TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

COMPACTIFICACIONES EN TEORÍA DE CUERDAS Y DUALIDADES: TEORÍA DE CAMPOS EXTENDIDA

Lic. Hernán Saraceni
Maestrando

Dr. Gerardo Aldazábal
Director

Miembros del Jurado
Dr. César Fosco (Instituto Balseiro)
Dr. Gonzalo Torroba (Instituto Balseiro)
Dra. Carmen Nuñez (Universidad de Buenos Aires)

Diciembre de 2015

Grupo de Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis padres Gladys y Edgardo,
y a mi hermana Sabrina

"Pero, sin embargo, imaginando órdenes falsos habéis encontrado algo..."

Adso de Melk,
El Nombre de la Rosa

Índice de contenidos

Resumen

Se busca encontrar una sistematización para extender la acción del sector interno de la Teoría de Campos Extendida. Para esto, se analiza la estructura de la acción de la Teoría de Campos Doble, que tiene un origen y una estructura similar a la anterior. En particular se observa la restricción de la misma al espacio interno de la teoría. El escalar de curvatura correspondiente a dicha restricción es un escalar $O(6,6)$, pero no un escalar $O(10,10)$. Se observa cómo los términos "sobrantes" de la restricción complementan a los presentes en ella de manera de lograr una curvatura que es escalar en el sentido $O(10,10)$.

Palabras clave: TEORÍA DE CUERDAS, TEORÍA DE CAMPOS EXTENDIDA, TEORÍA DE CAMPOS DOBLE

Abstract

A sistemic method for finding a complete Extended Field Theory action is constructed. To this end, an analysis is made of the Double Field Theory action, as both theories have common origin and structure. This action's restriction to the internal space of the theory is studied. The scalar curvature corresponding to this restriction is a $O(6,6)$ scalar, but no a $O(10,10)$ one. The terms leftover from the restriction provide the missing structure in order to have a $O(10,10)$ scalar.

Keywords: STRING THEORY, EXTENDED FIELD THEORY, EXCEPTIONAL FIELD THEORY, DOUBLE FIELD THEORY

Capítulo 1

Introducción

La compactificación de supergravedad $D = 11$ o teoría M en un n-toro posee simetrías puramente *stringy*. Estas son la dualidad T y la dualidad S. La construcción de una teoría de campos que sea invariante bajo dualidad T tiene como resultado la Geometría Generalizada (GG) y la Teoría de Campos Doble (DFT o, simplemente, "teoría doble"). En GG el espacio tangente se extiende para incluir los vectores que generan las transformaciones de gauge del campo b. En DFT es el espacio mismo de la teoría el que es extendido.

Si bien la dualidad T es una simetría presente sólo para las coordenadas compactificadas, es posible tratar a todas las coordenadas de la teoría de esta manera, dando como resultado una formulación completamente covariante bajo el grupo de simetría de la dualidad T. En particular, se ha logrado formular la acción para esta teoría de dos maneras distintas: utilizando los campos, o utilizando los llamados flujos.

El intento de construcción de una teoría análoga a DFT, pero en la que también se incluya la dualidad S es la llamada Teoría de Campos Extendida (EFT o, simplemente, "teoría extendida"). Esta es una teoría de campos invariante bajo dualidad U (la cual incluye a las mencionadas dualidades). Sin embargo, no ha sido posible, como en el caso de DFT, realizar una formulación totalmente covariante de la misma, en la que se trate a todas las coordenadas como compactificadas. Esto es debido a que el grupo de simetría correspondiente a este caso tiene una estructura hasta el momento desconocida.

El trabajo actual en EFT ha dado como resultado la acción para el sector interno (coordenadas compactificadas) de la teoría y, recientemente, la expresión para la derivada de Lie de la teoría completa.

Dado que DFT y EFT son en muchos aspectos análogas, surge la posibilidad de investigar cómo se podría llegar a una acción completa de EFT mediante una analogía con el caso de DFT, el cual es conocido. Extrayendo de la acción de DFT su parte puramente interna, y observando de qué manera el resto de los términos complementan a esta expresión para dar la acción completa, se espera poder establecer un método sistemático que pueda ser aplicado al caso de EFT para así poder llegar a una expresión para la acción de la misma en el espacio completo.

La organización de esta tesis es la siguiente: En los capítulos 2 y 3 se realiza un repaso de los conceptos aprendidos durante el transcurso de la maestría. En particular, en el capítulo 2 corresponde a teoría de cuerdas bosónicas y supercuerdas, mientras que el capítulo 3 corresponde a supergravedad gaugeada. En el capítulo 4 se trabaja sobre el objetivo del que se habló en los párrafos anteriores. Finalmente, se presentan conclusiones sobre lo elaborado. Al final de la tesis se incluyen apéndices sobre temas que se tocan en la misma, pero que no se consideraron necesarios de hacer un tratamiento extenso.

Capítulo 2

Teoría de Cuerdas

2.1. Cuerdas bosónicas

2.1.1. Acción y simetrías

La acción de Polyakov para cuerdas está dada por

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}(\sigma)g_{\mu\nu}(X)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\,, \tag{2.1}$$

donde M representa la hoja de mundo sobre la que se integra, τ y σ son sus coordenadas, $d^2\sigma = d\tau d\sigma$ es el elemento de superficie, $h^{\alpha\beta}$ es la métrica que da la geometría de la hoja de mundo, y X^μ son los campos que la mapean al espacio-tiempo físico D-dimensional ("espacio de llegada") en el que se propagan las cuerdas ($\mu = 0, \ldots, D-1$). El rango de las coordenadas es $-\infty \leq \tau \leq \infty$ y $0 \leq \sigma \leq \pi$. Por el momento, T es una constante; más tarde se la interpretará como la tensión de la cuerda. Es útil saber la relación entre T y el parámetro de Regge α':

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha'}} \tag{2.2}$$

Las simetrías locales de esta acción son

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha\partial_\alpha X^\mu \tag{2.3}$$

$$\delta h^{\alpha\beta} = \xi^\gamma\partial_\gamma h^{\alpha\beta} - (\partial_\gamma\xi^\alpha)h^{\gamma\beta} - (\partial_\gamma\xi^\beta)h^{\alpha\gamma} \tag{2.4}$$

que representan invariancias por reparametrización, y el escaleo de Weyl

$$\delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta}\,. \tag{2.5}$$

También tenemos las simetrías globales

$$\delta X^\nu = a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu \tag{2.6}$$

y

$$\delta h^{\alpha\beta} = 0\,, \tag{2.7}$$

correspondientes a las simetrías del espacio de llegada. Nótese que ξ^α y Λ son funciones arbitrarias de las coordenadas de la hoja de mundo σ^α, mientras que $a_{\mu\nu}$ (elementos del grupo de Lorentz) y b^μ son constantes. Nótese también que (2.4) implica

$$\delta\sqrt{h} = \partial_\alpha(\xi^\alpha\sqrt{h})\,. \tag{2.8}$$

Es conveniente utilizar el tensor de energía-momento, dado por

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} &(2.9)\\ &= \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X^\mu\partial_{\beta'}X_\mu\,. &(2.10)\end{aligned}$$

El mismo tiene traza nula:

$$T_{\alpha\alpha} = h^{\alpha\beta} = -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}h^{\alpha\beta} = -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}\,\delta h^{\alpha\beta}\right) = 0\,, \tag{2.11}$$

donde en la última igualdad se utilizó que $\delta S = 0$ bajo transformaciones de Weyl $\delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta}$ (2.5). Se ve que la ecuación de campo $\delta S/\delta h^{\alpha\beta} = 0$ es equivalente a $T_{\alpha\beta} = 0$, lo que implica

$$\frac{1}{2}\int_M d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu = \int_M d^2\sigma\sqrt{\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu} \tag{2.12}$$

Esta es la fórmula para el área de la hoja de mundo M, propuesta por Nambu.

Debido a la presencia de las tres simetrías globales de gauge (2.3), (2.4), y (2.5), se puede, localmente, fijar los tres elementos independientes de la métrica $h_{\alpha\beta}$, y así llevarla a la métrica bidimensional de Minkowski

$$h_{\alpha\beta} \quad\to\quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\,. \tag{2.13}$$

De esta manera, la acción queda expresada como

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\ \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \tag{2.14}$$

$$= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\ \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu \,. \tag{2.15}$$

Resolviendo las ecuaciones de campo $\delta S/\delta X^\mu = 0$, obtenemos

$$\partial^2 X^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) X^\mu = 0\,, \tag{2.16}$$

que no es más que la ecuación de ondas libres en 2D. Es conveniente mencionar que, en el caso de cuerdas abiertas, para tener invariancia ante la variación general $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$ es necesario pedir la anulación del "término de superficie" que aparece al resolver las ecuaciones de campo para X^μ:

$$-\,T\int d\tau \left(X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}\right) = 0\,. \tag{2.17}$$

En el caso de cuerdas cerradas se pide la periodicidad en σ de los campos. Esto se profundizará en la próxima sección.

Volviendo a la ecuación de campo $\partial^2 X^\mu = 0$, es conocido que cualquier solución ondulatoria se puede descomponer en *right-movers* y *left-movers*:

$$X^\mu(\sigma) = X^\mu_R(\sigma) + X^\mu_L(\sigma)\,, \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^- &= \tau - \sigma \\ \sigma^+ &= \tau + \sigma\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

En estas coordenadas se tiene

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \tag{2.20}$$

y

$$\begin{aligned} \eta_{+-} = \eta_{-+} &= -\frac{1}{2} \\ \eta_{++} = \eta_{--} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Las componentes del tensor energía-momento se escriben

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X$$
$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_- X \,. \tag{2.22}$$

La ecuación de onda (2.16) debe complementarse con las ecuaciones de vínculo $T_{\alpha\beta} = 0$, que en las coordenadas (σ^+, σ^-) se convierten en

$$T_{+-} = T_{-+} = 0 \,, \tag{2.23}$$

que implica una invariancia conforme en la hoja de mundo. Así, se llega a la condición

$$\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0 \,, \tag{2.24}$$

donde se ha utilizado la notación $X' = \partial X/\partial\sigma$ y $\dot{X} = \partial X/\partial\tau$. Esta es la forma de las condiciones de vínculo que se utilizará de aquí en adelante.

Para finalizar esta sección, nótese que la conservación de energía-momento en las coordenadas (σ^+, σ^-) toma la forma

$$\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} = 0 \,, \tag{2.25}$$

mientras que agregando la invariancia conforme (2.23), se transforma en

$$\partial_- T_{++} = 0 \,. \tag{2.26}$$

Esta condición implica la existencia de una cantidad infinita de cantidades conservadas. Si $f(\sigma^+)$ es una función que depende sólo de σ^+, entonces $\partial_- f = 0$, con lo que también $\partial_-(f T_{++}) = 0$. Por lo tanto, se tiene infinitas cargas conservadas

$$Q_f = \int d\sigma f(\sigma^+) T_{++} \,. \tag{2.27}$$

Esto sólo ocurre en una teoría CFT en 2D. La ecuación (2.27) representa el efecto en el mundo físico de los vínculos (2.24).

La existencia de cargas conservadas es consecuencia de invariancias de gauge residuales de la fijación de gauge (2.13). Cualquier transformación de la forma

$$\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Lambda \eta^{\alpha\beta} \tag{2.28}$$

(combinación de reparametrización y simetría de Weyl) mantiene la mencionada fijación de gauge. Esto implica que ξ^+ es una función arbitraria de σ^+, y ξ^- es una función arbitraria de σ^-. O sea que estas simetrías residuales están generadas por los operadores

$$V^+ = \xi^+(\sigma^+)\frac{\partial}{\partial\sigma^+} \ , \quad V^- = \xi^-(\sigma^-)\frac{\partial}{\partial\sigma^-} \ . \tag{2.29}$$

Estos generan el grupo de transformaciones conformes en la hoja de mundo.

2.1.2. Condiciones de contorno

Para cuerdas cerradas, se pedirá la periodicidad de los campos

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+\pi) \tag{2.30}$$

La solución general de (2.16) compatible con (2.30) está dada por

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}l\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{2.31}$$
$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}l\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}\,, \tag{2.32}$$

donde los α_n^μ son coeficientes de Fourier, la longitud fundamental l está dada por $l=\sqrt{\pi T}$, y se han escrito constantes de normalización para futura conveniencia. x^μ y p^μ se pueden interpretar como la posición y el momento lineal del centro de masa de la cuerda.

Se ve en (2.31) y (2.32) que $X^\mu = X_R^\mu + X_L^\mu$ no tiene términos lineales en σ, con lo que se satisfacen las condiciones de contorno para la cuerda cerrada. Además, pidiendo que X_R^μ y X_L^μ sean reales, se satisface lo mismo para x^μ y p^μ, y también que

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger\ ,\quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger \tag{2.33}$$

De la expresión para la acción (2.1) es posible deducir los corchetes de Poisson para los campos

$$[\dot{X}^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')]_{PB} = \frac{1}{T}\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu} \tag{2.34}$$
$$[X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')]_{PB} = [\dot{X}^\mu(\sigma), \dot{X}^\nu(\sigma')]_{PB} = 0\,,$$

e introduciendo (2.31) y (2.32) en las anteriores, se llega a

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\mu]_{PB} = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu]_{PB} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \tag{2.35}$$
$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu]_{PB} = 0\,.$$

Así se ve que α_m y $\tilde{\alpha}_m$ son coordenadas de oscilador armónico para $n\neq 0$. Si se adopta la convención $\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu = \frac{1}{2}\,l\,p^\mu$, entonces (2.35) valen para todo n. Volviendo a corchetes de campos, se tiene

$$[p^\mu, x^\mu]_{PB} = \eta^{\mu\nu}\,, \tag{2.36}$$

con lo que x^μ y p^μ son conjugados canónicos, que es consecuente con su interpretación como la posición y el momento lineal del centro de masa de la cuerda.

Para cuerdas abiertas, se pide que el término de borde se anule:

$$X'^{\mu} = 0 \qquad \text{en} \;\; \sigma = 0\,,\, \pi\,. \tag{2.37}$$

O sea que la derivada normal de X^μ se anula en los extremos de la cuerda; la condición de contorno para una cuerda abierta libre. Esta condición es equivalente a que no haya flujo de momento por los extremos de la cuerda. La solución general a (2.16) compatible con estas condiciones está dada por

$$X^\mu = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma\,. \tag{2.38}$$

2.1.3. Invariancia de Poincaré

Ahora se analizará la invariancia de Poincaré, desde el punto de vista de la hoja de mundo. Esta invariancia está dada por

$$\delta X^\mu = a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu \tag{2.39}$$

y las correspondientes corrientes conservadas están dadas por

$$P^\mu_\alpha = T\partial_\alpha X^\mu \tag{2.40}$$

$$J^{\mu\nu}_\alpha = T(X^\mu \partial_\alpha X^\nu - X^\nu \partial_\alpha X^\mu)\,. \tag{2.41}$$

P^μ_α está asociada a la invariancia de traslación, mientras que $J^{\mu\nu}_\alpha$ está asociada a la invariancia de Lorentz. Así, la cantidad de momento (angular y lineal) que fluye a través de $(d\sigma, d\tau)$ es

$$dP^\mu = P^\mu_\tau d\sigma + P^\mu_\sigma d\tau\,. \tag{2.42}$$

Se ve que, debido a las condiciones de contorno, $dP^\mu = 0$ en $\sigma = 0\,, \pi$.

Como P^μ se conserva, se puede calcular en cualquier τ:

$$P^\mu = P^\mu(\tau = 0) = T\int_0^\pi d\sigma \dot{X}^\mu(\sigma) = \pi\, T\,(l\alpha_0^\mu + l\tilde{\alpha}_0^\mu) = p^\mu \tag{2.43}$$

con lo que se ve que el momento lineal total de la cuerda es p^μ, el de su centro de masa.

Este resultado también vale para cuerdas abiertas. En cuanto al impulso angular,

$$J^{\mu\nu} = T\int_0^\pi d\sigma(X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) = \begin{cases} l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} & \text{para cuerdas abiertas} \\ l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + \tilde{E}^{\mu\nu} & \text{para cuerdas cerradas} \end{cases} \tag{2.44}$$

donde

$$l^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \tag{2.45}$$

$$E^{\mu\nu} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n - \alpha^\nu_{-n}\alpha^\mu_n)\,, \tag{2.46}$$

e ídem para $\tilde{E}^{\mu\nu}$. Con estas cantidades es posible verificar que T es la tensión de la cuerda.

2.1.4. Modos de Virasoro

Las condiciones de vínculo (2.24) en términos de la expansión en modos del tensor de energía-momento, para el caso de cuerdas cerradas, están dadas por

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{T}{2}\int_0^\pi d\sigma\ e^{-2im\sigma}T_{--} \\ &= \frac{T}{2}\int_0^\pi d\sigma\ e^{-2im\sigma}\dot{X}_R^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_m &= \frac{T}{2}\int_0^\pi d\sigma\ e^{2im\sigma}T_{++} \\ &= \frac{T}{2}\int_0^\pi d\sigma\ e^{2im\sigma}\dot{X}_L^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}_{m-n}\cdot\tilde{\alpha}_n \end{aligned} \tag{2.48}$$

y las condiciones de vínculo se satisfacen pidiendo $L_m = \tilde{L}_m = 0 \ \ \forall m$.

Para el caso de cuerdas abiertas, como las funciones $e^{in\sigma}$ no son ortogonales en el intervalo $[0,\pi]$, se extienden de acuerdo a $X_R(\sigma+\pi) = X_R(\sigma)$ y $X_L(\sigma+\pi) = X_L(\sigma)$, con lo que se convierten en 2π-periódicas. Así,

$$\begin{aligned} L_m &= T\int_0^\pi d\sigma\ (e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}) \\ &= \frac{T}{4}\int_0^\pi d\sigma\ e^{im\sigma}(\dot{X}+X')^2 = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Es conveniente notar algunas cosas. El hamiltoniano de las cuerdas está dado por

$$H = \int_0^\pi (\dot{X} \cdot P_\tau - L) = \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^2 + X'^2) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n & \text{para cuerdas abiertas} \\ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \alpha_n) & \text{para cuerdas cerradas} \end{cases} \tag{2.50}$$

Así, para las cuerdas abiertas, el hamiltoniano es $H = L_0$, mientras que para cuerdas cerradas es $H = L_0 + \tilde{L}_0$. Además $L_0 - \tilde{L}_0 = 0$, por las condiciones de contorno.

La masa de una cuerda en un dado estado de oscilación está dada por $M^2 = -p_\mu p^\mu$. La condición de vínculo $L_0 = 0$ implica

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \tag{2.51}$$

para cuerdas abiertas, y

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \tag{2.52}$$

para cuerdas cerradas. Estas dos ecuaciones son la condición de capa de masa para los dos casos de cuerdas; dan la energía de la cuerda en términos de los modos de oscilación. El hecho de que $L_0 = \tilde{L}_0$ para cuerdas cerradas implica que las contribuciones de los dos términos en (2.52) son iguales.

L_m y $\tilde{L}_m$ se llaman “modos de Virasoro”. Sus corchetes de Poisson están dados por

$$[L_m, L_n]_{PB} = \frac{1}{4} \sum_{k,l} [\alpha_{m-k} \cdot \alpha_k, \alpha_{n-l} \cdot \alpha_l]_{PB} \tag{2.53}$$

Utilizando la identidad $[AB, CD] = A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B$ y los corchetes de Poisson de los osciladores, esto se convierte en

$$\begin{aligned}[L_m, L_n]_{PB} = \frac{i}{4} \sum_{k,l} (& k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_l \delta_{k+n-l} + k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_{n-l} \delta_{k+l} + \\ & + (m-k)\alpha_l \cdot \alpha_k \delta_{m-k+n-l} + (m-k)\alpha_{n-l} \cdot \alpha_k \delta_{m-k+l}) = \\ & = \frac{i}{2} \sum_k k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_{k+n} + \frac{i}{2} \sum_k (m-k)\alpha_{m-k+n} \cdot \alpha_k \, . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Haciendo el cambio de variables $k \to k' = k + n$ en el primer sumando, se obtiene la expresión para el álgebra de Virasoro

$$[L_m, L_n]_{PB} = i(m-n)L_{m+n}\,. \tag{2.55}$$

La misma expresión vale para $\tilde{L}$.

La interpretación física de la aparición de este álgebra es la siguiente. Sea el círculo S^1 parametrizado por la variable θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Una transformación infinitesimal $\theta \to \theta + a(\theta)$ está generada por $D_a = ia(\theta)\,d/d\theta$. Una base completa para estos difeomorfismos está dada por

$$D_n = ie^{in\theta}\frac{d}{d\theta} \tag{2.56}$$

los cuales obedecen el álgebra de Virasoro (2.55). Así, el álgebra de Virasoro es la misma que la de los difeomorfismos infinitesimales de S^1. Ahora, si se reemplaza $e^{in\theta}$ por $\xi^{\pm}$ y $i\,d/d\theta$ por $\partial/\partial\sigma^{\pm}$, entonces (2.56) coincide con (2.29), los generadores de las simetrías residuales de la fijación de gauge (2.13). Esto es consecuente con el hecho de que, luego de imponer las ecuaciones de movimiento de la teoría, las variables $\sigma^{\pm}$ pasan a desempeñar el papel de variables angulares de las mismas.

2.1.5. Cuantización covariante

La forma estándar de pasar de física clásica a cuántica es mediante la correspondencia entre corchetes de Poisson y conmutadores

$$[\cdot,\cdot]_{PB} \;\to\; -i[\cdot,\cdot]\,. \tag{2.57}$$

De esta manera, se interpreta a X^μ como un operador, y las relaciones (2.34) pasan a ser

$$\begin{aligned}[][X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] = [P^\mu_\tau(\sigma), P^\nu_\tau(\sigma')] = 0\\ [P^\mu_\tau(\sigma), X^\nu(\sigma')] = -i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu}\,,\end{aligned} \tag{2.58}$$

donde P^μ_τ es el momento conjugado a X^μ:

$$P^\mu_\tau = T\dot{X}^\mu\,. \tag{2.59}$$

De la misma manera, (2.35) pasan a ser

$$\begin{aligned}[][\alpha^\mu_m, \alpha^\mu_n] = [\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\mu_n] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}\\ [\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\mu_n] = 0\,.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Por esto, se interpreta a los α_m como operadores de subida y de bajada de oscilador armónico, para valores negativos y positivos de m, respectivamente.

Para construir el correspondiente espacio de Fock, se define el vacío $|0\rangle$ mediante

$$\alpha_m|0\rangle = 0 \quad \forall m \geq 1\,. \tag{2.61}$$

Aún así, falta tener en cuenta un grado de libertad para especificar completamente el estado de una cuerda: el momento lineal p^μ. Por lo tanto, el vacío que tiene momento lineal p^μ con respecto al centro de masa se escribirá $|0;p^\mu\rangle$, y se utilizará $|0\rangle$ para referirse a un vacío cualquiera, sin importar su momento.

De esta manera, se construye el espacio de Fock como el generado por los estados $\alpha_{-m}|0\rangle$ con m positivo. Este espacio tiene el problema de no ser definido positivo. Debido a las relaciones de conmutación de las componentes temporales $[\alpha_m^0, \alpha_{-m}^0] = -1$, los estados de la forma $\alpha_{-m}^0|0\rangle$ tienen norma negativa:

$$\langle 0|\alpha_m^0\alpha_{-m}^0|0\rangle = -1\,. \tag{2.62}$$

Estos estados se llaman "fantasmas", y son inadmisibles físicamente, ya que violan causalidad. Por lo tanto, el espacio físico de la teoría deberá ser un subespacio de este espacio de Fock, especificado por ciertas condiciones subsidiarias. En la teoría clásica, estas eran $T_{++} = T_{--} = 0$, y las expresábamos en términos de las componentes de Fourier del tensor $T_{\alpha\beta}$, los operadores de Virasoro L_m (y $\tilde{L}_m$ para cuerdas cerradas)

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n\,. \tag{2.63}$$

Ahora que se está haciendo el tratamiento cuántico de la teoría, debe prestársele atención al ordenamiento de los α_n en los mismos. Debido a las relaciones $[\alpha_{m-n}, \alpha_n] = 0$ salvo para $m = 0$, el único problema surge con L_0. Por el momento, lo que se hará es definirlo de la manera normalmente ordenada

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n \tag{2.64}$$

y se agregará una constante indefinida a en todos los términos que contengan a L_0. La determinación de a se llevará a cabo más adelante.

En la teoría clásica, la condición $L_0 = 0$ lleva a la condición de capa de masa. En el caso cuántico, correspondería pedir que L_0 aniquile a los estados físicos:

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0 \tag{2.65}$$

En el caso de cuerdas abiertas, esto lleva a

$$M^2 = -2a + 2\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \,, \tag{2.66}$$

donde se puede ver que el estado fundamental tiene $M^2 = -2a$. En el caso de cuerdas cerradas, se debe pedir $(L_0 - a)|\phi\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0$, lo que lleva a

$$M^2 = -8a + 8\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = -8a + \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \,, \tag{2.67}$$

con lo que se ve que para el estado fundamental tenemos $M^2 = -8a$. Estos estados fundamentales de masa negativa se llaman "taquiones". En el estilo de lo que se viene haciendo, la condición clásica $(L_0 - \tilde{L}_0) = 0$ para cuerdas cerradas se traduce en

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle = 0 \,. \tag{2.68}$$

Restando (2.1.5) y (2.67) llegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \,. \tag{2.69}$$

Nótese que esta es la única condición que acopla *right-movers* con *left-movers*.

Los demás L_m y $\tilde{L}_m$ corresponden a términos de frecuencia no nula de T_{++} y T_{--}. Al igual que en el método de Gupta-Bleuler de Electrodinámica Cuántica, se pide que los términos de frecuencia positiva aniquilen los estados físicos:

$$L_m|\phi\rangle = 0 \quad \forall m \geq 1 \,. \tag{2.70}$$

Esto y la condición para L_0 asegura que los elementos de matriz entre estados físicos se anulen, para un adecuado ordenamiento. El elemento de matriz $\langle\chi|L_{n_1} \cdots L_{n_p}|\phi\rangle$ (con L_0 reemplazado por $L_0 - a$, si está presente) depende del ordenamiento de operadores, ya que los L_n no conmutan. Pero si los L_n con n negativo están a la izquierda, y los L_n con n positivos están a la derecha, entonces este elemento de matriz se anula. Esto, a nivel cuántico, es lo más cerca que se puede estar de pedir que los L_m sean cero, como en el caso clásico.

No existe ambigüedad de orden con los momentos angulares $J^{\mu\nu}$

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\nu - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha^\mu_{-n} \cdot \alpha^\nu_n - \alpha^\nu_{-n} \cdot \alpha^\mu_n \,, \tag{2.71}$$

por lo que se pueden interpretar como operadores sin complicaciones. Utilizando las relaciones de conmutación (2.1.5) se puede llegar a las siguientes

$$\begin{aligned} [p^\mu, p^\nu] &= 0 \\ [p^\mu, J^{\nu\rho}] &= -i\eta^{\mu\nu} p^\rho + i\eta^{\mu\rho} p^\nu \\ [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= -i\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + i\eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} \,. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Como $[L_n, J^{\mu\nu}] = 0$, las condiciones para estados físicos son invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

2.1.6. Álgebra de Virasoro

Se vio que la forma clásica del álgebra de Virasoro está dada por (2.55):

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n}$$

A continuación se analizará si aparecen correcciones cuánticas. La deducción de (2.54) sigue siendo válida a nivel cuántico, pero el paso de (2.54) a (2.55) sólo vale si $m+n \neq 0$. Como cualquier ambigüedad de ordenamiento normal que pudiera aparecer sería un número ordinario, (2.55) tiene que modificarse de la forma

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n} \,, \tag{2.73}$$

donde $A(m)$ es un número. Esto se conoce como "extensión central" del álgebra de Virasoro. El último sumando es el "término anómalo" de la misma. Mediante relaciones de recursión, es posible determinar

$$A(m) = c_3 \, m^3 + c_1 \, m \tag{2.74}$$

donde c_3 y c_1 son dos constantes. El método más seguro para calcularlas es utilizar $[L_m, L_{-m}]$. Para $m = 1$,

$$\begin{aligned} \langle 0;0|[L_2, L_{-2}]|0;0\rangle = \langle 0;0|L_2 L_{-2}|0;0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0;0|\alpha_1 \cdot \alpha_1 \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1}|0;0\rangle = \\ = \frac{1}{2}\langle 0;0|\alpha_1^\mu \alpha_{-1}^\nu|0;0\rangle = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} D \,. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Con esto último se obtiene

$$A(m) = \frac{1}{12} D(m^3 - m) \tag{2.76}$$

2.1.7. Espectro y determinación de a y D

Aplicando la condición de capa de masa, se obtiene para el estado fundamental de impulso k^μ, $|0; k^\mu\rangle$,

$$0 = (L_0 - a)|0; k^\mu\rangle = \left(\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a \right) |0; k^\mu\rangle = \left(\frac{1}{2}\alpha_0^2 - a \right) |0; k^\mu\rangle \tag{2.77}$$

con lo que, teniendo en cuenta que $l = \sqrt{2\alpha'}$, llegamos a

$$\alpha' p^2 = a \tag{2.78}$$

En cuanto a estados del primer nivel excitado, estos están dados por $\zeta \cdot \alpha_{-1}|0; k^\mu\rangle$, donde ζ^μ es un vector de polarización con D componentes, antes de imponer los vínculos de gauge. La condición de capa de masa es

$$\begin{aligned} 0 = (L_0 - a)\, \zeta \cdot \alpha_{-1}|0; k^\mu\rangle &= \left(\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a \right) \zeta \cdot \alpha_{-1}|0; k^\mu\rangle = \\ &= (\alpha'\, k^2 + 1)\, \zeta \cdot \alpha_{-1}|0; k^\mu\rangle\,, \end{aligned} \tag{2.79}$$

con lo que se llega a

$$\alpha'\, k^2 = a - 1 \tag{2.80}$$

También se debe tener en cuenta la condición subsidiaria

$$L_1\, \zeta \cdot \alpha_{-1}|0; k^\mu\rangle = 0\,, \tag{2.81}$$

lo que lleva a $\zeta \cdot k = 0$. Así, nos quedan $D-1$ polarizaciones permitidas. La norma de estos estados está dada por $\zeta \cdot \zeta = 1$. Si se elige un k en el plano $(0,1)$, entonces los $D-2$ estados con polarizaciones espaciales, normales a ese plano, tienen norma positiva. Si a es tal que el primer excitado tiene $k^2 > 0$ (es un taquión), entonces k es espacial, por lo que ζ tiene que ser temporal, y tiene norma negativa. Si $k^2 < 0$, ζ espacial, por lo que tiene norma positiva. Por último, si $k^2 = 0$, el correspondiente ζ es proporcional a k, y tiene norma cero. Por todo lo anterior, obtenemos la primera condición para la ausencia de fantasmas:

$$a \leq 1\,. \tag{2.82}$$

En cuanto al caso límite $a = 1$, se tiene que el primer excitado es una partícula vectorial sin masa; el estado fundamental es un taquión. La condición subsidiaria de L_1 es el gauge covariante $\partial_\mu A^\mu = 0$ de Electrodinámica Cuántica. Esta condición, al igual que en la cuantización de Gupta-Bleuler, da $D - 2$ estados de norma positiva y polarizaciones transversales, y uno de polarización longitudinal $\zeta^\mu = k^\mu$ de norma nula. Este estado nulo que aparece en estas condiciones es el primero de un número infinito de estados de la misma clase.

Teniendo en cuenta que $|\phi\rangle$ es un estado físico si $(L_m - a\delta_m)|\phi\rangle = 0 \; \forall m \geq 0$, se dice que un estado es "espúreo" si sólo cumple $(L_0 - a)|\phi\rangle = 0$ y es ortogonal a todo estado físico: $\langle\phi|\psi\rangle = 0$. Es posible probar que cualquier estado espúreo se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_{n>0} L_{-n}|\chi_n\rangle \,, \tag{2.83}$$

donde $|\chi_n\rangle$ está dado por

$$(L_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0 \tag{2.84}$$

Como L_{-n} se puede representar como conmutadores iterados de L_{-1} y L_{-2} (p.ej.: $L_{-3} \sim [L_{-1}, L_{-2}]$), el desarrollo (2.84) se reduce a

$$|\phi\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle \,. \tag{2.85}$$

Si un estado $|\psi\rangle$ es físico y espúreo a la vez, es ortogonal a sí mismo: $\langle\psi|\psi\rangle = 0$. Es por esto que se los llama "nulos". Cualquier estado nulo se puede construir como

$$|\psi\rangle = L_{-1}|\tilde{\chi}\rangle \,, \tag{2.86}$$

donde $|\tilde{\chi}\rangle$ cumple

$$\begin{aligned} L_m|\tilde{\chi}\rangle &= 0 \quad \forall m > 0 \\ (L_0 - a + 1)|\tilde{\chi}\rangle &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Se ve que la condición subsidiaria de L_1 sólo se cumple si $a = 1$.

Aplicando L_{-1} a los estados $|\tilde{\chi}\rangle$ es posible construir infinitos estados nulos. En particular, cuando $D = 26$, los estados de la forma

$$|\psi\rangle = (L_{-2} + \gamma L_{-2}^2)|\tilde{\chi}\rangle \,, \tag{2.88}$$

se vuelven nulos, ya que la relación entre γ y D es

$$\frac{1}{2}D-(4+6\gamma)=0\,. \tag{2.89}$$

La regla general para la ausencia de fantasmas, por lo tanto, es

$$(D=26 \text{ y } a=1) \quad \text{ó} \quad (D\leq 26 \text{ y } a\leq 1) \tag{2.90}$$

Si bien cualquiera de los dos casos asegura la ausencia, hay varias razones que apuntan a elegir el primero:

- mayor cantidad de estados nulos, que provocan una mayor invariancia de gauge (como los modos longitudinales en QED);
- la existencia de una partícula gauge sin masa;
- $D<26$ produce problemas con la unitariedad en el nivel *loop*.

2.2. Suepercuerdas

La teoría de cuerdas bosónica tiene, principalmente, dos problemas. El primero es la presencia de taquiones. El segundo es que ni la cuerda cerrada ni la abierta tienen en su espectro fermiones, que son parte fundamental de la naturaleza (o sea del modelo estándar).

La única extensión del grupo de Poincaré que relaciona bosones con fermiones es la conocida como supersimetría. Por lo tanto, se encarará el segundo problema integrando esta simetría a la teoría de cuerdas bosónica. Hay dos enfoques para hacer esto: el de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS), y el de Green Schwarz (GS). El primero integra la supersimetría a la hoja de mundo, mientras que el segundo lo hace al espacio-tiempo. Cada uno tiene sus ventajas y desventajas, y se sabe que en $D=10$ ambos son equivalentes. En este trabajo se utilizará el formalismo RNS debido a que en éste el proceso de cuantización es considerablemente más simple.

2.2.1. Acción y supersimetrías

Debido a que la supersimetría requiere que la cantidad de grados de libertad bosónicos sea igual a la cantidad de grados de libertad fermiónicos, es necesario agregar a los D bosones $X^\mu(\tau,\sigma)$ de la teoría bosónica D fermiones $\Psi^\mu(\tau,\sigma)$, dados por espinores de dos componentes

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_1^\mu \\ \psi_2^\mu \end{pmatrix} . \tag{2.91}$$

Esto se logra sumándole a la acción bosónica de Polyakov la acción de Dirac para D campos fermiónicos no masivos:

$$S = S_B + S_F = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ \partial_\alpha X^\mu\, \partial^\alpha X_\mu + \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ i\bar{\psi}^\mu\, \rho^\alpha\, \partial_\alpha \psi_\mu\,, \tag{2.92}$$

donde la métrica $h^{\alpha\beta}$ está implícita en la contracción de índices, ρ^α son las matrices de Dirac [1] en dos dimensiones, y $\bar{\psi}^\mu$ es el conjugado espinorial de ψ^μ, dado por

$$\bar{\psi}^\mu = (\psi^\mu)^\dagger \rho^0\,. \tag{2.93}$$

En este trabajo se utilizará la representación de Majorana, en la que las matrices de Dirac están dadas por

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.94}$$

y se impone sobre los espinores la condición

$$(\psi^\mu)^T C = (\psi^\mu)^\dagger i\rho^0\,, \tag{2.95}$$

donde C es la matriz de conjugación de carga, que en dos dimensiones está dada por $C = i\rho^0$. De esta manera, en esta representación las componentes de los espinores resultan reales, y se referirá a ellas como $\psi_\pm^\mu$. Se ve de (2.92) que los espinores satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\psi_A^\mu(\sigma), \psi_B^\nu(\sigma')\} = \pi\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}\delta(\sigma-\sigma')\,, \tag{2.96}$$

y que sus ecuaciones de movimiento son

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \psi = 0\,, \tag{2.97}$$

que son las conocidas ecuaciones de Dirac.

[1] Las matrices de Dirac están dadas por $\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$

La acción (2.92) tiene una simetría global dada por

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}\Psi^\mu \,, \tag{2.98}$$

$$\delta\Psi^\mu = \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \,, \tag{2.99}$$

donde ϵ es un espinor de Majorana constante. Debido a que esta simetría mezcla bosones con fermiones, es una supersimetría, y la teoría dada por la acción (2.92) es, efectivamente, una teoría de cuerdas supersimétrica.

Un hecho básico de la supersimetría es que el conmutador de dos transformaciones de supersimetría da una traslación espacial, lo que se verifica para esta teoría:

$$[\delta_1, \delta_2]X^\mu = \delta_1(\bar{\epsilon}_2\psi^\mu) - \delta_2(\bar{\epsilon}_1\psi^\mu) = a^\alpha \partial_\alpha X^\mu \,, \tag{2.100}$$

donde $a^\alpha = 2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2$. También se verifica lo análogo para fermiones:

$$[\delta_1, \delta_2]\psi^\mu = a^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu \,. \tag{2.101}$$

Debido a que la supersimetría es una simetría global, tiene asociada una corriente: la supercorriente. Aplicando el método de Noether a una transformación (2.98), se llega a que le supercorriente está dada por

$$J_{A\,\alpha} = \frac{1}{2}\left(\rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu\right)_A \partial_\beta X_\mu \,, \tag{2.102}$$

donde A es el índice espinorial. Debido a la indentidad $\rho^\alpha\rho^\beta\rho_\alpha = 0$, esta supercorriente satisface la ecuación

$$(\rho_\alpha)_{AB} J^\alpha_B = 0 \,, \tag{2.103}$$

lo que implica que la supercorriente sólo tiene dos componentes independientes. Aplicando el método de Noether a una traslación $\delta\sigma^\alpha = \mathrm{cte}$, se obtiene la fórmula para el tensor de energía-impulso

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_\beta \partial_\alpha \psi_\mu - (\mathrm{traza}) \,, \tag{2.104}$$

Las ecuaciones de movimiento (2.97) se desacoplan en

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi^\mu_- = 0 \,, \tag{2.105}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi^\mu_+ = 0 \tag{2.106}$$

con lo que ψ_- y ψ_+ describen *right-movers* y *left-movers*, respectivamente. Utilizando las coordenadas $\sigma^{\pm} = \tau \pm \sigma$ y $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$ es posible expresar la acción fermiónica de la forma

$$S_F = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+) \,, \tag{2.107}$$

en donde el desacople entre ψ_+ y ψ_- es explícito, y en donde la contracción en índices espacio-temporales está implícita. Además, utilizando estas coordenadas, (2.105) y $0 = \partial^2 X^\mu / \partial\sigma^\alpha \partial\sigma_\alpha$ pueden reescribirse de la manera

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_+ \psi_-^\mu = \partial_+ (\partial_- X^\mu) \,, \\ 0 &= \partial_- \psi_+^\mu = \partial_- (\partial_+ X^\mu) \,, \end{aligned} \tag{2.108}$$

en donde se ve que ψ_-^μ y $\partial_- X^\mu$ son ambas funciones de σ^-, mientras que ψ_+^μ y $\partial_+ X^\mu$ son funciones de σ^+.

Aplicando el método de Noether sobre la acción expresada en coordenadas (σ^+, σ^-), se llega a que las componentes independientes de la supercorriente son

$$\begin{aligned} J_+ &= \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu \,, \\ J_- &= \psi_-^\mu \partial_- X_\mu \,. \end{aligned} \tag{2.109}$$

y su conservación se expresa de la forma

$$\partial_- J_+ = \partial_+ J_- = 0 \,. \tag{2.110}$$

Dadas las relaciones de (anti)conmutación (2.96), se ve que en la teoría supesimétrica aparecen más fantasmas, ahora asociados a los grados de libertad fermiónicos: debido a que $\eta^{00} = -1$ los ferminoes ψ^0 representan estados de norma negativa. En el caso bosónico, fue posible eliminarlos utilizando la simetría provista por el álgebra de Virasoro, lo que llevaba a tener que fijar $D = 26$. En el caso fermiónico, es la simetría superconforme la que permitirá eliminar estos fantasmas.

Las relaciones de conmutación en coordenadas (σ^+, σ^-) están dadas por

$$\begin{aligned} \{\psi_+^\mu(\sigma), \psi_+^\nu(\sigma')\} = \{\psi_-^\mu(\sigma), \psi_-^\nu(\sigma')\} &= \pi \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \,, \\ [\partial_\pm X^\mu(\sigma), \partial_\pm X^\nu(\sigma')] &= \pm i \frac{\pi}{2} \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \,, \end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\{\psi_+^\mu, \psi_-^\nu\} = [\partial_+ X^\mu, \partial_- X^\nu] = 0 \,. \tag{2.112}$$

Utilizando las componentes no nulas del tensor de energía-impulso

$$
\begin{aligned}
T_{++} &= \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2}\psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu}\,, \\
T_{--} &= \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2}\psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}\,,
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

y las componentes J_+, J_- de la supercorriente, se llega al álgebra

$$
\begin{aligned}
\{J_+(\sigma), J_+(\sigma')\} &= \pi\delta(\sigma-\sigma')T_{++}(\sigma)\,, \\
\{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} &= \pi\delta(\sigma-\sigma')T_{--}(\sigma)\,,
\end{aligned} \tag{2.114}
$$

$$
\{J_+(\sigma), J_-(\sigma')\} = 0\,. \tag{2.115}
$$

Esta es el álgebra que permitirá deshacerse de los fantasmas. En preciso mencionar que (2.2.1) surge de la teoría clásica, y que en la versión cuántica aparecerán anomalías en la misma.

Dado que en la teoría bosónica las condiciones de vínculo de Virasoro eran $T_{++} = T_{--} = 0$, en el caso de la teoría supersimétrica se aplicará un ansatz: que las correspondientes condiciones de "súper-Virasoro" están dadas por

$$
J_+ = J_- = T_{++} = T_{--} = 0\,. \tag{2.116}
$$

Es posible hacer una derivación apropiada de esta condición, pero la misma es bastante larga, por lo que no se considerará aquí.

2.2.2. Condiciones de contorno

El análisis para los campos bosónicos ya fue hecho en la sección 1.1.2. En el caso de los campos fermiónicos, para que los términos de superficie de la cuerd abierta se anulen, es necesario que

$$
\psi_+\delta\psi_+ - \psi_-\delta\psi_- = 0 \tag{2.117}
$$

se cumpla en ambos extremos de la cuerda abierta. Esto se satisface haciendo que $\psi_+ = \pm\psi_-$ en cada extremo. Como el signo relativo es cuestión de convención, se fija

$$
\psi_+^\mu(0,\tau) = \psi_-^\mu(0,\tau)\,, \tag{2.118}
$$

y la relación de signos en el otro extremo es lo que definirá los distintos sectores, como en el caso de la cuerda bosónica.

La elección que que corresponde a condiciones R está dada por

$$\psi_+^\mu(\pi,\tau) = \psi_-^\mu(\pi,\tau)\,, \tag{2.119}$$

con lo que el desarrollo en modos queda dado por

$$\psi_-^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu\, e^{-in(\tau-\sigma)}\,, \tag{2.120}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu\, e^{-in(\tau+\sigma)}\,, \tag{2.121}$$

Las condiciones NS están dadas por

$$\psi_+^\mu(\pi,\tau) = -\psi_-^\mu(\pi,\tau)\,, \tag{2.122}$$

y los desarrollos en modos son

$$\psi_-^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} b_r^\mu\, e^{-ir(\tau-\sigma)}\,, \tag{2.123}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} b_r^\mu\, e^{-ir(\tau+\sigma)}\,, \tag{2.124}$$

En el caso de cuerdas cerradas, para que los términos de superficie se anulen, es necesario que se cumpla periodicidad o antiperiodicidad para cada componente del campo ψ por separado, con lo que se obtienen los desarrollos

$$\psi_-^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu\, e^{-2in(\tau-\sigma)}\,, \tag{2.125}$$

$$\psi_-^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} b_r^\mu\, e^{-2ir(\tau-\sigma)}\,, \tag{2.126}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n^\mu\, e^{-2in(\tau+\sigma)}\,, \tag{2.127}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \tilde{b}_r^\mu\, e^{-2ir(\tau+\sigma)}\,. \tag{2.128}$$

De esta manera, cada sector estará dado por los distintos pares de desarrollos elegidos: NS-NS, NS-R, R-NS, R-R.

2.2.3. Modos de Virasoro

En la teoría supersimétrica, se hace un desarrollo en modos de $T_{\alpha\beta}$ y de J_α.

En el caso de la cuerda abierta se tiene

$$L_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \left(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma}T_{++} \tag{2.129}$$

para el sector bosónico, y

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \left(e^{im\sigma}J_{+} + e^{-im\sigma}J_{-}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma}J_{+} \tag{2.130}$$

para el sector fermiónico, en el caso de condiciones de contorno R. En el caso de condiciones de contorno NS, se tiene

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \left(e^{ir\sigma}J_{+} + e^{-ir\sigma}J_{-}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ir\sigma}J_{+}\,. \tag{2.131}$$

Para cuerdas cerradas, se tiene un conjunto de generadores dado por los modos de T_{++} y J_+, y otro conjunto dado por los modos de T_{--} y J_-.

Las condiciones de Virasoro en el teoría clásica se expresan anulando todos los modos, cosa que no sucede en el caso cuántico.

Capítulo 3

Supergravedad

En este capítulo se habla de gaugeo de supergravedad, y de su sector bosónico. Para un breve repaso de las nociones básicas de construcción de supergravedad, ver el Apéndice A.

3.1. Supergravedad gaugeada

3.1.1. Sector bosónico de supergravedad sin gaugear

El contenido bosónico de supergravedades estándar está dado por una mátrica $g_{\mu\nu}$, unos campos escalares ϕ^i, unos campos vectoriales A_μ^M, y p-formas $B^I_{\nu_1 \dots \nu_p}$ de varios rangos. (La estructura dada por cada superindice se verá más adelante.) Invariancia de difeomorfismos y de gauge sólo permite un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{bos} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{esc} + \mathcal{L}_{vec}\,, \tag{3.1}$$

con cada parte dada por

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{2}|e|R\,, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}_{esc} = -\frac{1}{2}|e|G_{ij}(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j - |e|V(\phi)\,, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{L}_{vec} = -\frac{1}{4}\mathcal{M}_{MN}(\phi)|e|g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^M_{\mu\nu}F^M_{\rho\sigma} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_{MN}(\phi)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^M_{\mu\nu}F^M_{\rho\sigma}\,, \tag{3.4}$$

donde $|e|$ es el determinante del vielbein. Los primeros términos de cada parte son los cinéticos, y en el caso vectorial se hace uso de la intensidad de campo abeliana $F^M_{\mu\nu} = \partial_\mu A^M_\nu - \partial_\nu A^M_\mu$. V es un potencial escalar, y el último término de $\mathcal{L}_{vec}$ es un término topológico; estos se mencionan sólo por completitud, pero no se hará un uso explícito de los mismos.

Se ve que, para fijar (la parte cinética de) el lagrangiano, es necesario proporcionar las matrices $G_{ij}(\phi), \mathcal{M}_{MN}(\phi)$. Una vez hecho esto, las acoplamientos ferminónicos quedan totalmente determinados por supersimetría. A su vez, no se posee una total libertad para fijar las matrices de la parte bosónica, sinó que la supersimetría pone restricciones sobre la misma. Es necesario considerar que el lagrangiano bosónico debe poder completarse con acoplamientos fermiónicos, de manera de obtener un lagrangiano total invariante ante supersimetría local.

Para el espacio de los campos escalares $\phi = \{\phi^i\}$, las anteriores restricciones le dan al mismo una estructura de espacio coset de modelo sigma. Esto significa que el mismo está descripto por un cociente G/K, donde G es el grupo de simetría global, y K es su subgrupo compacto maximal. Una formulación conveniente de este modelo es utilizar una matriz G-valuada $\mathcal{V}(x)$ parametrizada por los campos escalares, sujeta a la acción

$$\mathcal{V}(x) \to \Lambda\, \mathcal{V}(x)\, k(x) \quad , \qquad \Lambda \in G\, ,\ k(x) \in K \tag{3.5}$$

bajo transformaciones globales G, y locales K.

Para construir la acción se utilizan las corrientes G-invariantes

$$J_\mu = \mathcal{V}^{-1}\, \partial_\mu \mathcal{V} \in \mathfrak{g}\, .^{1} \tag{3.6}$$

Haciendo uso de la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}\, , \tag{3.7}$$

donde $\mathfrak{p}$ es el complemento ortogonal del álgebra de Lie de K (con respecto a la forma de Cartan-Killing), se puede descomponer la corriente en

$$J_\mu = Q_\mu + P_\mu \quad , \qquad Q_\mu \in \mathfrak{k}\, ,\ P_\mu \in \mathfrak{p}\, , \tag{3.8}$$

De esta manera, el lagrangiano queda dado por

$$\mathcal{L}_{esc} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(P_\mu P^\mu)\, , \tag{3.9}$$

que es invariante bajo las transformaciones (3.5), cuya forma infinitesimal es

$$\delta\mathcal{V} = \Lambda\mathcal{V} - \mathcal{V}k(x)\, . \tag{3.10}$$

[1]Dado un grupo de Lie G, se utiliza la notación $\mathfrak{g} \equiv \mathrm{Lie}(G)$ para su correspondiente álgebra de Lie.

La simetría local K no es una simetría gauge asociada a grados de libertad de la teoría, sinó que es la manifestación de la redundancia en la parametrización del espacio coset G/K. Debido a esto, el número de grados de libertad de la teoría está dado por

$$\dim(G/K) = \dim(G) - \dim(K)\,. \tag{3.11}$$

Las dos simetrías (3.10) serán de vital importancia en el proceso de gaugeo de supergravedad. Las transformacones globales $\mathfrak{g}$ pueden ser expandidas como $\Lambda = \Lambda^\alpha t_\alpha$, donde t_α son los generadores de G en la representación adjunta.

3.1.2. Gaugeo

Como se vio en la anterior sección, los campos bosónicos de supergravedad transforman como

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{V} &= \Lambda^\alpha t_\alpha \mathcal{V}\,,\\ \delta A_\mu^M &= -\Lambda^\alpha (t_\alpha)_N{}^M A_\mu^N\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

y demás transformaciones para las p-formas, donde los parámetros Λ^α son constantes, y el índice α corresponde a la representación adjunta de G. Los n_v campos vectoriales también tienen una simetría abeliana $U(1)^{n_v}$:

$$\delta A_\mu^M = \partial_\mu \Lambda^M\,, \tag{3.13}$$

donde ahora los parámetros dependen de las coordenadas: $\Lambda^M = \Lambda^M(x)$.

El proceso de gaugeo consiste en elegir un subgrupo $G_0 \in G$ y promover sus simetrías globales a simetrías locales. Esto se logra utilizando sus generadores X_M para construir las correspondientes derivadas covariantes

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - g\, A_\mu^M\, X_M\,, \tag{3.14}$$

donde g es la correspondiente constante de acoplamiento, y haciendo el reemplazo $\partial_\mu \to D_\mu$ en el lagrangiano.

Se hará la construcción de la teoría gaugeada como si fuera una deformación de la teoría sin gaugear. En toda esta construcción, es deseable trabajar con un formalismo G-covariante. Esto quiere decir que el mismo sea independiente de la elección particular de grupo de gauge G_0 (también puede ser entendido como un formalismo en el que se trata a G_0 como si fuera igual a G). Para lograr esto es conveniente trabajar con el llamado *tensor de embebimiento* ${\Theta_M}^\alpha$, dado por

$$X_M = {\Theta_M}^\alpha t_\alpha \in \mathfrak{g}\,. \tag{3.15}$$

De esta manera todas las condiciones que seben ser impuestas para lograr una teoría consistente podrán ser impuestas sobre el tensor de embebimiento, y todo el gaugeo de la teoría queda totalmente determinado mendiante la elección de este tensor. Esto es lo que se tratará a continuación.

La teoría gaugeada debería ser invariante bajo las siguientes transformaciones de gauge

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V} &= g\,\Lambda^M X_M \mathcal{V}\,, \\ \delta A_\mu^M &= \partial_\mu \Lambda^M + g\,A_\mu^N\,{X_{NP}}^M \Lambda^P \equiv D_\mu \Lambda^M\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde ${X_{NP}}^M \equiv {\Theta_M}^\alpha (t_\alpha)_P{}^M$. Esto se logrará imponiendo dos condiciones [2]. La primera surge del hecho de que el tensor de embebimiento debe ser invariante bajo la acción de G_0, lo que se expresa como

$$0 \;=\; \delta_P {\Theta_M}^\alpha \;\equiv\; {\Theta_P}^\beta \delta_\beta {\Theta_M}^\alpha \;=\; {\Theta_P}^\beta (t_\beta)_M{}^N {\Theta_N}^\alpha \;+\; {\Theta_P}^\beta (t_\alpha)_\beta{}^\gamma {\Theta_M}^\gamma\,. \tag{3.17}$$

Se ve aquí que esta es una condición cuadrática en el tensor de embebimiento. Contrayendo lo anterior con t_α se llega a la forma equivalente

$$[X_M, X_N] = -{X_{MN}}^P X_P\,, \tag{3.18}$$

donde se ve que la invariancia de gauge del tensor de embebimiento implica (pero no es equivalente a) la clausura del álgebra de los generadores X_M.

La segunda condición a imponer sobre ${\Theta_M}^\alpha$ surge de requerir que la teoría gaugeada siga siendo invariante bajo supersimetría, o una posible deformación de la misma. Esta condición dependerá del número de dimensiones espaciotemporales y del número de supercargas consideradas. De todas formas, en general se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}\,\Theta = 0\,, \tag{3.19}$$

donde $\mathbb{P}$ es un proyector en algunas de las representaciones de la siguiente descomposición:

$$\mathbf{r}_{fund*} \otimes \mathbf{r}_{adj} = \mathbf{r}_{fund*} \oplus \ldots\,, \tag{3.20}$$

[2]La palabra utilizada en el idioma inglés para describir estas imposiciones es *constraints*. En este trabajo se la traducirá como "vínculos", pero también se hará uso de la palabra "condiciones" en general.

donde $\mathbf{r}_{fund*}$ es la dual a la representación fundamental en la que transforman los campos vectoriales. Se ve, de esta manera, que esta es una condición lineal.

De esta manera, los posibles gaugeos de una determinada teoría son las soluciones simultáneas de las condiciones (3.18) y (3.19). Si bien la condición lineal es de fácil resolución, no es este el caso de la cuadrática, la cual no posee un análisis cerrado de sus soluciones. Este hecho es clave en la construcción de DFT y EFT, ya que si la condición cuadrática fuera un problema cerrado, la formulación básicas de ambas y estaría hecha.

En el camino a una construcción covariante de supergravedad gaugeada ya se cuenta con derivadas covariantes y condiciones a imponer sobre el tensor de embebimiento para asegurar invariancia bajo las transformaciones (3.1.2). Pero a efectos de poder construir una acción invariante (lagrangiano covariante), es necesario contar con intensidades de campo para poder armar los términos cinéticos. Debido a que la teoría gaugeada es no abeliana, el ansatz natural parece ser

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{M} = \partial_\mu A_\nu^M - \partial_\nu A_\mu^M + gX_{[NP]}{}^{M} A_\mu^N A_\nu^P \,, \tag{3.21}$$

sin embargo esta expresión no es totalmente covariante. Bajo una transformación (3.1.2), la misma transforma como

$$\delta\mathcal{F}_{\mu\nu}^{M} = -g\Lambda^P X_{[PN]}{}^{M}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{M} + 2gZ^M{}_{PQ}\left(\Lambda^P\mathcal{F}_{\mu\nu}^{Q} - A_{[\mu}^{P}\,\delta A_{\nu]}^{Q}\right) \,, \tag{3.22}$$

donde $Z^P{}_{MN} \equiv X_{[MN]}{}^P$. Dado que la condición cuadrática (3.18) es antisimétrica en MN, se deduce que

$$Z^P{}_{MN}\, X_P = 0\,. \tag{3.23}$$

El problema de hallar una intensidad de campo covariante no es menor, y de alguna manera manifiesta los problemas que apareja querer hallar una formulación G-covariante de la teoría gaugeada. La solución al mismo es definir la siguiente intensidad

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}^{M} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^{M} + gZ^P{}_{PQ}B_{\mu\nu}^{PQ} \,, \tag{3.24}$$

mediante la introducción de la dos-forma $B_{\mu\nu}^{PQ} = B_{[\mu\nu]}^{(PQ)}$. De esta manera, los términos no covariantes que "sobran" en (3.22) pueden ser absorbidos postulando leyes de transformación adecuadas para el vector y la dos-forma:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^M &= D_\mu\Lambda^M - gZ^P{}_{PQ}\Xi_\mu^{PQ} \,, \\ \delta B_{\mu\nu}^{PQ} &= 2D_{[\mu}\Xi_{\nu]}^{MN} - 2\Lambda^{(M}\mathcal{H}_{\mu\nu}^{N)} + 2A_{[\mu}^{(M}\delta A_{\nu]}^{N)} \,, \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde Ξ_μ^{MN} es el parámetro asociado a las transformaciones de gauge de la dos-forma. Esta clase de acoplamiento entre campos vectoriales y dos-formas es conocida como *acoplamientos de Stückelberg*, y se da en deformaciones masivas de supergravedad. De esta manera, aparece otra ventaja del formalismo covariante, y es que el mismo puede tratar todas las deformaciones conocidas de supergravedad.

El agregar las dos-formas $B_{\mu\nu}^{MN}$ a la teoría parece agregar más grados de libertad, lo que presenta un problema, ya que los mismos están cuidadosamente balanceados por la invariancia ante supersimetría de la teoría. La solución a este problema aparecerá cuando se haga la construcción del lagrangiano de la teoría.

Es importante notar que la nueva intensidad de campo ya no satisface las identidades de Bianchi estándar, sinó una versión deformada de las mismas:

$$D_{[\mu}\mathcal{H}_{\nu\rho]}^{M} = \frac{1}{3}\, g\, Z^{M}{}_{PQ}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}^{PQ}\,, \tag{3.26}$$

donde $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}^{PQ}$ es la intensidad de campo de las dos-formas.

3.1.3. Lagrangiano

Como primer paso en la construcción de un lagragiano para la teoría es el reemplazo de todas las derivadas por derivadas covariantes, y las intensidades de campo abelianas por las obtenidas en la sección anterior. También es necesario reemplazar los términos topológicos por sus análogos covariantes.

Como se vio en la sección anterior, como consecuencia de la construcción de una intensidad de campo covariante, aparecen en la teoría $(p+1)$-formas que se acoplan con las p-formas, mediante (3.1.2). Es por esto que el lagrangiano de la teoría gaugeada contendrá formas de más rango que las de la teoría sin gaugear. A esto se suma que en dimensiones pares la teoría gaugeada contiene toda la representación de formas, en vez de sólo la parte eléctrica, como consecuencia del proceso de dualización. [3]

Estos campos extra de la teoría gaugeada no aparecen en la teoría sin gaugear; no poseen términos cinéticos, sinó que sólo representan correcciones necesarias para poder tener una formulación G-covariante de la teoría. Aún así su presencia es todo menos incómoda, ya que sus términos se combinan con los términos topológicos dando como resultado ecuaciones de movimiento de primer orden para estos campos adicionales.

[3] Una breve exposición del proceso de dualización de formas se puede hallar en el Apéndice B.

Por lo tanto, con las condiciones cuadrática y lineal, el reemplazo de derivadas comunes por derivadas covariantes, y de intensidades de campo abelianas por las halladas en la sección anterior, y la introducción de las formas adicionales se obtiene un lagrangiano para la teoría gaugeada. Aún así queda un último tema: que este nuevo lagrangiano siga siendo invariante ante supersimetría debido, justamente, a los términos nuevos en las derivadas covariantes y a la deformación de las indentidades de Bianchi. Este tema escapa a la presente exposición del tema, pero se menciona que estas contribuciones nuevas no deseadas pueden ser canceladas mediante términos de masa fermiónicos.

3.2. Sector bosónico

Los grados de libertad de la teoría están dados por la métrica $g_{ij} = g_{(ij)}$, la dos-forma (campo de Kalb-Ramond) $b_{ij} = b_{[ij]}$, y el dilatón ϕ, los cuales dependen de las coordenadas espacio-temporales x^i $(i, j = 1, \dots, D)$.

La acción de la teoría es

$$S = \int d^D x \sqrt{g}\, e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} H^{ijk} H_{ijk} \right] , \tag{3.27}$$

donde H es la intensidad de campo de la dos-forma:

$$H_{ijk} = \partial_{[i} b_{jk]} \, . \tag{3.28}$$

y R es el escalar de Ricci construído de la manera usual.

Esta acción es invariante bajo los siguientes difeomorfismos de los campos

$$g_{ij} \longrightarrow g_{ij} + L_\lambda g_{ij} \, , \tag{3.29}$$

$$b_{ij} \longrightarrow b_{ij} + L_\lambda b_{ij} \, , \tag{3.30}$$

$$\phi \longrightarrow \phi + L_\lambda \phi \, , \tag{3.31}$$

donde L_λ es la derivada de Lie, dada por

$$L_\lambda V^i = \lambda^j \partial_j V^i - V^j \partial_j \lambda^i \, . \tag{3.32}$$

También es invariante bajo transformaciones de gauge de la dos-forma

$$b_{ij} \longrightarrow b_{ij} + \partial_i \tilde{\lambda}_j - \partial_j \tilde{\lambda}_i \, , \tag{3.33}$$

donde $\tilde{\lambda}_i$ es una uno-forma infinitesimal.

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de (3.27) son

$$R_{ij} - \frac{1}{4} H_i{}^{pq} H_{jpq} + 2\nabla_i \nabla_j \phi = 0\,, \tag{3.34}$$

$$\frac{1}{2} \nabla^p H_{pij} - H_{pij} \nabla^p \phi = 0\,, \tag{3.35}$$

$$R + 4\left[\nabla^i \nabla_i \phi - (\partial\phi)^2\right] - \frac{1}{12} H^2 = 0\,. \tag{3.36}$$

3.2.1. Relación con la teoría de cuerdas bosónica

Como se vio en el Cap. 1, el espacio de Fock de la teoría de cuerdas cuantizada se construye operando sobre el vacío con los modos de Virasoro:

$$a_{\mu\nu}\, \tilde{\alpha}^{\mu}_{-1} \alpha^{\nu}_{-1} |0; p\rangle\,. \tag{3.37}$$

Estos estados son no masivos para D=26, y transforman en la representación $\mathbf{24} \otimes \mathbf{24}$ de $SO(24)$, que se descompone en tres representaciones irreducibles, de acuerdo a lo siguiente:

$$\text{simétrica sin traza} \;\oplus\; \text{antisimétrica} \;\oplus\; \text{singlete } (= \text{traza})\,. \tag{3.38}$$

A cada uno de estos modos se le asocia un campo no masivo en el espacio-tiempo, tal que la oscilación de la cuerda puede ser identificada con un cuanto de estos campos. Los mismos son:

$$g_{\mu\nu}(x) \quad , \quad b_{\mu\nu}(x) \quad , \quad \phi(x) \tag{3.39}$$

$g_{\mu\nu}$ es no masivo, simétrico, y de espín 2, por lo que no queda otra que identificarlo con la métrica del espacio-tiempo. $b_{\mu\nu}$ es una dos-forma: el campo de "Kalb-Ramond". Finalmente, el campo escalar $\phi(x)$ se llama *dilatón*.

Estos no son más que los campos del sector bosónico de supergravedad, como se vio en la sección anterior.

Capítulo 4

De DFT a EFT

Trabajos previos han construído una acción para el sector interno de EFT. La extensión de dicha accion para incluir también el sector externo ha demostrado ser una tarea para nada trivial. Haciendo uso de que en el caso de DFT se conoce la acción para toda la teoría, se procederá a analizar de qué modo la acción del sector interno de DFT se extiende hasta llegar a la acción completa. De esta manera se espera lograr una sistematización del procedimiento, para luego poder aplicarlo al caso de EFT.

4.1. EFT

La supergravedad $D = 11$ compactificada en un n-toro tiene una dualidad $E_{n(n)}$. Esta simetría surge como consecuencia de la compactificación, pero se conjetura que el grupo $E_{11(11)}$, correspondiente al caso $n = 11$ [8], es, en realidad, una simetría de la teoría, independientemente de la compactificación [9].

No es posible, por el momento, tratar a todas las dimensiones como compactificadas para obtener una formulación completamente covariante de EFT, como se hace en el caso de EFT. Esto es así porque tal descripción correspondería al grupo de simetría $E_{11(11)}$, cuya estructura aún se desconoce. Es por esto que las construcciones hechas hasta el momento se centran en una descripción del sector interno de la teoría en el caso $n = 7$.

EFT está formulada en un “espacio generalizado” (4 + 56)-dimensional, donde 4 es la dimensión del espacio-tiempo externo, y 56 es la dimensión del espacio interno. Este espacio incluye todas las simetrías de las teorías mencionadas: difeomorfismos internos y transformaciones de gauge de los campos NSNS y RR.

El espacio interno está dado por las coordenadas Y^M, las cuales transforman en la representación fundamental de $E_{7(7)}$ ($M = 1, \ldots, 56$). Para la formulación de la teoría se suele utilizar el grupo "agrandado" $\mathbb{R}^+ \times E_{7(7)}$, el cual provee un grado de libertad más. De esta manera, se tiene una teoría dada por el espacio coset

$$\frac{\mathbb{R}^+ \times E_{7(7)}}{SU(8)}\,, \tag{4.1}$$

donde $SU(8)$ es el subgrupo compacto maximal de ($\mathbb{R}^+\times$) $E_{7(7)}$.

Dado que $E_{7(7)}$ está embebido en $Sp(56)$, sus índices se suben y bajan con la métrica invariante simpléctica $\tilde{\omega}_{MN}$. Sin embargo, dado que se trabaja con el grupo agrandado $\mathbb{R}^+ \times E_{7(7)}$, es más conveniente definir la métrica simpléctica pesada por el factor conforme, dada por

$$\omega_{MN} = e^{2\Delta}\tilde{\omega}_{MN}\,, \tag{4.2}$$

donde Δ es el factor conforme correspondiente a $\mathbb{R}^+$. De esta manera, los índices se suben y bajan de acuerdo a

$$\begin{aligned} A^M &= -\omega^{MN}A_N\,, \\ A_M &= \omega_{MN}A^N\,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

y se cumple la relación

$$\omega_{MN}\omega^{NP} = -\delta_M^P\,. \tag{4.4}$$

La estructura del espacio está dada por una métrica generalizada H^{MN} que transforma covariantemente ante $\mathbb{R}^+\times E_{7(7)}$, y es invariante bajo $SU(8)$. La misma se puede escribir como

$$H^{MN} = E_{\bar{A}}{}^M E_{\bar{B}}{}^N H^{\bar{A}\bar{B}}\,, \tag{4.5}$$

donde los $E_{\bar{A}}{}^M$ son los vielbein de la teoría, y $\bar{A}, \bar{B} = 1, \ldots, 56$ son índices planares de (la representación fundamental de) $SU(8)$. Debido a que el grupo de simetría es $\mathbb{R}^+ \times E_{7(7)}$, los vielbein se escriben como

$$E_{\bar{A}}{}^M = e^{-\Delta}\tilde{E}_{\bar{A}}{}^M\,, \tag{4.6}$$

donde $\tilde{E}_{\bar{A}}{}^M$ es un vielbein $E_{7(7)}$. También se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} E^{\bar{A}}{}_M E_{\bar{A}}{}^N &= -\delta_M^N\,, \\ E^{\bar{A}}{}_P E_{\bar{B}}{}^P &= -\delta_{\bar{B}}^{\bar{A}}\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $E^{\bar{A}}{}_M = -\omega^{\bar{A}\bar{B}}\omega_{MN}E_{\bar{B}}{}^N$.

Además del invariante simpléctico ω_{MN}, también hay un invariante cuártico dado por

$$E^{\bar{A}}{}_{M}\, E_{\bar{B}}{}^{N}\, E^{\bar{C}}{}_{P}\, E_{\bar{D}}{}^{Q}\, K^{M}{}_{N}{}^{P}{}_{Q} = K^{\bar{A}}{}_{\bar{B}}{}^{\bar{C}}{}_{\bar{D}}\,. \tag{4.8}$$

La derivada de Lie en este espacio está dada por

$$\mathcal{L}_\xi V^M = \xi^P \partial_P V^M - A^{M}{}_{N}{}^{P}{}_{Q} \partial_P \xi^Q V^N + \frac{\omega}{2} \partial_P \xi^P V^M\,, \tag{4.9}$$

donde ω es el peso conforme de V y ξ es el parámetro de gauge. El tensor $A^{M}{}_{N}{}^{P}{}_{Q}$ está dado por

$$A^{M}{}_{N}{}^{P}{}_{Q} = 12 P_{(\mathrm{adj})}{}^{M}{}_{N}{}^{P}{}_{Q} = 12\,(t_\alpha)_N{}^M\,(t^\alpha)_Q{}^P\,, \tag{4.10}$$

donde t_α es un generador de $E_{7(7)}$, $\alpha = 1, \ldots, 133$ es un índice de la representación adjunta **133** del grupo, y $P_{(\mathrm{adj})}$ es el proyector a dicha representación. Para un objeto tensorial V se cumple

$$\delta_\xi V = \mathcal{L}_\xi V\,, \tag{4.11}$$

donde δ_ξ es una transformaciónd de gauge bajo el parámetro ξ.

4.2. DFT

Los primeros excitados no masivos de la teoría de cuerdas bosónica están dados por una métrica g_{ij}, una dos forma b_{ij} y un dilatón ϕ. Estos campos también corresponden al sector bosónico de supergravedad $D = 10$. Este sector posee una simetría $O(10, 10)$, conocidad como *dualidad T*.

El ejemplo más simple de dualidad T se da para el caso de la cuerda bosónica cerrada con una dimensión compactificada. Considérese su espectro de masa para el caso de la compactificación en un círculo de radio R, dado por

$$M^2 = (N + \tilde{N} - 2) + p^2 \frac{l_s^2}{R^2} + \tilde{p}^2 \frac{l_s^2}{\tilde{R}^2}\,, \tag{4.12}$$

donde p es su impulso en la dirección del círculo, $\tilde{p}$ es el número "winding" (proporcional a la cantidad de veces que está enrollada en el círculo) N y $\tilde{N}$ son los operadores de número de right-movers y los left-movers, respectivamente, l_s es la longitud de la cuerda, y $\tilde{R} = \frac{l_s^2}{R}$ es el radio dual. Además, el hecho de que en la cuerda cerrada no haya puntos distinguibles lleva a que los modos estén restrictos a satisfacer la llamada

Level Matching Condition (LMC)

$$N - \tilde{N} = p\tilde{p} \,. \tag{4.13}$$

La expresión (4.12) es invariante bajo el intercambio

$$\begin{aligned} \frac{R}{l_s} \leftrightarrow \frac{\tilde{R}}{l_s} \equiv \frac{l_s}{R} \,, \\ p \leftrightarrow \tilde{p} \,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

La generalización de esta dualidad al caso de n dimensiones compactificadas en un n-toro está dada por el grupo $O(n, n)$. Es posible tratar las dimensiones no compactificadas como a las demás, de manera de obtener una formulación covariante $O(D, D)$. DFT [10] es una formulación invariante bajo dicho grupo.

Los elementos del grupo $O(D, D)$se pueden definir como las matrices $2D \times 2D$ h_{MN} que satisfacen la relación

$$h_M^{\ Q} \, \eta_{PQ} \, h_N^{\ Q} = \eta_{MN} \,, \tag{4.15}$$

donde η_{MN} es la métrica invariante de $O(D, D)$, con la que se suben y bajan índices. La misma está dada por

$$\eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^{\ j} \\ \delta^i_{\ j} & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{4.16}$$

y cumple la relación

$$\eta^{MP} \eta_{PN} = \delta^M_N \,. \tag{4.17}$$

Dentro de esta estructura, los impulsos y windings se pueden meter dentro de un impulso generalizado

$$\mathcal{P}^M = \begin{pmatrix} = \tilde{p}_i \\ p^i \end{pmatrix} \,. \tag{4.18}$$

De la misma manera, los campos g_{ij}, b_{ij} y ϕ se pueden ubicar dentro de una métrica generalizada

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik} b_{kj} \\ b_{ik} g^{kj} & g_{ij} - b_{ik} g^{kl} b_{lj} \end{pmatrix} \,, \tag{4.19}$$

la cual cumple las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{MN} = \eta^{MP} \mathcal{H}_{PQ} \eta^{QP} \,, \\ \mathcal{H}_{MP} \mathcal{H}^{PN} = \delta^N_M \,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

También se pueden combinar el dilatón ϕ con el determinante de la métrica g_{ij} en un escalar $O(D,D)d$ mediante

$$e^{-2d} = \sqrt{g}e^{-2\phi} \,. \tag{4.21}$$

Las coordenadas del espacio generalizado están dadas por

$$X^M = (\tilde{x}_i, x^i) \,, \tag{4.22}$$

donde $\tilde{x}_i$ son las duales de Fourier a los windings $\tilde{p}_i$. Las mismas transforman en la representación fundamental de $O(D,D)$, y todos los campos de la teoría dependen de ellas: $\mathcal{H}_{MN} = \mathcal{H}_{MN}(X)$, $d = d(X)$.

De acuerdo a todo lo anterior, la transformación de un objeto V^M de la teoría está dada por

$$V^M \to h^M_{\ N} V^N \qquad h \in O(D,D) \,, \tag{4.23}$$

la cual se extiende de la manera habitual para objetos de más índices.

Dado que las coordenadas duales $\tilde{x}_i$ no tienen un significado físico desde el punto de vista de supergravedad, es necesaria una condición de vínculo que restrinja la dependencia de las coordenadas a algún subespacio D-dimensional de la teoría. Esta condición buscada no es más que la LMC (4.13), la cual se expresa en el lenguaje $O(D,D)$como la llamada *section condition*, dada por

$$\partial^M \partial_M (\ldots) = 0 \tag{4.24}$$

donde $(\ldots)$ es cualquier producto de campos. En realidad, muchas veces se utiliza una versión relajada, dada por

$$\partial^M \otimes \partial_M = 0 \,, \tag{4.25}$$

conocida como *strong constraint.*

La derivada de Lie en esta teoría está dada por

$$(\mathcal{L}_\xi V)^M = \xi^P \partial_P V^M - V^P \partial_P \xi^M + \eta^{MN} \eta_{PQ} \partial_N \xi^P V^Q \,, \tag{4.26}$$

donde la extensión para objetos con más índices se da de la manera habitual, tratándolos como producto de objetos un solo índice.

La acción en está dada por [7]

$$S = \int d^{2D} X e^{-2d} \mathcal{R} \,, \tag{4.27}$$

donde $\mathcal{R}$ es la curvatura escalar, dada por

$$\begin{aligned} R \equiv\ & 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\partial_N d \\ & + \frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_N H_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL} \,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.3. Descomposición de la acción en Teoría Doble

4.3.1. Preliminares y notación

En esta sección se denotarán los índices $O(10,10)$ con la tipografía $\mathbb{M}$, mientras que las letras mayúsculas romanas se utilizarán para indicar los índices internos $O(6,6)$. También se utilizará un "sombrero" sobre los operadores que actúen sobre todo el espacio $O(10,10)$, mientras que las cantidades correspondientes, sin el sombrero, corresponderán sólo al espacio $O(6,6)$. Debido a esto, se repite en la notación mencionada la expresión para la derivada de Lie:

$$(\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{\mathbb{M}} = \xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}V^{\mathbb{M}} - V^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{M}} + \eta^{\mathbb{MN}}\eta_{\mathbb{PQ}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}V^{\mathbb{Q}} \,. \tag{4.29}$$

También se repite la expresión para la curvatura escalar:

$$\begin{aligned} R \equiv\ & 4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}} d - \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}} - 4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}} d\partial_{\mathbb{N}} d + 4\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{N}} d \\ & + \frac{1}{8}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}} H^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{N}} H_{\mathbb{KL}} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{K}}\mathcal{H}_{\mathbb{NL}} \,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Se realizará un espliteo de índices según

$$\begin{aligned} (\ )^{\mathbb{M}} &= \left((\ )^{\hat{M}}, (\ )_{\hat{M}}\right) \\ &= ((\ )^{\mu}, (\ )^{m}, (\ )_{m}, (\ )_{\mu}) \\ &= \left((\ )^{\mu}, (\ )^{M}, (\ )_{\mu}\right) \,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde $(\mu, m) = \hat{M} = 1, \ldots, D$, y $M = (^{m}, {}_{m})$ es un índice con 12 valores. La derivada se esplitea según

$$\partial_{\mathbb{P}} = \left(\partial_{\hat{P}}, \partial^{\hat{P}}\right) = (\partial_{\hat{P}}, 0) = (\partial_\mu, \partial_m, 0) \,. \tag{4.32}$$

Los índices se bajan y suben con la métrica

$$\eta^{\mathbb{M}\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 0^{\hat{M}\hat{N}} & 1^{\hat{M}}{}_{\hat{N}} \\ 1_{\hat{N}}{}^{\hat{M}} & 0_{\hat{M}\hat{N}} \end{pmatrix} . \tag{4.33}$$

Un primer espliteo de la derivada de Lie está dado por

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{\hat{M}} &= \xi^{\hat{P}}\partial_{\hat{P}}V^{\hat{M}} - V^{\hat{P}}\partial_{\hat{P}}\xi^{\hat{M}} , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)_{\hat{M}} &= \xi^{\hat{P}}\partial_{\hat{P}}V_{\hat{M}} - V^{\hat{P}}\partial_{\hat{P}}\xi_{\hat{M}} + \eta_{\mathbb{P}\mathbb{Q}}\partial_{\mathbb{M}}\xi^{\mathbb{P}}V^{\mathbb{Q}} , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{\mu} &= \xi^{\nu}\partial_{\nu}V^{\mu} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{\mu} \equiv (L_\xi V)^{\mu} , \end{aligned} \tag{4.34}$$

donde $L_\xi V$ es la derivada de Lie común en $D = 4$ dimensiones espacio-temporales.

Continuando con el espliteo,

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{\mu} &= \xi^{\nu}\partial_{\nu}V^{\mu} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{\mu} \equiv (L_\xi V)^{\mu} , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{m} &= \xi^{\nu}\partial_{\nu}V^{m} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{m} + (\xi^{P}\partial_{P}V^{m} - V^{P}\partial_{P}\xi^{m}) , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)_{m} &= \xi^{\nu}\partial_{\nu}V_{m} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi_{m} + (\xi^{P}\partial_{P}V_{m} - V^{P}\partial_{P}\xi_{m} + \eta_{PQ}\partial_{m}\xi^{P}V^{Q}) , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)_{\mu} &= \xi^{\nu}\partial_{\nu}V_{\mu} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi_{\mu} + \partial_{\mu}\xi_{\rho}V^{\rho} + \partial_{\mu}\xi^{\rho}V_{\rho} + \eta_{PQ}\partial_{\mu}\xi^{P}V^{Q} = (*) , \end{aligned} \tag{4.35}$$

Reacomodando cosas, se llega, para la última ecuación, a

$$(*) = (L_\xi V)_{\mu} - V^{\nu}(\partial_{\nu}\xi_{\mu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu}) + \eta_{PQ}\partial_{\mu}\xi^{P}V^{Q} \tag{4.36}$$

Introduciendo la notación $V^M = (V^m, V_m)$ en las ecuaciones (4.35), se llega a

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{\mu} &= (L_\xi V)^{\mu} , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)^{M} &= (\xi^{P}\partial_{P}V^{M} - V^{P}\partial_{P}\xi^{M} + \eta^{MN}\eta_{PQ}\partial_{N}\xi^{P}V^{Q}) + \xi^{\nu}\partial_{\nu}V^{M} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{M} , \\ (\hat{\mathcal{L}}_\xi V)_{\mu} &= (L_\xi V)_{\mu} - 2V^{\nu}\partial_{[\mu}\xi_{\nu]} + \eta_{PQ}\partial_{\mu}\xi^{P}V^{Q} , \end{aligned} \tag{4.37}$$

Por conveniencia a la hora de realizar cálculos, se utilizará el operador dado por

$$\hat{\Delta}_\xi = \hat{\delta}_\xi - \hat{\mathcal{L}}_\xi , \tag{4.38}$$

el cual mide la falla de un objeto en transformar como un tensor.

En cuanto a la ubicación de los índices, es útil notar que

$$\hat{\Delta}_\xi(V)_{\mathbb{M}} = \hat{\Delta}_\xi(\eta_{\mathbb{M}\mathbb{K}}V^{\mathbb{K}}) = \hat{\Delta}_\xi(\eta_{\mathbb{M}\mathbb{K}})V^{\mathbb{K}} + \eta_{\mathbb{M}\mathbb{K}}\hat{\Delta}_\xi(V^{\mathbb{K}}) = \eta_{\mathbb{M}\mathbb{K}}\hat{\Delta}_\xi(V^{\mathbb{K}}) , \tag{4.39}$$

ya que para la métrica $\eta_{\mathbb{MN}}$ vale $\hat{\delta}_\xi \eta_{\mathbb{MN}} = \hat{\mathcal{L}}_\xi \eta_{\mathbb{MN}} = 0$. Por lo tanto, en la fórmulas en las que se use el operador $\hat{\Delta}_\xi$ la ubicación de los índices es indistinta.

4.3.2. Transformación de la curvatura escalar en el espacio doble

A continuación se procederá a analizar en detalle cómo transforman los términos de $\mathcal{R}$, de manera que la expresión total transforma como un escalar $O(10,10)$

$$\hat{\Delta}_\xi \mathcal{R} = 0\,. \tag{4.40}$$

Para esto, se realizará la cuenta en dos pasos y se comprobará cada una de las siguientes igualdades

$$\hat{\Delta}_\xi(4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}d - \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}} - 4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}d\partial_{\mathbb{N}}d + 4\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{N}}d) = \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\,, \tag{4.41}$$

$$\hat{\Delta}_\xi(\frac{1}{8}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{N}}H_{\mathbb{KL}} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{K}}\mathcal{H}_{\mathbb{NL}}) = -\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\,. \tag{4.42}$$

Es últil tener en cuenta las siguientes identidades

$$\hat{\Delta}_\xi(\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}}) = -2\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{(\mathbb{K})}\mathcal{H}^{\mathbb{L})\mathbb{P}} + 2\partial_{\mathbb{M}}\partial^{(\mathbb{K}}\xi_{\mathbb{P}}H^{\mathbb{L})\mathbb{P}}\,, \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_\xi(\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}}) &= \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{P}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}} - 2\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{P}(\mathbb{L}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{K})} - 2\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{P}(\mathbb{L}}\partial_{\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{K})}\\ &+2\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\partial^{(\mathbb{K}}\xi_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{L})\mathbb{P}} + 2\partial_{\mathbb{N}}\partial^{(\mathbb{K}}\xi_{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{L})\mathbb{P}} + 2\partial_{\mathbb{M}}\partial^{(\mathbb{K}}\xi_{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{L})\mathbb{P}}\,,\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\hat{\Delta}_\xi(\partial_{\mathbb{M}}d) = -\frac{1}{2}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{P}}\,, \tag{4.45}$$

$$\hat{\Delta}_\xi(\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}d) = \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}d - \frac{1}{2}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{P}}\,. \tag{4.46}$$

También es conveniente tener en cuenta que se hará uso de la *strong constraint* $\partial^{\mathbb{M}} \otimes \partial_{\mathbb{M}} = 0$, y la *weak constraint* $\partial^{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{M}}(\ldots) = 0$.

Utilizando lo anterior, se llega para (4.41) a

$$\begin{aligned}&= 4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}d - 2\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{P}} + 2\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}} + 2\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{P}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\\ &+ \underline{\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}} - 4\partial_{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{M}}\xi^{M}\mathcal{H}^{\mathbb{PN}}\partial_{\mathbb{N}}d - 4\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{N}\mathcal{H}^{\mathbb{MP}}\partial_{\mathbb{N}}d\\ &+ \cancel{4\partial_{\mathbb{M}}\partial^{\mathbb{N}}\xi_{P}\mathcal{H}^{\mathbb{MP}}}\partial_{\mathbb{N}}d - 2\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{P}} + 4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}d\partial_{\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{P}} = \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\,,\end{aligned} \tag{4.47}$$

donde los términos con igual subrayado se cancelan entre sí, y el término tachado se cancela debido a la strong constraint.

En cuanto a (4.42), se llega a

$$
\begin{aligned}
&\underline{-\tfrac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^K H^{LP}\partial_N H_{KL}} - \underline{\tfrac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^L H^{KP}\partial_N H_{KL}} \\
&\qquad + \underline{\tfrac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^K H^{LP}\partial_K H_{NL}} + \underline{\tfrac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^L H^{KP}\partial_K H_{NL}} \\
&\qquad + \frac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^K L\partial_K\partial^P\xi_N H_{LP} + \cancel{\frac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial^P\xi_L H_{NP}} \\
&\qquad - \underline{\tfrac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial_N\xi^P H_{LP}} - \underline{\tfrac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial_L\xi^P H_{NP}} \\
&\qquad = \cancel{\frac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial^P\xi_N H_{LP}} - H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial_L\xi^P H_{NP} \\
&\qquad\qquad = H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial_L\xi^P H_{NP} = \partial_M H^{KL}\partial_K\partial_L\xi^M
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

donde se puede demostrar que los términos tachados son nulos, y los términos subrayados con una línea contínua se suman.

De esta manera, se ve que

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_\xi R &= \hat{\Delta}_\xi(4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}d - \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}} - 4\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}d\partial_{\mathbb{N}}d + 4\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{N}}d) \\
&\quad + \hat{\Delta}_\xi(\frac{1}{8}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{N}}H_{\mathbb{KL}} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{K}}\mathcal{H}_{\mathbb{NL}}) \\
&\quad = \partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}} - \partial_{\mathbb{K}}\partial_{\mathbb{L}}\xi^{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

4.3.3. Descomposición en sectores externo, interno, y mixto

En lo que sigue, se realizará una descomposición del proceso anterior de acuerdo al espliteo (4.31). La estructura general del espliteo, para la parte (4.41), está dada por los términos

$$
\hat{\Delta}_\xi(4H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}d) = 4H^{\mu\nu}\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu\partial_\nu d) + 8H^{\mu N}\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu\partial_N d) + 4H^{MN}\hat{\Delta}_\xi(\partial_M\partial_N d)\,, \tag{4.50}
$$

$$
\hat{\Delta}_\xi(-\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}H^{\mathbb{MN}}) = \hat{\Delta}_\xi(-\partial_\mu\partial_\nu H^{\mu\nu} + 2\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu\partial_N H^{\mu N}) + \hat{\Delta}_\xi(-\partial_M\partial_N H^{MN})\,, \tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_\xi(4\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{N}}d) &= 4\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu H^{\mu\nu}\partial_\nu d) + 4\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu H^{\mu N}\partial_N d) + 4\hat{\Delta}_\xi(\partial_M H^{M\nu}\partial_\nu d) \\
&\quad + 4\hat{\Delta}_\xi(\partial_M H^{MN}\partial_N d)\,,
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-4H^{\mathbb{M}\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{M}}d\partial_{\mathbb{N}}d) = -8H^{\mu\nu}\partial_\mu d\hat{\Delta}_\xi(\partial_\nu d) - 8H^{\mu N}\partial_\mu d\hat{\Delta}_\xi(\partial_N d) - 8H^{M\nu}\partial_M d\hat{\Delta}_\xi(\partial_\nu d) - 8H^{MN}\partial_M d\hat{\Delta}_\xi(\partial_N d)\,, \quad (4.53)$$

donde se puede observar términos puramente externos, puramente internos, y términos mixtos.

A continuación se da el desarrollo de los términos puramente internos.

$$\hat{\Delta}_\xi(4H^{MN}\partial_M\partial_N d) = 4H^{MN}\partial_M\partial_N\xi^P\partial_P d - 2H^{MN}\partial_M\partial_N\partial_P\xi^P + 4H^{MN}\partial_M\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma d - 2H^{MN}\partial_M\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma\,, \quad (4.54)$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-\partial_M\partial_N H^{MN}) = 2\partial_M H^{MP}\partial_N\partial_P\xi^N + \partial_M H^{PN}\partial_N\partial_P\xi^M + 2H^{PN}\partial_M\partial_N\partial_P\xi^M - \partial_M\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma H^{MN} + 2\partial_M H^{M\sigma}\partial_N\partial_\sigma\xi^N + 2\partial_M H^{\sigma N}\partial_N\partial_\sigma\xi^M + 2H^{\sigma N}\partial_M\partial_N\partial_\sigma\xi^M\,, \quad (4.55)$$

$$\hat{\Delta}_\xi(4\partial_M H^{MN}\partial_N d) = -8\partial_M\partial_P\xi^{(M}H^{N)P}\partial_N d - 2\partial_M H^{MN}\partial_N\partial_P\xi^P - 8\partial_M\partial_\sigma\xi^{(M}H^{N)\sigma}\partial_N d - 2\partial_M H^{MN}\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma\,, \quad (4.56)$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-4H^{MN}\partial_M d\partial_N d) = 4H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^P\partial_N d + 4H^{MN}\partial_M\partial_\sigma\xi^\sigma\partial_N d\,, \quad (4.57)$$

donde también se ha separado el índice del parámetro de la derivada $\hat{\Delta}_\xi$ en parte externa e interna: $\mathbb{P} \to (\sigma, P)$.

Nótese, además, que los términos puramente internos en DFT corresponden a la acción conocida de EFT.

El desarrollo de los términos puramente externos está dado por

$$\hat{\Delta}_\xi(4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu d) = 4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\xi^\sigma\partial_\sigma d - 2H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\sigma + 4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\xi^P\partial_P d - 2H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_P\xi^P\,, \quad (4.58)$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-\partial_\mu\partial_\nu H^{\mu\nu}) = 2\partial_\nu H^{\sigma\nu}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^\mu + \partial_\mu H^{\sigma\nu}\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\mu + 2H^{\sigma\nu}\partial_\mu\partial_\sigma\partial_\nu\xi^\mu - \partial_\mu\partial_\nu\xi^P\partial_P H^{\mu\nu} + 2\partial_\nu H^{P\nu}\partial_\mu\partial_P\xi^\mu + 2\partial_\mu H^{P\nu}\partial_\nu\partial_P\xi^\mu + 2H^{P\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_P\xi^\mu\,, \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_\xi(4\partial_\mu H^{\mu\nu}\partial_\nu d) = & -4\partial_\mu\partial_\sigma\xi^\mu H^{\nu\sigma}\partial_\nu d - 4\partial_\mu\partial_\sigma\xi^\nu H^{\mu\sigma}\partial_\nu d - 2\partial_\mu H^{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\sigma \\ & - 4\partial_\mu\partial_P\xi^\mu H^{\nu P}\partial_\nu d - 4\partial_\mu\partial_P\xi^\nu H^{\mu P}\partial_\nu d - 2\partial_\mu H^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_P\xi^P \,, \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-4H^{\mu\nu}\partial_\mu d\partial_\nu d) = 4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^\sigma\partial_\nu d + 4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_P\xi^P\partial_\nu d \,. \tag{4.61}$$

Nótese que la forma de estos términos es igual a la forma de los correspondientes términos de la parte 1 del sector interno, haciendo los reemplazos $\mu, \nu, \sigma, P \to M, N, P, \sigma$.

El desarrollo de los términos mixtos es

$$\begin{aligned}8H^{\mu N}\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu\partial_N d) = & \, 8H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\xi^P\partial_P d - 4H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\partial_P\xi^P + 8H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma d \\ & - 4H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma \,, \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}2\hat{\Delta}_\xi(-\partial_\mu\partial_N H^{\mu N}) = & -2\partial_\mu\partial_N\xi^P\partial_P H^{\mu N} + 2\partial_N H^{PN}\partial_\mu\partial_P\xi^\mu + 2\partial_N H^{P\mu}\partial_\mu\partial_P\xi^N \\ & + 2\partial_\mu H^{PN}\partial_N\partial_P\xi^\mu + 2\partial_\mu H^{P\mu}\partial_N\partial_P\xi^N + 2H^{PN}\partial_\mu\partial_N\partial_P\xi^\mu \\ & + 2H^{P\mu}\partial_\mu\partial_N\partial_P\xi^N - 2\partial_\mu\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma H^{\mu N} + 2\partial_N H^{\sigma N}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^\mu \\ & + 2\partial_N H^{\sigma\mu}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^N + 2\partial_\mu H^{\sigma N}\partial_N\partial_\sigma\xi^\mu + 2\partial_\mu H^{\sigma\mu}\partial_N\partial_\sigma\xi^N \\ & + 2H^{\sigma N}\partial_\mu\partial_N\partial_\sigma\xi^\mu + 2H^{\sigma\mu}\partial_\mu\partial_N\partial_\sigma\xi^N \,, \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}4\hat{\Delta}_\xi(\partial_\mu H^{\mu N}\partial_N d) = & -4\partial_\mu\partial_P\xi^\mu H^{NP}\partial_N d - 4\partial_\mu\partial_P\xi^N H^{\mu P}\partial_N d - 2\partial_\mu H^{\mu N}\partial_N\partial_P\xi^P \\ & - 4\partial_\mu\partial_\sigma\xi^\mu H^{N\sigma}\partial_N d - 4\partial_\mu\partial_\sigma\xi^N H^{\mu\sigma}\partial_N d - 2\partial_\mu H^{\mu N}\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma \,, \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}4\hat{\Delta}_\xi(\partial_M H^{M\nu}\partial_\nu d) = & -4\partial_M\partial_P\xi^M H^{\nu P}\partial_\nu d - 4\partial_M\partial_P\xi^\nu H^{MP}\partial_\nu d - 2\partial_M H^{M\nu}\partial_\nu\partial_P\xi^P \\ & - 4\partial_M\partial_\sigma\xi^M H^{\nu\sigma}\partial_\nu d - 4\partial_M\partial_\sigma\xi^\nu H^{M\sigma}\partial_\nu d - 2\partial_M H^{M\nu}\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\sigma \,, \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$-8H^{\mu N}\partial_\mu d\,\hat{\Delta}_\xi(\partial_N d) = 4H^{\mu N}\partial_\mu d\partial_N\partial_P\xi^P + 4H^{\mu N}\partial_\mu d\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma \,, \tag{4.66}$$

$$- 8H^{M\nu}\partial_M d\,\hat{\Delta}_\xi(\partial_\nu d) = 4H^{M\nu}\partial_M d\partial_\nu\partial_P\xi^P + 4H^{M\nu}\partial_M d\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\sigma\,. \tag{4.67}$$

Finalmente, se tienen las expresiones totales para cada componente del espliteo de la primera parte (4.41).

$$\begin{aligned}\mathrm{P1}_{\mathrm{mix}} &= 4H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\xi^P\partial_P d - 2H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\partial_P\xi^P + 4H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma d\\ &- 2H^{\mu N}\partial_\mu\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma + 2\partial_N H^{PN}\partial_\mu\partial_P\xi^\mu + 2\partial_\mu H^{PN}\partial_N\partial_P\xi^\mu + 2H^{PN}\partial_\mu\partial_N\partial_P\xi^\mu\\ &+ 2\partial_N H^{\sigma\mu}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^N + 2\partial_\mu H^{\sigma\mu}\partial_N\partial_\sigma\xi^N + 2H^{\sigma\mu}\partial_\mu\partial_N\partial_\sigma\xi^N - 4\partial_\mu\partial_P\xi^\mu H^{NP}\partial_N d\\ &- 4\partial_\mu\partial_\sigma\xi^N H^{\mu\sigma}\partial_N d - 2\partial_\mu H^{\mu N}\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma - 4\partial_M\partial_P\xi^\nu H^{MP}\partial_\nu d - 2\partial_M H^{M\nu}\partial_\nu\partial_P\xi^P\\ &- 4\partial_M\partial_\sigma\xi^M H^{\nu\sigma}\partial_\nu d + 4H^{\mu N}\partial_\mu d\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma + 4H^{M\nu}\partial_M d\partial_\nu\partial_P\xi^P\,,\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P1}_{\mathrm{int}} &= \partial_M H^{MP}\partial_N\partial_P\xi^N + 4H^{MN}\partial_M\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma d - 2H^{MN}\partial_M\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma\\ &- \partial_M\partial_N\xi^\sigma\partial_\sigma H^{MN} + 2\partial_M H^{M\sigma}\partial_N\partial_\sigma\xi^N + 2\partial_M H^{\sigma N}\partial_N\partial_\sigma\xi^M + 2H^{\sigma N}\partial_M\partial_N\partial_\sigma\xi^M\\ &- 4\partial_M\partial_\sigma\xi^M H^{N\sigma}\partial_N d - 4\partial_M\partial_\sigma\xi^N H^{M\sigma}\partial_N d - 2\partial_M H^{MN}\partial_N\partial_\sigma\xi^\sigma\\ &+ 4H^{MN}\partial_M\partial_\sigma\xi^\sigma\partial_N d\,,\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P1}_{\mathrm{ext}} &= \partial_\mu H^{\sigma\nu}\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\mu + 4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\xi^P\partial_P d - 2H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_P\xi^P\\ &- \partial_\mu\partial_\nu\xi^P\partial_P H^{\mu\nu} + 2\partial_\nu H^{P\nu}\partial_\mu\partial_P\xi^\mu + 2\partial_\mu H^{P\nu}\partial_\nu\partial_P\xi^\mu + 2H^{P\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_P\xi^\mu\\ &- 4\partial_\mu\partial_P\xi^\mu H^{\nu P}\partial_\nu d - 4\partial_\mu\partial_P\xi^\nu H^{\mu P}\partial_\nu d - 2\partial_\mu H^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_P\xi^P + 4H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_P\xi^P\partial_\nu d\,,\end{aligned} \tag{4.70}$$

"P1" indica que se todo se refiere a (4.41), mientras que el subíndice indica de qué componente se trata. Se puede ver que la suma de todos estos términos da, efectivamente, $\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}\partial_{\mathbb{P}}\mathcal{H}^{\mathbb{M}\mathbb{N}}$.

Ahora se pasa a realizar el mismo procedimiento, pero para la segunda parte (4.42).

La estructura del espliteo está dada por

$$\hat{\Delta}_\xi(\frac{1}{8}\mathcal{H}^{\mathbb{M}\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{K}\mathbb{L}}\partial_{\mathbb{N}}H_{\mathbb{K}\mathbb{L}} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathbb{M}\mathbb{N}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{K}\mathbb{L}}\partial_{\mathbb{K}}\mathcal{H}_{\mathbb{N}\mathbb{L}}) \tag{4.71}$$

El espliteo de cada uno de los términos es

$$\hat{\Delta}_\xi(\frac{1}{8}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{N}}H_{\mathbb{KL}}) = -\frac{1}{2}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{K}}H^{\mathbb{LP}}\partial_{\mathbb{N}}H_{\mathbb{KL}} + \frac{1}{2}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial^{\mathbb{K}}\xi_{\mathbb{P}}H^{\mathbb{LP}}\partial_{\mathbb{N}}H_{\mathbb{KL}}\,, \quad (4.72)$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-\frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\mathcal{H}^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{K}}\mathcal{H}_{\mathbb{NL}}) = \frac{1}{2}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{K}}H^{\mathbb{LP}}\partial_{\mathbb{K}}H_{\mathbb{NL}} + \frac{1}{2}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{P}}\xi^{\mathbb{L}}H^{\mathbb{KP}}\partial_{\mathbb{K}}H_{\mathbb{NL}} - \frac{1}{2}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{K}}\xi^{\mathbb{K}}\partial_{\mathbb{N}}\xi^{\mathbb{P}}H_{\mathbb{LP}} - \frac{1}{2}H^{\mathbb{MN}}\partial_{\mathbb{M}}H^{\mathbb{KL}}\partial_{\mathbb{K}}\xi^{\mathbb{K}}\partial_{\mathbb{L}}\xi^{\mathbb{P}}H_{\mathbb{NP}}\,. \quad (4.73)$$

Para el sector interno se tiene

$$\hat{\Delta}_\xi(\frac{1}{8}H^{M}N\partial_M H^{KL}\partial_N H_{KL}) = = -\frac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^{(K}H^{L)P}\partial_N H_{KL} + \frac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial^{(K}\xi_P H^{L)P}\partial_N H_{KL} - \frac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial_\sigma\xi^{(K}H^{L)\sigma}\partial_N H_{KL} + \frac{1}{2}H^{MN}\partial_M\partial^{(K}\xi_\sigma H^{L)\sigma}\partial_N H_{KL}\,, \quad (4.74)$$

$$\hat{\Delta}_\xi(-\frac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K H_{NL}) = H^{MN}\partial_M\partial_P\xi^{(K}H^{L)P}\partial_K H_{NL} + H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial^P\xi_{(N}H_{LP} - H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial_{(N}\xi^P H_{L)P} + H^{MN}\partial_M\partial_\sigma\xi^{(K}H^{L)\sigma}\partial_K H_{NL} - H^{MN}\partial_M\partial^{(K}\xi_\sigma H^{L)\sigma}\partial_K H_{NL} - H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K\partial_{(N}\xi^\sigma H_{L)\sigma}\,, \quad (4.75)$$

mientras que para el sector externo el desarrollo está dado por

$$\hat{\Delta}_\xi(\frac{1}{8}H^{\mu\nu}\partial_\mu H^{\kappa\lambda}\partial_\nu H_{\kappa\lambda}) = = -\frac{1}{2}H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_P\xi^{(\kappa}H^{\lambda)P}\partial_\nu H_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^{(\kappa}\xi_P H^{\lambda)P}\partial_\nu H_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^{(\kappa}H^{\lambda)\sigma}\partial_\nu H_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^{(\kappa}\xi_\sigma H^{\lambda)\sigma}\partial_\nu H_{\kappa\lambda}\,, \quad (4.76)$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_\xi(-\frac{1}{2}H^{\mu\nu}\partial_\mu H^{\kappa\lambda}\partial_\kappa H_{\nu\lambda}) = H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_P\xi^{(\kappa}H^{\lambda)P}\partial_\kappa H_{\nu\lambda} \\
+ H^{\mu\nu}\partial_\mu H^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial^P\xi_{(\nu}H_{\lambda P} - H^{\mu\nu}\partial_\mu H^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial_{(\nu}\xi^P H_{\lambda)P} \\
+ H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\sigma\xi^{(\kappa}H^{\lambda)\sigma}\partial_\kappa H_{\nu\lambda} - H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^{(\kappa}\xi_\sigma H^{\lambda)\sigma}\partial_\kappa H_{\nu\lambda} \\
- H^{\mu\nu}\partial_\mu H^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial_{(\nu}\xi^\sigma H_{\lambda)\sigma}\,, \quad (4.77)
\end{aligned}
$$

El desarrollo de los términos en el sector mixto es extremadamente complicado, por lo que no se lo menciona.

Analizando la relación entre los términos externos y mixtos, y los términos puramente internos es que se espera poder generalizar este procedimiento de manera de poder aplicarlo a EFT.

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha analizado la relación entre la acción de DFT restringida al espacio interno y la acción completa de la teoría. Mediante el espliteo de los campos y de la derivada de Lie se llegó a una expresión $O(10,10)$ invariante en la que se ve claramente cómo las componentes externas y mixtas de los campos complementan la acción $O(6,6)$ invariante de la teoría restringida al espacio interno.

Se comenzó con la expresión completa de la curvatura escalar, y se analizó en detalle la naturaleza escalar de la misma. Esto se logró trabajando aplicando el operador $\hat{\Delta}_\xi$ a cada uno de los términos de la curvatura.

Luego se esplitearon los campos de la curvatura en partes puramente interna, externa y mixtas. Aplicando nuevamente el operador $\hat{\Delta}_\xi$ a la expresión puramente interna se observó de qué manera la misma fallaba en transformar como un escalar. Luego, aplicando $\hat{\Delta}_\xi$ a las expresiones externa y mixma se comprobó los términos resultantes compensaban a los de la expresión interna, dando como resultado una cantidad efectivamente escalar bajo $O(10,10)$.

Se logró un procedimiento sistematizado que se espera poder aplicar a la acción interna de EFT.

Apéndice A

Nociones básicas de supergravedad

El álgebra de Poincaré está dada por

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0\,, \\
[P_\mu, L_{\nu\rho}] &= i(\eta_{\mu\nu} P_\sigma - \eta_{\mu\rho} P_\nu)\,, \\
[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] &= -i(\eta^{\nu\rho} L^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} L^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} L^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} L^{\nu\sigma})\,,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

donde la última ecuación es la definición del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(1,3)$, y la ecuación del medio "extiende" esta última al dar una relación con los generadores de traslaciones P_μ. El álgebra supersimétrica está dada por

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= 0\,, \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= 2\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu\,, \\
[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot\alpha}, P_\mu] &= 0\,, \\
[Q_\alpha, L^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta\,, \\
[\bar{Q}_{\dot\alpha}, L^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}(\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha}^{\dot\beta} \bar{Q}_{\dot\beta}\,,
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

donde Q_α y $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ son los generadores de las transformaciones de supersimetría. Las tres últimas ecuaciones cumplen la misma función que la ecuación del medio de (A), al dar la manera en que están relacionados los generadores de supersimetría con los generadores de Poincaré.

De esta manera, los campos de una teoría supersimétrica de la gravedad transformarán en representaciones del álgebra que surge de combinar (A) y (A).

Para construir una teoría supersimétrica de la gravedad, la métrica $g_{\mu\nu}$ debe ser parte de un supermultiplete. También es necesario que la transformación de supersimetría sea local, con lo que los parámetros supersimétricos se vuelven dependientes de las coordenadas espacio-temporales. O sea: hay que "gaugear" las transformaciones globales de supersimetría, por lo que es necesario introducir un campo gauge cuyo espín sea una unidad más que el del parámetro de la transformación. Dicho campo es el gravitino ψ_μ^α, cuyo espín es 3/2. Junto con el gravitón $g_{\mu\nu}$ forma el llamado *supermultiplete gravitón*.

La acción de Einstein-Hilbert para la gravedad está dada por el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4}\sqrt{g}R\,, \tag{A.3}$$

donde g es el determinante de la métrica, y R es la curvatura escalar. Sin embargo, para la construcción de una teoría supersimétrica $N = 1$ de la gravedad, se hará uso de una forma más conveniente del mismo: la llamada formulación de Palatini

$$\mathcal{L}_{EH}[e,\omega] = -\frac{1}{4}|e|{e_a}^\mu {e_b}^\nu {R_{\mu\nu}}^{ab}[\omega]\,, \tag{A.4}$$

donde ${e_a}^\mu$ es el vielbein (en este caso $D = 4$, vierbein o tetrad), $|e|$ es su determinante, y ${R_{\mu\nu}}^{ab} = {R_{\mu\nu}}^\rho{}_\sigma {e_\rho}^a e^{b\sigma}$ es el tensor de Riemann con dos índices planos. Ya que se quiere incluir al gravitino ψ_μ^α en la teoría, es necesario incorporar a (A.4) términos cinéticos y de interacción para el mismo. Lo primero se logra mediante el lagrangiano de Rarita-Schwinger [**?**]

$$\mathcal{L}_{RS} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5 D_\rho\psi_\sigma\,. \tag{A.5}$$

La derivada covariante presente en el mismo, dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ab}L_{ab}\,, \tag{A.6}$$

provee un acoplamiento a la gravedad. Sin embargo, la suma de (A.4) y (A.5) no es una teoría supersimétrica. La solución a este problema es reemplazar la conexión espín por lo siguiente:

$${\omega_\mu}^{ab} + K^a{}_\mu{}^b\,, \tag{A.7}$$

donde $K^a{}_\mu{}^b$ es la contorsión, dada por

$$K^a{}_\mu{}^b = -i(\bar{\psi}^{[a}\gamma^{b]}\psi_\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}^a\gamma_\mu\psi^b)\,. \tag{A.8}$$

Realizando esta sustitución de forma explícita, se llega a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}|e|{e_a}^\mu {e_b}^\nu {R_{\mu\nu}}^{ab} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5 D_\rho\psi_\sigma - \frac{1}{4}|e|({K_a}^{cc}K^b_b{}_c + K^{abc}K_{cab}) \tag{A.9}$$

como forma del lagrangiano totalmente supersimétrico. Por lo tanto, este es el lagrangiano de supergravedad $N = 1$ en cuatro dimensiones. Nótese que los términos que involucran a K_{abc} dan las interacciones fermiónicas.

Para finalizar, es útil a los propósitos de esta tesis mirar las transformaciones de supersimetría de los campos del supermultiplete gravitón. Estas son

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon e_\mu{}^a &= -i\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu \,, \\ \delta_\epsilon \psi_\mu &= D_\mu \epsilon \,. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Es fácil ver que el álgebra supersimétrica cierra como

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] e_\mu{}^a = D_\mu(\xi^\nu e_\nu{}^a) \tag{A.11}$$

$$= \xi^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a + e_\nu{}^a \partial_\mu \xi^\nu + \xi^\nu \hat{\omega}_\nu{}^a{}_b + i\xi^\nu \bar{\psi}_\nu \gamma^a \psi_\mu \,, \tag{A.12}$$

donde $\xi^\mu = i\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1$. Los primeros dos términos del lado derecho corresponden a un difeomorfismo de parámetro ξ^μ sobre $e_\mu{}^a$, el siguiente término representa una transformación de Lorentz con parámetro $\Lambda^a{}_b = \xi^\nu\hat{\omega}_\nu{}^a{}_b$, mientras que el último es otra transformación de supersimetría con parámetro $\epsilon = -\xi^\nu\psi_\nu$. La cuestión del cierre del álgebra cobrará un papel protagónico cuando se haga el tratamiento de DFT y EFT.

Apéndice B

Formas y dualización

Las p-formas de supergravedad en dimensión D impar [1], y con $p \leq (D-1)/2$, tienen un término cinético dado por

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{2(p+1)!}\,\mathcal{M}_{IJ}F^{I}_{\nu_1\ldots\nu_{p+1}}\,F^{J\,\nu_1\ldots\nu_{p+1}}\,, \tag{B.1}$$

donde la intensidad de campo abeliana está dada por

$$F^{I}_{\nu_1\ldots\nu_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\nu_1}B^{I}_{\nu_2\ldots\nu_{p+1}}\,, \tag{B.2}$$

y los índices I, J corresponden a la representación adecuada del grupo de simetría global G. De (B.1) se deduce la ecuación de movimiento [2]

$$\partial^{\mu}(\mathcal{M}_{IJ}\,F^{I}_{\mu\nu_1\ldots\nu_p}) = 0\,, \tag{B.3}$$

a la vez que la intensidad de campo F^I está sujeta a la identidad de Bianchi

$$\partial_{[\nu_1}F^{I}_{\nu_2\ldots\nu_{p+2}]} = 0\,. \tag{B.4}$$

Estas ecuaciones motivan la definición de la intensidad de campo dual

$$G_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-1}\,I} \equiv \frac{e}{(p+1)!}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-1}\nu_1\ldots\nu_{p+1}}\,\mathcal{M}_{IJ}\,F^{J\,\nu_1\ldots\nu_{p+1}}\,, \tag{B.5}$$

[1] El caso de dimensión par es analizado más adelante.

[2] Ya que el lagrangiano total posee, además de $\mathcal{L}_{cin}$, términos topológicos y de interacción con fermiones, las ecuaciones de movimiento totales también reciben contribuciones de estos términos. Sin embargo, a los propósitos de este análisis, no será necesario escribirlos explícitamente.

en términos de la cual las ecuaciones (B.3) y (B.4) pasan a ser

$$\partial_{[\mu_1} G_{\mu_2\ldots\mu_{D-p-1}\, I} = 0\,, \tag{B.6}$$

$$\partial^{\mu}(\mathcal{M}^{IJ}\, G_{\mu\nu_1\ldots\nu_{D-p-2}\, J}) = 0\,, \tag{B.7}$$

resp.
Se ve, así, que las ecuaciones de movimiento y las identidades de Bianchi intercambian roles cuando se expresa la dinámica en términos de la intensidad de campo dual G_I. Esto permite, al menos localmente, definir las $(D-p-1)$-formas duales C_I mediante

$$G_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-1}\, I} \equiv (D-p-1)\, \partial_{[\mu_1} C_{\mu_2\ldots\mu_{D-p-1}]\, I}\,. \tag{B.8}$$

las cuales transforman en la representación dual de G. El hecho de poder describir la dinámica de la teoría en término de las formas duales meramente refleja el hecho de que ambas formas transforman bajo la misma representación del pequeño grupo $SO(D-2)$. Dado que la dualidad depende de la forma de las ecuaciones de movimiento (B.3), la misma es una dualidad *on-shell*.

Como resultado de todo lo anterior, en general suele haber distintas formulaciones off-shell de una dada supergravedad sin gaugear que son equivalentes on-shell sólo luego de realizar la correspondiente dualización de parte de su contenido de formas. Siempre hay una versión de la teoría en la cual es posible llevar todas las formas a un mínimo grado posible $p \leq (D-1)/2$. Es en esta versión en la cual el grupo de simetría global más grande G es evidente, y en la cual el término cinético de las p-formas está dado por (B.1).

Debido a la dualidad (B.8) los campos escalares son duales a $(D-2)$-formas, pero la situación tiene una singularidad: el acoplamiento de los campos escalares (**??**) es no lineal. Debido a esto, la dualidad se ve ligeramente modificada, y es necesario reemplazar (B.8) por

$$G_{\mu_1\ldots\mu_{D-1}\,\alpha} \equiv e\, \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{D-1}\nu}\, j^{\nu}_{\alpha}\,, \tag{B.9}$$

donde j^{ν}_{α} es la corriente conservada asociada a la simetría generada por t_α.

Es de notar que la aparente diferencia en grados de libertad dada por una descripción en términos de escalares o de $(D-2)$-formas es resuelta por el hecho de que no todas las corrientes conservadas j^{ν}_{α} son independientes: la estructura del espacio coset del modelo sigma implica que

$$\mathcal{V}^{-1}(j_\alpha t^\alpha)\mathcal{V} \in \mathfrak{p} \tag{B.10}$$

para la corriente conservada asociada a (**??**), lo que representa dim(K) vínculos lineales sobre las intensidades de campo G_α, con lo que los grados de libertad efectivos vuelven a ser (dim(G) - dim(K)).

Dada la dualidad entre p-formas y $(D-p-1)$-formas, en el caso de dimensión par $D = 2K$ las $(K-1)$-formas B^Λ son duales a las $(K-1)$-formas B_Λ. En las teorías maximales se observa que el par completo (B^Λ, B_Λ) es el que transforma en una representación $2m$-dimensional del grupo de simetría global G. Como consecuencia de esto, G es una simetría global sólo on-shell.

El análogo de (B.8) en este caso es la ecuación G-covariante de autodualidad retorcida

$$F^P_{\nu_1\ldots\nu_K} = -\frac{e}{K!}\,\varepsilon_{\nu_1\ldots\nu_K\mu_1\ldots\mu_K}\,\Omega^{PQ}\,\mathcal{M}_{QR}\,F^{\mu_1\ldots\mu_K\,R}\,, \tag{B.11}$$

donde los índices P, Q, R transforman en la correspondiente representación $2m$-dimensional de G, y Ω^{PQ} está dada por

$$\Omega^{PQ} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m \\ \epsilon\mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{B.12}$$

donde $\epsilon = (-1)^{K+1}$, con lo que se ve que $\mathcal{M}_{PQ}$ debe ser simpléctica para K par, y ortogonal para K impar. Dado que Ω es un tensor G-invariante, (B.11) también lo es, explícitamente.

La acción en el caso de dimensión par se construye utilizando sólo la mitad de los campos de $B^P = (B^\Lambda, B_\Lambda)$:

$$\mathcal{L}_{cin} = \frac{1}{2K!}\,e\,\mathcal{I}_{\Lambda\Sigma}\,F^\Lambda_{\nu_1\ldots\nu_K}\,F^{\nu_1\ldots\nu_K\,\Sigma} + \frac{1}{2(K!)^2}\,\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_K\nu_1\ldots\nu_K}\,\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma}(\phi)\,F^\Lambda_{\mu_1\ldots\mu_K}\,F^\Sigma_{\nu_1\ldots\nu_K}\,, \tag{B.13}$$

donde F^Λ es la intensidad de campo correspondiente a B^Λ, y $\mathcal{I}_{\Lambda\Sigma}$ y $\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma}$ están dadas por

$$\mathcal{M}_{PQ} = -\begin{pmatrix} \mathcal{I} - \epsilon\mathcal{R}\mathcal{I}^{-1}\mathcal{R} & \epsilon\mathcal{R}\mathcal{I}^{-1} \\ -\mathcal{I}^{-1}\mathcal{R} & \mathcal{I}^{-1} \end{pmatrix}\,. \tag{B.14}$$

Las ecuaciones de campo correspondientes a (B.13) son

$$\partial_{[\mu_1}G_{\mu_2\ldots\mu_{K+1}]\,\Lambda} = 0\,, \tag{B.15}$$

donde G_Λ es la intensidad de campo dual, dada por

$$G_{\mu_1\ldots\mu_K\,\Lambda} \equiv (-1)^{K+1}\,\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_K\nu_1\ldots\nu_K}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^\Lambda_{\nu_1\ldots\nu_K}} \tag{B.16}$$

De la misma manera que con (B.1), se pueden definir formas duales, bajo las cuales la descripción dinámica intercambia ecuaciones de movimiento con identidades de Bianchi. Utilizando (B.16) y la intensidad de campo $F^P = (F^\Lambda, F_\Lambda)$ se recupera la forma G-covariante (B.3) de las ecuaciones de movimiento.

Para finalizar, se menciona que diferentes espliteos $B^K \rightarrow (B^\Lambda, B_\Lambda)$ dan lugar a diferentes formulaciones off-shell de la misma teoría, que son equivalentes on-shell, y el grupo de simetría off-shell dependerá del espliteo particular.

Apéndice C

Derivación de las condiciones de súper-Virasoro

Las condiciones de Virasoro en la teoría bosónica se derivan de las invariancias de reparametrización (2.4). Por lo tanto, si se pretende derivar condiciones análogas en la teoría supersimétrica, es necesario hallar una generalización de estas simetrías.

En primer lugar, dado que la invariancia por reparametrización requiere una métrica general en la hoja de mundo, es necesario generalizar en este sentido la acción supersimétrica (2.92). Para hacer esto, dada la presencia de campos espinoriales en la misma, es necesario hacer uso del formalismo vielbein (en este caso bidimensional, zweibein). La acción buscada es

$$S_2 = -\frac{1}{2\pi}\int d^2e \left(h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu\right) , \tag{C.1}$$

donde ∇_α es la derivada covariante de relatividad general (en $D = 2$), y e es el determinante del zweibein. Esta acción, por supuesto, posee invariancia ante transformaciones de supersimetría global (2.98), pero esto no es suficiente.

Como se vio, el conmutador (2.100) de dos transformaciones de supersimetría da como resultado una transformación (2.4), que se ha promovido a simetría local. Por lo tanto, ahora también la supersimetría debe ser una simetría local. Esto se logra introduciendo dos términos más a la accion S_2, como se muestra a continuación.

Si se le aplica a S_2 una transformación de supersimetría (2.98) con parámetro $\epsilon(\tau, \sigma)$, se tiene

$$\delta S_2 \propto \int d^2\sigma (\nabla_\alpha \bar{\epsilon}) J^\alpha \, , \tag{C.2}$$

donde J^α es la supercorriente. La forma de anular este sobrante es mediante la suma a la acción de un término

$$S_3 = -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma e\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu\,. \tag{C.3}$$

Sin embargo, ahora se tiene

$$\delta(S_2+S_3) \propto \int d^2\sigma(\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\bar{\psi}_\mu\nabla_\beta\bar{\epsilon})J^\alpha\,. \tag{C.4}$$

Esto se cancela agregando otro término más:

$$S_4 = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma e\bar{\psi}_\mu\psi^\mu\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\chi_\beta\,. \tag{C.5}$$

La acción completa $S = S_2 + S_3 + S_4$ sí posee supersimetría local, dada por las transformaciones

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu\,,\\
\delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\epsilon(\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu\chi_\alpha)\,,\\
\delta e^a_\alpha &= -2i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\chi_\alpha\,, && \text{(C.6)}\\
\delta\chi_\alpha &= \nabla_\alpha\epsilon\,. && \text{(C.7)}
\end{aligned}$$

Es interesante notar que la generalización de la simetría de Weyl (2.5) está dada por las transformaciones

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= 0\,,\\
\delta\psi^\mu &= -\frac{1}{2}\Lambda\psi^\mu\,,\\
\delta e^a_\alpha &= \Lambda e^a_\alpha\,, && \text{(C.8)}\\
\delta\chi_\alpha &= \frac{1}{2}\Lambda\chi_\alpha\,. && \text{(C.9)}
\end{aligned}$$

Pero ni las supersimetrías ni las invariancias de Weyl son las invariancias ante las que surgen las condiciones buscadas. Estas son las dadas por

$$\begin{aligned}
\delta\chi_\alpha &= i\rho_\alpha\eta\,,\\
\delta e^a_\alpha &= \delta\psi^\mu = \delta X^\mu = 0\,, && \text{(C.10)}
\end{aligned}$$

donde η es un espinor de Majorana arbitrario.

Ahora es posible hacer la derivación de las condiciones buscadas. Utilizando las cuatro simetrías bosónicas $\delta e^a_\alpha = 0$ que involucran al zweibein se lo lleva a la forma

$e_\alpha^a \to \delta_\alpha^a$. De la misma manera, utilizando las dos simetrías (C) se fija $\chi_\alpha = 0$. Con estas elecciones de gauge, las ecuaciones de movimiento toman la forma especialmente simple

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu &= 0\,, \\ \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu &= 0\,. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Reemplazando estas ecuaciones en las ecuaciones de movimiento de los campos e_α^a y χ_α de como resultado las condiciones buscadas:

$$\begin{aligned} J_\alpha \equiv -\frac{\pi}{2e}\frac{\delta S}{\delta \chi^\alpha} &= \frac{1}{2}\rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu = 0\,, \\ T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu &+ \frac{i}{2}\bar{\psi}^\mu \rho_{(\alpha}\partial_{\beta)}\psi_\mu - (\text{traza}) = 0\,. \end{aligned} \tag{C.12}$$

Apéndice D

Reducción dimensional con flujos

Se realizará una reducción dimensional de DFT utilizando el ansatz dado por

$$V^{\mathbb{M}}(x,y) = \left(V^{\mu}(x), V^{A}(x)E_A{}^M(y), V_{\mu}(x)\right) \,, \tag{D.1}$$

donde $x = x^{\mu}$ representa las coordenadas externas, y $y = y^m$ representa las coordenadas internas. Trabajando la expresión de $(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}V)^{\mu}$,

$$\begin{aligned}(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}V)^{\mu} = \xi^A(x)V^B(x)\left(E_A{}^P\partial_P E_B{}^M - E_B{}^P\partial_P E_A{}^M + \eta^{MN}\eta_{PQ}\partial_N E_A{}^P E_B{}^Q\right) \\ + \left(\xi^{\nu}(x)\partial_{\nu}V^A(x) - V^{\nu}(x)\partial_{\nu}\xi^A(x)\right)E_A{}^M \,.\end{aligned} \tag{D.2}$$

Se ve que el primer paréntesis del lado derecho no es más que un flujo $\hat{\mathcal{L}}_{E_A}E_B = F_{AB}{}^C E_C$. Usando esto, se llega a

$$\begin{aligned}(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}V)^{\mu} &= (L_{\xi}V)^{\mu} \,, \\ (\hat{\mathcal{L}}_{\xi}V)^{M} &= \xi^{\nu}\partial_{\nu}V^{\mu} - V^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{M} + F_{AB}{}^C\xi^A V^B E_A{}^M \,, \\ (\hat{\mathcal{L}}_{\xi}V)_{\mu} &= (L_{\xi}V)_{\mu} - 2V^{\nu}\partial_{[\mu}\xi_{\nu]} + \eta_{PQ}\partial_{\mu}\xi^P V^Q \,,\end{aligned} \tag{D.3}$$

que es la forma definitiva que se va a usar. Se ve que si no hay dependencia en x, de todo lo anterior sólo queda

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}V)^{M} = F_{AB}{}^C\xi^A V^B E_A{}^M \,. \tag{D.4}$$

En lo que sigue, se supondrá que sólo hay dependencia en x.

La derivada de Lie de la métrica está dada por

$$(\hat{\mathcal{L}}_\xi H)^{MN} = F_{AB}{}^{C}\xi^A H^{BN} E_C{}^M + F_{AB}{}^{C}\xi^A H^{MB} E_C{}^N = 2F_{AB}{}^{C}\xi^A H^{B(N} E_C{}^{M)}\,, \qquad \text{(D.5)}$$

donde se utiliza la notación

$$H^{MN} = H^{AB} E_A{}^M(y) E_B{}^N(y) = H^{NB}(y) E_B{}^M(y)\,. \qquad \text{(D.6)}$$

Ahora se procederá a variar la acción, dada por

$$S = \int dX e^{-2d}\mathcal{Q}\,, \qquad \text{(D.7)}$$

donde

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{8}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_N H_{KL} - \frac{1}{2}H^{MN}\partial_N H^{KL}\partial_L H_{MK} + 2H^{MN}\partial_M\partial_N d\,. \qquad \text{(D.8)}$$

Se utilizará el operador dado por

$$\hat{\Delta}_\xi = \hat{\mathcal{L}}_\xi - \hat{\delta}_\xi\,, \qquad \text{(D.9)}$$

y las identidades

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_\xi H^{MN} &= 0\,,\\ \hat{\Delta}_\xi E_A{}^M &= 0\,.\end{aligned} \qquad \text{(D.10)}$$

Derivando el primer término,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} = \frac{1}{8}H^{MN}\hat{\Delta}_\xi(\partial_M H^{KL})\partial_N H_{KL} &+ \frac{1}{8}H^{MN}\hat{\Delta}_\xi(\partial_N H^{KL})\partial_M H_{KL}\\ &= \frac{1}{4}H^{MN}\partial_M H_{KL}\,\hat{\Delta}_\xi(\partial_N H^{KL})\,.\end{aligned} \qquad \text{(D.11)}$$

Es útili notar que si se halla una expresión para $\hat{\Delta}_\xi(\partial_N H^{KL})$, se tiene todo más o menos resuelto, por lo que se hace a continuación.

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_\xi(\partial_M H^{KL}) = \hat{\mathcal{L}}_\xi(\partial_M H^{KL}) - \hat{\delta}_\xi(\partial_M H^{KL}) &= \hat{\mathcal{L}}_\xi(\partial_M H^{KL}) - 2F_{AB}{}^{C}\xi^A\partial_M(H^{B(N}E_C{}^{M)})\\ &= (**)\,.\end{aligned} \qquad \text{(D.12)}$$

Para poder seguir con esta cuenta, hay que ver cómo transforma algo con tres índices. La respuesta es

$$\hat{\mathcal{L}}_\xi W_M{}^{KL} = -F_{AC}{}^{B}\xi^A W_B{}^{KL} E_M{}^C + 2F_{AB}{}^{C}\xi^A W_M{}^{B(K} E_C{}^{L)} \qquad \text{(D.13)}$$

con lo que la expresión final para (**) es

$$
\begin{aligned}
(**) = -F_{AC}^{\ \ B}\xi^A\partial_B H^{KL}E_M^{\ \ C} + 2F_{AB}^{C}\xi^A\partial_M H^{B(K}E_C^{\ \ L)} - 2F_{AB}^{\ \ C}\xi^A\partial_M(H^{B(K}E_C^{\ \ L)}) \\
= F_{AB}^{\ \ C}\xi^A\left(-\partial_C H^{KL}E_M^{\ \ B} - 2H^{B(K}\partial_M E_C^{\ \ L)}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(D.14)}
$$

Bibliografía

[1] M. B. Green, J. B. Schwarz, E. Witten - *Superstring Theory (Vol. 1)* - Cambridge University Press (1987)

[2] M. Grana, "Flux compactifications in string theory: A Comprehensive review," Phys. Rept. **423**, 91 (2006) doi:10.1016/j.physrep.2005.10.008 [hep-th/0509003].

[3] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk - *Supergravity theory in 11 dimensions* - Phys. Lett. B 76 (1978) 409

[4] G. Aldazábal, D. Marqués, C. Nuñez - *Double Field Theory: A Pedagogical Review* - arXiv:1305.1907v2 [hep-th] 12 Aug 2013

[5] G. Aldazábal, M. Graña, D. Marqués, J. A. Rosabal - *Extended geometry and gauged minimal supergravity* - JHEP 06 (2013) 046

[6] G. Aldazábal, M. Graña, D. Marqués, J. A. Rosabal - *The gauge structure of exceptional field theories and the tensor hierarchy* - proofs JHEP 049P 0214

[7] O. Hohm, C. Hull, B. Zwiebach - *Generalized metric formulation of double field theory* - JHEP 1008:008,2010 arXiv:1006.4823v2 38

[8] P. C. West, "E(11) and M theory," Class. Quant. Grav. **18**, 4443 (2001) doi:10.1088/0264-9381/18/21/305 [hep-th/0104081]. 33

[9] F. Riccioni, D. Steele and P. West, "The E(11) origin of all maximal supergravities: The Hierarchy of field-strengths," JHEP **0909**, 095 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/09/095 [arXiv:0906.1177 [hep-th]]. 33

[10] C. Hull and B. Zwiebach, "Double Field Theory," JHEP **0909**, 099 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/09/099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]]. 36

Agradecimientos

A Gerardo, por guiarme en este nuevo camino. A Alejandro, por haberme ayudado mucho, pero mucho más de lo que hubiera esperado. Por haber sido un co-director en los hechos. A mis amigos del cole: Emiliano, Cintia, Valeria, Damián, y Leandro. A mis amigos de la facu: Pablo, Rodrigo, Leandro, y Quimey. A Caro, Susan, y Eduardo. Lo más cercano a una familia que tengo en Bariloche. A Clari: tu amor, comprensión, y apoyo están siempre conmigo. A Delia, que hace poquito que no está, pero la llevo siempre en mi corazón. A Porota. A Miguel y Pepe, que tampoco están. A papá, mamá, y Sabri. No estaría acá si no fuera por ellos. Por su constante apoyo y confianza, por su amor. Por estar siempre conmigo, a pesar de la distancia.