_1^2 \left(2 \mathbf{k}_2^2 + m^2 - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2} \right) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{k}_2^2 + m^2) \left(\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2} - m^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (6.211)$$

Con el cambio de variables dado por

$$(|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2|) \longrightarrow (E_{k_1}, \nu = E_{k_1} + E_{k_2}), \quad (6.212)$$

$$dk_1 dk_2 \longrightarrow |\det(J)| dE_{k_1} d\nu. \quad (6.213)$$

Y las relaciones

$$|\mathbf{k}_1| = \sqrt{E_{k_1}^2 - m^2}, \quad (6.214)$$

$$|\mathbf{k}_2| = \sqrt{(\nu - E_{k_1})^2 - m^2}, \quad (6.215)$$

$$|\det(J)| = \frac{E_{k_1} (\nu - E_{k_1})}{\sqrt{(E_{k_1}^2 - m^2) ((\nu - E_{k_1})^2 - m^2)}}. \quad (6.216)$$

Queda

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= -\frac{4\pi^2 G^2}{9\pi^2} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-i\Delta t (E_{k_1} + E_{k_2})} \tilde{f} \\
&= -\frac{4\pi^2 G^2}{9\pi^2} \int dE_{k_1} \int d\nu |\det(J)| \tilde{f} e^{-i\nu\Delta t} \\
&= \int d\nu e^{-i\nu\Delta t} \left(-\frac{4\pi^2 G^2}{9\pi^2} \int dE_{k_1} |\det(J)| \tilde{f} \right) \\
&= \int d\nu e^{-i\nu\Delta t} \widetilde{\text{Cov}}.
\end{aligned} \tag{6.217}$$

Ahora, los límites de integración en las variables originales eran $|\mathbf{k}_1| \in (0, \infty)$ y $|\mathbf{k}_2| \in (0, \infty)$, por lo que en las nuevas variables ν y E_{k_1} son $E_{k_1} \in (m, \infty)$ y $\nu \in (m + E_{k_1}, \infty)$. Lo que alternativamente se puede escribir como

$$E_{k_1} \in (m, \nu - m), \tag{6.218}$$

$$\nu \in (2m, \infty). \tag{6.219}$$

Queda entonces

$$F(x_1, x_2) = \int_0^\infty d\nu e^{-i\nu\Delta t} \widetilde{\text{Cov}}, \tag{6.220}$$

con

$$\widetilde{\text{Cov}} = -\frac{4\pi^2 G^2}{9\pi^2} \theta(\nu - 2m) \int_m^{\nu-m} dE_{k_1} |\det(J)| \tilde{f}(k_1, k_2). \tag{6.221}$$

Al igual que antes, llegamos a la forma requerida por la Ec. (5.8) para la covarianza

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2)) &= \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)) \\
&= \int_0^\infty d\nu \cos(\nu \Delta t) \widetilde{\text{Cov}}.
\end{aligned} \tag{6.222}$$

Ahora, con el cambio de variables dado por

$$g = \frac{E_{k_1}}{m} - 1, \tag{6.223}$$

$$u = \frac{\nu}{m}. \tag{6.224}$$

Tenemos que, de los límites de $E_{k_1} \in (m, \nu - m)$, los límites para g son $g \in (0, u - 2)$. Y usando las relaciones

$$|\mathbf{k}_1| \rightarrow m \sqrt{(g+1)^2 - 1}, \quad (6.225)$$

$$|\mathbf{k}_2| \rightarrow m \sqrt{(u-g-1)^2 - 1}, \quad (6.226)$$

queda

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Cov}} &= -\frac{4\pi^2 G^2}{9\pi^2} \theta(u-2) \int_0^{u-2} dg |\det(J)| \tilde{f}(k_1, k_2) \\ &= \theta(u-2) G^2 m^7 \int_0^{u-2} dg K(u, g), \end{aligned} \quad (6.227)$$

Que adimensionalizado es

$$\frac{\widetilde{\text{Cov}}}{G^2 m^7} = \theta(u-2) \int_0^{u-2} dg K(u, g), \quad (6.228)$$

donde

$$\begin{aligned} K(u, g) &= \frac{4}{9\pi^2} \text{sgn}(g-u+1) \sqrt{g(g+2)(g-u)(g-u+2)} \times \\ &\times \left(2g^4 - 4g^3(u-2) - (u-1)^2((g+1)|g-u+1| - 1) + \right. \\ &+ 2g(u-2)((g+1)|g-u+1| + 2u-1) - \\ &\left. - 2g^2((g+1)|g-u+1| - u(u-6)u-5) \right). \end{aligned} \quad (6.229)$$

Al igual que antes, es muy difícil hacer la integral analíticamente, por lo que la hacemos numéricamente. El resultado de esto se muestra en la Figura 6.10

Finalmente recordamos que, para el caso no masivo, la covarianza (salvo un factor numérico) es igual a la del campo escalar (con $\xi = 0$). Entonces la transformada tendrá también el comportamiento mostrado en la Figura 6.8.

6.3. N campos

Todos los resultados obtenidos hasta ahora son fácilmente generalizables al caso en que tengamos N campos escalares o fermiónicos no interactuantes, no necesariamente con igual masa.

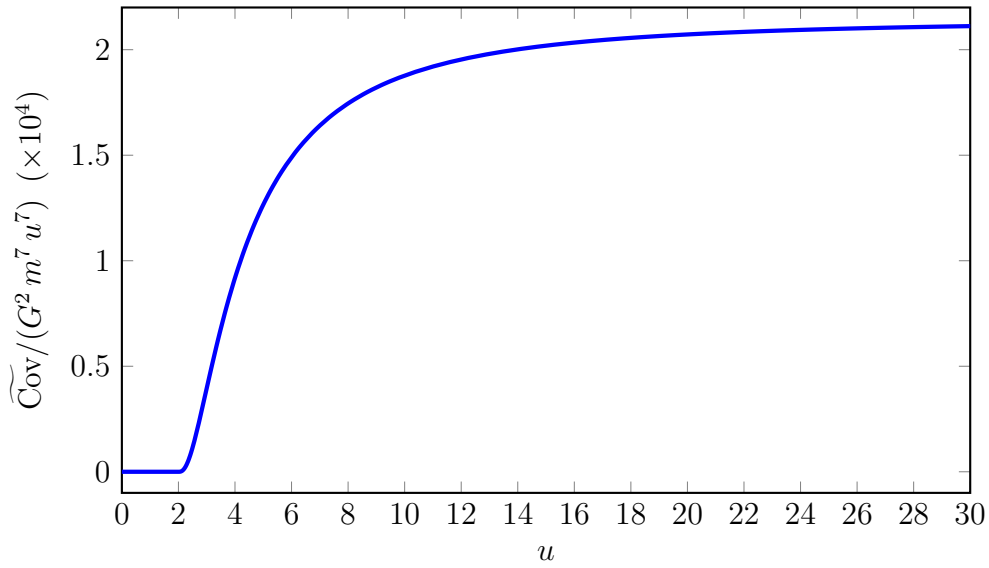


Figura 6.10: Transformada de Fourier de la covarianza para el campo fermiónico

Usando que la acción total es la suma de las acciones

$$S = \sum_{l=1}^N S_l. \quad (6.230)$$

Se obtiene que $\Omega^2(t, \mathbf{x})$ es

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \Omega_l^2. \quad (6.231)$$

Luego, por la linealidad del valor medio, queda

$$\langle \Omega^2 \rangle = \sum_{l=1}^N \langle \Omega_l^2 \rangle. \quad (6.232)$$

Ahora para obtener la varianza usamos que

$$\Omega^4 = \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N \Omega_l^2 \Omega_m^2, \quad (6.233)$$

$$\langle \Omega^4 \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N \langle \Omega_l^2 \Omega_m^2 \rangle. \quad (6.234)$$

Queda entonces

$$\sigma_{\Omega^2}^2 = \langle \Omega^4 \rangle - \langle \Omega^2 \rangle^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^2 \Omega_m^2 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle \langle \Omega_m^2 \rangle \right). \quad (6.235)$$

Si ahora separamos la suma doble, en los términos con índices iguales y con índices diferentes (equivalentes a los términos de la diagonal y fuera de esta, viéndolo matricialmente),

queda

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Omega^2}^2 &= \sum_{l=m} \left(\langle \Omega_l^2 \Omega_m^2 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle \langle \Omega_m^2 \rangle \right) + \sum_{l \neq m} \left(\langle \Omega_l^2 \Omega_m^2 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle \langle \Omega_m^2 \rangle \right) \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^4 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle^2 \right) + \sum_{l \neq m} \left(\langle \Omega_l^2 \Omega_m^2 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle \langle \Omega_m^2 \rangle \right) \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^4 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle^2 \right),
\end{aligned} \tag{6.236}$$

$$\sigma_{\Omega^2}^2 = \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^4 \rangle - \langle \Omega_l^2 \rangle^2 \right). \tag{6.237}$$

Donde se usó que los operadores de campos diferentes conmutan, i.e.

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_3} \hat{b}_{\mathbf{k}_4}^\dagger \rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \rangle \langle \hat{b}_{\mathbf{k}_3} \hat{b}_{\mathbf{k}_4}^\dagger \rangle = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4), \tag{6.238}$$

donde $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$) y $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$) son los operadores de destrucción (creación) de dos campos diferentes.

Con lo anterior es directo obtener F ,

$$\begin{aligned}
F(a, b) &= \langle \Omega^2(a) \Omega^2(b) \rangle - \langle \Omega^2(a) \rangle \langle \Omega^2(b) \rangle \\
&= \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^2(a) \Omega_m^2(b) \rangle - \langle \Omega_l^2(a) \rangle \langle \Omega_m^2(b) \rangle \right) \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^2(a) \Omega_l^2(b) \rangle - \langle \Omega_l^2(a) \rangle \langle \Omega_l^2(b) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{6.239}$$

Y luego la covarianza será la suma de las covarianzas

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left(\langle \Omega_l^2(x_1) \Omega_l^2(x_2) \rangle + \langle \Omega_l^2(x_2) \Omega_l^2(x_1) \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle \Omega_l^2(x_1) \rangle \langle \Omega_l^2(x_2) \rangle - \langle \Omega_l^2(x_2) \rangle \langle \Omega_l^2(x_1) \rangle \right),
\end{aligned} \tag{6.240}$$

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^N \text{Cov}(x_1, x_2)_l. \tag{6.241}$$

Donde se usó de nuevo que operadores de campos diferentes conmutan. Naturalmente por la linealidad de la transformada de Fourier, la expresión anterior es válida también para $\widetilde{\text{Cov}}$.

Si ahora los campos son idénticos, los resultados anteriores se reducen a

$$\langle \Omega^2 \rangle = N \langle \Omega_i^2 \rangle, \quad (6.242)$$

$$\sigma_{\Omega^2} = N \sigma_{\Omega^2}^i, \quad (6.243)$$

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = N \text{Cov}(x_1, x_2)_i. \quad (6.244)$$

Donde i indica el valor para un solo campo.

6.4. Influencia sobre la expansión del universo

Como se discutió en las Secciones 4.2.1 y 6.1.1, el signo de $\langle \Omega^2 \rangle$ no está a priori determinado. En particular, para el caso de regularización dimensional, dependerá de los valores de m y μ utilizados, o sea, del contenido de materia.

En el caso de que $\langle \Omega^2 \rangle > 0$, la Ec. (6.1) es la de un oscilador armónico usual. Esto es lo que presuponen los autores de [1]. Ellos encuentran que al utilizar regularización por cut-off ocurre el fenómeno de resonancia paramétrica débil, por lo que obtienen un factor de escala que crece exponencialmente. Pero al mismo tiempo dicho crecimiento está suprimido exponencialmente por el cut-off elegido. Cabría entonces preguntarse si ocurrirá lo mismo en regularización dimensional. La condición de resonancia paramétrica débil presentada en la Ec. (4.41) requiere de analizar el espectro de frecuencias que contribuyen a Ω^2 . Como para el caso de regularización dimensional las cantidades de las Ecs. (4.43) y (4.44) son divergentes, se dificulta seguir dicho análisis. Por eso, usaremos el criterio dado por la Ec. (5.7), donde se utiliza la covarianza, que es convergente, para determinar el comportamiento cualitativo del oscilador armónico.

Luego estudiaremos el caso $\langle \Omega^2 \rangle < 0$, donde la Ec. (6.1) es la de un oscilador invertido, basándonos en los resultados del Capítulo 5.

6.4.1. Condición para frecuencia positiva

Para poder analizar la condición de estabilidad dada por la Ec. (5.7), primero debemos llevar los resultados de este capítulo a la forma adecuada.

Reescribimos la Ec. (6.1) de la siguiente manera

$$\ddot{a} + \Omega^2 a = 0, \quad (6.245)$$

$$\ddot{a} + (\Omega^2 - \langle \Omega^2 \rangle + \langle \Omega^2 \rangle) a = 0, \quad (6.246)$$

$$\ddot{a} + a \langle \Omega^2 \rangle \left(1 + \frac{\Omega^2 - \langle \Omega^2 \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle} \right) = 0. \quad (6.247)$$

Ahora, si asumimos que $\langle \Omega^2 \rangle > 0$, la Ec. (5.6) es equivalente a la Ec. (6.247) para $\beta = 0$. Por lo que, comparándolas, tenemos los siguientes mapeos

$$\omega_0^2 \longleftrightarrow \langle \Omega^2 \rangle, \quad (6.248)$$

$$\epsilon \longleftrightarrow \frac{1}{\langle \Omega^2 \rangle}, \quad (6.249)$$

$$\xi(t) \longleftrightarrow \Omega^2 - \langle \Omega^2 \rangle, \quad (6.250)$$

$$R(t - t') \longleftrightarrow \text{Cov}(\Delta t). \quad (6.251)$$

Entonces

$$S(\omega) = \int_0^\infty d\sigma R(\sigma) e^{i\omega\sigma} = \int_0^\infty d\sigma \text{Cov}(\sigma) e^{i\omega\sigma}. \quad (6.252)$$

De las secciones anteriores, tanto para el campo escalar como el fermiónico, tenemos que

$$\text{Cov}(\sigma) = \int_0^\infty d\nu \cos(\nu\sigma) \widetilde{\text{Cov}}(\nu). \quad (6.253)$$

Por lo que S se puede escribir como

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\sigma \widetilde{\text{Cov}}(\nu) \cos(\nu\sigma) e^{i\omega\sigma} \\ &= \int_0^\infty d\nu \widetilde{\text{Cov}}(\nu) \int_0^\infty d\sigma \cos(\nu\sigma) e^{i\omega\sigma} \\ &= \int_0^\infty d\nu \widetilde{\text{Cov}}(\nu) I_d. \end{aligned} \quad (6.254)$$

Donde

$$\begin{aligned} I_d &= \int_0^\infty d\sigma \cos(\nu\sigma) e^{i\omega\sigma} \\ &= \frac{\hat{\theta}(\omega - \nu) + \hat{\theta}(\omega + \nu)}{2}, \end{aligned} \quad (6.255)$$

y donde θ es la función de Heaviside, cuya transformada es

$$\hat{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty dt \theta(t) e^{i\omega t} = \frac{i}{\omega} + \pi \delta(\omega). \quad (6.256)$$

Por lo que queda

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{\pi}{2} (\delta(\omega - \nu) + \delta(\omega + \nu)) + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega - \nu} + \frac{1}{\omega + \nu} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (\delta(\omega - \nu) + \delta(\omega + \nu)) + \frac{i\omega}{\omega^2 - \nu^2}. \end{aligned} \quad (6.257)$$

Volviendo a S tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty d\nu \widetilde{\text{Cov}}(\nu) \left(\frac{\pi}{2} (\delta(\omega + \nu) + \delta(\nu - \omega)) + \frac{i\omega}{\omega^2 - \nu^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \widetilde{\text{Cov}}(\omega) + \int_0^\infty d\nu \left(\widetilde{\text{Cov}}(\nu) \frac{i\omega}{\omega^2 - \nu^2} \right). \end{aligned} \quad (6.258)$$

Si ahora definimos

$$\tilde{I}(\omega) = i\omega \int_0^\infty d\nu \frac{\widetilde{\text{Cov}}(\nu)}{\omega^2 - \nu^2}, \quad (6.259)$$

donde asumiremos que el resultado de la integral es un número real, queda

$$S = \frac{\pi}{2} \widetilde{\text{Cov}}(\omega) + \tilde{I}(\omega). \quad (6.260)$$

Tomando la parte real y evaluando en $2\omega_0$ tenemos

$$\text{Re}(S(2\omega_0)) = \text{Re} \left(\frac{\pi}{2} \widetilde{\text{Cov}} \left(2\sqrt{\langle \Omega^2 \rangle} \right) \right). \quad (6.261)$$

Considerando la Ec. (5.7), tenemos que la condición es

$$0 \geq \widetilde{\text{Cov}} \left(2\sqrt{\langle \Omega^2 \rangle} \right), \quad (6.262)$$

y como para N campos tenemos que

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^N \text{Cov}(x_1, x_2)_l. \quad (6.263)$$

Queda finalmente

$$0 \geq \sum_{l=1}^N \widetilde{\text{Cov}} \left(2\sqrt{\sum_i \langle \Omega^2 \rangle_i} \right)_l. \quad (6.264)$$

Como se vio en la Sección 4.2.2, cuando se tiene un péndulo con frecuencia variable en el tiempo es posible resolver sus ecuaciones de forma perturbativa. A primer orden se obtiene que el fenómeno de resonancia paramétrica ocurre si la frecuencia externa es dos veces la frecuencia natural del péndulo. Luego, a orden n se obtiene que la frecuencia externa debe ser dos veces la frecuencia natural dividido n . En analogía con esto, conjeturamos que lo mismo es válido para el caso del oscilador estocástico. Entonces, la condición para orden

n será

$$0 \geq \sum_{l=1}^n \widetilde{\text{Cov}} \left(\frac{2}{n} \sqrt{\sum_i \langle \Omega^2 \rangle_i} \right)_l. \quad (6.265)$$

Ahora que tenemos la condición de estabilidad escrita para el PCC con frecuencia positiva, podemos analizar dos situaciones. Primero estudiaremos bajo qué condiciones se puede o no tener estabilidad, lo que equivaldría a “resolver” el PCC haciendo cero la constante cosmológica. Y segundo veremos bajo qué condiciones se tiene resonancia paramétrica débil, en analogía con el trabajo de Wang et al.

Condición de estabilidad

De la sección de la transformada de Fourier de la covarianza para el campo escalar y el fermiónico, sabemos que para los dos tipos de campos se tiene el mismo comportamiento cualitativo. La transformada es cero para frecuencias menores o iguales a $2m$, donde m es la masa del campo en cuestión, mientras que para frecuencias mayores crece muy rápidamente y se mantiene positiva. Por lo tanto, de la Ec. (6.265) es directo que la condición de estabilidad pasa a ser

$$\sum_i \langle \Omega^2 \rangle_i \leq m_{\min}^2 n^2, \quad (6.266)$$

donde m_{\min} es la menor masa entre todos los campos, escalares o fermiónicos, que se consideren. Nótese que, si hay al menos un campo no masivo, la condición es que la suma de frecuencia debe ser menor o igual que cero (recordemos que la condición límite también provee estabilidad).

Entonces, de las Ecs. (6.28) y (6.163) se deduce

$$\frac{G}{3\pi} \left(\sum_f m_f^4 \log\left(\frac{m_f}{\mu}\right) - \sum_b \frac{m_b^4}{4} \log\left(\frac{m_b}{\mu}\right) \right) \leq m_{\min}^2 n^2, \quad (6.267)$$

donde los subíndices f y b indican suma sobre campos fermiónicos y bosónicos respectivamente.

Finalmente, adimensionalizando queda

$$\frac{1}{m_P^4} \left(\sum_f m_f^4 \log\left(\frac{m_f}{\mu}\right) - \sum_b \frac{m_b^4}{4} \log\left(\frac{m_b}{\mu}\right) \right) \leq 3\pi n^2 \frac{m_{\min}^2}{m_P^2}, \quad (6.268)$$

donde $m_P = 1/\sqrt{G}$ es la masa de Planck.

Si primero consideramos el caso de $m_{\min} = 0$, es directo que la condición nunca se va a cumplir (por hipótesis el lado izquierdo de Ec. (6.268) es positivo). Por lo tanto, si se

tiene al menos un campo no masivo el sistema será inestable.

Si ahora consideramos $m_{\min} \neq 0$ podemos tomar la condición de la Ec. (6.268) como una cota inferior para n . Pero, si usamos valores del orden del modelo estándar, se vuelve una cota trivial, ya que con $n = 1$ la condición se cumple y hay estabilidad. En particular si estimamos el lado izquierdo con la masa más grande del modelo estándar, da que la cota inferior para el n en orden de magnitud es

$$\sqrt{\frac{m_{\text{top}}^4}{m_\nu^2 m_P^2}} \sim 10^{-3} \leq n, \quad (6.269)$$

donde $m_{\text{top}} = 10^2$ GeV (quark top), $m_\nu = 10^{-12}$ GeV (neutrinos) y $m_P = 10^{19}$ GeV.

En conclusión, tenemos dos situaciones bien diferentes. Si la masa mínima es 0, el sistema será siempre inestable (salvo que el lado izquierdo se anule, como por ejemplo en supersimetría). Por otro lado, si la masa mínima es distinta de 0, se tiene una condición de estabilidad para el n , que como vimos es trivial para el modelo estándar (se cumple para $n = 1$).

Por último, nótese el contraste con la condición encontrada por Wang et al., Ec. (4.49),

$$M^2 \leq 6\pi n^2 m_P^2, \quad (6.270)$$

donde M es el cut-off. Recordamos que la Ec. (6.270) es la condición para que haya resonancia paramétrica. Por lo que como condición de estabilidad da una cota superior al n , en particular se tiene $M/m_P > \sqrt{6\pi} n$. Es por esto que ellos piden que $M \gg m_P$, a modo de tener un n grande que les permite suprimir el crecimiento exponencial. El hecho de que las condiciones encontradas para el n sean opuestas es consistente con una comparación de la Figura 4.3 con las Figuras 6.7 y 6.10, donde se observa que son complementarias. Mientras una llega hasta $2M$, la otra parte de $2m$.

Condición de amplificación paramétrica débil

De la Ec. (6.268) vemos que la condición para tener amplificación paramétrica débil, o sea, que el sistema sea inestable pero se esté muy cerca del límite de la condición, es

$$\frac{1}{m_P^4} \left(\sum_f m_f^4 \log\left(\frac{m_f}{\mu}\right) - \sum_b \frac{m_b^4}{4} \log\left(\frac{m_b}{\mu}\right) \right) \gtrsim 3\pi n^2 \frac{m_{\min}^2}{m_P^2}. \quad (6.271)$$

Tanto si $m_{\min} = 0$, como si $m_{\min} \neq 0$ (pero del orden de las encontradas en el modelo estándar) tenemos que el lado derecho es $\ll 1$. Por lo tanto, la condición nos está diciendo que si queremos un crecimiento exponencial débil, el lado izquierdo de Ec. (6.271) debe

ser $\ll 1$. Considerando el modelo estándar completo, de [15] tenemos que

$$\sum_i \frac{n_i}{4} \frac{m_i^4}{m_P^4} \log\left(\frac{m_i}{\mu}\right) = 7.11 \times 10^{-67}, \quad (6.272)$$

donde $n_b = -1$ (bosones), $n_f = 4$ (fermiones) y $n_v = -3$ (vectores masivos). Esta expresión es equivalente al lado izquierdo de la Ec. (6.271) pero con campos vectoriales incluidos. Parecería entonces que se cumple la condición, pero nótese que el lado izquierdo debería ser $\sim 10^{-122}$, para suprimir el crecimiento la cantidad justa y obtener así el valor medido de la constante cosmológica. Por lo tanto, en este caso estamos en la misma situación que en el PCC original, discutido en el Capítulo 1.

6.4.2. Condición para frecuencia negativa

Para analizar este caso nos apoyaremos en lo obtenido en el Capítulo 5. Nuevamente reescribimos la Ec. (6.1) para llevarla a una forma que nos permita compararla con la Ec. (5.11)

$$\ddot{a} + \Omega^2 a = 0, \quad (6.273)$$

$$\ddot{a} + (\langle \Omega^2 \rangle + \tilde{\xi}'') a = 0, \quad (6.274)$$

$$\ddot{a} + \langle \Omega^2 \rangle \left(1 + \frac{\tilde{\xi}''}{\langle \Omega^2 \rangle}\right) a = 0, \quad (6.275)$$

donde $\tilde{\xi}'' = \Omega^2 - \langle \Omega^2 \rangle$.

Entonces el mapeo es

$$-\omega_0^2 \longleftrightarrow \langle \Omega^2 \rangle, \quad (6.276)$$

$$\xi \longleftrightarrow \frac{\tilde{\xi}}{\langle \Omega^2 \rangle}. \quad (6.277)$$

Al igual que con el análisis del movimiento Browniano, siguiendo las definiciones de [28], tenemos que

$$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = \langle \tilde{\xi}^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle^{-2}, \quad (6.278)$$

$$R = \frac{\langle \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t') \rangle}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} = \frac{R_p}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle}, \quad (6.279)$$

$$R'' = -\frac{\langle \tilde{\xi}'(t) \tilde{\xi}'(t') \rangle}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} = \frac{R_p''}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle}, \quad (6.280)$$

$$R'''' = \frac{\langle \tilde{\xi}''(t) \tilde{\xi}''(t') \rangle}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle} = \frac{R_p''''}{\langle \tilde{\xi}^2 \rangle}, \quad (6.281)$$

$$\sigma_{\xi'}^2 = -\langle \Omega^2 \rangle^{-2} R_p'' \Big|_{t=0}, \quad (6.282)$$

donde $R_p'''' = \text{Cov}(x_1, x_2) = \langle \{ \tilde{\xi}''(x_1), \tilde{\xi}''(x_2) \} \rangle$, que es la covarianza calculada en este capítulo para el campo escalar y fermiónico.

Primera condición de estabilidad

La primera condición, Ec. (5.12), es

$$-\frac{R_p'' \Big|_{t=0}}{\langle \Omega^2 \rangle^2} > -\frac{1}{\langle \Omega^2 \rangle} \implies R_p'' \Big|_{t=0} < \langle \Omega^2 \rangle. \quad (6.283)$$

Como ya mencionamos anteriormente, todas las expresiones que calculamos para la covarianza divergen en coincidencia, por lo que una evaluación directa de la primera condición no es posible. Para subsanar esto, consideremos la metodología de *smearing* utilizada en [32]. Simplemente por análisis dimensional sabemos que

$$R_p''(0) \propto \frac{G^2}{\sigma^6}, \quad (6.284)$$

donde σ es la escala de *smearing*.

Por lo tanto, la condición queda

$$\langle \Omega^2 \rangle - c_1 \frac{G^2}{\sigma^6} > 0, \quad (6.285)$$

y del cálculo realizado para los campos escalares y fermiónicos tenemos que $\langle \Omega^2 \rangle$ va como la masa a la cuarta del campo considerado, por lo tanto

$$|c_1| \frac{G^2}{\sigma^6} - |c_2| m^4 G > 0, \quad (6.286)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes adimensionales y negativas por hipótesis.

Como $m_P = 1/\sqrt{G}$ y considerando a la escala de *smearing* como la escala de Planck, $\sigma \sim 1/m_P$, queda

$$|c_1| m_P^2 - |c_2| \frac{m^4}{m_P^2} > 0. \quad (6.287)$$

Que reescribimos como

$$\boxed{\frac{|c_1|}{|c_2|} > \frac{m^4}{m_P^4}}, \quad (6.288)$$

donde el término m^4/m_P^4 se debe entender como la suma de todos los términos correspondientes para los campos considerados, concretamente

$$\frac{m^4}{m_P^4} \equiv \frac{1}{m_P^4} \left(\sum_b \frac{m_b^4}{4} \log\left(\frac{m_b}{\mu}\right) - \sum_f m_f^4 \log\left(\frac{m_f}{\mu}\right) \right). \quad (6.289)$$

Como para todas las masas del modelo estándar $m \ll m_P$ y si el lado izquierdo de la Ec. (6.288) es de orden 1, la condición se cumple automáticamente. Esto nos dice que el ruido está logrando estabilizar el “oscilador”, haciendo que pase a comportarse como un oscilador tradicional en vez de uno invertido.

Segunda condición de estabilidad

Primero recordemos que, de la Ec. (5.18),

$$k^2 = \langle \Omega^2 \rangle - R_p'' \Big|_{t=0}. \quad (6.290)$$

Por otro lado, de las Ecs. (5.17), (5.19) y (5.20) tenemos que

$$\gamma \sim \Phi_{ij} \sim \hat{R}_{ij} \sim R_{ij}. \quad (6.291)$$

Por lo que γ va a ser mayor que 0 si \hat{R}_{ij} es distinto de 0 en la frecuencia $2k$, lo que equivale a que R_{ij} tenga componentes en $2k$ (que es positivo y real de cumplirse la primera condición).

La transformada de Fourier de la derivada cuarta de R_{11} ($\sim \widetilde{\text{Cov}}$) es distinta de 0 para toda frecuencia mayor a $2m_{\text{mín}}$, por lo tanto si queremos que se cumpla la segunda condición, Ec. (5.13), $\gamma \leq 0$, tenemos que se debe cumplir $k \leq m_{\text{mín}}$.

Entonces, de lo visto para la primera condición, queda que la segunda condición de estabilidad es

$$\boxed{\sqrt{|c_1| - |c_2|} \frac{m^4}{m_P^4} \leq \frac{m_{\text{mín}}}{m_P}}, \quad (6.292)$$

donde nuevamente el término m^4/m_P^4 está dado por la Ec. (6.289).

Acá notamos inmediatamente que si $m_{\text{mín}} = 0$, o si $m_{\text{mín}} \neq 0$ pero muy pequeña (e.g. neutrinos), esta condición será opuesta a la primera, o sea, que para el modelo estándar no se cumplirá y el sistema será inestable. De todas formas, esta inestabilidad es cualitativamente

diferente a la que ocurre en el PCC tradicional. Aquí el ruido fue capaz de estabilizar el sistema (hacer que se comporte como un oscilador tradicional en vez de uno invertido), pero luego la amplificación paramétrica, producida por el mismo ruido, vuelve a desestabilizarlo. De este modo habrá también un crecimiento exponencial, aunque más lento que en el caso de un oscilador invertido sin ruido.

Por ultimo vemos que si $k \sim m_{\text{mín}}$ se tendrá un crecimiento exponencial tanto más lento cuanto más cerca de $m_{\text{mín}}$ este k . Por lo tanto, la condición para tener un crecimiento exponencial suprimido es

$$\sqrt{|c_1| - |c_2|} \frac{m^4}{m_P^4} \gtrsim \frac{m_{\text{mín}}}{m_P}. \quad (6.293)$$

Esto es opuesto a lo que habíamos visto para el caso $\langle \Omega^2 \rangle > 0$. Si en este caso queremos resonancia paramétrica débil, y como $m_{\text{mín}}/m_P$ en el modelo estándar es 0, necesitamos $\sum_i m_i/m_P \sim 1$. O sea que la suma de los términos proporcionales a m^4 , para todos los campos considerados, debe ser del orden de m_P^4 . Esto es justamente lo opuesto a lo obtenido para $\langle \Omega^2 \rangle > 0$ (Ec. (6.271)), donde queríamos que dicha suma sea $\ll 1$. Notar como las condiciones en ambos casos están dominadas por las masas de los campos livianos, ya que son estos los que ponen la cota inferior a la transformada de Fourier de la covarianza.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis analizamos diversos aspectos del PCC, con el objetivo principal de estudiar los posibles efectos del ruido del tensor energía-momento, en la expansión del universo. Esto estuvo motivado por [1], donde proponen utilizar las fluctuaciones del tensor energía-momento alrededor de su valor medio para solucionar el PCC.

Empezamos estudiando la formulación tradicional del PCC, en el marco de la gravedad semiclásica. Luego de repasar resultados conocidos del PCC en Minkowski, y su dependencia con el método de regularización, estudiamos que sucede con este esquema cuando la métrica del espacio-tiempo donde viven los campos cuánticos es la de De Sitter. Nuestras conclusiones son las siguientes: primero vimos que bajo condiciones físicas (parámetros del orden de los del modelo estándar), la solución calculada usando la métrica de Minkowski es una muy buena aproximación a la solución obtenida considerando el espacio-tiempo de De Sitter. Segundo, vimos que en el caso de De Sitter hay, para ciertos parámetros, soluciones no triviales donde las mismas difieren considerablemente de la tradicional obtenida en Minkowski. Pero en general dichas soluciones presentan valores de la curvatura muy grandes, teniendo así el mismo problema cualitativamente que en el PCC tradicional. Finalmente, vimos que bajo cierta elección de parámetros (e.g. un acoplamiento a la curvatura muy grande para un campo escalar) se puede solucionar el PCC en un espacio-tiempo de De Sitter. De todas formas, esto sigue siendo un caso de ajuste fino, por lo que simplemente se estaría trasladando el problema de un parámetro (constante cosmológica desnuda) a otro (acoplamiento a la curvatura).

A los efectos de estudiar la influencia del ruido desarrollamos un modelo de juguete del movimiento Browniano que presenta las mismas características que el PCC en el contexto de gravedad estocástica. La idea fue estudiar posibles mecanismos de estabilización en un modelo que facilitara el cálculo y no presentara las ambigüedades del caso gravitatorio. Aplicando condiciones de estabilidad estudiadas en la literatura para osciladores con frecuencia estocástica, pudimos observar lo siguiente: tanto para el caso de un oscilador tradicional (frecuencia positiva) como uno invertido (frecuencia negativa) es posible hallar el

fenómeno de resonancia paramétrica con la elección adecuada de parámetros. En concreto, para el caso de frecuencia negativa vimos ejemplos específicos, donde si la densidad espectral es continua, existen condiciones para los parámetros del problema que hacen aparecer resonancia paramétrica tan suprimida como uno quiera. De este modo pudimos emular la idea planteada por Wang et al. en un caso donde el oscilador del modelo esta invertido, similarmente a como sucede en el PCC tradicional.

Finalmente, reanalizamos críticamente los resultados de Wang et al. En su trabajo ellos regularizan utilizando un cut-off ultravioleta, metodología que no es invariante de Lorentz y que produce una ecuación de estado diferente a la de una constante cosmológica. Debido a esto nosotros decidimos utilizar regularización dimensional. En particular, para estudiar los efectos sobre la expansión del universo de las fluctuaciones del tensor energía-momento alrededor de su valor medio, calculamos la covarianza y el valor medio de la frecuencia de la ecuación dinámica que da el factor de escala. Como la regularización dimensional respeta la invarianza de Lorentz, el valor medio del tensor de energía-momento satisface $\langle p \rangle = -\langle \rho \rangle$. Sin embargo, el signo de $\langle \rho \rangle$ depende del contenido de materia de la teoría y de la escala μ a la que se realiza la substracción. Hicimos esto tanto para campos escalares como fermiónicos, en ambos casos con y sin masa.

En este contexto, nuestras conclusiones son las siguientes: si $\langle \rho \rangle < 0$, el factor de escala satisface una ecuación tipo oscilador armónico, cualitativamente similar a lo que ocurre en [1]. Para su análisis, se pueden usar los resultados de osciladores estocásticos [25]. En particular encontramos dos situaciones. Si hay campos no masivos, el sistema será siempre inestable. Por el contrario, si hay campos solo masivos, el sistema (utilizando valores del orden de los del modelo estándar) será estable, no imponiendo ninguna condición sobre el orden n . Esto entra en contraste con lo obtenido por Wang et al. donde ellos encuentran una cota inferior para el n si se quiere lograr amplificación paramétrica. El origen de esta discrepancia se encuentra en el comportamiento diferente que tienen los espectros de frecuencia de las fluctuaciones si se los evalúa mediante un cut-off (Figura 4.3), o si se los evalúa con regularización dimensional (Figuras 6.7, 6.8 y 6.10).

Por otro lado, si $\langle \rho \rangle > 0$, en ausencia de ruido el factor de escala crece exponencialmente de la manera usual. De [28] y usando los resultados obtenidos con el modelo de movimiento Browniano, pudimos analizar cualitativamente la condición para que aparezca resonancia paramétrica. Obtuvimos lo siguiente: con magnitudes del orden de las del modelo estándar la gran amplitud del ruido logra estabilizar el sistema, o sea, hace que pase a comportarse como un oscilador tradicional en vez de como uno invertido. Pero, debido a la amplitud del espectro en espacio de frecuencias del mismo ruido, aparece el fenómeno de amplificación paramétrica. Esto desestabiliza al sistema, pero de una forma que es cualitativamente diferente al PCC tradicional, donde el crecimiento exponencial ocurre porque el sistema se comporta como un oscilador invertido. Con la presencia de ruido el sistema se comporta como un oscilador tradicional pero debido a la resonancia paramétrica se desestabiliza a

escalas de tiempo más grandes que si no hubiese ruido.

De todo esto concluimos lo siguiente: fue posible encontrar condiciones para que ocurra amplificación paramétrica suprimida, tanto si la frecuencia es positiva como negativa. Estas condiciones, tanto si se realizan o no en el modelo estándar, requieren siempre de un ajuste fino. Por otro lado, vemos que cuando se considera regularización dimensional, los campos livianos son los más relevantes en todas las condiciones ya que son los que imponen las cotas de los espectros calculados, por ejemplo, con tener un solo campo de $m = 0$ el sistema de frecuencia positiva ya se desestabiliza.

Por último, mencionamos algunas limitaciones de este trabajo. Todos los cálculos los realizamos en Minkowski, por lo que un análisis más completo sería considerar espacios curvos, por ejemplo De Sitter, para obtener las covarianzas. Por otro lado, no tuvimos en cuenta la disipación, la cual podría alterar los resultados al ayudar a estabilizar los sistemas estudiados.

Apéndice A

Relatividad general

A.1. Definiciones de RG

En esta sección daremos las definiciones usadas en el marco de la relatividad general, con la convención de signos especificada en el Capítulo 1.

Consideremos las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

donde G es la constante de gravitación universal, $g_{\mu\nu}$ la métrica, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento, Λ la constante cosmológica, R la curvatura escalar de Ricci y $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci.

Es habitual denotar

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

Todos los términos del lado izquierdo de la Ec. (A.1), salvo la constante cosmológica, se pueden escribir como funciones de la métrica. Es por esto que se dice que el lado izquierdo denota la geometría, mientras que el lado derecho denota la materia, que es completamente descrita desde el punto de vista de sus efectos gravitatorios, por $T_{\mu\nu}$.

Para obtener $R_{\mu\nu}$ y R en función de la métrica, primero definimos los símbolos de Christoffel como

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}). \quad (\text{A.3})$$

Con ellos es posible definir el tensor de curvatura de Riemann como

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon} \Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\epsilon} \Gamma^{\epsilon}_{\beta\gamma}. \quad (\text{A.4})$$

Y luego mediante contracciones sucesivas obtenemos el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y la curvatura escalar de Ricci R

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\epsilon} \Gamma^{\epsilon}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon} \Gamma^{\epsilon}_{\mu\alpha}, \quad (\text{A.5})$$

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.6})$$

A.2. Ecuaciones de Friedmann generalizadas

Ahora que todos los parámetros geométricos están definidos en función de una métrica genérica $g_{\mu\nu}$, obtendremos las ecuaciones de Friedmann generalizadas al caso donde el factor de escala depende del espacio y el tiempo.

Sea la métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t, \mathbf{x}) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{A.7})$$

El tensor métrico y su inversa son

$$g_{\mu\nu} \equiv \text{diag} \left(1, -a^2(t, \mathbf{x}), -a^2(t, \mathbf{x}), -a^2(t, \mathbf{x}) \right), \quad (\text{A.8})$$

$$g^{\mu\nu} \equiv \text{diag} \left(1, -\frac{1}{a^2(t, \mathbf{x})}, -\frac{1}{a^2(t, \mathbf{x})}, -\frac{1}{a^2(t, \mathbf{x})} \right). \quad (\text{A.9})$$

Entonces es posible desarrollar las ecuaciones de Einstein diagonales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} R G_{00} \\ &= R_{00} - \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) G_{00} \\ &= R_{00} - \frac{1}{2} (g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}) \\ &= \frac{1}{2} R_{00} + \frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^3 R_{ii} = 8\pi G T_{00} + \Lambda G_{00}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

y de forma equivalente

$$\begin{aligned}
G_{ii} &= R_{ii} - \frac{1}{2} R G_{ii} \\
&= R_{ii} - \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) G_{ii} \\
&= R_{ii} + \frac{a^2}{2} (g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}) \\
&= \frac{a^2}{2} R_{00} + R_{ii} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 R_{jj} = 8\pi G T_{ii} + \Lambda G_{ii}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Por lo tanto, para la métrica elegida las ecuaciones de campo de Einstein diagonales quedan

$$G_{00} = \frac{1}{2} R_{00} + \frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^3 R_{ii} = 8\pi G T_{00} + \Lambda, \tag{A.12}$$

$$G_{ii} = \frac{a^2}{2} R_{00} + R_{ii} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 R_{jj} = 8\pi G T_{ii} - \Lambda a^2. \tag{A.13}$$

A partir las definiciones dadas en el Apéndice A y utilizando el programa MATHEMATICA es posible obtener las siguientes expresiones explicitas para el tensor de Ricci y para la curvatura escalar.

$$R = -2 \left(\frac{\nabla a}{a^2} \right)^2 + \frac{4}{a^2} \frac{\nabla^2 a}{a} - 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 6 \frac{\ddot{a}}{a}, \tag{A.14}$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \tag{A.15}$$

$$R_{11} = \frac{2}{a^2} (\partial_x a)^2 - \frac{1}{a} (2 \partial_x^2 a + \partial_y^2 a + \partial_z^2 a) + 2 \dot{a}^2 + a \ddot{a}, \tag{A.16}$$

$$R_{22} = \frac{2}{a^2} (\partial_y a)^2 - \frac{1}{a} (\partial_x^2 a + 2 \partial_y^2 a + \partial_z^2 a) + 2 \dot{a}^2 + a \ddot{a}, \tag{A.17}$$

$$R_{33} = \frac{2}{a^2} (\partial_z a)^2 - \frac{1}{a} (\partial_x^2 a + \partial_y^2 a + 2 \partial_z^2 a) + 2 \dot{a}^2 + a \ddot{a}. \tag{A.18}$$

Ahora podemos expresar las componentes diagonales del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ también en función de $a(t, \mathbf{x})$ y sus derivadas

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\nabla a}{a} \right)^2 - \frac{2}{a^2} \frac{\nabla^2 a}{a}, \tag{A.19}$$

$$G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - \left(\frac{\nabla a}{a}\right)^2 + \frac{\nabla^2 a}{a} + 2\left(\frac{\partial_i a}{a}\right)^2 - \frac{\partial_i^2 a}{a}. \quad (\text{A.20})$$

Con lo que es fácil ver que

$$G_{00} + \frac{1}{a^2} (G_{11} + G_{22} + G_{33}) = -\frac{6\ddot{a}}{a}, \quad (\text{A.21})$$

$$\Lambda G_{00} + \frac{1}{a^2} (\Lambda G_{11} + \Lambda G_{22} + \Lambda G_{33}) = -2\Lambda. \quad (\text{A.22})$$

Entonces si sumamos las ecuaciones de Einstein diagonales, y multiplicamos por un factor $1/a^2$ a las espaciales, queda

$$-\frac{6\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(T_{00} + \frac{1}{a^2} (T_{11} + T_{22} + T_{33}) \right) - 2\Lambda. \quad (\text{A.23})$$

Si ahora usamos la notación

$$T_{00} = \rho, \quad (\text{A.24})$$

$$T_{ii} = a^2 p_i. \quad (\text{A.25})$$

Es directo obtener la ecuación para $a(t, \mathbf{x})$,

$$\ddot{a} + \Omega^2(t, \mathbf{x}) a = 0, \quad (\text{A.26})$$

donde

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right) - \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{A.27})$$

Si usamos las redefiniciones del Capítulo 2, Ecs. (2.7) y (2.8), queda

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right). \quad (\text{A.28})$$

Que es la expresión usada en los Capítulos 4 y 6, sobreentendiéndose que ρ y p_i ya consideran la contribución de la constante cosmológica.

Nótese que todas las derivadas espaciales que aparecen en el tensor de Einstein se anulan entre si al sumar las componentes diagonales. Sin embargo, no hay que olvidar que en la Ec. (A.26) está implícito que a es una función del espacio y el tiempo.

Finalmente es posible obtener la relación entre a y el parámetro de Hubble H usando

que la distancia física entre los puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 es

$$L(t) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl, \quad (\text{A.29})$$

donde $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Luego usando que la constante de Hubble se puede definir como el cociente entre la velocidad de separación de dos puntos espaciales y su distancia, $H = \dot{L}/L$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \frac{d}{dt} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl \\ &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \frac{2 a(t, \mathbf{x}) \dot{a}(t, \mathbf{x})}{2 \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})}} dl \\ &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \dot{a}(t, \mathbf{x}) \operatorname{sgn}(a) dl \\ &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \frac{\dot{a}(t, \mathbf{x})}{a(t, \mathbf{x})} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Quedando finalmente

$$H = \left(\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \frac{\dot{a}(t, \mathbf{x})}{a(t, \mathbf{x})} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl \right) \left(\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{a^2(t, \mathbf{x})} dl \right)^{-1}. \quad (\text{A.31})$$

A.2.1. Ecuaciones de Einstein no diagonales

Por completitud presentamos el resto de las ecuaciones de Einstein para la métrica FLRW generalizada. Los Ricci no diagonales son

$$R_{ij} = \frac{2(\partial_i a)(\partial_j a)}{a^2} - \frac{\partial_i \partial_j a}{a} \quad \text{con } i \neq j, \quad (\text{A.32})$$

$$R_{0i} = \frac{2\dot{a}\partial_i a}{a^2} - \frac{2\partial_i \dot{a}}{a}. \quad (\text{A.33})$$

Por lo tanto, las ecuaciones no diagonales quedan

$$G_{ij} = \frac{2(\partial_i a)(\partial_j a)}{a^2} - \frac{\partial_i \partial_j a}{a} = 8\pi G T_{ij} \quad \text{con } i \neq j, \quad (\text{A.34})$$

$$G_{0i} = \frac{2\dot{a}\partial_i a}{a^2} - \frac{2\partial_i \dot{a}}{a} = 8\pi G T_{0i}. \quad (\text{A.35})$$

A.2.2. Ecuaciones de Friedmann en FLRW

Si tomamos que el factor de escala solo depende del tiempo, como es habitual para el modelo FLRW, y poniendo la Ec. (A.19) en la Ec. (A.12) queda

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi G T_{00} + \Lambda. \quad (\text{A.36})$$

Luego la Ec. (A.23) se puede reescribir como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(T_{00} + \frac{T_{11} + T_{22} + T_{33}}{a^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{A.37})$$

Entonces de la Ec. (A.36) obtenemos la primera ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{A.38})$$

Y de la Ec. (A.37) obtenemos la segunda ecuación de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{A.39})$$

donde se usaron las Ecs. (A.24) y (A.25).

A.3. Tensores de RG para De Sitter

En esta sección daremos expresiones explícitas para los tensores de RG para un espacio-tiempo de De Sitter en d dimensiones. Todas aquellas componentes no mencionadas son iguales a 0.

A.3.1. Curvatura escalar

$$R = -\frac{d(d-1)}{\alpha^2}. \quad (\text{A.40})$$

A.3.2. Tensor de Ricci

$$R_{tt} = -\frac{d-1}{\alpha^2}, \quad (\text{A.41})$$

$$R_{ii} = \frac{d-1}{\alpha^2} e^{2t/\alpha}, \quad (\text{A.42})$$

$$R^{tt} = -\frac{d-1}{\alpha^2}, \quad (\text{A.43})$$

$$R^{ii} = \frac{d-1}{\alpha^2} e^{-2t/\alpha}. \quad (\text{A.44})$$

Notar que para el caso se da

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{d} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.45})$$

A.3.3. Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^t_{ii} = -\frac{1}{\alpha} e^{2t/\alpha}, \quad (\text{A.46})$$

$$\Gamma^i_{ti} = \Gamma^i_{it} = \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{A.47})$$

A.3.4. Tensor de Riemann

$$R^i_{tti} = -R^i_{tit} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad (\text{A.48})$$

$$R^t_{iti} = -R^t_{iit} = \frac{1}{\alpha^2} e^{2t/\alpha}, \quad (\text{A.49})$$

$$R^i_{jjj} = -R^i_{jji} = \frac{1}{\alpha^2} e^{2t/\alpha} \quad i \neq j. \quad (\text{A.50})$$

A.3.5. Tensor de Einstein

$$G_{tt} = \frac{(d-1)(d-2)}{2\alpha^2}, \quad (\text{A.51})$$

$$G_{ii} = -\frac{(d-1)(d-2)}{2\alpha^2} e^{2t/\alpha}. \quad (\text{A.52})$$

A.3.6. Contracciones invariantes

$$R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = \frac{d(d-1)^2}{\alpha^4}, \quad (\text{A.53})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2d(d-1)}{\alpha^4}. \quad (\text{A.54})$$

Apéndice B

Cuentas auxiliares para los Cap. 1 a 5

B.1. Tensor energía-momento para un campo escalar

En esta sección obtendremos el tensor de energía-momento para un campo escalar masivo con acoplamiento ξ a la curvatura. La acción del mismo es

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|}}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2), \quad (\text{B.1})$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$.

La definición habitual del tensor de energía-momento [8, 33], en espacios curvos y para la convención de signos utilizada es

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{B.2})$$

Donde la derivada funcional se obtendrá de la definición integral de la misma

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right). \quad (\text{B.3})$$

Al variar la acción tenemos

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta \sqrt{|g|}}{2} (g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{|g|}}{2} (\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \delta R \xi \phi^2) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Por lo que usando las identidades (a demostrar luego)

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \delta g^{\rho\sigma} , \quad (\text{B.5})$$

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \delta g_{\rho\sigma} , \quad (\text{B.6})$$

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{\sqrt{|g|}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} , \quad (\text{B.7})$$

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{B.8})$$

Queda

$$\delta S = I_1 + I_2 + I_3 , \quad (\text{B.9})$$

donde

$$I_1 = \int d^4x \delta g^{\mu\nu} \frac{\sqrt{|g|}}{2} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2} (g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) + \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \xi \phi^2 R_{\mu\nu} \right) , \quad (\text{B.10})$$

$$I_2 = -\frac{\xi}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} \phi^2 g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} , \quad (\text{B.11})$$

$$I_3 = \frac{\xi}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} \phi^2 \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{B.12})$$

Ahora hay que integrar por partes I_2 e I_3 , para ver con más facilidad como hacer esto, reescribimos primero I_2 como

$$I_2 = \frac{\xi}{2} \int d^4x \left(\sqrt{|g|} A^{\mu\nu} \nabla_\lambda F^\lambda_{\mu\nu} \right) , \quad (\text{B.13})$$

donde $A^{\mu\nu} = \phi^2 g^{\mu\nu}$ y $F^\lambda_{\mu\nu} = \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu}$.

De esta forma integramos por partes por partes de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\xi}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\nabla_\lambda (A^{\mu\nu} F^\lambda_{\mu\nu}) - (\nabla_\lambda A^{\mu\nu}) F^\lambda_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{\xi}{2} \int d^4x \partial_\lambda \left(\sqrt{|g|} A^{\mu\nu} F^\lambda_{\mu\nu} \right) - \sqrt{|g|} (\nabla_\lambda A^{\mu\nu}) F^\lambda_{\mu\nu} \\ &= -\frac{\xi}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} (\nabla_\lambda A^{\mu\nu}) F^\lambda_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Usando que la derivada covariante de la métrica es nula, volviendo a integrar por partes

y usando la Ec. (B.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{\xi}{2} \int d^4x \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \phi^2) \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{\xi}{2} \int d^4x \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi^2) \delta g_{\mu\nu} \right) \\
&= -\frac{\xi}{2} \int d^4x \left(\sqrt{|g|} g_{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi^2) \delta g^{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{B.15}$$

De forma equivalente para I_3 queda

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{\xi}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} \phi^2 \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{\xi}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi^2) \delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{\xi}{2} \int d^4x \left(\sqrt{|g|} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2) \delta g^{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Reemplazando en δS obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \delta g^{\mu\nu} \frac{\sqrt{|g|}}{2} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) + \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi \phi^2 R_{\mu\nu} + \xi g_{\mu\nu} (\nabla^\lambda \partial_\lambda \phi^2) - \xi (\nabla_\mu \partial_\nu \phi^2) \right),
\end{aligned} \tag{B.17}$$

donde se usó que $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$.

Comparando con la Ec. (B.3) queda que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\sqrt{|g|}}{2} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) + \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi \phi^2 R_{\mu\nu} + \xi g_{\mu\nu} (\nabla^\lambda \partial_\lambda \phi^2) - \xi (\nabla_\mu \partial_\nu \phi^2) \right).
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Entonces de la Ec. (B.2)

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + \\
&\quad + \xi \phi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \xi \left(g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \nabla_\mu \partial_\nu \phi^2 \right).
\end{aligned} \tag{B.19}$$

B.1.1. Demostración de identidades

Aquí demostraremos las identidades utilizadas en la deducción del tensor de energía-momento.

La identidad en las Ecs. (B.5) y (B.6) se obtienen de forma directa de las propiedades de la métrica.

$$g^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} = \delta^\sigma_\alpha, \quad (\text{B.20})$$

$$\delta g^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} + g^{\rho\sigma} \delta g_{\alpha\rho} = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$g^{\rho\sigma} \delta g_{\alpha\rho} = -\delta g^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho}, \quad (\text{B.22})$$

$$g_{\beta\sigma} g^{\rho\sigma} \delta g_{\alpha\rho} = -g_{\beta\sigma} g_{\alpha\rho} \delta g^{\rho\sigma}, \quad (\text{B.23})$$

$$\delta^\rho_\beta \delta g_{\alpha\rho} = -g_{\beta\sigma} g_{\alpha\rho} \delta g^{\rho\sigma}, \quad (\text{B.24})$$

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \delta g^{\rho\sigma}. \quad (\text{B.25})$$

Luego de forma equivalente se obtiene

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \delta g_{\rho\sigma}. \quad (\text{B.26})$$

Para demostrar la identidad de la Ec. (B.7) primero obtendremos una propiedad general de las matrices. Sea U una matriz cuadrada invertible y f una función arbitraria de las matrices cuadradas a los complejos, tenemos que

$$\delta f(U) = f(U + \delta U) - f(U). \quad (\text{B.27})$$

Luego tomando el caso particular $f(\cdot) = \log |\det(\cdot)|$, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \log |\det(U)| &= \log |\det(U + \delta U)| - \log |\det(U)| \\ &= \log \left| \frac{\det(U + \delta U)}{\det(U)} \right| \\ &= \log \left| \det(U + \delta U) \det(U^{-1}) \right| \\ &= \log \left| \det(U^{-1} (U + \delta U)) \right| \\ &= \log \left| \det(\mathbb{1} + U^{-1} \delta U) \right| \\ &= \text{Tr} \left(\log |1 + U^{-1} \delta U| \right) \\ &\approx \text{Tr}(U^{-1} \delta U), \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

donde usamos $\log(\det(U)) = \text{Tr}(\log(U))$ en la anteúltima igualdad, y aproximamos a primer orden en la variación en la última igualdad.

En los pasos anteriores ignoramos cualquier ambigüedad en el orden de multiplicación de las matrices debido a la propiedad de ciclicidad de la traza en el resultado final. Por lo tanto, tenemos que se cumple

$$\delta \log |\det(U)| = \frac{\delta |\det(U)|}{|\det(U)|} = \text{Tr}(U^{-1} \delta U). \quad (\text{B.29})$$

Y, por lo tanto

$$\delta |\det(U)| = |\det(U)| \text{Tr}(U^{-1} \delta U), \quad (\text{B.30})$$

y

$$\begin{aligned} \delta \left(\sqrt{|\det(U)|} \right) &= \frac{\delta |\det(U)|}{2\sqrt{|\det U|}} \\ &= \frac{|\det(U)| \text{Tr}(U^{-1} \delta U)}{2\sqrt{|\det U|}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\det(U)|} \text{Tr}(U^{-1} \delta U). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Ahora, con $U \equiv g_{\mu\nu}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{|g|} &= \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \text{Tr}(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Luego aplicando la Ec. (B.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{|g|} &= \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} (-g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} \delta^\nu_\rho g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\rho\sigma} \delta g^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Quedando finalmente las identidades buscadas

$$\delta \sqrt{|g|} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{|g|}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.34})$$

Finalmente demostraremos la identidad de la Ec. (B.8)

Al variar R tenemos que

$$\delta R = \delta (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (\text{B.35})$$

Por lo que necesitamos obtener $\delta R_{\mu\nu}$. De la definición en la Ec. (A.5) tenemos que

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \delta\left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\mu\alpha}\right). \quad (\text{B.36})$$

Y de la definición en la Ec. (A.3) la variación de los Christoffel es

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\delta}\left(g_{\delta\mu,\nu} + g_{\delta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\delta}\right) + \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\delta g_{\delta\mu,\nu} + \delta g_{\delta\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\delta}\right). \quad (\text{B.37})$$

Pasando al sistema localmente inercial (SLI), donde la primera derivada de $g_{\mu\nu}$ es 0, queda

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\delta g_{\delta\mu,\nu} + \delta g_{\delta\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\delta}\right). \quad (\text{B.38})$$

Por lo que tenemos que

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}. \quad (\text{B.39})$$

Volviendo ahora al sistema de coordenadas general ($\partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}$) tenemos

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{2}\nabla_{\alpha}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\nu}\delta g_{\delta\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu} - \nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\delta g_{\delta\mu} + \nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla_{\nu}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\alpha}\delta g_{\delta\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\delta\alpha} - \nabla_{\delta}\delta g_{\mu\alpha}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\delta g_{\delta\mu} + \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\alpha} - \nabla_{\nu}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\delta g_{\delta\mu} + \nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\delta g_{\delta\mu} + \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\alpha} - \nabla_{\nu}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\alpha} + \nabla_{\nu}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\alpha}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Ahora si contraemos con la inversa de la métrica

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\alpha} + \nabla_{\nu}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\delta}\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\delta\nu}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Quedando

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{B.42})$$

Lo que finalmente da la identidad buscada

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{B.43})$$

B.1.2. Campo escalar en Minkowski

Si consideramos el espacio-tiempo de Minkowski ($R_{\mu\nu} = 0$, $R = 0$ y $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$) de la Ec. (B.19) queda

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi (1 - 2\xi) - 2\xi \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi + \\ &+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(m^2 \phi^2 - \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi (1 - 4\xi) + 4\xi \phi \square \phi \right), \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

donde se reescribió la expresión de forma más conveniente.

Ahora, usando que

$$\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi = \dot{\phi}^2 - \partial_i \phi \partial_i \phi, \quad (\text{B.45})$$

$$\square \phi = \ddot{\phi} - \partial_i \partial_i \phi. \quad (\text{B.46})$$

Podemos escribir las componentes diagonales explícitamente

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2 \right) + \frac{1}{2} (1 - 4\xi) (\nabla \phi)^2 - 2\xi \phi \Delta \phi, \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} p_i = T_{ii} &= \partial_i \phi \partial_i \phi (1 - 2\xi) - 2\xi \phi \partial_i \partial_i \phi + \frac{1}{2} \left((1 - 4\xi) \left(\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 \right) - \right. \\ &\left. - m^2 \phi^2 - 4\xi \phi \left(\ddot{\phi} - \Delta \phi \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

En el caso particular de $\xi = 0$, como se utiliza en el cálculo habitual del PCC, queda

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right), \quad (\text{B.49})$$

$$p_i = T_{ii} = \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right). \quad (\text{B.50})$$

B.1.3. Campo escalar sin acoplamiento a la curvatura

Si consideramos $\xi = 0$ en la Ec. (B.19), obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\rho\phi \partial^\rho\phi - m^2 \phi^2). \quad (\text{B.51})$$

Si ahora consideramos la métrica dada por Ec. (A.7) podemos escribir las componentes diagonales explícitamente

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + \left(\frac{\nabla\phi}{a} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right), \quad (\text{B.52})$$

$$T_{ii} = (\partial_i\phi)^2 + \frac{a^2}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \left(\frac{\nabla\phi}{a} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right). \quad (\text{B.53})$$

Es directo entonces obtener la suma

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 T_{ii} = \frac{3}{2} (\dot{\phi}^2 - m^2 \phi^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla\phi}{a} \right)^2. \quad (\text{B.54})$$

Con lo que $\Omega^2(t, \mathbf{x})$, Ec. (A.26), en función del campo queda

$$\Omega^2(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right) = \frac{4\pi G}{3} (2\dot{\phi}^2 - m^2 \phi^2). \quad (\text{B.55})$$

Notar que el resultado final es independiente del factor de escala $a(t, \mathbf{x})$, por lo que es válido tanto para la métrica de la Ec. (A.7) como para Minkowski. Y permite interpretar la Ec. (A.26) como la ecuación de un oscilador armónico.

B.2. Ecuación de estado del modelo

En esta sección mostraremos explícitamente la forma de integral de $\langle \rho \rangle$ y $\langle p_i \rangle$ para el caso usual del PCC (campo escalar masivo con $\xi = 0$ y en Minkowski).

Usando la expansión del campo dada por Ec. (6.2) y usando las Ecs. (6.8) a (6.10), tenemos que

$$\langle \phi^2 \rangle = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\mu^{4-d}}{2\omega} = \frac{\mu^{4-d} m^{d-2}}{2^d \pi^{d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right), \quad (\text{B.56})$$

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \mu^{4-d} \frac{\omega^2}{2\omega} = -\frac{\mu^{4-d} m^d}{2^{d+1} \pi^{d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right), \quad (\text{B.57})$$

$$\langle (\nabla\phi)^2 \rangle = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \mu^{4-d} \frac{\mathbf{k}^2}{2\omega} = (d-1) \frac{\mu^{4-d} m^d}{2^{d+1} \pi^{d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right), \quad (\text{B.58})$$

$$\langle (\partial_i \phi)^2 \rangle = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \mu^{4-d} \frac{k_i^2}{2\omega} = \frac{\langle (\nabla\phi)^2 \rangle}{d-1} = \frac{\mu^{4-d} m^d}{2^{d+1} \pi^{d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right). \quad (\text{B.59})$$

Ahora es fácil ver que, de las Ecs. (B.49) y (B.50),

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle \dot{\phi}^2 \rangle + \langle (\nabla\phi)^2 \rangle + m^2 \langle \phi^2 \rangle \right) \\ &= -\frac{\mu^{4-d} m^d \pi^{-d/2}}{2^{d+1}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} \langle p_i \rangle = \langle T_{ii} \rangle &= \langle (\partial_i \phi)^2 \rangle + \frac{1}{2} \left(\langle \dot{\phi}^2 \rangle - \langle (\nabla\phi)^2 \rangle - m^2 \langle \phi^2 \rangle \right) \\ &= \frac{\mu^{4-d} m^d \pi^{-d/2}}{2^{d+1}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Notar que los valores medios de las tres componentes de presión son iguales.

Finalmente, el cociente queda

$$\frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} = -1, \quad (\text{B.62})$$

donde se aprecia explícitamente que para Minkowski la relación entre presión y densidad es la de una constante cosmológica.

Finalmente, nótese que de las Ecs. (B.56) a (B.58) y (B.60) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = \langle \mathcal{H} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{2\omega} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{2\omega} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2\omega} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}{4\omega} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega(\mathbf{k})}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

que es la expresión habitual de la densidad de energía del vacío para un campo escalar.

B.3. Identidad estadística

En esta sección demostraremos la identidad de la Ec. (4.12), que repetimos a continuación

$$\Delta\rho^2(\Delta x) = 1 - \frac{\text{Cov}(T_{00}(x), T_{00}(x'))}{\sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')}. \quad (\text{B.64})$$

Notar que para el caso en el que se utiliza, tanto σ_ρ como $\langle T_{00} \rangle$ no dependen del punto del espacio-tiempo, como se mostró mediante cálculos explícitos en las Ecs. (4.6) y (4.8).

Usando la notación $T_x = \hat{T}_{00}(x)$ y de la Ec. (6.31) tenemos que

$$\text{Cov}(T_x, T_{x'}) = \frac{1}{2} (\langle T_x T_{x'} \rangle - 2 \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle + \langle T_{x'} T_x \rangle). \quad (\text{B.65})$$

Ahora de la definición de $\Delta\rho^2(\Delta x)$, Ec. (4.9), tenemos que para un intervalo espacio-temporal arbitrario

$$\begin{aligned} \Delta\rho^2(\Delta x) &= \frac{\langle \{ (T_x - T_{x'})^2 \} \rangle}{\frac{4}{3} \langle T_x \rangle^2} \\ &= \frac{\langle \{ T_x - T_{x'}, T_x - T_{x'} \} \rangle}{2 \sigma_\rho^2} \\ &= \frac{\langle T_x^2 \rangle + \langle T_{x'}^2 \rangle - \langle T_x T_{x'} \rangle - \langle T_{x'} T_x \rangle}{2 \sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')}, \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

donde se usó la Ec. (4.8).

Como σ_ρ y $\langle T_x \rangle$ no depende de x podemos escribir

$$2 \sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x') = \sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x') + \sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x') = \sigma_\rho^2(x) + \sigma_\rho^2(x'). \quad (\text{B.67})$$

Y de forma equivalente

$$2 \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle = \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle + \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle = \langle T_x \rangle^2 + \langle T_{x'} \rangle^2. \quad (\text{B.68})$$

Queda entonces

$$\begin{aligned} \Delta\rho^2(\Delta x) &= \frac{\langle T_x^2 \rangle + \langle T_{x'}^2 \rangle - \langle T_x T_{x'} \rangle - \langle T_{x'} T_x \rangle}{\sigma_\rho^2(x) + \sigma_\rho^2(x')} \\ &= \frac{\langle T_x^2 \rangle + \langle T_{x'}^2 \rangle - 2 \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle + 2 \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle - \langle T_x T_{x'} \rangle - \langle T_{x'} T_x \rangle}{\sigma_\rho^2(x) + \sigma_\rho^2(x')} \\ &= \frac{\langle T_x^2 \rangle + \langle T_{x'}^2 \rangle - 2 \langle T_x \rangle \langle T_{x'} \rangle - 2 \text{Cov}(T_x, T_{x'})}{\sigma_\rho^2(x) + \sigma_\rho^2(x')} \\ &= \frac{\langle T_x^2 \rangle + \langle T_{x'}^2 \rangle - \langle T_x \rangle^2 - \langle T_{x'} \rangle^2}{\sigma_\rho^2(x) + \sigma_\rho^2(x')} - \frac{2 \text{Cov}(T_x, T_{x'})}{2 \sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')} \\ &= \frac{(\langle T_x^2 \rangle - \langle T_x \rangle^2) + (\langle T_{x'}^2 \rangle - \langle T_{x'} \rangle^2)}{\sigma_\rho^2(x) + \sigma_\rho^2(x')} - \frac{\text{Cov}(T_x, T_{x'})}{\sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')} \\ &= 1 - \frac{\text{Cov}(T_x, T_{x'})}{\sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')}. \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Donde en la última línea se usó que $\sigma_\rho^2(x) = \langle T_x^2 \rangle - \langle T_x \rangle^2$.

Entonces, en la notación original queda

$$\Delta\rho^2(\Delta x) = 1 - \frac{\text{Cov}(T_{00}(x), T_{00}(x'))}{\sigma_\rho(x) \sigma_\rho(x')}. \quad (\text{B.70})$$

Lo que vale para un intervalo espacio-temporal arbitrario, para el caso de la Ec. (4.12) simplemente se evalúa en $t = t'$.

B.4. Desarrollo de un campo escalar en una métrica conforme general

En esta sección calcularemos la función χ_k que entra en el desarrollo del campo escalar en una métrica conforme.

Considerando la Ec. (3.14), tenemos que la inversa de la métrica y su determinante son

$$g^{\mu\nu} = C^{-1} \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{B.71})$$

$$\sqrt{|g|} = C^{d/2}. \quad (\text{B.72})$$

Luego usando el programa MATHEMATICA obtenemos el escalar de curvatura en d dimensiones

$$R = -\frac{1}{4C^3} \left((d-1)(d-6) C'(\eta)^2 + 4(d-1) C(\eta) C''(\eta) \right). \quad (\text{B.73})$$

Aplicando la ecuación de movimiento, Ec. (3.13), a la expansión del campo, Ec. (3.15), tenemos que

$$(\square + m^2 - \xi R) \left(C^{\frac{2-d}{4}} \chi \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) = 0. \quad (\text{B.74})$$

Que se puede escribir como:

$$\square F(\eta, \mathbf{x}) = (\xi R - m^2) F(\eta, \mathbf{x}), \quad (\text{B.75})$$

donde $F(\eta, \mathbf{x}) = C^{\frac{2-d}{4}} \chi \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$.

Como F es un escalar, tenemos que usando las Ec. (B.71), queda:

$$\begin{aligned}
\Box F &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu F \right) \\
&= C^{-d/2} \partial_\mu \left(C^{d/2} C^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu F \right) \\
&= C^{-d/2} \partial_\eta \left(C^{d/2-1} \partial_\eta F \right) - C^{-d/2} C^{d/2-1} \partial_i \partial_i F \\
&= \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) C^{-d/2} A - C^{-1} C^{\frac{2-d}{4}} \chi \partial_i \partial_i (\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) \\
&= \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) C^{\frac{2-d}{4}} \left(C^{-\frac{2+d}{4}} A + C^{-1} \chi \mathbf{k}^2 \right).
\end{aligned} \tag{B.76}$$

Donde A esta dado por

$$\begin{aligned}
A &= \partial_\eta \left(C^{\frac{d}{2}-1} \partial_\eta \left(C^{\frac{2-d}{4}} \chi \right) \right) \\
&= \chi C^{\frac{d}{4}-\frac{5}{2}} \left((C')^2 \left((d-2)(d-6) \left(-\frac{1}{16} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (d-2) \left(-\frac{1}{4} \right) C C'' + C^2 \frac{\chi''}{\chi} \right) \\
&= \chi C^{\frac{d}{4}-\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{4} C^3 \frac{d-2}{d-1} + C^2 \frac{\chi''}{\chi} \right).
\end{aligned} \tag{B.77}$$

En el último paso se usó la Ec. (B.73), quedando finalmente

$$A = \chi C^{\frac{d+2}{4}} R \xi(d) + \chi'' C^{\frac{d-2}{4}}, \tag{B.78}$$

donde

$$\xi(d) = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}. \tag{B.79}$$

Reemplazándolo en $\Box F$ tenemos

$$\Box F = \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) C^{\frac{2-d}{4}} \left(\chi R \xi(d) + C^{-1} \chi'' + C^{-1} \chi \mathbf{k}^2 \right). \tag{B.80}$$

Usándolo en la Ec. (B.75) queda

$$\chi'' + \chi \left(\mathbf{k}^2 + C R \xi(d) - C R \xi + C m^2 \right) = 0. \tag{B.81}$$

Así se obtiene finalmente la ecuación diferencial para χ

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + \left(\mathbf{k}^2 + C(\eta) \left(m^2 + (\xi - \xi(d)) R \right) \right) \chi_k = 0. \tag{B.82}$$

La misma se resuelve con

$$\chi_k(\eta) = c_1 \sqrt{\eta} J_a(k \eta) + c_2 \sqrt{\eta} Y_a(k \eta), \quad (\text{B.83})$$

donde

$$a^2 = \frac{1}{4} - \alpha^2 m^2 - d(d-1)(\xi - \xi(d)). \quad (\text{B.84})$$

Donde c_1 y c_2 son constantes de integración, J_a y Y_a son las funciones de Bessel del primer y segundo tipo respectivamente y $k = |\mathbf{k}|$.

De la condición de normalización tenemos

$$i = \chi_k \partial_\eta \chi_k^* - \chi_k^* \partial_\eta \chi_k. \quad (\text{B.85})$$

Quedando para las constantes la siguiente ecuación

$$c_1 c_2^* - c_2 c_1^* = \frac{i \pi}{2}. \quad (\text{B.86})$$

Con la elección de vacío adiabático, o vacío de Bunch–Davies [19], tenemos

$$c_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (\text{B.87})$$

$$c_2 = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (\text{B.88})$$

Así queda finalmente que χ es

$$\chi_k = \frac{\sqrt{\pi \eta}}{2} H_a^{(2)}(k \eta), \quad (\text{B.89})$$

donde

$$a^2 = \frac{1}{4} - \alpha^2 m^2 - d(d-1)(\xi - \xi(d)), \quad (\text{B.90})$$

$$\xi(d) = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}. \quad (\text{B.91})$$

Y donde $H_a^{(2)}(z) = J_a(z) - i Y_a(z)$ es la función de Hankel del segundo tipo.

B.5. Cálculo de $R_n(t - t')$

De las Ecs. (5.31) y (5.32) vemos que para obtener R_n tenemos que analizar las combinaciones de cuatro operadores de creación y destrucción. En concreto tenemos que

$$\langle i | \hat{a} \hat{a} \hat{a} \hat{a} | i \rangle = 0, \quad (\text{B.92})$$

$$\langle i | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | i \rangle = 0, \quad (\text{B.93})$$

$$\langle i | P(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}) | i \rangle = 0, \quad (\text{B.94})$$

$$\langle i | P(\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) | i \rangle = 0, \quad (\text{B.95})$$

donde P indica permutaciones.

Solo permutaciones de $\langle i | \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | i \rangle$ serán distintas de 0. En particular

$$\langle i | \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | i \rangle = (i+1)(i+2), \quad (\text{B.96})$$

$$\langle i | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | i \rangle = i(i-1), \quad (\text{B.97})$$

$$\langle i | \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger | i \rangle = (i+1)^2, \quad (\text{B.98})$$

$$\langle i | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | i \rangle = i^2, \quad (\text{B.99})$$

$$\langle i | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger | i \rangle = i(i+1), \quad (\text{B.100})$$

$$\langle i | \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} | i \rangle = i(i+1). \quad (\text{B.101})$$

Entonces de la Ec. (5.47) tenemos que

$$\langle \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle = \frac{2e^{2\beta\omega_n}}{(e^{\beta\omega_n} - 1)^2}, \quad (\text{B.102})$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle = \frac{2}{(e^{\beta\omega_n} - 1)^2}, \quad (\text{B.103})$$

$$\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle = \frac{e^{\beta\omega_n}(e^{\beta\omega_n} + 1)}{(e^{\beta\omega_n} - 1)^2}, \quad (\text{B.104})$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{e^{\beta\omega_n} + 1}{(e^{\beta\omega_n} - 1)^2}, \quad (\text{B.105})$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle = \frac{1}{\cosh(\beta\omega_n) - 1}, \quad (\text{B.106})$$

$$\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{1}{\cosh(\beta\omega_n) - 1}. \quad (\text{B.107})$$

De las Ecs. (5.37) y (5.52) obtenemos al orden más bajo

$$\langle \hat{q}_n^2 \rangle^2 = \frac{Y_n^2}{4 m_n^2 \omega_n^2}, \quad (\text{B.108})$$

$$|f_n|^4 = \frac{1}{4 \omega_n^2 m_n^2}, \quad (\text{B.109})$$

$$f_n(t)^2 f_n^*(t')^2 = \frac{1}{4 \omega_n^2 m_n^2} e^{2i\omega_n(t-t')}. \quad (\text{B.110})$$

Por lo tanto, desarrollando los \hat{q}_n en la Ec. (5.31) en operadores de creación y destrucción queda

$$R_n(t-t') = \frac{1}{4 m_n^2 \omega_n^2} \left(\cos(2\omega_n(t-t')) (Y_n^2 - 1) + Y_n^2 - 1 \right), \quad (\text{B.111})$$

donde $Y_n = \coth(\beta\omega_n/2)$.

B.6. Ruido y disipación para $I(\omega) = \theta(\omega) \omega^n$

En esta sección calcularemos el ruido $R(t-t')$ y disipación $D(t-t')$ definidos en el Capítulo 5, Ecs. (5.80) y (5.81), para un T cualquiera y para $I(\omega) = \theta(\omega) \omega^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

B.6.1. $D(t-t')$

De la Ec. (5.81) vemos que tenemos que integrar

$$2 I(\omega) Z(\omega) \sin(2\omega(t-t')) = i \theta(\omega) \omega^n \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \left(e^{-2i\omega(t-t')} - e^{2i\omega(t-t')} \right). \quad (\text{B.112})$$

Por lo que explícitamente la disipación es

$$\begin{aligned} D(t-t') &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \left(i \theta(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right) e^{-i\omega a} - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \left(i \theta(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right) e^{-i\omega \tilde{a}}. \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

Que se puede reescribir como

$$D(t-t') = i^n \frac{d^n \hat{f}(a)}{da^n} - i^n \frac{d^n \hat{f}(\tilde{a})}{d\tilde{a}^n}, \quad (\text{B.114})$$

donde

$$a = 2(t-t'), \quad (\text{B.115})$$

$$\tilde{a} = -a = 2(t' - t), \quad (\text{B.116})$$

$$f(\omega) = i \theta(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right), \quad (\text{B.117})$$

$$\hat{f}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega a}. \quad (\text{B.118})$$

Entonces transformando f queda

$$\hat{f}(x) = \pi T \coth(x \pi T) - iT (2 \gamma_{EM} + \Psi(-ixT) + \Psi(ixT)), \quad (\text{B.119})$$

donde γ_{EM} es la constante de Euler–Mascheroni y $\Psi(x)$ es la función digamma.

Realizando la derivada n -ésima de \hat{f} queda

$$\begin{aligned} \frac{d^n \hat{f}(a)}{da^n} &= (-iT)^{n+1} \Psi^{(n)}(-iaT) - (iT)^{n+1} \Psi^{(n)}(iaT) + \\ &+ \frac{1}{2} (2\pi T)^{n+1} (\coth(a \pi T) - 1) \sum_{l=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^l S_n^{(l)} l! (\coth(a \pi T) + 1)^l, \end{aligned} \quad (\text{B.120})$$

donde $S_n^{(l)}$ es el número de Stirling del segundo tipo y $\Psi^{(n)}(x)$ es la n -ésima derivada de la función digamma.

Queda entonces

$$\begin{aligned} D(t - t') &= -iT^{n+1} (e^{in\pi} - 1) (\Psi^{(n)}(ib) - \Psi^{(n)}(-ib)) + \\ &+ (i2)^n (\pi T)^{n+1} \left((\coth(b \pi) + 1) \times \right. \\ &\times \sum_{l=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^l S_n^{(l)} l! (1 - \coth(b \pi))^l + (\coth(b \pi) - 1) \times \\ &\times \left. \sum_{l=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^l S_n^{(l)} l! (1 + \coth(b \pi))^l \right), \end{aligned} \quad (\text{B.121})$$

donde $b = 2T(t - t')$.

Algunos resultados particulares son

n	$D(t-t')$
1	$2i T^2 (\Psi^{(1)}(ib) - \Psi^{(1)}(-ib))$
2	$-4\pi^2 T^3 \coth(b\pi) \operatorname{csch}^2(b\pi)$
3	$2i T^4 (\Psi^{(3)}(ib) - \Psi^{(3)}(-ib))$
4	$8\pi^5 T^5 (\coth(2\pi b) + 5) \coth(b\pi) \operatorname{csch}^4(b\pi)$

B.6.2. $R_p(t-t')$

De la Ec. (5.80) vemos que tenemos que integrar

$$\begin{aligned}
I(\omega) & \left((Z^2 + 1) \cos(2\omega(t-t')) + Z^2 - 1 \right) \\
& = \frac{\omega^n}{2} \left(\operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right) + 2 \right) \left(e^{-2i\omega(t-t')} + e^{2i\omega(t-t')} \right) + \omega^n \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right).
\end{aligned} \tag{B.122}$$

Igual que antes

$$\begin{aligned}
R_p(t-t') & = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \left(\theta(\omega) \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right) \right) e^{-i\omega a} + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \left(\theta(\omega) \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right) \right) e^{-i\omega \tilde{a}} + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \theta(\omega) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right).
\end{aligned} \tag{B.123}$$

Que se reescribe como

$$R_p(t-t') = i^n \frac{d^n \hat{f}(a)}{da^n} + i^n \frac{d^n \hat{f}(\tilde{a})}{d\tilde{a}^n} + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \theta(\omega) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right), \tag{B.124}$$

donde

$$f(\omega) = \theta(\omega) \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right). \tag{B.125}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}(a) & = -\frac{i}{a} - T + \pi \delta(a) + i a T^2 (-2 + 2\gamma_{EM} + \\
& + i\pi \coth(a\pi T) + \Psi(-iaT) + \Psi(iaT)).
\end{aligned} \tag{B.126}$$

Y

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n \theta(\omega) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega}{2T}\right) \underset{n>1}{=} \begin{cases} C(n) \pi^n T^{n+1} & n \text{ par} \\ T^{n+1} 4\Gamma(n+1) \xi(n) & n \text{ impar} \end{cases}. \quad (\text{B.127})$$

Donde $\xi(x)$ es la zeta de Riemann y para $n = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ tenemos que

$$C(n) = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{16}{15}, \frac{64}{21}, \frac{256}{15}, \frac{5120}{53}, \frac{2830336}{1365} \right\}. \quad (\text{B.128})$$

Algunos resultados particulares son (donde nuevamente $b = 2T(t - t')$)

$n = 2$

$$R_p(t - t') = \frac{2}{3} \pi^2 T^3 \operatorname{csch}^2(b\pi) (\cosh(2\pi b) + 6\pi b \coth(b\pi) - 7) - \frac{\pi}{4} \delta''(t - t'). \quad (\text{B.129})$$

$n = 3$

$$R_p(t - t') = \frac{3}{4(t - t')^4} + 2T^4 \left(-3 \left(\Psi^{(2)}(-ib) + \Psi^{(2)}(ib) \right) + ib \left(\Psi^{(3)}(-ib) - \Psi^{(3)}(ib) \right) + 12\xi(3) \right). \quad (\text{B.130})$$

B.7. Integración de $R_p''''(t)$

En esta sección demostraremos que al integrar dos y cuatro veces la Ec. (5.96) se obtienen las soluciones dadas por Ecs. (5.113) y (5.114). Recordemos que cuando $T \rightarrow 0$, la solución debe coincidir con la obtenida transformando por Fourier.

Primero proponemos la solución

$$R_p''(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left(\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega^2} (Y_n^2 + 1) + k_1 + k_2 f(t) \right), \quad (\text{B.131})$$

donde k_1 y k_2 son constantes. Nótese que es una propuesta completamente genérica, ya que se utilizó la función desconocida del tiempo $f(t)$.

Entonces tenemos que

$$R_p''''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left(\cos(2\omega t) (Y_n^2 + 1) + k_2 f''(t) \right). \quad (\text{B.132})$$

Comparándola con la Ec. (5.96) tenemos

$$f''(t) = \frac{Y_n^2 - 1}{k_2}, \quad (\text{B.133})$$

$$f'(t) = \frac{Y_n^2 - 1}{k_2} t + k_3, \quad (\text{B.134})$$

$$f(t) = \frac{Y_n^2 - 1}{k_2} \frac{t^2}{2} + k_3 t + k_4, \quad (\text{B.135})$$

donde k_3 y k_4 son constantes de integración.

Por lo tanto, queda

$$R_p''(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left(\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega^2} (Y_n^2 + 1) + (Y_n^2 - 1) \frac{t^2}{2} + \tilde{k}_3 t + \tilde{k}_4 \right), \quad (\text{B.136})$$

donde se absorbió la constante k_2 en $\tilde{k}_3 = k_2 k_3$ y $\tilde{k}_4 = k_2 k_4$.

Si ahora queremos que coincida con la Ec. (5.112) en el límite de $T \rightarrow 0$, es directo que $\tilde{k}_3 = \tilde{k}_4 = 0$. Por lo que finalmente queda que a T cualquiera R_p'' es

$$R_p''(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left((Y_n^2 + 1) \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega^2} + (Y_n^2 - 1) \frac{t^2}{2} \right). \quad (\text{B.137})$$

Con un procedimiento idéntico se obtiene

$$R_p(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) \left((Y_n^2 + 1) \frac{\cos(2\omega t)}{16\omega^4} + (Y_n^2 - 1) \frac{t^4}{24} \right). \quad (\text{B.138})$$

Apéndice C

Cuentas auxiliares para el Cap. 6

C.1. Convenciones para el campo fermiónico

Como convención de matrices gamma usamos

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Los espinores utilizados son

$$u_1(\mathbf{k}_2) = \sqrt{\frac{E_{k_2} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_{2z}}{E_{k_2} + m} \\ \frac{k_{2x} + i k_{2y}}{E_{k_2} + m} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$u_2(\mathbf{k}_2) = \sqrt{\frac{E_{k_2} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k_{2x} - i k_{2y}}{E_{k_2} + m} \\ -\frac{k_{2z}}{E_{k_2} + m} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$v_2(\mathbf{k}_1) = \sqrt{\frac{E_{k_1} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{k_{1z}}{E_{k_1} + m} \\ \frac{k_{1x} + i k_{1y}}{E_{k_1} + m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

$$v_1(\mathbf{k}_1) = \sqrt{\frac{E_{k_1} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{k_{1x} - i k_{1y}}{E_{k_1} + m} \\ -\frac{k_{1z}}{E_{k_1} + m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Donde

$$E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, usamos las siguientes relaciones habituales entre espinores y operadores de creación y destrucción

$$\{c_{r,\mathbf{k}}, c_{s,\mathbf{k}'}^\dagger\} = \{d_{r,\mathbf{k}}, d_{s,\mathbf{k}'}^\dagger\} = \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (\text{C.8})$$

$$\bar{u}_r(\mathbf{k}) \gamma^\mu u_s(\mathbf{k}) = \bar{v}_r(\mathbf{k}) \gamma^\mu v_s(\mathbf{k}) = \frac{k^\mu}{m} \delta_{rs}. \quad (\text{C.9})$$

C.2. Esféricas en N dimensiones

Al hacer el pasaje de N coordenadas cartesianas a esféricas [34], estamos haciendo el mapeo dado por

$$(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow (|\mathbf{x}|, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2}). \quad (\text{C.10})$$

Lo que produce el siguiente diferencial de volumen

$$d^N x = \mathbf{x}^{N-1} dx d\phi \sin(\theta_1) d\theta_1 \sin^2(\theta_2) d\theta_2 \dots \sin^{N-2}(\theta_{N-2}) d\theta_{N-2}, \quad (\text{C.11})$$

con

$$0 \leq |\mathbf{x}| \leq \infty, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad 0 < \theta_i < \pi, \quad i = 1, \dots, N-2. \quad (\text{C.12})$$

Si integramos solo la parte angular se obtiene

$$\int d\Omega = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}. \quad (\text{C.13})$$

C.3. Integrales utilizadas

Para los cálculos del Capítulo 6 se utilizaron las siguientes integrales,

$$\int d^d k f(\mathbf{k}^2) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dk k^{d-1} f(\mathbf{k}^2), \quad (\text{C.14})$$

$$\int d^d k (\mathbf{k}^2)^\alpha = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$\int_0^\infty dk \frac{k^d}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} = \frac{m^d}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right), \quad (\text{C.16})$$

Donde las primeras dos expresiones se obtuvieron de [14], y la última se calculó con el programa MATHEMATICA y se chequeo numéricamente.

C.4. Demostración de la identidad de la covarianza

En esta sección demostraremos la identidad de la Ec. (6.31) mediante un cálculo explícito. Concretamente queremos ver que

$$\langle \{ \Omega^2(x_1) - \langle \Omega^2(x_1) \rangle, \Omega^2(x_2) - \langle \Omega^2(x_2) \rangle \} \rangle = \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)), \quad (\text{C.17})$$

con $F(a, b) = \langle \Omega^2(a) \Omega^2(b) \rangle - \langle \Omega^2(a) \rangle \langle \Omega^2(b) \rangle$.

La definición del corchete presente en la identidad es

$$\{X, Y\} = \frac{1}{2} (XY + YX). \quad (\text{C.18})$$

Tenemos entonces 4 términos,

$$\begin{aligned} & \langle \{ \Omega^2(x_1) - \langle \Omega^2(x_1) \rangle, \Omega^2(x_2) - \langle \Omega^2(x_2) \rangle \} \rangle \\ & \equiv \{A - B, C - D\} \\ & = \{A, C\} - \{A, D\} - \{B, C\} + \{B, D\}, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

donde $A = \Omega^2(x_1)$, $B = \langle \Omega^2(x_1) \rangle$, $C = \Omega^2(x_2)$ y $D = \langle \Omega^2(x_2) \rangle$.

Explícitamente, los términos y sus valores medios son

$$\{A, C\} = \{\Omega^2(x_1), \Omega^2(x_2)\}, \quad (\text{C.20})$$

$$\langle \{A, C\} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle + \langle \Omega^2(x_2) \Omega^2(x_1) \rangle), \quad (\text{C.21})$$

$$\{A, D\} = \{\Omega^2(x_1), \langle \Omega^2(x_2) \rangle\} = \Omega^2(x_1) \langle \Omega^2(x_2) \rangle, \quad (\text{C.22})$$

$$\langle \{A, D\} \rangle = \langle \Omega^2(x_1) \langle \Omega^2(x_2) \rangle \rangle = \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle, \quad (\text{C.23})$$

$$\{B, C\} = \{\langle \Omega^2(x_1) \rangle, \Omega^2(x_2)\} = \langle \Omega^2(x_1) \rangle \Omega^2(x_2), \quad (\text{C.24})$$

$$\langle \{B, C\} \rangle = \langle \langle \Omega^2(x_1) \rangle \Omega^2(x_2) \rangle = \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle, \quad (\text{C.25})$$

$$\{B, D\} = \{\langle \Omega^2(x_1) \rangle, \langle \Omega^2(x_2) \rangle\} = \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle, \quad (\text{C.26})$$

$$\langle \{B, D\} \rangle = \langle \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle \rangle = \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle. \quad (\text{C.27})$$

Juntando todo queda

$$\begin{aligned} & \langle \{\Omega^2(x_1) - \langle \Omega^2(x_1) \rangle, \Omega^2(x_2) - \langle \Omega^2(x_2) \rangle\} \rangle = \\ & = \langle \{A, C\} \rangle - \langle \{A, D\} \rangle - \langle \{B, C\} \rangle + \langle \{B, D\} \rangle \\ & = \frac{1}{2} \langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Omega^2(x_2) \Omega^2(x_1) \rangle - \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle \\ & = \frac{1}{2} \langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle - \frac{1}{2} \langle \Omega^2(x_1) \rangle \langle \Omega^2(x_2) \rangle + \\ & \quad + \frac{1}{2} \langle \Omega^2(x_2) \Omega^2(x_1) \rangle - \frac{1}{2} \langle \Omega^2(x_2) \rangle \langle \Omega^2(x_1) \rangle \\ & = \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)). \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Llegamos entonces así a

$$\boxed{\langle \{\Omega^2(x_1) - \langle \Omega^2(x_1) \rangle, \Omega^2(x_2) - \langle \Omega^2(x_2) \rangle\} \rangle = \frac{1}{2} (F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1)), \quad (\text{C.29})}$$

con $F(a, b) = \langle \Omega^2(a) \Omega^2(b) \rangle - \langle \Omega^2(a) \rangle \langle \Omega^2(b) \rangle$.

C.5. Integrales para la covarianza del campo escalar

En esta sección mostraremos como se llega a las relaciones de las integrales I_1 a I_{12} con las integrales I_a e I_b . De las Ecs. (6.45) a (6.47) es directo que las integrales I_1 a I_{12} son

$$I_1 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)}}{\omega_1 \omega_2} \right) = \left(\int d^3k \frac{e^{i(x_2-x_1)k}}{\omega} \right)^2 = I_A^2, \quad (\text{C.30})$$

$$I_2 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = \left(\int d^3k e^{i(x_2-x_1)k} \right)^2 = I_B^2, \quad (\text{C.31})$$

$$I_3 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\omega_1 \omega_2 e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = \left(\int d^3k \omega e^{i(x_2-x_1)k} \right)^2 = I_C^2, \quad (\text{C.32})$$

$$I_4 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = \left(\int d^3k \frac{\mathbf{k}}{\omega} e^{i(x_2-x_1)k} \right)^2 = |\vec{I}_D|^2, \quad (\text{C.33})$$

$$I_5 = I_6 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = I_A I_C, \quad (\text{C.34})$$

$$I_7 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = \left(\int d^3k \mathbf{k} e^{i(x_2-x_1)k} \right)^2 = |\vec{I}_E|^2, \quad (\text{C.35})$$

$$I_8 = I_9 = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\omega_1^2 e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = I_B \left(\int d^3k \omega^2 e^{i(x_2-x_1)k} \right) = I_B I_F, \quad (\text{C.36})$$

$$I_{10} = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{\omega_1^3}{\omega_2} e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) = I_A \left(\int d^3k \omega^3 e^{i(x_2-x_1)k} \right) = I_A I_G, \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(3 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right) \\ &= \vec{I}_D \cdot \left(\int d^3k \mathbf{k} \omega e^{i(x_2-x_1)k} \right) + 3 \vec{I}_D \cdot \left(\int d^3k \mathbf{k} \omega e^{i(x_2-x_1)k} \right) \\ &= 4 \vec{I}_D \cdot \left(\int d^3k \mathbf{k} \omega e^{i(x_2-x_1)k} \right) = 4 \vec{I}_D \cdot \vec{I}_H, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$I_{12} = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{\omega_1 \omega_2} e^{i(x_2-x_1)(k_1+k_2)} \right). \quad (\text{C.39})$$

Donde quedaron definidas 9 integrales diferentes, $I_A, I_B, I_C, \vec{I}_D, \vec{I}_E, I_F, I_G, \vec{I}_H$ e I_{12} . Resulta que todas se pueden escribir en función de casos particulares de I_a e I_b . Repetimos las definiciones del Capítulo 6,

$$I_a(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \sin(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x^\gamma} \right), \quad (\text{C.40})$$

$$I_b(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^\alpha \cos(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^\beta \Delta x^\gamma} \right), \quad (\text{C.41})$$

donde $\Delta x = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ y $\Delta t = t_1 - t_2$.

Si consideramos un sistema de referencia tal que $\Delta \mathbf{x}$ este en la dirección z , y usando coordenadas esféricas se obtiene

$$\begin{aligned} I_A &= \int d^3k \left(\frac{e^{-i(x_1-x_2)k}}{\omega} \right) = \int d^3k \frac{\exp(-i\omega \Delta t + i\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{x})}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= \int d^3k \frac{\exp(-i\omega \Delta t + i|\mathbf{k}| \Delta x \cos(\theta))}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \frac{\mathbf{k}^2 \sin(\theta) \exp(-i\omega \Delta t) \exp(i|\mathbf{k}| \Delta x \cos(\theta))}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (\text{C.42}) \\ &= 2\pi \int_0^\infty dk \frac{2 \sin(|\mathbf{k}| \Delta x) \mathbf{k}^2 \exp(-i\omega \Delta t)}{|\mathbf{k}| \Delta x \sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk \frac{|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}| \Delta x) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{\sqrt{k^2 + m^2} \Delta x} = 4\pi I_a(1, 1, 1). \end{aligned}$$

De forma idéntica obtenemos

$$I_B = \int d^3k \left(e^{-i(x_1-x_2)k} \right) = 4\pi I_a(1, 0, 1), \quad (\text{C.43})$$

$$I_C = \int d^3k \left(\omega e^{-i(x_1-x_2)k} \right) = 4\pi I_a(1, -1, 1), \quad (\text{C.44})$$

$$I_F = \int d^3k \left(\omega^2 e^{-i(x_1-x_2)k} \right) = 4\pi I_a(1, -2, 1), \quad (\text{C.45})$$

$$I_G = \int d^3k \left(\omega^3 e^{-i(x_1-x_2)k} \right) = 4\pi I_a(1, -3, 1). \quad (\text{C.46})$$

Las integrales vectoriales son todas iguales salvo por la potencia de ω en el integrando

(0, 1 o -1). Por lo tanto analizaremos solo $\vec{\mathbf{I}}_E$ en detalle, siendo el resto equivalentes.

$$\vec{\mathbf{I}}_E = \int d^3k \left(\mathbf{k} e^{-i(x_1-x_2)k} \right). \quad (\text{C.47})$$

Nuevamente eligiendo un sistema de referencia tal que $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ este en la dirección z y usando esféricas, podemos ver cada componente de la integral por separado

x)

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \left(\mathbf{k}^2 \sin(\theta) e^{-i\omega \Delta t + i|\mathbf{k}| \Delta x \cos(\theta)} |\mathbf{k}| \sin(\theta) \cos(\phi) \right) = 0. \quad (\text{C.48})$$

y)

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \left(\mathbf{k}^2 \sin(\theta) e^{-i\omega \Delta t + i|\mathbf{k}| \Delta x \cos(\theta)} |\mathbf{k}| \sin(\theta) \sin(\phi) \right) = 0. \quad (\text{C.49})$$

z)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \left(\mathbf{k}^2 \sin(\theta) e^{-i\omega \Delta t + i|\mathbf{k}| \Delta x \cos(\theta)} |\mathbf{k}| \cos(\theta) \right) \\ &= 2\pi \int_0^\infty dk \mathbf{k}^3 \exp(-i\omega \Delta t) \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \cos(\theta) \exp(i|\mathbf{k}| \Delta x \cos(\theta)) \\ &= 4\pi i \int_0^\infty dk \frac{\mathbf{k}^3 \exp(-i\omega \Delta t)}{\mathbf{k}^2 \Delta x^2} (\sin(|\mathbf{k}| \Delta x) - |\mathbf{k}| \Delta x \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)) \\ &= 4\pi i \left(\int_0^\infty dk \frac{|\mathbf{k}| \exp(-i\omega \Delta t) \sin(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x^2} \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty dk \frac{\mathbf{k}^2 \exp(-i\omega \Delta t) \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= 4\pi i (I_a(1, 0, 2) + I_b(2, 0, 1)). \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Donde las integrales en ϕ son las que anulan las primeras dos componentes. De forma idéntica se obtiene que

$$\vec{\mathbf{I}}_E = 4\pi i (I_a(1, 0, 2) + I_b(2, 0, 1)) \hat{z}, \quad (\text{C.51})$$

$$\vec{\mathbf{I}}_D = 4\pi i (I_a(1, 1, 2) + I_b(2, 1, 1)) \hat{z}, \quad (\text{C.52})$$

$$\vec{\mathbf{I}}_H = 4\pi i (I_a(1, -1, 2) + I_b(2, -1, 1)) \hat{z}. \quad (\text{C.53})$$

I_{12} es un caso especial, por lo que lo estudiaremos en detalle

$$I_{12} = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(\frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{\omega_1 \omega_2} e^{-i(x_1 - x_2)(k_1 + k_2)} \right). \quad (\text{C.54})$$

Nuevamente elegimos un sistema de referencia tal que $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ este en la dirección z y usamos esféricas, por lo tanto \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 son

$$\mathbf{k}_1 = \{|\mathbf{k}_1| \sin(\theta_1) \cos(\phi_1), |\mathbf{k}_1| \sin(\theta_1) \sin(\phi_1), |\mathbf{k}_1| \cos(\theta_1)\}, \quad (\text{C.55})$$

$$\mathbf{k}_2 = \{|\mathbf{k}_2| \sin(\theta_2) \cos(\phi_2), |\mathbf{k}_2| \sin(\theta_2) \sin(\phi_2), |\mathbf{k}_2| \cos(\theta_2)\}, \quad (\text{C.56})$$

y su producto escalar es

$$(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 = \mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)). \quad (\text{C.57})$$

Por otro lado, la exponencial queda

$$\begin{aligned} \exp(-i(|\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2|) \Delta x) &= \exp(-i(\omega_1 + \omega_2) \Delta t + i \mathbf{k}_1 \cdot \Delta \mathbf{x} + i \mathbf{k}_2 \cdot \Delta \mathbf{x}) \\ &= e^{-i(\omega_1 + \omega_2) \Delta t} e^{i|\mathbf{k}_1| \Delta x \cos(\theta_1)} e^{i|\mathbf{k}_2| \Delta x \cos(\theta_2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Ya podemos hacer entonces las integrales angulares, en concreto hay que integrar

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \times \\ \times e^{i|\mathbf{k}_1| \Delta x \cos(\theta_1)} e^{i|\mathbf{k}_2| \Delta x \cos(\theta_2)} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Integrando sobre ϕ_1 y ϕ_2 queda

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) e^{i|\mathbf{k}_1| \Delta x \cos(\theta_1)} e^{i|\mathbf{k}_2| \Delta x \cos(\theta_2)} \times \\ \times \frac{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \pi^2}{2} (3 + \cos(2\theta_2) + \cos(2\theta_1) (1 + 3 \cos(2\theta_2))). \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Al integrar en θ_1 y θ_2 y expandir el resultado se obtienen 9 términos de la forma general

$$f(|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2|, \Delta x) \text{trig}(|\mathbf{k}_1| \Delta x) \text{trig}(|\mathbf{k}_2| \Delta x), \quad (\text{C.61})$$

donde trig es la función seno o coseno.

Al juntar esos nueve términos con el término que no incluimos en la integral angular por

solo depender de los módulos

$$\frac{e^{-i(\omega_1+\omega_2)\Delta t} \mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m^2}}, \quad (\text{C.62})$$

se puede escribir la integral I_{12} en términos de de I_a y I_b , quedando

$$\begin{aligned} I_{12} = & 96 \pi^2 I_b(2, 1, 2) I_b(2, 1, 2) - 96 \pi^2 I_b(2, 1, 2) I_a(1, 1, 3) + \\ & + 32 \pi^2 I_b(2, 1, 2) I_a(3, 1, 1) - 96 \pi^2 I_b(2, 1, 2) I_a(1, 1, 3) + \\ & + 32 \pi^2 I_b(2, 1, 2) I_a(3, 1, 1) + 96 \pi^2 I_a(1, 1, 3) I_a(1, 1, 3) - \\ & - 32 \pi^2 I_a(3, 1, 1) I_a(1, 1, 3) - 32 \pi^2 I_a(3, 1, 1) I_a(1, 1, 3) + \\ & + 16 \pi^2 I_a(3, 1, 1) I_a(3, 1, 1). \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

Lo que finalmente se simplifica a

$$\begin{aligned} I_{12} = & 16 \pi^2 \left(\sqrt{6} I_b(2, 1, 2) + I_a(3, 1, 1) - \sqrt{6} I_a(1, 1, 3) \right)^2 + \\ & + 16 \pi^2 \left(4 - 2 \sqrt{6} \right) I_a(3, 1, 1) \left(I_b(2, 1, 2) - I_a(1, 1, 3) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

C.5.1. Caso no masivo

En esta sección damos los resultados explícitos de las integrales relevantes para el cálculo de la covarianza del campo escalar no masivo. De las Ecs. (6.70) y (6.71) y con las relaciones de las Ecs. (6.58) y (6.61) a (6.65) es directo obtener

$$I_3 = \frac{64 \pi^2 (3 \Delta t^2 + \Delta x^2)^2}{(\Delta t^2 - \Delta x^2)^6}, \quad (\text{C.65})$$

$$I_7 = \frac{1024 \pi^2 \Delta t^2 \Delta x^2}{(\Delta t^2 - \Delta x^2)^6}, \quad (\text{C.66})$$

$$I_8 = I_9 = \frac{768 \pi^2 \Delta t^2 (\Delta t^2 + \Delta x^2)}{(\Delta t^2 - \Delta x^2)^6}, \quad (\text{C.67})$$

$$I_{10} = \frac{384 \pi^2 (5 \Delta t^4 + 10 \Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta x^4)}{(\Delta t^2 - \Delta x^2)^6}, \quad (\text{C.68})$$

$$I_{11} = \frac{1024 \pi^2 \Delta x^2 (5 \Delta t^2 + \Delta x^2)}{(\Delta t^2 - \Delta x^2)^6}, \quad (\text{C.69})$$

$$I_{12} = \frac{64 \pi^2 (3 \Delta t^4 + 2 \Delta t^2 \Delta x^2 + 11 \Delta x^4)}{(\Delta t^2 - \Delta x^2)^6}. \quad (\text{C.70})$$

C.5.2. Integrales de la covarianza para separación temporal

En esta sección obtendremos las integrales \vec{I}_E , \vec{I}_D , \vec{I}_H e I_{12} para el campo escalar masivo y con separación solo temporal. Primero mostraremos en detalle cómo se obtiene \vec{I}_E por los dos mecanismos mencionados en el Capítulo 6.

Si $\Delta x = 0$, \vec{I}_E es

$$\vec{I}_E = \int d^3k \left(\mathbf{k} e^{-i\omega \Delta t} \right). \quad (\text{C.71})$$

Vemos cada componente por separado

x)

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \left(\mathbf{k}^2 \sin(\theta) \exp(-i\omega \Delta t) |\mathbf{k}| \sin(\theta) \cos(\phi) \right) = 0. \quad (\text{C.72})$$

y)

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \left(\mathbf{k}^2 \sin(\theta) \exp(-i\omega \Delta t) |\mathbf{k}| \sin(\theta) \sin(\phi) \right) = 0. \quad (\text{C.73})$$

z)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \left(\mathbf{k}^2 \sin(\theta) \exp(-i\omega \Delta t) |\mathbf{k}| \cos(\theta) \right) \\ & = 2\pi \int_0^\infty dk \mathbf{k}^3 \exp(-i\omega \Delta t) \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \cos(\theta) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

O sea, que para $\Delta x = 0$ queda $\vec{I}_E = 0$. Esto lo podemos ver también haciendo el límite de \vec{I}_E como función de I_a e I_b

$$\begin{aligned} \vec{I}_E &= 4\pi i (I_a(1, 0, 2) + I_b(2, 0, 1)) \hat{z} \\ &= 4\pi i \left(\int_0^\infty dk \frac{|\mathbf{k}| \exp(-i\omega \Delta t) \sin(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x^2} - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty dk \frac{\mathbf{k}^2 \exp(-i\omega \Delta t) \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x} \right) \hat{z} \\ &= 4\pi i \left(\int_0^\infty dk \exp(-i\omega \Delta t) |\mathbf{k}| \left(\frac{\sin(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{|\mathbf{k}| \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x} \right) \right) \hat{z}. \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Y como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{|\mathbf{k}| \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)}{\Delta x} \right) = 0. \quad (\text{C.76})$$

Queda nuevamente

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\vec{I}_E) = 0. \quad (\text{C.77})$$

De forma idéntica se obtiene

$$\vec{I}_D = 0, \quad (\text{C.78})$$

$$\vec{I}_H = 0. \quad (\text{C.79})$$

En el caso de I_{12} también se puede hacer de las dos formas, pero la más fácil es partir de la Ec. (C.39) ya con $\Delta x = 0$

$$I_{12} = \iint d^3 k_1 d^3 k_2 \left(\frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{\omega_1 \omega_2} e^{-i(\omega_1 + \omega_2) \Delta t} \right). \quad (\text{C.80})$$

Usando un sistema de referencia tal que \mathbf{k}_2 quede en la dirección z tenemos que en esféricas

$$(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 = \mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \cos^2(\theta_1), \quad (\text{C.81})$$

y la integral a realizar es

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int d^3 k_2 \left(\frac{\mathbf{k}_2^2 e^{-i\omega_2 \Delta t}}{\omega_2} \right) \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \times \\ &\times \int_0^\infty dk_1 \left(\mathbf{k}_1^2 \sin(\theta_1) e^{-i\omega_1 \Delta t} \frac{\mathbf{k}_1^2 \cos^2(\theta_1)}{\omega_1} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

De

$$\int_0^\pi d\theta_1 \sin(\theta_1) \cos^2(\theta_1) = \frac{2}{3}. \quad (\text{C.83})$$

Queda

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{4\pi}{3} \int d^3 k_2 \left(\frac{\mathbf{k}_2^2 e^{-i\omega_2 \Delta t}}{\omega_2} \right) \int_0^\infty dk_1 \left(\frac{\mathbf{k}_1^4 e^{-i\omega_1 \Delta t}}{\omega_1} \right) \\ &= \frac{16\pi^2}{3} \left(\int_0^\infty dk \frac{\mathbf{k}^4 \exp(-i\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \Delta t)}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \right)^2 \\ &= \frac{16\pi^2}{3} \tilde{I}_a(3, 1)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

Resolución de \tilde{I}_a

En esta sección mostraremos los resultados explícitos de las diferentes \tilde{I}_a que aparecen al calcular la covarianza del campo escalar masivo, para separación temporal.

De las Ecs. (6.77) a (6.82) y (6.86) vemos que las integrales a realizar son $\tilde{I}_a(1, 1)$, $\tilde{I}_a(1, 0)$, $\tilde{I}_a(1, -1)$, $\tilde{I}_a(1, -2)$, $\tilde{I}_a(1, -3)$ e $\tilde{I}_a(3, 1)$. Esto corresponde a 5 valores de β . \tilde{I}_a se puede calcular en cada uno de estos valores y α genérico, para luego evaluar en los α de interés. Cabe destacar ahora que las integrales anteriores no convergen para un Δt real. Para resolver esto hacemos el cambio $\Delta t \rightarrow -i \Delta \tau + \Delta t$. Ahora sí podemos tomar Δt y $\Delta \tau$ reales y tener igualmente una integral convergente. Debido a este cambio todas las igualdades se tendrán que entender en el sentido del límite $\Delta \tau \rightarrow 0$.

Resolviendo las integrales con el programa MATHEMATICA, queda

$$\tilde{I}_a(1, 1) = -\frac{i m}{\Delta t} K_1(i m \Delta t), \quad (\text{C.85})$$

$$\tilde{I}_a(1, 0) = -\frac{i m^2}{\Delta t} K_2(i m \Delta t), \quad (\text{C.86})$$

$$\tilde{I}_a(3, 1) = -\frac{3 m^2}{\Delta t^2} K_2(i m \Delta t), \quad (\text{C.87})$$

$$\tilde{I}_a(1, -1) = \frac{m^2}{\Delta t^2} (-i m \Delta t K_1(i m \Delta t) - 3 K_2(i m \Delta t)), \quad (\text{C.88})$$

$$\tilde{I}_a(1, -2) = \frac{m^3}{\Delta t^2} (-i m \Delta t K_2(i m \Delta t) - 3 K_3(i m \Delta t)), \quad (\text{C.89})$$

$$\tilde{I}_a(1, -3) = \frac{m^3}{\Delta t^3} (-2 m \Delta t K_2(i m \Delta t) - i (m^2 \Delta t^2 - 15) K_3(i m \Delta t)), \quad (\text{C.90})$$

donde que ya se aplicó el límite $\Delta \tau \rightarrow 0$ y $K_\nu(z)$ es la función de Bessel modificada del segundo tipo.

C.5.3. Integrales de la covarianza para separación espacial

En esta sección resolveremos I_a e I_b para los valores particulares de α y β que necesitamos para el caso de separación solo espacial. Considerando que para $\Delta t = 0$, I_a e I_b tienen las formas dadas por las Ecs. (6.98) y (6.99). Tenemos que, usando $p = \beta/2$, queda

$$\begin{aligned} I_a(1, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty dk \left(\frac{|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}| \Delta x)}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^{p-\gamma}} \right) \\ &= \frac{2^{\frac{1}{2}-p} \sqrt{\pi} \Delta x^{1-\gamma} K_{p-\frac{3}{2}}(m |\Delta x|) \left(\frac{|\Delta x|}{m} \right)^{p-\frac{3}{2}}}{\Gamma(p)}, \end{aligned} \quad (\text{C.91})$$

$$\begin{aligned}
I_a(3, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^3 \sin(|\mathbf{k}| \Delta x)}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^p \Delta x^\gamma} \right) \\
&= - \frac{2^{-p-\frac{1}{2}} m^{\frac{5}{2}-p} \pi^{3/2} \Delta x^{1-\gamma} |\Delta x|^{p-\frac{5}{2}}}{\Gamma(p)} \times \\
&\quad \times \left(3 I_{\frac{5}{2}-p}(m |\Delta x|) - 2(p-1) I_{p-\frac{5}{2}}(m |\Delta x|) + \right. \\
&\quad \left. + m |\Delta x| \left(I_{\frac{7}{2}-p}(m |\Delta x|) - I_{p-\frac{3}{2}}(m |\Delta x|) \right) \right) \sec(p\pi),
\end{aligned} \tag{C.92}$$

$$\begin{aligned}
I_b(2, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty dk \left(\frac{\mathbf{k}^2 \cos(|\mathbf{k}| \Delta x)}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^p \Delta x^\gamma} \right) \\
&= \frac{2^{-\frac{1}{2}-p} m^{\frac{3}{2}-p} \pi^{3/2} \Delta x^{-\gamma} |\Delta x|^{p-\frac{3}{2}}}{\Gamma(p)} \left(I_{\frac{3}{2}-p}(m |\Delta x|) - 2(p-1) \times \right. \\
&\quad \left. \times I_{p-\frac{3}{2}}(m |\Delta x|) + m |\Delta x| \left(I_{\frac{5}{2}-p}(m |\Delta x|) - I_{p-\frac{1}{2}}(m |\Delta x|) \right) \right) \sec(p\pi).
\end{aligned} \tag{C.93}$$

Ahora evaluamos para los diferentes valores de β dados por las Ecs. (C.42) a (C.46), (C.51) a (C.53) y (C.64),

$$I_a(1, 1, \gamma) = \frac{m \Delta x^{1-\gamma} K_1(m |\Delta x|)}{|\Delta x|}, \tag{C.94}$$

$$I_a(3, 1, \gamma) = m^2 \Delta x^{-1-\gamma} (-m |\Delta x| K_1(m |\Delta x|) K_2(m |\Delta x|)), \tag{C.95}$$

$$I_a(1, -3, \gamma) = \frac{3 m^3 \Delta x^{1-\gamma} K_3(m |\Delta x|)}{|\Delta x|^3}, \tag{C.96}$$

$$I_a(1, -1, \gamma) = -m^2 \Delta x^{-1-\gamma} K_2(m |\Delta x|), \tag{C.97}$$

$$I_b(2, 1, \gamma) = -\frac{m \Delta x^{-\gamma}}{|\Delta x|} (m |\Delta x| K_0(m |\Delta x|) + K_1(m |\Delta x|)), \tag{C.98}$$

$$I_b(2, -1, \gamma) = m^2 \Delta x^{-2-\gamma} (m |\Delta x| K_1(m |\Delta x|) + 3 K_2(m |\Delta x|)), \tag{C.99}$$

$$I_b(2, 0, \gamma) = 0, \tag{C.100}$$

$$I_a(1, -2, \gamma) = 0, \tag{C.101}$$

$$I_a(1, 0, \gamma) = 0. \tag{C.102}$$

C.6. Integrales para la covarianza del campo fermiónico

En esta sección mostraremos como se obtiene la Ec. (6.188) de la Ec. (6.187).

Los dos términos de la Ec. (6.187) a integrar son

$$(P_1 - Q_1)_{12} = \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu u_{r_2}(\mathbf{k}_2) (-i(k_{2\mu} - k_{1\mu})) e^{-ix_1(k_1+k_2)}, \quad (\text{C.103})$$

$$(P_4 - Q_4)_{21} = \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu v_{r_1}(\mathbf{k}_1) (i(k_{1\mu} - k_{2\mu})) e^{ix_2(k_1+k_2)}. \quad (\text{C.104})$$

Analizaremos cada uno por separado

$P_4 - Q_4$

$$(P_4 - Q_4)_{21} = i e^{ix_2(k_1+k_2)} (\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu v_{r_1}(\mathbf{k}_1) k_{1\mu} - \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu v_{r_1}(\mathbf{k}_1) k_{2\mu}), \quad (\text{C.105})$$

donde el primer término del lado derecho lo separamos de la siguiente manera

$$\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu k_{1\mu} v_{r_1}(\mathbf{k}_1) = -\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \not{k}_1 v_{r_1}(\mathbf{k}_1) + 2 \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_0 k_{10} v_{r_1}(\mathbf{k}_1). \quad (\text{C.106})$$

De la ecuación de movimiento sabemos que

$$(\not{k}_1 + m) v_{r_1}(\mathbf{k}_1) = 0. \quad (\text{C.107})$$

Por lo que queda

$$\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu k_{1\mu} v_{r_1}(\mathbf{k}_1) = m \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1) + 2 E_{k_1} u_{r_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1). \quad (\text{C.108})$$

El segundo término del lado derecho lo separamos de igual forma

$$-\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu k_{2\mu} v_{r_1}(\mathbf{k}_1) = \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \not{k}_2 v_{r_1}(\mathbf{k}_1) - 2 \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_0 k_{20} v_{r_1}(\mathbf{k}_1), \quad (\text{C.109})$$

y con

$$\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) (\not{k}_2 + m) = 0. \quad (\text{C.110})$$

Lo escribimos como

$$-\bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu k_{2\mu} v_{r_1}(\mathbf{k}_1) = m \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1) - 2 E_{k_2} u_{r_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1). \quad (\text{C.111})$$

Entonces juntando las Ecs. (C.108) y (C.111) queda

$$(P_4 - Q_4)_{21} = i e^{i x_2 (k_1 + k_2)} \left(2 m \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1) + \right. \\ \left. + 2 (E_{k_1} - E_{k_2}) u_{r_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_2) \right). \quad (\text{C.112})$$

$P_1 - Q_1$

De igual forma que con $P_4 - Q_4$, escribimos

$$(P_1 - Q_1)_{12} = i e^{-i x_1 (k_1 + k_2)} \left(-\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu u_{r_2}(\mathbf{k}_2) k_{2\mu} + \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu u_{r_2}(\mathbf{k}_2) k_{1\mu} \right). \quad (\text{C.113})$$

Luego separando el primer término del lado derecho

$$-\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu k_{2\mu} u_{r_2}(\mathbf{k}_2) = \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \not{k}_2 u_{r_2}(\mathbf{k}_2) - 2 \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_0 k_{20} u_{r_2}(\mathbf{k}_2), \quad (\text{C.114})$$

y con $(\not{k}_2 + m) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) = 0$ queda

$$-\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu k_{2\mu} u_{r_2}(\mathbf{k}_2) = m \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) - 2 E_{k_2} \bar{v}_{r_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2). \quad (\text{C.115})$$

Hacemos igual con el segundo término

$$\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu k_{1\mu} u_{r_2}(\mathbf{k}_2) = -\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \not{k}_1 u_{r_2}(\mathbf{k}_2) + 2 \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_0 k_{10} u_{r_2}(\mathbf{k}_2), \quad (\text{C.116})$$

y con $\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1)(\not{k}_1 + m) = 0$ queda

$$\bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) \gamma_\mu k_{1\mu} u_{r_2}(\mathbf{k}_2) = m \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) + 2 E_{k_1} \bar{v}_{r_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2). \quad (\text{C.117})$$

Finalmente, juntando todo obtenemos

$$(P_1 - Q_1)_{12} = i e^{-i x_1 (k_1 + k_2)} \left(2 m \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) + \right. \\ \left. + 2 (E_{k_1} - E_{k_2}) \bar{v}_{r_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) \right). \quad (\text{C.118})$$

Ahora, podemos escribir F como

$$\langle \Omega^2(x_1) \Omega^2(x_2) \rangle - \langle \Omega^2 \rangle^2 = -\frac{4 \pi^2 G^2}{9} \iint \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} f(k_1, k_2) e^{i(x_2 - x_1)(k_1 + k_2)}, \quad (\text{C.119})$$

donde

$$f(k_1, k_2) = \sum_{r_1, r_2} \left(\frac{-4m^2}{E_{k_1} E_{k_2}} \left(m \bar{v}_{r_1}(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) + (E_{k_1} - E_{k_2}) v_{r_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) u_{r_2}(\mathbf{k}_2) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(m \bar{u}_{r_2}(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1) + (E_{k_1} - E_{k_2}) u_{r_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) v_{r_1}(\mathbf{k}_1) \right) \right). \quad (\text{C.120})$$

Reemplazando por las expresiones explicitas de $u_r(k)$ y $v_r(k)$ queda el f final utilizado en la Ec. (6.188)

$$f(k_1, k_2) = - \frac{2}{E_{k_1} (m + E_{k_1}) E_{k_2} (m + E_{k_2})} \times \\ \times \left((\Delta E_1 k_{1z} (m + E_{k_2}) - \Delta E_2 k_{2z} (m + E_{k_1}))^2 + \right. \\ \left. + (\Delta E_1 K_1^- (m + E_{k_2}) - \Delta E_2 K_2^- (m + E_{k_1})) \times \right. \\ \left. \times (\Delta E_1 K_1^+ (m + E_{k_2}) - \Delta E_2 K_2^+ (m + E_{k_1})) \right), \quad (\text{C.121})$$

donde

$$K_1^- = k_{1x} - i k_{1y}, \quad (\text{C.122})$$

$$K_1^+ = k_{1x} + i k_{1y}, \quad (\text{C.123})$$

$$K_2^- = k_{2x} - i k_{2y}, \quad (\text{C.124})$$

$$K_2^+ = k_{2x} + i k_{2y}, \quad (\text{C.125})$$

y

$$\Delta E_1 = m + E_{k_1} - E_{k_2}, \quad (\text{C.126})$$

$$\Delta E_2 = m - E_{k_1} + E_{k_2}. \quad (\text{C.127})$$

Bibliografía

- [1] Q. Wang, Z. Zhu y W. G. Unruh. «How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the Universe». En: *Phys. Rev. D* 95 (mayo de 2017), pág. 103504. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.103504> (págs. 1, 2, 13, 39, 42, 50, 77, 91, 95, 116, 125, 126).
- [2] S. S. Cree y col. «Can the fluctuations of the quantum vacuum solve the cosmological constant problem?» En: *Phys. Rev. D* 98 (sep. de 2018), pág. 063506. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.063506> (págs. 1, 13).
- [3] Q. Wang y W. G. Unruh. «Vacuum fluctuation, micro-cyclic “universes” and the cosmological constant problem». En: *arXiv preprint gr-qc/1904.08599v2* (ago. de 2019). URL: <https://arxiv.org/abs/1904.08599v2> (págs. 1, 13, 39, 50).
- [4] F. D. Mazzitelli y L. G. Trombetta. «Comment on “How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the Universe”». En: *Phys. Rev. D* 97 (mar. de 2018), pág. 068301. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.068301> (pág. 2).
- [5] Q. Wang y W. G. Unruh. «Reply to “Comment on ‘How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the Universe’”». En: *Phys. Rev. D* 97 (mar. de 2018), pág. 068302. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.068302> (pág. 2).
- [6] C. W. Misner, J. A. Wheeler y K. S. Thorne. *Gravitation*. Princeton University Press, 1973. ISBN: 9780691177793 (pág. 2).
- [7] J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity*. Pearson, 2003. ISBN: 9780805386622 (pág. 4).
- [8] L. Parker y D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780511813924. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09780511813924> (págs. 7, 137).
- [9] B. L. Hu y E. Verdaguer. «Stochastic gravity: theory and applications». En: *Living Rev. Relativ.* 11 (mayo de 2008), pág. 3. URL: <https://doi.org/10.12942/lrr-2008-3> (págs. 7, 8).

- [10] R. Martín y E. Verdaguer. «Stochastic semiclassical fluctuations in Minkowski spacetime». En: *Phys. Rev. D* 61 (mayo de 2000), pág. 124024. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.124024> (págs. 7, 8).
- [11] E. Kh. Akhmedov. «Vacuum energy and relativistic invariance». En: *arXiv preprint hep-th/0204048v2* (jun. de 2002). URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0204048v2> (pág. 11).
- [12] M. Elías y F. D. Mazzitelli. «Ultraviolet cutoffs for quantum fields in cosmological spacetimes». En: *Phys. Rev. D* 91 (jun. de 2015), pág. 124051. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.124051> (pág. 11).
- [13] C. G. Bollini y J. J. Giambiagi. «Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter». En: *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 12 (nov. de 1972), págs. 20-26. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02895558> (pág. 11).
- [14] J. C. Collins. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1984. ISBN: 9780511622656. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09780511622656> (págs. 11, 159).
- [15] J. Martin. «Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask)». En: *C. R. Phys.* 13 (2012), págs. 566-665. URL: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2012.04.008> (págs. 12, 26, 35, 121).
- [16] J. F. Koksma y T. Prokopec. «The cosmological constant and lorentz invariance of the vacuum state». En: *arXiv preprint gr-qc/1105.6296* (mayo de 2011). URL: <https://arxiv.org/abs/1105.6296> (págs. 12, 29).
- [17] M. A. Castagnino, D. D. Harari y J. P. Paz. «De Sitter self-consistent cosmology for Weinberg-type fields». En: *Classical Quant. Grav.* 3 (jul. de 1986), págs. 569-580. URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/3/4/011> (págs. 15, 22, 23, 25, 26).
- [18] S. Wada y T. Azuma. «De Sitter metric as a self-consistent solution of the back reaction problem». En: *Phys. Lett. B* 132 (dic. de 1983), págs. 313-316. URL: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90315-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90315-5) (págs. 15, 23).
- [19] N. D. Birrell y P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1982. ISBN: 9780511622632. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09780511622632> (págs. 15, 17, 22, 23, 102, 149).

- [20] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Release 1.0.24 of 2019-09-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds. URL: <http://dlmf.nist.gov/> (págs. 19-21).
- [21] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. «Chapter V - Small oscillations». En: *Mechanics*. Third Edition. Butterworth-Heinemann, 1976, págs. 58-95. ISBN: 9780750628969. URL: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050347-9.50010-1> (págs. 46, 56).
- [22] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2012. ISBN: 9780821883280 (pág. 46).
- [23] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. «Chapter VII - The canonical equations». En: *Mechanics*. Third Edition. Butterworth-Heinemann, 1976, págs. 131-167. ISBN: 9780750628969. URL: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050347-9.50012-5> (pág. 47).
- [24] S. Carlip. «Hiding the cosmological constant». En: *Phys. Rev. Lett.* 123 (sep. de 2019), pág. 131302. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.131302> (pág. 51).
- [25] G. Papanicolau y J. B. Keller. «Stochastic differential equations with applications to random harmonic oscillators and wave propagation in random media». En: *SIAM J. Appl. Math.* 21 (sep. de 1971), págs. 287-305. URL: <https://www.jstor.org/stable/2100052> (págs. 54, 55, 77, 126).
- [26] D. J. Acheson. «A pendulum theorem». En: *Proc. R. Soc. Lond. A* 443 (oct. de 1993), págs. 239-245. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0142> (pág. 54).
- [27] J. A. Blackburn, H. J. T. Smith y N. Grøbech-Jensen. «Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum». En: *Am. J. Phys.* 60 (1992), págs. 903-908. URL: <https://doi.org/10.1119/1.17011> (pág. 54).
- [28] M. S. Howe. «The mean square stability of an inverted pendulum subject to random parametric excitation». En: *J. Sound. Vib.* 32 (feb. de 1974), págs. 407-421. URL: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80096-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80096-9) (págs. 56, 70, 121, 126).
- [29] «Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates». En: *Collected Papers of P.L. Kapitza*. Ed. por D. ter Haar. Pergamon, 1965, págs. 714-725. ISBN: 9780080109732. URL: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-010973-2.50015-X> (pág. 56).

- [30] B. L. Hu, J. P. Paz e Y. Zhang. «Quantum Brownian motion in a general environment: Exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise». En: *Phys. Rev. D* 45 (abr. de 1992), págs. 2843-2861. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.45.2843> (pág. 61).
- [31] B. L. Hu, J. P. Paz e Y. Zhang. «Quantum Brownian motion in a general environment. II. Nonlinear coupling and perturbative approach». En: *Phys. Rev. D* 47.4 (feb. de 1993), págs. 1576-1594. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1576> (pág. 61).
- [32] N. G. Phillips y B. L. Hu. «Vacuum energy density fluctuations in Minkowski and Casimir states via smeared quantum fields and point separation». En: *Phys. Rev. D* 62 (sep. de 2000), pág. 084017. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.084017> (pág. 122).
- [33] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. «Chapter 11 - The gravitational field equations». En: *The Classical Theory of Fields*. Fourth Edition. Pergamon, 1975, págs. 259-294. ISBN: 9780080250724. URL: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-025072-4.50018-6> (pág. 137).
- [34] Pierre Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*. Frontiers in Physics. Westview Press, 2001. ISBN: 9780201304503 (pág. 158).

Agradecimientos

Primero, me gustaría agradecer a mi director, Diego Mazzitelli, por siempre tener el tiempo y las ganas para responder mis dudas, sin importar el día o el horario. Este trabajo no hubiera sido posible sin su incansable paciencia para explicarme una y otra vez todo lo que le necesitaba saber. Por otro lado, no puedo olvidarme de mi familia, mis padres y mi hermana, que desde Buenos Aires y desde el día que llegué al Balseiro siempre me bancaron, a la espera de que cada julio y enero volviera a mi casa. Luego, quiero dar un agradecimiento muy especial a Graciela Hoshino, gracias a quien conocí el Balseiro y sin la cual nada de esto hubiera sido posible. Finalmente, quisiera agradecer a Laura, que siempre estuvo a mi lado en los días buenos y los malos. Gracias a ella nunca me sentí solo.

