

**TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS**

**TEORÍAS DE CAMPOS NO CONMUTATIVAS:
SIMETRÍAS Y CONSISTENCIA CUÁNTICA**

LIC. IVÁN ANDRÉS DAVIDOVICH
Maestrando

DR. CÉSAR DANIEL FOSCO
Director

Diciembre de 2011

División de Partículas y Campos

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis padres, Adriana y Alberto

ÍNDICE

Índice general	III
Resumen	V
Abstract	VI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Modelo para partícula cargada en 2+1 dimensiones con un campo magnético intenso	3
1.2.1. Niveles de Landau	3
1.2.2. Proyección al Primer Nivel de Landau (PNL)	4
1.2.3. No conmutatividad en un sistema rotante	8
2. Teorías de campos no conmutativas: formalismo	10
2.1. Consideraciones generales	10
2.1.1. Álgebras y prescripciones de orden	10
2.1.2. Símbolos y productos \star	12
2.2. Acción para un campo escalar real con autointeracción ϕ^4	14
2.3. Reglas de Feynman para el campo escalar real	16
2.4. Renormalización y mezcla UV/IR	18
3. Teorías de campos no conmutativas con condiciones de borde	20
3.1. Imposición de las condiciones de borde	21
3.2. Cálculo del propagador para el campo escalar real entre bordes rectos paralelos	23
3.3. Desarrollo perturbativo del término de interacción con el borde	27
3.3.1. Primer orden en λ	28
3.3.2. Segundo orden en λ	29
3.3.3. Tercer orden en λ	33

3.3.4. Aplicación a un borde circular	34
3.3.5. Aplicación a un borde recto	36
3.3.6. Aplicación a dos bordes rectos paralelos	37
3.4. Conclusiones	38
4. Acción efectiva para soluciones de vacío particulares	39
4.1. Base matricial	39
4.2. Cálculo de la acción efectiva	41
4.2.1. Campo escalar real en el plano	42
4.2.2. Campo escalar real en 2+1 dimensiones	44
4.2.3. Campo escalar complejo en 2+1 dimensiones	45
4.3. Conclusiones	48
5. Conclusiones	49
 Agradecimientos	 51
 Bibliografía	 51

RESUMEN

En este trabajo se estudian teorías no conmutativas, es decir, teorías formuladas sobre un espacio en el cual las coordenadas cumplen una relación de conmutación no trivial, con un énfasis en teorías de campos escalares (particularmente reales) en 2+1 dimensiones, con el tiempo conmutativo. Luego de motivar el estudio de este tipo de teorías e introducir las herramientas básicas para su formulación, se procede al estudio de la imposición de condiciones de borde en teorías escalares no conmutativas. Esto se realiza a partir de la introducción de un término de interacción específico entre el campo y la curva que describe al borde (que es un objeto conmutativo usual), a través del producto de Moyal. Con esto presente, se procede al cálculo del propagador para el campo escalar real sin autointeracción entre bordes rectos paralelos. Luego se estudia la energía de vacío del campo con un borde arbitrario, a partir de un desarrollo perturbativo del término que impone las condiciones de borde, y se aplica este desarrollo a los casos particulares de un borde circular, un borde recto y dos bordes rectos paralelos. Por último, se consideran teorías escalares reales y complejas con autointeracción tipo ϕ^4 y un término de Grosse-Wulkenhaar, sobre dos coordenadas espaciales no conmutativas y eventualmente el tiempo conmutativo, y se calculan las correcciones a un lazo a la acción efectiva para configuraciones particulares del campo correspondientes a soluciones de vacío no triviales halladas por otros autores.

ABSTRACT

NON-COMMUTATIVE FIELD THEORIES: SYMMETRIES AND QUANTUM CONSISTENCY

In this work we study non-commutative theories, that is theories formulated on a space described by coordinates that satisfy non trivial commutation relations, with an emphasis on scalar field theories (mainly real scalars) on 2+1 dimensions, with a commutative time coordinate. After drawing our motivations for the study of this kind of theories and laying down the basic elements for their construction, we proceed to the study of the confinement of non-commutative scalar field theories. This confinement is achieved through the introduction of a specific interaction term between the field and the curve that describes the boundary of the confinement region (this curve is a standard commutative object), using the Moyal product. Bearing this in mind, we then proceed to the calculation of the propagator for a non self-interacting scalar field bound between parallel plates. After that, we study the vacuum energy of the field bound by an arbitrarily shaped boundary, by performing a perturbative expansion of the interaction that imposes the boundary conditions. We then apply this expansion on the special cases of a circular border, a straight line border and a couple of parallel straight line borders. Finally, in the last part of this thesis, we consider real and complex scalar field theories on a non-commutative plane (plus eventually a commutative time) with a ϕ^4 self-interaction and a Grosse-Wulkenhaar term and calculate the one loop corrections to the effective action around non trivial vacuum solutions previously found by other authors.

Key words: Field theory, Non-commutativity, Boundaries, Casimir, Effective action.

En este trabajo se estudian teorías no conmutativas, entendiéndose por esto teorías clásicas o cuánticas de finitos o infinitos grados de libertad (*i.e.* teorías de campos) formuladas sobre un espacio tal que al menos dos de sus coordenadas no conmutan entre sí. Un ejemplo de espacio no conmutativo bien conocido en Mecánica Cuántica ordinaria es el del espacio de fases. En el mismo, las coordenadas clásicas \mathbf{x} y \mathbf{p} son reemplazadas por operadores hermíticos, $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$, cumpliendo las relaciones de conmutación canónicas $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}$. Esta relación da lugar a la relación de incertidumbre de Heisenberg,

$$\Delta x^i \Delta p^i \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (1.1)$$

A diferencia de este ejemplo, los espacios que interesan en este trabajo son espacios de coordenadas espacio-temporales no conmutativas. Como se verá más adelante, para construir este tipo de espacios se propone que las coordenadas espacio-temporal sean representadas por operadores \hat{x}^i tales que al menos algunos de ellos cumplan relaciones de conmutación generalizadas de la forma,

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}(\hat{\mathbf{x}}) , \quad (1.2)$$

siendo $\theta^{ij}(\hat{\mathbf{x}})$ un tensor antisimétrico que puede depender de las coordenadas, si bien no es habitual trabajar con dependencias más allá de la cuadrática en las mismas. A partir de esta relación de conmutación puede formularse la relación análoga a (1.1),

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{|\theta^{ij}|}{2} . \quad (1.3)$$

Esto muestra la aparición de una granularidad del espacio-tiempo, con una región mínima a la cual no se puede acceder.

En este primer capítulo se buscará motivar el estudio de las teorías no conmutativas en general, y se desarrollará un modelo en el que la no conmutatividad entre coordenadas surge de manera natural como una descripción efectiva en cierto límite. En el Capítulo 2 se darán las herramientas básicas para la construcción de teorías de campos no conmutativas y se analizará un primer modelo escalar real en 2+1 dimensiones. Luego, en el Capítulo 3 se estudiará el confinamiento del campo escalar real a través de la imposición de condiciones de borde sobre curvas en el plano. En el

Capítulo 4 se calcularán las corrección a un lazo a la acción efectiva para ciertas teorías escalares alrededor de configuraciones particulares halladas por otros autores. Finalmente, en el Capítulo 5 se darán las conclusiones de esta tesis.

1.1. Motivación

El primer trabajo en el cual se formuló matemáticamente un modelo de teoría de campos que llevase a la no conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales fue el realizado por Snyder [1]. Snyder propuso en primer lugar un espacio-tiempo discreto, con la esperanza de que esto pudiese dar solución a las divergencias que plagaban las teorías de campos en aquel momento (1947) al eliminar la posibilidad de interacciones puntuales, y vio a partir de esta propuesta que se inducía una no conmutatividad como la expresada en (1.2). Eventualmente incluso elaboró un modelo para el Electromagnetismo basado en sus ideas de un espacio-tiempo no continuo [2]. Más adelante, el éxito del programa de renormalización llevó a que las ideas de Snyder fuesen dejadas de lado por varias décadas hasta que otras motivaciones, que serán comentadas a continuación, llevaran al resurgir de las mismas.

Una de estas motivaciones se encuentra en las posibilidades que este tipo de teorías ofrecen para la formulación de una descripción de la gravedad a nivel cuántico. En primer lugar, existen argumentos sencillos para mostrar que cualquier teoría cuántica de la gravedad debe contemplar la existencia de un volumen mínimo inaccesible a las mediciones, como el predicho en (1.3). Estos argumentos [3] se basan en la idea de que uno debe entregar una cierta energía para localizar un evento en una dada región del espacio y mientras menor sea el tamaño de esta región, mayor será la energía que debe entregarse. Por otro lado, la energía genera un campo gravitatorio y, eventualmente, si la energía es lo suficientemente grande el campo gravitatorio generado podría impedir la salida de cualquier información hacia el exterior de la región en estudio. A partir de las ecuaciones de la Relatividad General puede entonces calcularse cuál es el tamaño mínimo que podrá tener una región del espacio tal que la misma pueda estudiarse experimentalmente, dado que para regiones de un tamaño menor será operativamente imposible obtener cualquier tipo de información sobre lo que ocurre en su interior. Más allá de esto, las teorías no conmutativas son desarrolladas a partir de las ideas de la Geometría No Conmutativa y las álgebras asociadas a esta geometría. La gravedad es a su vez descrita a partir de teorías geométricas que podrían generalizarse a geometrías no conmutativas dando un terreno común para las teorías cuánticas de campos y la gravedad. La Geometría No Conmutativa es una rama de la matemática que fue desarrollada en la década de los 80' por matemáticos como Connes, Woronowicz y Drinfel'd, llegando a obtener algunos resultados interesantes en física en relación al Modelo Estándar de Partículas Elementales [4] (para un tratado sobre Geometría No Conmutativa ver [5]). Como candidatos para una teoría cuántica de la gravedad, las teorías basadas en estas ideas presentan además algunas ventajas y desventajas respecto de otras como la Teoría de Cuerdas y la Gravedad Cuántica de Lazos [3] e incluso en el caso en que la Teoría de Cuerdas fuese la indicada para describir la gravedad a nivel cuántico, resultará de interés estudiar las teorías de campos no conmutativas, ya que se ha visto que las mismas surgen en ciertos límites de la Teoría M y la Teoría de Cuerdas [6].

Existen también motivaciones astrofísicas para el estudio de las teorías de campos no conmuta-

tivas. Según se ha visto [3], ciertos modelos escalares (llamados κ -deformados o con deformación κ) donde (1.2) toma la forma,

$$\begin{cases} [\hat{x}^i, \hat{t}] = i\lambda\hat{x}^i \\ [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0 \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

producen una relación de dispersión modificada. En particular, para partículas no masivas se obtiene una velocidad de propagación que depende de la energía de las mismas. Se cree que este tipo de efectos podrían explicar las anomalías medidas en el tiempo de arribo de rayos γ producidos en estallidos γ en los núcleos activos de galaxias como Makarian 142.

Por último, se ha observado que la no conmutatividad entre coordenadas surge como una descripción natural en ciertos sistemas de materia condensada, como los sistemas con vórtices[7] o aquellos que se emplean en el estudio del efecto Hall cuántico. En la próxima sección se mostrará precisamente cómo ocurre esto en un ejemplo particular del último tipo y se buscará estudiar el efecto de las rotaciones sobre dicho sistema.

1.2. Modelo para partícula cargada en 2+1 dimensiones con un campo magnético intenso

En esta sección se busca mostrar cómo la no conmutatividad entre coordenadas surge naturalmente como una descripción efectiva para un modelo particular. Mucho de lo que aquí se desarrollará puede verse también en [8][9].

El sistema a considerar es el de una partícula cargada no relativista que se desplaza en un plano infinito bajo la presencia de un campo magnético normal a dicho plano. El lagrangiano correspondiente a este sistema es entonces,

$$L_m = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + \frac{q}{c}\dot{x}_iA_i, \quad (1.4)$$

donde m es la masa de la partícula, q su carga eléctrica y x_i con $i = 1, 2$ son sus coordenadas cartesianas en el plano; \mathbf{A} es el potencial vector correspondiente al campo magnético y c la velocidad de la luz en el vacío. A partir de este lagrangiano puede construirse el bien conocido hamiltoniano,

$$H_m = \frac{1}{2m}(p_i - \frac{q}{c}A_i)(p_i - \frac{q}{c}A_i) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2. \quad (1.5)$$

1.2.1. Niveles de Landau

Conviene en este punto recordar cómo es la estructura del espectro energético del sistema en consideración. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, en representación de coordenadas, para el hamiltoniano (1.5) es,

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A})^2\psi(\mathbf{x}) + E\psi(\mathbf{x}) = 0 , \quad (1.6)$$

donde $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$. Tomando \mathbf{A} en el gauge de Landau,

$$\mathbf{A} = (0, x_1 B) \quad (\Rightarrow \quad \partial_i \epsilon_{ij} A_j = B \quad \text{campo magnético normal al plano}), \quad (1.7)$$

donde ϵ es el tensor antisimétrico de 2×2 ,

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

resulta $(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}) = (\partial_1, \partial_2 - \frac{iq}{\hbar c}x_1 B)$.

Reemplazando en (1.6) se obtiene,

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\partial_1^2 + (\partial_2 - \frac{iq}{\hbar c}x_1 B)^2 \right] + E \right\} \psi(\mathbf{x}) = 0 . \quad (1.9)$$

Proponiendo como solución $\psi(\mathbf{x}) = e^{i\alpha x_2} U(x_1)$, resulta,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_1^2 U(x_1) + \frac{m}{2} \left(\frac{qB}{mc} x_1 - \frac{\hbar\alpha}{m} \right)^2 U(x_1) = EU(x_1) . \quad (1.10)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger correspondiente a un oscilador armónico unidimensional centrado en $a = \frac{\hbar\alpha c}{qB}$ y de frecuencia angular $\omega = \frac{qB}{mc}$. El espectro de este sistema es bien conocido y es el conjunto discreto de valores de energía dados por,

$$E_n = \hbar \frac{qB}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) = n\hbar \frac{qB}{mc} + \frac{1}{2} \hbar \frac{qB}{mc} , n \in \mathbb{N}_0 . \quad (1.11)$$

Resulta entonces que el sistema bajo estudio posee una estructura de niveles energéticos separados por $\Delta E = \hbar \frac{qB}{mc}$. Estos son los llamados Niveles de Landau. Es sencillo ver que estos niveles serán infinitamente degenerados en un sistema de extensión espacial infinita. El nivel más bajo, o primer nivel de Landau, será el correspondiente a $n = 0$ y tendrá una energía $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \frac{qB}{mc}$.

1.2.2. Proyección al Primer Nivel de Landau (PNL)

Considerando los resultados de la sección anterior, es claro que es posible aislar el primer nivel de Landau (PNL) tomando el límite $m \rightarrow 0$, de modo que $\Delta E \rightarrow \infty$. Por supuesto, será necesario renormalizar el autovalor de energía del PNL restando $\frac{1}{2} \hbar \frac{qB}{mc}$. El significado físico de este límite corresponde (ver (1.4)) a decir que se considera un campo magnético lo suficientemente intenso tal que la energía cinética del sistema sea mucho menor que el término proveniente de la interacción con el campo, de modo que no puedan excitarse niveles superiores al PNL. Es por esto que al tomar este límite se dirá que se está proyectando sobre el PNL.

Antes de evaluar las consecuencias de la proyección al PNL, convendrá generalizar un poco el sistema en estudio agregando al mismo un potencial $V(\mathbf{x})$. Si este potencial es débil comparado con el término magnético del lagrangiano, la estructura global de los niveles de Landau no se verá alterada, aunque podría romperse la degeneración en cada nivel. Los potenciales a considerar serán típicamente potenciales armónicos débiles, simétricos en las coordenadas. Además del agregado de este potencial, se empleará a partir de ahora $\hbar = c = q = 1$. Con estas consideraciones en mente, el lagrangiano del sistema es,

$$L_m = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + \dot{x}_i A_i - V(\mathbf{x}) . \quad (1.12)$$

Si bien en la sección anterior se empleó el gauge de Landau para \mathbf{A} es claro que los resultados obtenidos allí, referidos a la estructura y autovalores de los niveles de Landau, no dependen de esta elección particular. En lo que sigue será conveniente emplear en cambio el gauge simétrico ante rotaciones dado por,

$$A_i = -\epsilon_{ij}x_j \frac{B}{2} . \quad (1.13)$$

Usando este gauge, (1.12) toma la forma,

$$L_m = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - \frac{B}{2}\dot{x}_i\epsilon_{ij}x_j - V(\mathbf{x}) . \quad (1.14)$$

Ahora proyectando al PNL, es decir tomando $\lim_{m \rightarrow 0} L_m$, resulta,

$$L_0 = -\frac{B}{2}\dot{x}_i\epsilon_{ij}x_j - V(\mathbf{x}) . \quad (1.15)$$

Este lagrangiano es lineal en las derivadas de las coordenadas. Se mostrará a continuación que los lagrangianos con este tipo de dependencia inducen una no conmutatividad entre las coordenadas. El desarrollo que se realizará es similar al presentado en [8][10]. Se considera sin embargo que, además de ser instructiva, la presentación de este argumento es por su generalidad mucho más valiosa que la simple cita de sus resultados o la elaboración de un argumento similar que sólo contemple el sistema bajo estudio.

Considérese un sistema cuya dinámica está descrita por las componentes del vector \mathbf{r} y cuyo lagrangiano es de la forma,

$$L = a_i(\mathbf{r})\dot{r}_i - V(\mathbf{r}) . \quad (1.16)$$

donde a_i y V son funciones de \mathbf{r} pero no de $\dot{\mathbf{r}}$. Es interesante notar que esta es realmente la forma general para un lagrangiano en el formalismo de primer orden, considerando como \mathbf{r} al vector de coordenadas en el espacio de fases del sistema. Efectivamente, $L(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_i\dot{q}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, donde \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas del sistema, \mathbf{p} el de momentos conjugados y H su hamiltoniano, es de la forma (1.16). Por supuesto, para las coordenadas del espacio de fases el argumento que se expone no aportará información nueva respecto de la descripción del sistema; simplemente volverá a presentar el conocido resultado de que las coordenadas generalizadas no conmutan con sus respectivos momentos conjugados.

Escribiendo las ecuaciones de Euler-Lagrange para (1.16),

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{d}{dt} a_i(\mathbf{r}) + \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r_i} - \frac{\partial a_j(\mathbf{r})}{\partial r_i} \dot{r}_j = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left(\frac{\partial a_j(\mathbf{r})}{\partial r_i} - \frac{\partial a_i(\mathbf{r})}{\partial r_j} \right) \dot{r}_j .
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Definiendo $f_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_j(\mathbf{r})}{\partial r_i} - \frac{\partial a_i(\mathbf{r})}{\partial r_j}$ resulta,

$$f_{ij}(\mathbf{r}) \dot{r}_j = \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r_i} . \tag{1.18}$$

Se supondrá a partir de este punto que f_{ij} posee inversa, la cual se indicará f_{ij}^{-1} . El procedimiento a seguir en caso de que f_{ij} no tuviese inversa puede consultarse en [10]. Dicho esto, resulta a partir de (1.18),

$$\dot{r}_i = f_{ij}^{-1}(\mathbf{r}) \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r_j} . \tag{1.19}$$

Ahora, es un resultado conocido de Mecánica Clásica que,

$$\dot{r}_i = \{r_i, H\} , \tag{1.20}$$

donde $\{\cdot, \cdot\}$ indica corchetes de Poisson. En este caso el hamiltoniano es:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i - L = V(\mathbf{r}) . \tag{1.21}$$

Entonces,

$$\dot{r}_i = \{r_i, H\} = \{r_i, V(\mathbf{r})\} = \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r_j} \{r_i, r_j\} , \tag{1.22}$$

donde en el último paso se ha supuesto que $V(\mathbf{r})$ es analítica y se ha utilizado su desarrollo en serie de Taylor para llegar al resultado final. Ahora, comparando esta última ecuación con (1.19), es claro que (1.20) se cumplirá *sii*:

$$\{r_i, r_j\} = f_{ij}^{-1}(\mathbf{r}) . \tag{1.23}$$

Esta relación expresa la no conmutatividad de las componentes de \mathbf{r} a nivel clásico. Para obtener las relaciones de conmutación a nivel cuántico, pueden aplicarse directamente las reglas de cuantización a (1.23) o repetir los pasos desde (1.20) utilizando el resultado análogo de Mecánica Cuántica. En cualquier caso, se obtiene,

$$[\hat{r}_i, \hat{r}_j] = i f_{ij}^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) . \tag{1.24}$$

Es ahora el momento de ver cómo se aplican estos resultados al problema de la partícula cargada en 2+1 dimensiones. Comparando (1.15) con (1.16) y considerando $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ se ve que,

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{x}) &= -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j \\ \Rightarrow f_{ij} &= -\frac{B}{2}\epsilon_{ji} + \frac{B}{2}\epsilon_{ij} = B\epsilon_{ij} \\ \Rightarrow f_{ij}^{-1} &= -\frac{1}{B}\epsilon_{ij} \ , \end{aligned} \tag{1.25}$$

donde se utilizó la definición de f_{ij} . Entonces,

$$\{x_i, x_j\} = -\frac{1}{B}\epsilon_{ij} \ . \tag{1.26}$$

Y a nivel cuántico,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = -\frac{i}{B}\epsilon_{ij} \ . \tag{1.27}$$

Nótese que (1.26) podría también haberse obtenido, para el sistema particular en estudio, empleando los cálculos habituales del formalismo hamiltoniano. Se debe primero, sin embargo, reescribir (1.15) como,

$$L_0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{B}{2}x_1x_2 \right) - B\dot{x}_1x_2 - V(\mathbf{x}) \ . \tag{1.28}$$

El término de derivada total no tendrá efecto sobre la física del sistema (no es más que un cambio de gauge), por lo que puede eliminarse, llegando al lagrangiano equivalente,

$$\tilde{L}_0 = -B\dot{x}_1x_2 - V(\mathbf{x}) \ . \tag{1.29}$$

Entonces, el momento conjugado a x_1 será,

$$\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{x}_1} = -Bx_2 \equiv p_1 \ . \tag{1.30}$$

De donde,

$$\{x_1, x_2\} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial p_1} - \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{B} \ . \tag{1.31}$$

Asimismo, puede obtenerse el corchete canónico,

$$\{x_1, p_1\} = -B\{x_1, x_2\} = 1 \ . \tag{1.32}$$

Se ha visto entonces que en un sistema compuesto por una partícula cargada, no relativista, que se desplaza por un plano infinito bajo la presencia de un campo magnético intenso perpendicular al mismo, la no conmutatividad entre coordenadas espaciales surge como una descripción natural al proyectar sobre el PNL ¹. Más aún, se ha visto que en una clase más general de sistemas, los descritos por lagrangianos de la forma (1.16), aparece esta no conmutatividad. A continuación, se buscará sacar frutos a la generalidad de dicho resultado.

¹Para conocer sobre la forma en que ocurre la proyección de las funciones de onda y autovalores de este sistema al PNL, pueden consultarse las referencias [8, 9].

1.2.3. No conmutatividad en un sistema rotante

En relación a lo que se ha visto en la sección anterior, es interesante recordar la forma que adquiere el lagrangiano de un sistema compuesto por una partícula libre de masa m , no relativista, que se desplaza en un plano infinito, cuando se lo describe desde un sistema de referencia que rota respecto de un eje normal al plano con velocidad angular constante, ω . Dicho lagrangiano toma la forma,

$$L_r = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - m\omega\dot{x}_i\epsilon_{ij}x_j + \frac{1}{2}m\omega^2x_ix_i, \quad (1.33)$$

donde x_i con $i = 1, 2$ son las coordenadas de la partícula en el sistema rotante. Resulta evidente que si se encontrara la forma de eliminar el término cinético de este lagrangiano, el mismo tomaría la forma (1.16), con el término de Coriolis haciendo las veces de término lineal en las derivadas primeras de las coordenadas y el término centrífugo haciendo las veces de potencial dependiente de las coordenadas pero no de sus derivadas. Para eliminar el término cinético, debería tomarse $\lim_{m \rightarrow 0} L_r$, como antes, pero hay que notar que en este caso los otros términos también son lineales en m por lo que será necesario considerar más bien $\lim_{m \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty} L_r$, con $m\omega \rightarrow \lambda$, si no se quieren eliminar también el término centrífugo y el de Coriolis. Lo que ocurre sin embargo es que, si se toma este límite, el término centrífugo diverge dejando un lagrangiano con una física muy poco interesante. Una manera de enriquecer el comportamiento de este sistema consiste en combinar las ideas aquí presentadas con el sistema de la sección anterior, como se hará a continuación.

Considérese el lagrangiano (1.14), con $V(\mathbf{x}) \equiv 0$, descrito desde un sistema rotante como el utilizado para describir (1.33). Dicho lagrangiano será,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - \left(\frac{B}{2} - m\omega\right)\dot{x}_i\epsilon_{ij}x_j + \frac{1}{2}(m\omega - B)\omega x_ix_i. \quad (1.34)$$

Es interesante observar entonces que eligiendo $\omega = \frac{B}{2m}$ puede eliminarse el término lineal en las derivadas temporales de las coordenadas, resultando,

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - \frac{1}{2}\left(\frac{B}{2m}\right)^2 mx_ix_i. \quad (1.35)$$

Este es el lagrangiano de un oscilador armónico bidimensional de frecuencia angular $\frac{B}{2m}$ cuyas coordenadas, como es conocido, conmutan entre sí. La conmutatividad entre coordenadas se preservará al considerar el límite de campo intenso, es decir $m \rightarrow 0$, aunque el sistema quedará confinado al origen de coordenadas perdiendo nuevamente cualquier riqueza de comportamiento. Se ve entonces que a un sistema como el de la partícula cargada en 2+1 dimensiones con un campo magnético perpendicular al plano, que posee naturalmente coordenadas no conmutativas cuando se lo proyecta al PNL, puede “eliminársele la no conmutatividad” al describirlo desde un sistema que rota con la velocidad angular adecuada.

Puede también elegirse $\omega = \frac{B}{m}$, obteniéndose,

$$L'' = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + \frac{B}{2}\dot{x}_i\epsilon_{ij}x_j. \quad (1.36)$$

De esta forma se elimina el término armónico y se cambia el signo del término lineal en las derivadas. Como consecuencia, al proyectar sobre el PNL, el corchete (y el conmutador) entre coordenadas cambiará de signo. Para ver esto, puede calcularse el lagrangiano análogo a (1.28) y seguir los pasos a partir de allí. Sería sin dudas interesante encontrar una forma de “controlar” el parámetro de no conmutatividad del sistema (es decir, el corchete entre coordenadas) a través del valor de ω . Desafortunadamente al querer hacer esto, e incluso considerando un potencial armónico adicional, el asunto parece arruinarse al tomar el límite $m \rightarrow 0$, ya sea porque el término armónico diverge o porque el parámetro de no conmutatividad converge a su valor original (el que adquiere en el sistema no rotante).

Más allá de los resultados puntuales alcanzados para este sistema, esta discusión sobre no conmutatividad en un sistema en rotación despierta el interés respecto de la descripción de teorías de campos no conmutativas en sistemas rotantes. En particular, el término centrífugo podría jugar un rol similar al de un término de Grosse-Wulkenhaar [11] como el que se utilizará en el Capítulo 4, que está ligado a la renormalización de la teoría (ver Sección 2.4). En este sentido, es también interesante el estudio de cómo imponer condiciones de borde a una teoría de campos no conmutativa, como se hará en el Capítulo 3, ya que la condición de rotación podría eventualmente imponerse de manera similar. Como referencia de teorías de campos conmutativas descritas desde sistemas en rotación, puede consultarse [12].

TEORÍAS DE CAMPOS NO CONMUTATIVAS: FORMALISMO

Hasta aquí se ha buscado motivar el estudio de teorías no conmutativas en general, y se ha visto que las mismas aparecen como una posible descripción para ciertos sistemas particulares a nivel clásico y cuántico. En este capítulo, se buscará avanzar a otro nivel en este tipo de teorías. Para ello, se expondrán los conceptos básicos para la construcción de teorías de campos sobre espacios no conmutativos y se elaborará brevemente un primer modelo para un campo escalar real sobre un espacio de este tipo.

2.1. Consideraciones generales

Se busca aquí introducir los elementos básicos para la construcción de teorías de campos sobre espacios no conmutativos. A modo ilustrativo, y por simplicidad, se trabajará sobre un espacio-tiempo de 2+1 dimensiones. Si bien no será necesario ir más allá en este trabajo, todo lo que se expondrá puede también desarrollarse en términos más generales [6], considerando por ejemplo una variedad topológica mucho más general que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ como espacio-tiempo para la teoría o caracterizando con mayor precisión el tipo de funciones que pueden considerarse para la construcción de las álgebras sobre el mismo (ver más adelante).

2.1.1. Álgebras y prescripciones de orden

Por motivos que serán evidentes más adelante, es conveniente comenzar considerando el espacio-tiempo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, descrito por las coordenadas x_1, x_2 y $t \equiv x_3$ que conmutan entre sí. Sobre este espacio pueden construirse funciones complejas de las coordenadas considerando series de potencias de las mismas a coeficientes complejos. Una tal función será entonces de la forma,

$$f(x) = \sum_I c_I x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \quad , \quad (2.1)$$

donde $I = (i_1, i_2, i_3)$ es un multi-índice y $c_I \in \mathbb{C}$. Al conjunto de estas funciones se le llamará \mathcal{A} . Es conocido y sencillo de ver que \mathcal{A} , junto con la suma habitual entre funciones $((f + g)(x) =$

$f(x) + g(x)$, $f, g \in \mathcal{A}$) y el producto por escalares complejos ($(kf)(x) = kf(x)$, $k \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}$), forma un \mathbb{C} -espacio vectorial. Más aún, si se considera además la operación de producto entre funciones dada por $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ $((f \cdot g)(x) = f(x)g(x))$, resulta que (\mathcal{A}, \cdot) es un álgebra asociativa abeliana sobre \mathbb{C} . Este álgebra tiene dimensión infinita y puede considerarse como base de la misma al conjunto de los monomios de la forma $x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$, $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}_0$.

Se desea ahora construir un análogo no conmutativo de (\mathcal{A}, \cdot) , sobre un espacio-tiempo no conmutativo. Se considerarán entonces como coordenadas los operadores hermíticos \hat{x}_1, \hat{x}_2 y $\hat{t} \equiv \hat{x}_3$ con conmutadores,

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta_{12} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_3] = i\theta_{i3} = 0 \quad , i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde θ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, es un tensor antisimétrico que no depende de las coordenadas. Esta elección de un “parámetro de no conmutatividad” constante no es la más general posible, como ya se ha mencionado, pero es la única que se considerará en el resto de esta tesis. Corresponde decir algo respecto de la elección que se ha realizado al pedir que \hat{t} conmute con \hat{x}_1 y \hat{x}_2 . Lo cierto es que esto no ha sido realmente una elección; puede verse que cuando se considera un número impar de coordenadas, siempre al menos una de ellas debe conmutar con el resto [13]. De ahí en más, elegir que esta coordenada conmutativa sea el tiempo puede considerarse algo motivado por cuestiones de simetría o por el deseo de volver eventualmente sobre el sistema presentado en el capítulo anterior, en el cual eran las coordenadas espaciales las que no conmutaban entre sí. Además de esto, otros autores han observado que el formalismo hamiltoniano se vuelve complicado en teorías en las que el tiempo es no conmutativo, al punto de que no es claro que el mismo tenga alguna interpretación a nivel de operadores en estas teorías [6]. Al espacio generado por \hat{x}_1, \hat{x}_2 y \hat{x}_3 se le llamará $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$. Si bien el tiempo es una coordenada conmutativa (es decir, es un número), se lo seguirá indicando como $\hat{t} \equiv \hat{x}_3$ cuando se esté trabajando sobre $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$, simplemente para recordar que se está en ese espacio.

Continuando con la analogía, se considerarán ahora las funciones escritas como series de potencias, a coeficientes complejos, de las coordenadas de $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$. Al conjunto de estas funciones se le designará por $\hat{\mathcal{A}}$. Como antes, es claro que $\hat{\mathcal{A}}$, junto con las operaciones habituales de suma entre funciones y producto por escalares, forma un \mathbb{C} -espacio vectorial. Es además sencillo de ver que al agregar la operación de producto entre funciones (\cdot) , definida por analogía a la que se definió sobre \mathcal{A} , $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ es también un álgebra asociativa aunque, a la vista de (2.2), esta no será abeliana. Justamente por ser no abeliana, la elección de una base para $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ es un asunto que debe abordarse con cierto cuidado (ya que, por ejemplo $\hat{x}_2 \hat{x}_1 \neq \hat{x}_1 \hat{x}_2$; es $\hat{x}_2 \hat{x}_1 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 - i\theta_{12}$). La forma de realizar esta elección de base de forma simple y consistente, es definiendo una prescripción de orden para las coordenadas no conmutativas. De todas las posibles prescripciones que podrían elegirse, hay dos que son particularmente importantes y serán definidas a continuación.

La prescripción de orden normal consiste en tomar como base de $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ al conjunto de los monomios en los cuales las coordenadas no conmutativas están ordenadas de izquierda a derecha en orden creciente de sus subíndices (es decir, a la izquierda \hat{x}_1 y luego \hat{x}_2 ; la posición de \hat{x}_3 no es importante porque esta coordenada conmuta con las otras dos). Entonces, de modo más ilustrativo, si se indica por $:(...):$ a la operación de escribir a la expresión encerrada entre los “:” de acuerdo a la prescripción de orden dada (sin utilizar las relaciones de conmutación, sino simplemente

reordenando), resulta con la prescripción de orden normal,

$$\begin{aligned} : \hat{x}_i^j : &= \hat{x}_i^j, \quad i = 1, 2, 3, j \in \mathbb{N}_0 \\ : \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^4 \hat{x}_1^3 \hat{x}_3 : &= \hat{x}_1^5 \hat{x}_2^4 \hat{x}_3 \\ : \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_2 + \hat{x}_2 \hat{x}_1 : &= \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 \hat{x}_3 + \hat{x}_1 \hat{x}_2 \end{aligned}$$

La prescripción de orden simétrico, o de Weyl, consiste en elegir como base de $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ al conjunto de los polinomios que resultan de la simetrización (respecto de sus subíndices) de todos los posibles monomios en las coordenadas ¹. Para aclarar esta idea, lo que se está diciendo es que, con la prescripción de orden simétrico,

$$\begin{aligned} : \hat{x}_i^j : &= \hat{x}_i^j, \quad i = 1, 2, 3, j \in \mathbb{N}_0 \\ : \hat{x}_1 \hat{x}_2 : &= \frac{1}{2} (\hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_2 \hat{x}_1) \\ : \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 : &= \frac{1}{6} (\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 + \hat{x}_1 \hat{x}_3 \hat{x}_2 + \hat{x}_2 \hat{x}_1 \hat{x}_3 + \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_1 + \hat{x}_3 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \hat{x}_2 \hat{x}_1) \end{aligned}$$

Una vez elegida una prescripción de orden (lo cual equivale a haber elegido una base para el álgebra no abeliana) cualquier elemento $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}$ puede escribirse de la forma,

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sum_I c_I : \hat{x}_1^{i_1} \hat{x}_2^{i_2} \hat{x}_3^{i_3} : \quad , c_I \in \mathbb{C} . \quad (2.3)$$

En particular, para la elección de orden de Weyl, es interesante notar que todos los polinomios que definen esta prescripción aparecen en el desarrollo de la exponencial $e^{ik_j \hat{x}_j}$.² Esto permite escribir a \hat{f} de forma integral como,

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int d^3 k \quad c(k) e^{ik_j \hat{x}_j} , \quad (2.4)$$

donde $c(k)$ son funciones coeficiente.

2.1.2. Símbolos y productos \star

Las consideraciones referidas a prescripciones de orden y, en general, la complejidad que surge naturalmente al trabajar con un álgebra no abeliana, llevan a preguntarse si no existe una manera formal de vincular $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ con (\mathcal{A}, \cdot) que permita “traducir” hacia el entorno conmutativo las cuentas y operaciones que quieran realizarse en el entorno no conmutativo y luego trasladar de vuelta los resultados. Es decir, lo que interesa ver es si existe alguna forma de definir un isomorfismo entre estas álgebras.

¹Puede simetrizarse respecto de todas las coordenadas o solamente respecto de las que no conmutan, el resultado es indistinto.

²Si se quiere, podría tomarse como definición del orden de Weyl el considerar como base al conjunto de los polinomios que aparecen en el desarrollo de la exponencial $e^{ik_i \hat{x}_i}$, poniendo $k_i = 1, \forall i$, separándolos adecuadamente de modo que sean simétricos en los subíndices.

En vista de que se ha elegido una base para (\mathcal{A}, \cdot) y se ha hablado sobre las distintas formas en que pueden elegirse bases para $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$, parece natural considerar como candidato para este isomorfismo a la aplicación lineal invertible $S : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ que lleva bases en bases. A una tal aplicación se la llamará *símbolo*, y quedará definida, a través de su inversa, por,

$$S^{-1}[f(x)] = : f(\hat{x}) : \equiv \hat{f}(\hat{x}) . \quad (2.5)$$

Esta definición hace explícito el hecho de que habrá un símbolo para cada prescripción de orden en $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$; en particular se hablará de *símbolo normal* y *símbolo de Weyl* cuando se haga referencia a los símbolos definidos a partir de los órdenes homónimos. Es claro que el símbolo definido a partir de (2.5) es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ahora, es también evidente que al tener un producto abeliano entre funciones en (\mathcal{A}, \cdot) y uno no abeliano en $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$, S^{-1} no será capaz de respetar la estructura del producto entre funciones, lo cual es un requisito necesario para que sea un isomorfismo de álgebras. Para solucionar esto, puede introducirse un nuevo producto entre elementos de \mathcal{A} , el cual se representará por “ \star ” y que deberá ser tal que,

$$S^{-1}[(f \star g)(x)] = S^{-1}[f(x)] \cdot S^{-1}[g(x)] = \hat{f}(\hat{x}) \cdot \hat{g}(\hat{x}) \quad , f, g \in \mathcal{A} . \quad (2.6)$$

Si bien este nuevo producto entre elementos de \mathcal{A} soluciona inmediatamente los problemas de compatibilidad con el símbolo, no es claro que (\mathcal{A}, \star) sea un álgebra. Para determinar esto, se buscará escribir explícitamente el nuevo producto \star entre dos elementos de \mathcal{A} en términos del viejo producto punto a punto (\cdot) . Mirando (2.5), resulta claro que dicha forma explícita del producto \star dependerá de la prescripción de orden empleada. Es por ello que el primer paso para encontrar esta expresión será elegir un orden particular en $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$. En favor de la simplicidad del desarrollo, se utilizará la prescripción de Weyl y se representará por W al símbolo asociado a este orden (el símbolo de Weyl).

A partir de la observación realizada en (2.4), es claro que la representación en operadores (es decir el elemento correspondiente en $\hat{\mathcal{A}}$) de una $f \in \mathcal{A}$ puede escribirse a modo de transformada de Fourier como³,

$$\hat{f}(\hat{x}) = (W^{-1}(f))(\hat{x}) = \int \mathcal{d}^3 k \ e^{ik_j \hat{x}_j} \tilde{f}(k) \quad (2.7)$$

$$\text{con } \tilde{f}(k) = \int d^3 x \ e^{ik_j x_j} f(x) . \quad (2.8)$$

Entonces, para el producto $f \star g$, $f, g \in \mathcal{A}$,

$$(W^{-1}(f \star g))(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x}) \cdot \hat{g}(\hat{x}) = \int \mathcal{d}^3 k \ \mathcal{d}^3 p \ e^{ik_i \hat{x}_i} e^{ip_j \hat{x}_j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) . \quad (2.9)$$

Dado que \hat{x}_1 y \hat{x}_2 no conmutan entre sí, será necesario utilizar la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) para calcular el producto de las exponenciales que aparecen en el integrando de esta expresión. Esta fórmula dice que para dos operadores A y B ,

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[[A,B],B] - \frac{1}{12}[[A,B],A] + \dots} . \quad (2.10)$$

³Aquí $\mathcal{d}^n k \equiv \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$

En vista de que se ha considerado un conmutador constante (2.2) para las coordenadas, al aplicar la fórmula de CBH al producto de exponenciales en el integrando de (2.9) los términos con conmutadores de orden superior al primero se anularán, resultando,

$$(W^{-1}(f \star g))(\hat{x}) = \int \mathcal{d}^3 k \mathcal{d}^3 p e^{ik_i \hat{x}_i + ip_j \hat{x}_j - \frac{i}{2} k_i \theta_{ij} p_j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) . \quad (2.11)$$

De donde, aplicando W ,

$$(f \star g)(x) = \int \mathcal{d}^3 k \mathcal{d}^3 p e^{ik_i x_i + ip_j x_j - \frac{i}{2} k_i \theta_{ij} p_j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) . \quad (2.12)$$

Reemplazando en el último término del exponente a k_i y p_j por sus expresiones en términos de derivadas respecto de las coordenadas de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, se obtiene la expresión para el producto \star conocida como producto de Moyal-Weyl (o simplemente producto de Moyal),

$$(f \star g)(x) = \exp \left(\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) f(x) g(y) \Big|_{y \rightarrow x} , \quad (2.13)$$

que puede reescribirse como,

$$(f \star g)(x) = f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta_{ij} \overrightarrow{\partial}_j} g(x) . \quad (2.14)$$

Se ve entonces que el producto \star lleva información sobre la no conmutatividad de $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ y que, para coordenadas conmutativas de $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ se reduce al producto punto a punto usual. Dada la expresión (2.14) resulta evidente que \star es bilineal, por lo que (\mathcal{A}, \star) es un álgebra y W constituye un isomorfismo entre álgebras; $(\mathcal{A}, \star) \stackrel{W}{\cong} (\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$.

Por completitud, conviene mencionar que en [3] se deriva una expresión similar a (2.13), también con parámetro de no conmutatividad constante, para el caso en que se hubiese elegido la prescripción de orden normal; y en [14] se realiza un análisis mucho más detallado de esta elección de orden con un parámetro de no conmutatividad más general.

2.2. Acción para un campo escalar real con autointeracción ϕ^4

Con los elementos desarrollados hasta aquí, resulta interesante buscar la forma de realizar una primera propuesta para la acción de un campo escalar real sobre el espacio no conmutativo $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$.

Considérese entonces un campo escalar real, ϕ , cuya acción clásica euclídea sobre el espacio conmutativo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ es,

$$S = \int d^3 x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) , \quad (2.15)$$

donde se ha considerado una autointeracción de tipo ϕ^4 . En vista de que $\phi \in \mathcal{A}$, surge como una idea natural para obtener una teoría de campos sobre $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$ la de reemplazar en esta acción a ϕ por

su imagen en operadores a través de W^{-1} (a partir de aquí se trabajará solamente con el orden de Weyl). Este procedimiento, en caso de resultar efectivo, dará lugar a una teoría de campos no conmutativa. Es importante notar que la naturaleza operatorial de los campos, que resulta de emplear este método (denominado engañosamente *cuantización de Weyl*), introduce no conmutatividad en las coordenadas pero es independiente de la cuantización de la teoría de campos en sí. Las dudas manifestadas respecto de la efectividad de este método se deben a que existe, *a priori*, un problema con el mismo. Dicho problema radica en que al “traducir” los campos que aparecen en la acción a sus valores en operadores se debe a la vez, para ser consistente, traducir las integrales y derivadas respecto de las coordenadas conmutativas a operaciones sobre el espacio no conmutativo, y dichas operaciones aún no han sido definidas. Conviene entonces pasar ahora a definir estas nociones de cálculo sobre el espacio no conmutativo.

Dado que el tiempo es conmutativo en $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$, se identificará a la derivada respecto de esta coordenada, $\hat{\partial}_t = \hat{\partial}_3$, con la derivada respecto del tiempo en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Es decir, $\hat{\partial}_3 \equiv \partial_t$.

Las derivadas respecto de las coordenadas no conmutativas de $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$, $\hat{\partial}_1$ y $\hat{\partial}_2$, serán definidas como derivaciones. Es decir, se les pedirá que sean operadores lineales y que cumplan la regla de Leibniz. Estas propiedades se cumplirán inmediatamente si se define,

$$\hat{\partial}_1 \hat{\phi} = \left[\frac{i}{\theta} \hat{x}_2, \hat{\phi} \right] \quad \hat{\partial}_2 \hat{\phi} = \left[-\frac{i}{\theta} \hat{x}_1, \hat{\phi} \right] \quad , \hat{\phi} \in \hat{\mathcal{A}} \quad , \quad (2.16)$$

donde $\theta \equiv \theta_{12} = -\theta_{21}$.

Por último, a la integral sobre el espacio no conmutativo se le pedirá que sea lineal y que la integral sobre todo el espacio de una derivada se anule. Como ocurrió con las derivadas, la integración en el tiempo puede identificarse con la misma operación en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Para las coordenadas no conmutativas, es sencillo ver que la operación de tomar traza (que se indicará por Tr) sobre el espacio de representación de las mismas⁴ satisface las propiedades deseadas. Se identificará entonces,

$$\int d^3x \phi \leftrightarrow \int dt Tr[\hat{\phi}] \quad , \phi \in \mathcal{A}, \hat{\phi} \in \hat{\mathcal{A}} \quad . \quad (2.17)$$

Con las nociones de cálculo recién definidas, puede ahora aplicarse el método de cuantización de Weyl a la acción (2.15). Se obtiene de esta manera la acción de la teoría para el campo escalar real sobre el espacio no conmutativo, dada por,

$$\hat{S}_\theta = \int dt Tr \left[\frac{1}{2} \hat{\partial}_i \hat{\phi} \hat{\partial}_i \hat{\phi} + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}^4 \right] \quad . \quad (2.18)$$

Es este el momento de sacar ventaja a la relación encontrada entre $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ y (\mathcal{A}, \star) . Calculando el símbolo de Weyl de esta acción se obtiene,

$$S_\theta = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \star \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) \quad . \quad (2.19)$$

Esta es una acción euclídea en términos de funciones, que retiene la información sobre la no conmutatividad de $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$. Es precisamente el tipo de expresión que se necesita conocer para el

⁴Es decir, $Tr \hat{O} = \int dx_1 \langle x_1 | \hat{O} | x_1 \rangle$, donde $\hat{O} \in \hat{\mathcal{A}}$ y $\hat{x}_1 | x_1 \rangle = x_1 | x_1 \rangle$

estudio de teoría de perturbaciones empleando la técnica de integrales funcionales. Comparando (2.19) con (2.15), se ve que la única modificación que se ha realizado a la acción de la teoría conmutativa para obtener la acción de la teoría no conmutativa ha sido reemplazar los productos punto a punto entre campos por productos de Moyal. Este procedimiento de reemplazo de un tipo de producto por el otro en la acción se convertirá en la propuesta natural cuando se quiera desarrollar el análogo no conmutativo para una teoría conmutativa.

2.3. Reglas de Feynman para el campo escalar real

Contando con la acción euclídea, (2.19), se puede proceder a la cuantización de la teoría de la manera usual y al estudio de su expansión diagramática. Para esto, conviene en primer lugar observar una propiedad importante que surge de integrar en todo el espacio el producto de Moyal de dos funciones en su expresión en términos del desarrollo de Fourier de las mismas (2.12). Dicha propiedad es,

$$\int d^3x (f \star g)(x) = \int d^3x f(x)g(x) \quad , f, g \in \mathcal{A} . \quad (2.20)$$

Aplicando la misma a la acción (2.19) se obtiene,

$$S_\theta = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi \star \phi)(\phi \star \phi) \right) , \quad (2.21)$$

donde la elección de qué \star eliminar en el término de autointeracción fue arbitraria y equivalente a cualquier otra. Comparando esta expresión con la acción para la teoría conmutativa (2.15) se llega a una primera conclusión importante: la parte libre de la teoría (a la que corresponden los dos primeros términos en la acción) no se ve afectada por la no conmutatividad. Luego, el propagador libre será el mismo que en el caso conmutativo.

La no conmutatividad juega en cambio un rol más importante en el último término de (2.21), provocando que la interacción en la teoría no conmutativa sea no local. Para analizar este término, que determinará el vértice de la teoría, es conveniente reescribirlo a partir de las transformadas de Fourier de los campos e integrar en las variables espacio-temporales,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4!} \int d^3x (\phi \star \phi)(x)(\phi \star \phi)(x) &= \\ &= \frac{\lambda}{4!} \int \left(\prod_{i=1}^4 d^3 k_i \right) (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) e^{-\frac{i}{2} k_1 \times k_2} e^{-\frac{i}{2} k_3 \times k_4} , \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde se ha introducido la notación $p \times k = p_i \theta_{ij} k_j$. Esta expresión es la se obtendría para el caso conmutativo excepto por la fase adicional $e^{-\frac{i}{2} k_1 \times k_2} e^{-\frac{i}{2} k_3 \times k_4}$, que es la que en este caso da el carácter de no localidad a la interacción⁵. Obsérvese que esta fase sólo contribuirá para

⁵En general, para cualquier interacción ϕ^n , $n > 2$, se puede convenir en eliminar siempre el último \star obteniendo el

ciertas contracciones de los campos en el vértice. En particular, considerando los diagramas de autointeracción a primer orden en la constante de acoplamiento λ (los “tadpoles”), aparecerán dos amplitudes diferentes dependiendo de cómo se contraigan las “patas” del vértice entre sí y con los momentos externos. Al contraer entre sí patas consecutivas (respecto del orden cíclico de los subíndices de sus momentos asociados $k_i, i = 1, 2, 3, 4$) como en el diagrama de la izquierda de la Figura 2.1, la fase no contribuirá. En cambio, la fase dará una amplitud distinta al contraer dos patas no consecutivas, como en el diagrama de la derecha de la Figura 2.1. La representación empleada en estos diagramas no permite distinguir gráficamente entre los mismos; son equivalentes ante una torsión de las patas del vértice. Conviene entonces introducir para esta teoría una representación de doble línea (o “cintas”) que permitirá distinguir entre ellos y, más en general, dará un orden para las contracciones y separará todos los diagramas en dos tipos: planares (los que pueden graficarse en un único plano sin superponer cintas) y no planares (los que no pueden graficarse en un único plano sin cruzar cintas). En la Figura 2.2 se utiliza esta representación gráfica para presentar nuevamente las dos contribuciones al tadpole a primer orden en λ .

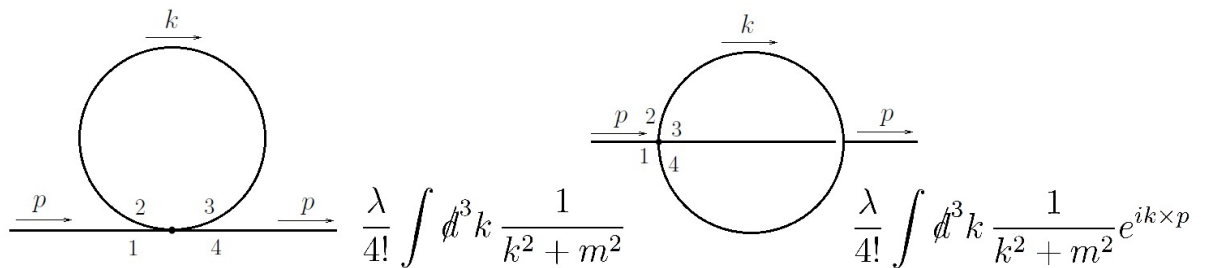


Figura 2.1. Los dos tipos de contribuciones distintas al tadpole en la teoría ϕ^4 no conmutativa. Los números en el vértice se utilizan únicamente para llevar un orden en las contracciones, como se explica en el texto. Junto a cada diagrama se indica su amplitud, omitiendo el factor de simetría, S , correspondiente a intercambiar de forma cíclica (“rotar”) los números en el vértice. Dichos factores serían $S = 8$, para el diagrama de la izquierda, y $S = 4$, para el de la derecha.

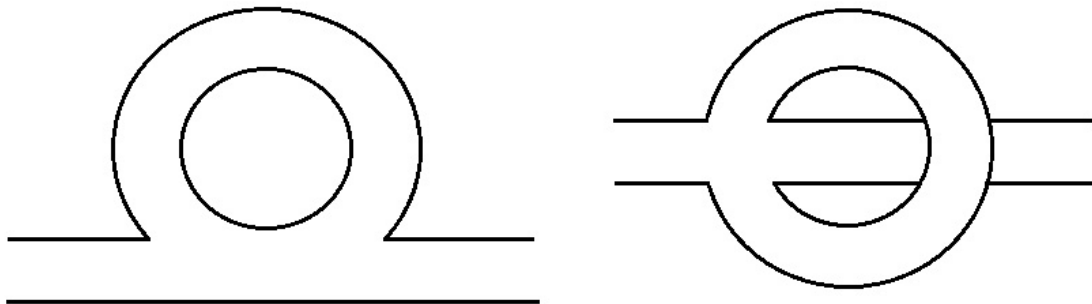


Figura 2.2. Las dos contribuciones a la autoenergía presentadas en la Figura 2.1 ahora representadas con líneas dobles, o cintas.

factor $e^{-\frac{i}{2} \sum_{1 \leq i < j < n} k_i \times k_j}$. Para $n = 4$ se puede usar la conservación de momento en el vértice para llevar esta forma de la fase a la presentada en el texto.

En [15] se realiza un análisis de la expansión diagramática para esta teoría a todo orden en λ llegando a la conclusión de que las fases en cada vértice derivan en una fase global a todo el diagrama, tanto para diagramas planares como no planares. Se obtienen allí las siguientes reglas de Feynman en espacio de momentos. A cada propagador de momento p se asigna un factor $\frac{1}{p^2+m^2}$ y a cada vértice $(2\pi)^3 \frac{\lambda}{4!} \delta(\sum k_i)$, donde la suma es sobre los momentos que convergen en el vértice (tomándolos con signo positivo si entran al vértice y negativo si salen, por ejemplo). Se agrega un factor adicional $e^{-\frac{i}{2}(\sum_{i<j} p_i \times p_j + \sum_{i,j} C_{ij} k_i \times k_j)}$, donde p_i son los momentos externos y C_{ij} es una matriz que lleva cuenta de cuántas veces la cinta de momento k_i (interno o externo) cruza sobre la de momento k_j . Los cruces se cuentan como positivos si k_i cruza sobre k_j con k_j moviéndose hacia la izquierda (puede verse como una regla de la mano derecha)⁶. Finalmente, se debe integrar sobre los momentos internos, q_i , con la medida $d^3 q_i$ y considerar factores de simetría.

2.4. Renormalización y mezcla UV/IR

Las correcciones cuánticas a un lazo para la función de dos puntos en la teoría bajo estudio provienen de los diagramas de la Figura 2.2 (cuyas amplitudes se indican en la Figura 2.1). Se pueden entonces separar estas correcciones en una contribución proveniente del diagrama planar y otra del no planar, de la siguiente manera,

$$\Gamma_{1planar}^{(2)} \propto \lambda \int d^3 k \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{1noplanar}^{(2)} \propto \lambda \int d^3 k \frac{e^{ik \times p}}{k^2 + m^2} , \quad (2.24)$$

donde se han omitido factores numéricos de $\mathcal{O}(1)$. La contribución planar es como la que se obtendría en el caso conmutativo y presentará el mismo comportamiento linealmente divergente en el ultravioleta (UV), es decir para altas energías. El efecto del factor oscilatorio en la contribución no planar es menos evidente a simple vista, por lo que conviene estudiar ambas contribuciones en más detalle. Para integrar estos diagramas puede reescribirse el denominador de los integrandos introduciendo un parámetro de Schwinger, α , como,

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2+m^2)} , \quad (2.25)$$

y luego introducir un *cutoff*, Λ , multiplicando cada integrando por $e^{-\frac{1}{\Lambda^2 \alpha}}$, de modo que regule las divergencias en $\alpha \rightarrow 0$. Integrando con este procedimiento se obtienen[6],

$$\Gamma_{1planar}^{(2)} = \lambda c(\Lambda + \dots) \quad (2.26)$$

$$\Gamma_{1noplanar}^{(2)} = \lambda c'(\Lambda_p + \dots) , \quad (2.27)$$

⁶Nótese que si el diagrama es planar, este último factor será simplemente $e^{-\frac{i}{2} \sum_{i<j} p_i \times p_j}$

donde c y c' son constantes positivas y,

$$\Lambda_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} + p \circ p}}, \quad \text{con } p \circ p = p_i \theta_{ik} \theta_{jk} p_j . \quad (2.28)$$

Considerando entonces estas correcciones a un lazo y la contribución clásica, la función de dos puntos correspondiente a la acción efectiva será,

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + m^2 + \lambda c \Lambda + \lambda c' \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} + p \circ p}} . \quad (2.29)$$

Aquí únicamente la contribución planar será divergente al tomar el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, y dicha divergencia puede absorberse, como es costumbre, en una renormalización de la masa. Definiendo la masa renormalizada, M , a través de $M^2 = m^2 + \lambda c \Lambda$ se soluciona dicha divergencia. Es más interesante lo que ocurre con el término proveniente del diagrama no planar. Efectivamente el mismo se mantiene finito al tomar el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, pero aparece entonces una nueva divergencia para $p \rightarrow 0$, es decir una divergencia infrarroja (IR), que no se encontraba en la teoría conmutativa original⁷. A este fenómeno en el cual aparece una divergencia IR asociada con la región UV de la integral en momento se le conoce como “mezcla UV/IR” y es algo típico en teorías no conmutativas interactuantes.

El origen físico de la mezcla UV/IR se encuentra en la no localidad de la interacción presente en este tipo de teorías. Puede verse de manera bastante intuitiva [15] que al explorar el campo en distancias pequeñas en una coordenada (UV), de orden Δ , la interacción dada por el producto de Moyal involucra al campo evaluado a grandes distancias (IR), de orden $\sim \frac{\theta}{\Delta}$, en la otra coordenada. Ha habido también propuestas de interpretar estas divergencias IR como la aparición de nuevos grados de libertad livianos en la teoría[16].

El problema de la mezcla UV/IR ha podido solucionarse en teorías escalares con autointeracción ϕ^4 mediante el agregado en la acción de un término armónico, llamado término de Grosse-Wulkenhaar [11] [17]. Este tipo de modelos son los que se utilizarán en el Capítulo 4.

Dado que la no localidad de las interacciones en teorías no conmutativas relaciona las divergencias UV con el comportamiento a grandes distancias, puede resultar de interés el estudio de este tipo de teorías en volúmenes finitos. Esto podría eventualmente dar una solución diferente a la de Grosse-Wulkenhaar para la mezcla UV/IR, con la ventaja de que un volumen finito es en general más “natural” o fácil de justificar en una teoría que un término armónico confinante. En el capítulo siguiente se estudiará la introducción de condiciones de bordes en teorías no conmutativas, lo cual podría eventualmente contribuir a una elaboración más general en volúmenes finitos.

⁷También aparece una divergencia al tomar el límite conmutativo, $\theta \rightarrow 0$, luego de $\Lambda \rightarrow 0$. Si se toma primero $\theta \rightarrow 0$ la contribución no planar toma la forma de la contribución planar, como es de esperar.

TEORÍAS DE CAMPOS NO CONMUTATIVAS CON CONDICIONES DE BORDE

El estudio de teorías de campos en regiones espaciales con bordes lleva a la aparición de efectos interesantes, como la fuerza de Casimir, que surgen de un juego entre las fluctuaciones de vacío de la teoría, el tipo de condiciones de borde impuestas y la geometría de la región. En el caso particular de teorías de campos no conmutativas como la considerada en el capítulo anterior, las relaciones de conmutación de las coordenadas (2.2) dan lugar a una discretización del espacio-tiempo (1.3), que lleva a la aparición de una escala típica en la teoría dada por $\sqrt{\theta}$.¹ Es de esperar entonces que, al confinar este tipo de teorías, aparezcan correcciones respecto del caso conmutativo dependientes del cociente $\frac{\sqrt{\theta}}{L}$ en observables como la fuerza o energía de Casimir (L es un tamaño típico que define la geometría de la región considerada).

Además, como se ha mencionado antes, el análisis de teorías con bordes es relevante para el estudio de teorías no conmutativas en un volumen finito, en las cuáles la extensión limitada del espacio no conmutativo podría resolver el problema de la mezcla UV/IR. Asimismo, el aprender a imponer condiciones de borde podría ser un camino para la imposición de otro tipo de condiciones, como la rotación, que podrían dar lugar a comportamientos interesantes, algunos de ellos relacionados posiblemente también con la renormalización.

En este capítulo se estudiarán algunos elementos de la teoría no conmutativa para el campo escalar real masivo en 2+1 dimensiones utilizada en el capítulo anterior, cuando a la misma se le imponen condiciones de borde en el plano. Se comenzará por introducir el método con el cual se imponen las condiciones de borde sobre una curva en el plano. Luego se obtendrá el propagador para la teoría sin autointeracción cuando se imponen condiciones de borde en dos placas paralelas. Por último, se estudiará de forma perturbativa el caso en el que la condición de borde es “débil” (el significado preciso de esta condición se dará más adelante). En todo el capítulo se asumirán condiciones de borde independientes del tiempo.

¹Aquí $\theta = \theta_{12} = -\theta_{21}$, como antes.

3.1. Imposición de las condiciones de borde

Típicamente, en una teoría conmutativa clásica como el Electromagnetismo, las condiciones de borde suelen imponerse fijando el valor de los campos (o sus derivadas) en una determinada superficie². Si se siguiera dicho procedimiento para la teoría conmutativa clásica del campo escalar real en 2+1 dimensiones y se quisiera luego cuantizar la misma a través de las técnicas de integrales funcionales, se obtendría la siguiente funcional generatriz para las funciones de correlación:

$$\mathcal{Z}(J) = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S(\phi) + \int d^3x J(x)\phi(x)} , \quad (3.1)$$

donde $S(\phi)$ es nuevamente la acción euclídea del campo, $J(x)$ es una corriente externa y $[\mathcal{D}\phi]$ es la medida de integración para las configuraciones del campo que satisfacen las condiciones de borde.

En vista de la dificultad que puede suponer hallar la medida de integración $[\mathcal{D}\phi]$ (especialmente en teorías no conmutativas), se puede pensar en cambio en adoptar un método alternativo en el cual se integre con la medida sin condiciones de borde, $\mathcal{D}\phi$, y se lleve al campo a cumplir las condiciones de borde a través de un término adicional en la acción. Dicho término adicional tomará la forma de un término de interacción entre el campo y el borde, que en cierto límite dará las condiciones de borde deseadas. Es decir, se propone agregar a la acción un término S_B tal que,

$$\int [\mathcal{D}\phi] e^{-S(\phi) + \int d^3x J(x)\phi(x)} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi) - S_B(\phi) + \int d^3x J(x)\phi(x)} . \quad (3.2)$$

Buscando imponer condiciones de borde tipo Dirichlet, se puede adoptar un término de interacción cuadrático en ϕ como el utilizado en [18],

$$S_B = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \sigma(\mathbf{x}) \phi^2(x_0, \mathbf{x}) , \quad (3.3)$$

donde λ es una constante que mide el acoplamiento entre el campo escalar ϕ y σ , un campo escalar de fondo sin dinámica propia y localizado alrededor de las superficies en las que se quiere imponer las condiciones de borde. Como es habitual, aquí \mathbf{x} se refiere al vector que incluye únicamente la parte espacial de x , es decir, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y x_0 representa la coordenada temporal, que en el capítulo anterior se denominó x_3 . La configuración de σ tendrá un ancho típico Δ , de manera que al tomar los límites $\Delta \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow \infty$ se obtengan las condiciones de borde tipo Dirichlet en dichas superficies³.

Pasando al caso no conmutativo, se puede emplear el mismo método, pero se debe recordar reemplazar los productos punto a punto entre los campos por productos de Moyal, como se ha visto

²Aquí superficie se utiliza en un sentido amplio. Podría tratarse de una curva si hubiese únicamente dos dimensiones espaciales, o un punto para una dimensión.

³ Δ representa aquí un “espesor” para el borde, por lo que en este límite la superficie no tiene espesor. A su vez, el límite $\lambda \rightarrow \infty$ hace que el campo ϕ esté confinado para modos de cualquier frecuencia. Si se quisiera modelar un confinamiento por una superficie de un material real, estas magnitudes debieran mantenerse finitas.

en el capítulo anterior. Entonces, para imponer las condiciones de borde en el caso no conmutativo, se propone agregar a la acción el término⁴,

$$S_B = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \phi(x_0, \mathbf{x}) \star \sigma(\mathbf{x}) \star \phi(x_0, \mathbf{x}) . \quad (3.4)$$

Más aún, en lo que resta de este capítulo se trabajará tomando *ab initio* el límite $\Delta \rightarrow 0$, por lo que se usará directamente el término

$$S_B = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \phi(x_0, \mathbf{x}) \star \delta_C(\mathbf{x}) \star \phi(x_0, \mathbf{x}) , \quad (3.5)$$

donde el campo σ ha tomado una configuración tipo delta de Dirac, que tiene soporte únicamente sobre la curva, \mathcal{C} , que hace las veces de borde de la región considerada. El uso de este término de interacción para imponer las condiciones de borde se corresponde con el enfoque empleado en [19] y [20].

Para completar el panorama de la imposición de condiciones de borde en el caso no conmutativo, se puede introducir la representación operatorial de la distribución δ_C . Suponiendo que la curva \mathcal{C} (que es un objeto conmutativo habitual) esté dada en forma paramétrica a través de $\xi \rightarrow \mathbf{z}(\xi)$, el operador asociado a δ_C en el álgebra no conmutativa será,

$$(W^{-1}(\delta))(\hat{\mathbf{x}}) = \int d\xi \left| \frac{d\mathbf{z}(\xi)}{d\xi} \right| \delta^{(2)}[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}(\xi)] . \quad (3.6)$$

En esta expresión la $\delta^{(2)}[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}(\xi)]$ debe entenderse como,

$$\delta^{(2)}[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}(\xi)] = \int d^2k e^{i\mathbf{k}[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}(\xi)]} . \quad (3.7)$$

Por último, es interesante analizar la siguiente cuestión. Como se mencionó al principio de este capítulo, la no conmutatividad en las coordenadas conduce a una discretización del espacio, con la aparición de una incerteza al intentar establecer ambas componentes de la posición simultáneamente. Resulta entonces en apariencia contradictorio el imponer condiciones de borde al campo sobre una curva general sin espesor. Para resolver este aparente problema conviene primero reescribir el término de interacción con el borde (3.5) utilizando la propiedad (2.20) para eliminar el primer producto de Moyal,

$$S_B = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \phi(x_0, \mathbf{x}) (\delta_C(\mathbf{x}) \star \phi(x_0, \mathbf{x})) . \quad (3.8)$$

Ahora, el producto entre paréntesis es,

⁴Nótese que el orden de los campos en esta expresión no tiene importancia ya que, como se vio en 2.2, la integral puede identificarse en el álgebra de operadores con una traza y es por tanto invariante ante permutaciones cíclicas de los campos. Es distinta la situación para el campo escalar complejo, donde aparecen dos posibilidades diferentes para el término de interacción con el borde ya que uno de los campos ϕ en esta expresión debe reemplazarse por ϕ^\dagger .

$$\begin{aligned}
\delta_C(\mathbf{x}) \star \phi(x_0, \mathbf{x}) &= \int d^2 k \, d^2 p \, e^{i\mathbf{kx} + i\mathbf{p}\mathbf{x} - \frac{i}{2} k_i \theta_{ij} p_j} \tilde{\delta}_C(\mathbf{k}) \tilde{\phi}(x_0, \mathbf{p}) = \\
&= \int d^2 k \, e^{i\mathbf{kx} - \frac{i}{2} \mathbf{k}\check{\mathbf{p}}} \tilde{\delta}_C(\mathbf{k}) \phi(x_0, \mathbf{x}) = \\
&= \delta_C\left(\mathbf{x} - \frac{\check{\mathbf{p}}}{2}\right) \phi(x_0, \mathbf{x}) \, , \tag{3.9}
\end{aligned}$$

donde $\check{p}_i = \theta_{ij} p_j = \theta \epsilon_{ij} p_j$, $i, j = 1, 2$, siendo ϵ el tensor antisimétrico 2×2 ya empleado en (1.7). Este es el resultado obtenido en [21] y [22]. Reinsertando este producto en (3.8), reemplazando p_i por $-i\partial_i$ y definiendo $\check{\partial}_i = \epsilon_{ij} \partial_j$ se obtiene,

$$S_B = \frac{\lambda}{2} \int d^3 x \, \phi(x_0, \mathbf{x}) \delta_C\left(\mathbf{x} + \frac{i}{2} \theta \check{\partial}\right) \phi(x_0, \mathbf{x}) \, . \tag{3.10}$$

Ahora, realizando en esta expresión una expansión en el parámetro de no conmutatividad θ , se obtiene lo siguiente ⁵,

$$\begin{aligned}
S_B &= \frac{\lambda}{2} \int d^3 x \, \phi(x_0, \mathbf{x}) \delta_C(\mathbf{x}) \phi(x_0, \mathbf{x}) + \\
&+ \frac{\lambda}{16} \theta^2 \int d^3 x \, \delta_C(\mathbf{x}) \partial_i \partial_j \phi(x_0, \mathbf{x}) (\delta_{ij} \partial^2 - \partial_i \partial_j) \phi(x_0, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\theta^3) \, . \tag{3.11}
\end{aligned}$$

El primer término en esta expansión se corresponde con la parte puramente conmutativa del término de interacción con el borde, (3.3), habiendo tomado el límite $\Delta \rightarrow 0$. Las correcciones no conmutativas que agregan los siguientes términos en el desarrollo⁶ dependen de las derivadas del campo, y se corresponden de esta manera con la evaluación del mismo en puntos muy cercanos a la curva. Así, la no conmutatividad da un “ancho efectivo” al borde, transformando de cierta manera a la curva que lo define en un objeto “difuso”.

3.2. Cálculo del propagador para el campo escalar real entre bordes rectos paralelos

En esta sección se hará un primer uso del método de imposición de condiciones de borde al calcular el propagador para un campo escalar real masivo en 2+1 dimensiones, sin autointeracción, confinado entre un par de bordes rectos. Nuevamente, se considerarán las relaciones de conmutación (2.2). Los bordes a tener en cuenta serán las rectas dadas por $x_2 = 0$ y $x_2 = a$. La acción euclídea para este modelo es entonces,

⁵Alternativamente esta expansión puede calcularse directamente de (3.8) utilizando la expansión para el producto de Moyal, $\delta_C(\mathbf{x}) \star \phi(x_0, \mathbf{x}) = \delta_C(\mathbf{x}) \phi(x_0, \mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \delta_C(\mathbf{x}) \theta_{i_1 j_1} \dots \theta_{i_n j_n} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \phi(x_0, \mathbf{x})$.

⁶En este caso el término de orden θ , que depende de las derivadas primeras del campo, se anula como consecuencia de la antisimetría de ϵ , a diferencia de lo que ocurre con el campo escalar complejo [20].

$$S = S_0 + S_{B_0} + S_{B_a} = \frac{1}{2} \int d^3x [\partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi(x) \star \delta(x_2) \star \phi(x) + \lambda_a \phi(x) \star \delta(x_2 - a) \star \phi(x)] , \quad (3.12)$$

donde se ha considerado la posibilidad de constantes de acoplamiento distintas en cada borde.

Para el cálculo del propagador asociado a esta acción es conveniente primero reescribir los términos de acoplamiento con el borde de manera diferente. Con este fin, considérese por ejemplo el término asociado al borde en $x_2 = a$,

$$S_{B_a} = \frac{\lambda_a}{2} \int d^3x \phi(x) \star \delta(x_2 - a) \star \phi(x) . \quad (3.13)$$

Utilizando la propiedad (2.20) puede eliminarse uno de los productos de Moyal y luego integrar en x_2 ,

$$S_{B_a} = \frac{\lambda_a}{2} \int d^3x \delta(x_2 - a) \phi(x) \star \phi(x) = \frac{\lambda_a}{2} \int dx_0 dx_1 [\phi(x) \star \phi(x)]_{x_2=a} . \quad (3.14)$$

Escribiendo esto en términos de la transformada de Fourier del campo,

$$S_{B_a} = \frac{\lambda_a}{2} \int dx_0 dx_1 \int d^3p \int d^3k \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(k) e^{i[(k_0+p_0)x_0 + (k_1+p_1)x_1 + (k_2+p_2)a]} e^{-\frac{i}{2}\theta(k_1 p_2 - k_2 p_1)} . \quad (3.15)$$

Integrando ahora en x_0 , x_1 , p_0 y p_1 , y reordenando luego, se obtiene,

$$\begin{aligned} S_{B_a} &= \frac{\lambda_a}{2} \int d^3p \int d^3k \tilde{\phi}(-k_0, -k_1, p_2) \tilde{\phi}(k_0, k_1, k_2) e^{i(k_2+p_2)a} e^{-\frac{i}{2}\theta(k_1 p_2 + k_2 k_1)} = \\ &= \frac{\lambda_a}{2} \int d^3p \int d^3k \tilde{\phi}(-k_0, -k_1, p_2) \tilde{\phi}(k_0, k_1, k_2) e^{ik_2(a - \frac{\theta}{2}k_1)} e^{ip_2(a - \frac{\theta}{2}k_1)} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Entonces,

$$S_{B_a} = \frac{\lambda_a}{2} \int dk_0 dk_1 \check{\phi}(-k_0, -k_1, a - \frac{\theta}{2}k_1) \check{\phi}(k_0, k_1, a - \frac{\theta}{2}k_1) . \quad (3.17)$$

De la misma manera, se llega a que,

$$S_{B_0} = \frac{\lambda}{2} \int dk_0 dk_1 \check{\phi}(-k_0, -k_1, -\frac{\theta}{2}k_1) \check{\phi}(k_0, k_1, -\frac{\theta}{2}k_1) . \quad (3.18)$$

Por otro lado, la parte libre de la acción en términos de estas transformadas de Fourier parciales es,

$$S_0 = \frac{1}{2} \int dk_0 dk_1 dx_2 dy_2 \check{\phi}(-k_0, -k_1, x_2) \delta(x_2 - y_2) (k_0^2 + k_1^2 - \partial_2^2 + m^2) \check{\phi}(k_0, k_1, y_2) . \quad (3.19)$$

A partir de estas tres últimas expresiones, la acción (3.12) puede reescribirse como,

$$S = \frac{1}{2} \int dk_0 dk_1 dx_2 dy_2 \check{\phi}(-k_0, -k_1, x_2) \delta(x_2 - y_2) [k_0^2 + k_1^2 - \partial_2^2 + m^2 + \lambda \delta(x_2 + \frac{\theta}{2}k_1) + \lambda_a \delta(x_2 - L + \frac{\theta}{2}k_1)] \check{\phi}(k_0, k_1, y_2) . \quad (3.20)$$

El propagador que se busca, $\Delta(k_0, k_1, x_2, y_2) \equiv \Delta(x_2, y_2)$, no es más que la inversa de la forma cuadrática de esta última expresión. Llamando G a la parte libre de esta forma cuadrática y V a la parte de interacción, considérese lo siguiente⁷,

$$\Delta = (G + V)^{-1} = (\Delta_0^{-1} + V)^{-1} , \quad (3.21)$$

donde Δ_0^{-1} es el propagador libre. Entonces,

$$\Delta = [\Delta_0^{-1}(1 + \Delta_0 V)]^{-1} = (1 + \Delta_0 V)^{-1} \Delta_0 . \quad (3.22)$$

Ahora, desarrollando $(1 + \Delta_0 V)^{-1}$,

$$\Delta = (1 - \Delta_0 V + (\Delta_0 V)^2 - \dots) \Delta_0 = \Delta_0 - \Delta_0 V \Delta_0 + (\Delta_0 V)^2 \Delta_0 - \dots . \quad (3.23)$$

Pero esto puede reescribirse como,

$$\Delta = \Delta_0 - \Delta_0 V (\Delta_0 - \Delta_0 V \Delta_0 - \dots) . \quad (3.24)$$

Que comparando con (3.23), y reincorporando la dependencia explícita en las variables, da lugar a la relación recursiva,

$$\Delta(x_2, y_2) = \Delta_0(x_2, y_2) - \int dw dz \Delta_0(x_2, w) V(w, z) \Delta(z, y_2) . \quad (3.25)$$

Dada la forma particular que tiene V en el caso bajo estudio,

$$V(w, z) = \delta(w - z) [\lambda \delta(w + \frac{\theta}{2}k_1) + \lambda_a \delta(w - L + \frac{\theta}{2}k_1)] , \quad (3.26)$$

la expresión anterior se reduce a,

$$\begin{aligned} \Delta(x_2, y_2) &= \Delta_0(x_2, y_2) - \lambda \Delta_0(x_2, -\frac{\theta}{2}k_1) \Delta(-\frac{\theta}{2}k_1, y_2) - \\ &- \lambda_a \Delta_0(x_2, L - \frac{\theta}{2}k_1) \Delta(L - \frac{\theta}{2}k_1, y_2) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Entonces, evaluando en $x_2 = -\frac{\theta}{2}k_1$ y $x_2 = L - \frac{\theta}{2}k_1$ se obtiene el sistema,

⁷Por simplicidad aquí se omiten las dependencias en las variables y se utiliza la notación $\Delta_0 V$ para indicar el producto $\int dy \Delta_0(x, y) V(y, z)$.

$$\begin{aligned} \Delta(-\frac{\theta}{2}k_1, y_2) &= \Delta_0(-\frac{\theta}{2}k_1, y_2) - \lambda \Delta_0(-\frac{\theta}{2}k_1, -\frac{\theta}{2}k_1) \Delta(-\frac{\theta}{2}k_1, y_2) - \\ &\quad - \lambda_a \Delta_0(-\frac{\theta}{2}k_1, L - \frac{\theta}{2}k_1) \Delta(L - \frac{\theta}{2}k_1, y_2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \Delta(L - \frac{\theta}{2}k_1, y_2) &= \Delta_0(L - \frac{\theta}{2}k_1, y_2) - \lambda \Delta_0(L - \frac{\theta}{2}k_1, -\frac{\theta}{2}k_1) \Delta(-\frac{\theta}{2}k_1, y_2) - \\ &\quad - \lambda_a \Delta_0(L - \frac{\theta}{2}k_1, L - \frac{\theta}{2}k_1) \Delta(L - \frac{\theta}{2}k_1, y_2) . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y volviendo sobre (3.27) se puede entonces obtener $\Delta(x_2, y_2)$. El único ingrediente que falta para esto es el propagador libre parcialmente transformado en las primeras dos coordenadas $\Delta_0(x_2, y_2) \equiv \Delta_0(k_0, k_1, x_2, y_2)$. El propagador libre escrito en coordenadas es bien conocido,

$$\Delta_0(x, y) = \int \not{d}k_0 \not{d}k_1 \not{d}k_2 e^{i[k_0(x_0 - y_0) + k_1(x_1 - y_1)]} \frac{e^{ik_2(x_2 - y_2)}}{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + m^2} . \quad (3.30)$$

De allí se lee que el transformado en las primeras dos coordenadas es,

$$\Delta_0(k_0, k_1, x_2, y_2) = \int \not{d}k_2 \frac{e^{ik_2(x_2 - y_2)}}{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + m^2} = \frac{e^{-\eta|x_2 - y_2|}}{2\eta} , \quad (3.31)$$

donde $\eta = \sqrt{k_0^2 + k_1^2 + m^2}$. Utilizando esto, junto con (3.27), (3.28) y (3.29), se obtiene finalmente,

$$\begin{aligned} \Delta(x_2, y_2) &= \frac{1}{2\eta} [e^{-\eta|x_2 - y_2|} - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{2\eta} \right) e^{-\eta(|x_2 + \frac{\theta}{2}k_1| + |\frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} + \\ &\quad + \frac{e^{-\eta a}}{2\eta\kappa} e^{-\eta(|x_2 + \frac{\theta}{2}k_1| + |a - \frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} - \frac{1}{e^{-\eta a}} e^{-\eta(|x_2 - a + \frac{\theta}{2}k_1| + |\frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} + \\ &\quad + \frac{1}{\kappa e^{-\eta a}} \left(1 + \frac{2\eta}{\lambda} \right) \left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{2\eta} \right) e^{-\eta(|x_2 - a + \frac{\theta}{2}k_1| + |\frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} - \\ &\quad - \frac{1}{2\eta\kappa} \left(1 + \frac{2\eta}{\lambda} \right) e^{-\eta(|x_2 - a + \frac{\theta}{2}k_1| + |a - \frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)}] , \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde $\kappa = \frac{1}{\lambda} + \frac{2\eta}{\lambda\lambda_a} - \frac{e^{-2\eta a}}{2\eta} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{\lambda_a}$. Esta expresión se simplifica considerablemente al tomar los límites $\lambda \rightarrow \infty$ y $\lambda_a \rightarrow \infty$, resultando,

$$\begin{aligned} \Delta(x_2, y_2) &= \frac{1}{2\eta} [e^{-\eta|x_2 - y_2|} - \\ &\quad - \frac{1}{1 - e^{-2\eta a}} e^{-\eta(|x_2 + \frac{\theta}{2}k_1| + |\frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} - \\ &\quad - \frac{1}{1 - e^{-2\eta a}} e^{-\eta(|x_2 - a + \frac{\theta}{2}k_1| + |a - \frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} + \\ &\quad + \frac{e^{-\eta a}}{1 - e^{-2\eta a}} e^{-\eta(|x_2 - a + \frac{\theta}{2}k_1| + |\frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)} + \\ &\quad + \frac{e^{-\eta a}}{1 - e^{-2\eta a}} e^{-\eta(|x_2 + \frac{\theta}{2}k_1| + |a - \frac{\theta}{2}k_1 - y_2|)}] . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se ha encontrado así el propagador para el campo escalar real entre bordes rectos paralelos con condiciones de Dirichlet.

3.3. Desarrollo perturbativo del término de interacción con el borde

En esta sección se buscará evaluar la energía de vacío en la teoría bajo estudio, cuando el campo se encuentra confinado por una curva de forma arbitraria, a través de un desarrollo de dicha energía en el acoplamiento λ . Considérese nuevamente para ello el término de interacción con el borde (3.5), que junto con la parte libre da lugar a la siguiente acción para el campo escalar real masivo sin autointeracción⁸,

$$S = S_0 + S_B = \frac{1}{2} \int d^3x [\partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi(x) \star \delta_C(x) \star \phi(x)] . \quad (3.34)$$

A partir de esta acción, puede construirse la funcional generatriz para los diagramas de vacío en presencia de la curva \mathcal{C} como,

$$\mathcal{Z}_C = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_0}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_B} e^{-S_0}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_0}} = \langle e^{-S_B} \rangle_0 , \quad (3.35)$$

donde se ha introducido la notación $\langle (\dots) \rangle_0$ para indicar un valor medio con el peso gaussiano definido por la acción libre, $\frac{\int \mathcal{D}\phi (\dots) e^{-S_0}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_0}}$. A partir de \mathcal{Z}_C puede construirse la generatriz de diagramas de vacío conectados,

$$\mathcal{W}_C = \ln \mathcal{Z}_C = \ln \langle e^{-S_B} \rangle_0 . \quad (3.36)$$

Esta funcional puede desarrollarse en potencias de la constante de acoplamiento λ . Los primeros términos de este desarrollo para un λ pequeño se corresponderán con una condición de borde impuesta de forma “débil”. El desarrollo a considerar es entonces,

$$\mathcal{W}_C = \ln \langle e^{-S_B} \rangle_0 = \ln \langle 1 - S_B + \frac{1}{2} S_B^2 - \frac{1}{3!} S_B^3 + \frac{1}{4!} S_B^4 - \mathcal{O}(\lambda^5) \rangle_0 . \quad (3.37)$$

A partir de esta expresión puede hallarse también un desarrollo en λ para la energía de vacío del campo escalar con el borde \mathcal{C} . Dicha energía será[23],

$$E_C = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{W}_C = E_C^{(1)} + E_C^{(2)} + E_C^{(3)} + \dots , \quad (3.38)$$

donde $E_C^{(i)}$ indica la contribución de orden i en λ y T es la extensión total del tiempo euclídeo.

⁸Recuérdese que si bien aquí se escribe $\delta_C(x)$ se considerarán únicamente condiciones de borde constantes en el tiempo.

A continuación se analizarán los primeros términos de este desarrollo.

3.3.1. Primer orden en λ

A partir de (3.36) y (3.38), el primer orden en λ de la energía es,

$$E_C^{(1)} = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle -S_B \rangle_0^c = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle -S_B \rangle_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle \int d^3x \lambda \phi(x) \star \delta_C(x) \star \phi(x) \rangle_0, \quad (3.39)$$

donde $\langle \dots \rangle_0^c$ indica una contribución conectada (como corresponde al desarrollo de \mathcal{W}_C). Transformando Fourier, y teniendo presente que C no depende del tiempo, esto puede reescribirse como,

$$\begin{aligned} E_C^{(1)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2T} \langle \int dk_0 d^2k dl_0 d^2l d^2q dx_0 d^2x e^{i(k_0+l_0)x_0} \tilde{\phi}(k_0, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \star \tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \star \tilde{\phi}(l_0, \mathbf{l}) e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}} \rangle_0 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2T} \int dk_0 d^2k dl_0 d^2l d^2q \tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \langle \tilde{\phi}(k_0, \mathbf{k}) \tilde{\phi}(-k_0, \mathbf{l}) \rangle_0 \int d^2x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \star e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \star e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2T} \int dk_0 d^2k dl_0 d^2l d^2q \tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \langle \tilde{\phi}(k_0, \mathbf{k}) \tilde{\phi}(-k_0, \mathbf{l}) \rangle_0 \int d^2x e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{l})\mathbf{x}} e^{-\frac{i}{2}\theta(\mathbf{k}\wedge\mathbf{q}+\mathbf{k}\wedge\mathbf{l}+\mathbf{q}\wedge\mathbf{l})} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2T} \int dk_0 d^2k dl_0 d^2l d^2q \tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \langle \tilde{\phi}(k_0, \mathbf{k}) \tilde{\phi}(-k_0, \mathbf{l}) \rangle_0 (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{l}) e^{-\frac{i}{2}\theta(\mathbf{k}\wedge\mathbf{q}+\mathbf{k}\wedge\mathbf{l}+\mathbf{q}\wedge\mathbf{l})} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2T} \int dk_0 d^2k dl_0 d^2l \left[\tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \right]_{\mathbf{q}=-\mathbf{(k+l)}} \langle \tilde{\phi}(k_0, \mathbf{k}) \tilde{\phi}(-k_0, \mathbf{l}) \rangle_0 e^{\frac{i}{2}\theta\mathbf{k}\wedge\mathbf{l}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde se ha introducido la notación $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = p_i \epsilon_{ij} q_j$. Haciendo uso ahora de la expresión explícita para el propagador libre en espacio de momentos,

$$\langle \tilde{\phi}(k_0, \mathbf{k}) \tilde{\phi}(-k_0, \mathbf{l}) \rangle_0 = (2\pi)^2 T \frac{\delta^{(2)}(\mathbf{k} + \mathbf{l})}{k_0^2 + \mathbf{k}^2}, \quad (3.41)$$

e integrando en d^2l , resulta que $E_C^{(1)}$ no depende del parámetro θ ,

$$E_C^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \int dk_0 d^2k \frac{1}{k_0^2 + \mathbf{k}^2} \left[\tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \frac{\lambda}{2} \int d^2k k \frac{1}{2k} \left[\tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \quad (3.42)$$

En esta última expresión $k = |\mathbf{k}|$. Pasando a coordenadas polares en espacio de momentos,

$$E_C^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \left[\tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dk k \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2} \left[\tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \frac{\Lambda}{4\pi}, \quad (3.43)$$

donde en el último paso se ha introducido un *cutoff* ultravioleta, Λ , dado que la integral en k es linealmente divergente. Por otro lado, $\left[\tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$ puede escribirse como $\int d^2x \tilde{\delta}_C(\mathbf{x})$ y, suponiendo una parametrización $\xi \rightarrow \mathbf{z}(\xi)$ para la curva,

$$\int d^2x \tilde{\delta}_C(\mathbf{x}) = \int d^2x \int d\xi \left| \frac{d\mathbf{z}(\xi)}{d\xi} \right| \delta^{(2)}[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\xi)] = L(C) , \quad (3.44)$$

con $L(C)$ la longitud de la curva.

Finalmente, el término de orden λ en el desarrollo de la energía es,

$$E_C^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \frac{\Lambda}{4\pi} L(C) , \quad (3.45)$$

que es de carácter conmutativo (*i.e.* no depende de θ), proporcional a la longitud de la curva y linealmente divergente.

3.3.2. Segundo orden en λ

El segundo orden en λ en el desarrollo de la energía es,

$$E_C^{(2)} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle S_B^2 \rangle_0^c = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\langle S_B^2 \rangle_0 - \langle S_B \rangle_0^2) . \quad (3.46)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para el primer orden se puede escribir⁹,

$$\begin{aligned} \langle S_B^2 \rangle_0 &= \left\langle \left(\frac{\lambda}{2} \int d^3x \phi(x) \star \delta_C(x) \star \phi(x) \right)^2 \right\rangle_0 = \\ &= \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \int d^3x d^3x' \langle (\phi(x) \star \delta_C(x) \star \phi(x)) (\phi(x') \star \delta_C(x') \star \phi(x')) \rangle_0 = \\ &= \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \int d^3x d^3x' \int dk_0 \int dl_0 \int dl_0' \int dq \int dk_0' \int dl_0' \int dl_0'' \int dq' e^{i[(k_0+l_0)x_0 + (k_0'+l_0'')x_0']} \times \\ &\times e^{i[(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{l})\mathbf{x} + (\mathbf{k}'+\mathbf{q}'+\mathbf{l}')\mathbf{x}']} e^{-\frac{i}{2}\theta(\mathbf{k}\wedge\mathbf{q}+\mathbf{k}\wedge\mathbf{l}+\mathbf{q}\wedge\mathbf{l})} e^{-\frac{i}{2}\theta(\mathbf{k}'\wedge\mathbf{q}'+\mathbf{k}'\wedge\mathbf{l}'+\mathbf{q}'\wedge\mathbf{l}')} \tilde{\delta}_C(\mathbf{q}) \tilde{\delta}_C(\mathbf{q}') \times \\ &\times \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \tilde{\phi}(\mathbf{l}) \tilde{\phi}(\mathbf{k}') \tilde{\phi}(\mathbf{l}') \rangle_0 . \end{aligned} \quad (3.47)$$

De las dos contracciones que aparecen en $\langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \tilde{\phi}(\mathbf{l}) \tilde{\phi}(\mathbf{k}') \tilde{\phi}(\mathbf{l}') \rangle_0$ una es $\langle S_B \rangle_0^2$, que se cancelará en la expresión (3.46) para $E_C^{(2)}$, quedando únicamente la contribución conectada (como era de esperar). Dicha contribución corresponde al diagrama que se representa a la izquierda en la Figura 3.1, donde las cruces representan el vértice de interacción con la curva C . En esta figura se representa también el diagrama que habrá que calcular en general para el orden N en este desarrollo en λ . Siguiendo con el cálculo del segundo orden la contribución que interesa es,

⁹Aquí \times representa el producto punto a punto entre funciones. Se utiliza esta notación, en lugar de \cdot , únicamente para facilitar la lectura.

$$\begin{aligned}
\langle S_B^2 \rangle_0^c &= \langle S_B^2 \rangle_0 - \langle S_B \rangle_0^2 = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \mathcal{d}l_0 \mathcal{d}^2 l \mathcal{d}k'_0 \mathcal{d}^2 k' \mathcal{d}l'_0 \mathcal{d}^2 l' e^{\frac{i}{2}\theta(\mathbf{k} \wedge \mathbf{l} + \mathbf{k}' \wedge \mathbf{l}')} \times \\
&\times \tilde{\delta}_c(-(\mathbf{k} + \mathbf{l})) \tilde{\delta}_c(-(\mathbf{k}' + \mathbf{l}')) 2\pi \delta(k_0 + k'_0) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \times \\
&\times 2\pi \delta(l_0 + l'_0) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{l} + \mathbf{l}') \frac{1}{k_0^2 + \mathbf{k}^2} \frac{1}{l_0^2 + \mathbf{l}^2} 2\pi \delta(k_0 + l_0) 2\pi \delta(k'_0 + l'_0) = \\
&= \frac{\lambda^2}{4} T \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \mathcal{d}^2 l \tilde{\delta}_c(-(\mathbf{k} + \mathbf{l})) \tilde{\delta}_c(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \frac{e^{i\theta \mathbf{k} \wedge \mathbf{l}}}{(k_0^2 + \mathbf{k}^2)(l_0^2 + \mathbf{l}^2)} . \tag{3.48}
\end{aligned}$$

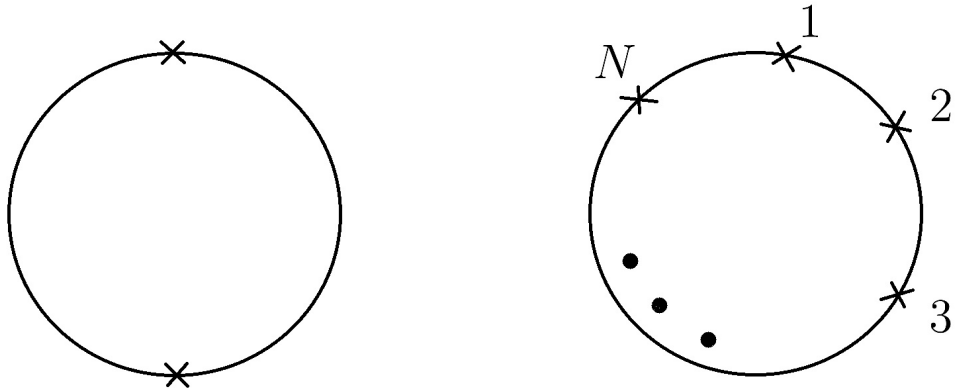


Figura 3.1. El diagrama a calcular para el segundo orden en λ de la energía es el diagrama conectado con dos vértices de interacción con el borde, que se representa aquí a la izquierda. Las cruces representan los vértices. A la derecha se representa el diagrama que contribuirá al orden N ; el diagrama conectado con N vértices de interacción con el borde.

Teniendo en cuenta que $\tilde{\delta}_c(\mathbf{q}) = \int d^2x \delta_c(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}$, puede escribirse en la expresión anterior $\tilde{\delta}_c(-(\mathbf{k} + \mathbf{l})) \tilde{\delta}_c(\mathbf{k} + \mathbf{l}) = |\tilde{\delta}_c(\mathbf{k} + \mathbf{l})|^2$. Además, se puede realizar el cambio $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l} - \mathbf{k}$, lo cual no alterará el producto $\mathbf{k} \wedge \mathbf{l}$, y permitirá obtener una expresión para $E_C^{(2)}$ en la que únicamente la integral en d^2l dependerá de la forma de la curva considerada, mientras que las otras integrales darán cuenta de un factor dependiente de \mathbf{l} que es propio de este término del desarrollo en λ y es el mismo para cualquier curva. La expresión obtenida de esta manera es,

$$E_C^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{8} \int \mathcal{d}^2l |\tilde{\delta}_c(\mathbf{l})|^2 \mathcal{F}(\mathbf{l}) , \tag{3.49}$$

$$\text{con } \mathcal{F}(\mathbf{l}) = \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \frac{e^{i\theta \mathbf{k} \wedge \mathbf{l}}}{(k_0^2 + \mathbf{k}^2)(l_0^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2)} . \tag{3.50}$$

El objetivo siguiente será entonces evaluar el factor $\mathcal{F}(\mathbf{l})$. Es instructivo y útil para comparaciones posteriores el comenzar evaluando este factor en el caso conmutativo, es decir, con $\theta = 0$. Utilizando un cero como subíndice para indicar esta condición, se tendrá,

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{l}) = \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \frac{1}{(k_0^2 + \mathbf{k}^2)(k_0^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2)} . \quad (3.51)$$

Para evaluar esta expresión es conveniente introducir un par de parámetros de Feynman [24], α y β , de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(\mathbf{l}) &= \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \int_0^1 d\alpha d\beta \frac{\delta(\alpha + \beta - 1)}{[\alpha(k_0^2 + \mathbf{k}^2) + \beta(k_0^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2)]^2} = \\ &= \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[k_0^2 + \alpha \mathbf{k}^2 + (1 - \alpha)|\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2]^2} . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Desarrollando $|\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2$ y luego completando cuadrados se obtiene la siguiente expresión,

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{l}) = \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[k_0^2 + |\mathbf{k} + (\alpha - 1)\mathbf{l}|^2 + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{l}^2]^2} . \quad (3.53)$$

Realizando ahora el cambio $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - (\alpha - 1)\mathbf{l}$, permite evaluar trivialmente la integral en $\mathcal{d}^2 k$ pasando a coordenadas polares,

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{l}) = \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[k_0^2 + \mathbf{k}^2 + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{l}^2]^2} = \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} &= \int \mathcal{d}k_0 \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \mathcal{d}k \frac{k}{[k_0^2 + k^2 + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{l}^2]^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{d}k_0 \int_0^1 d\alpha \frac{1}{k_0^2 + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{l}^2} . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Realizando ahora las integrales en k_0 y α se llega a una expresión final para $\mathcal{F}_0(\mathbf{l})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(\mathbf{l}) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^\infty \mathcal{d}k_0 \frac{1}{k_0^2 + \alpha(1 - \alpha)\mathbf{l}^2} = \\ &= \frac{1}{8\pi l} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} = \\ &= \frac{1}{8l} . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Esto dará, para el caso conmutativo, una contribución a la energía,

$$E_{C_0}^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{64} \int \mathcal{d}^2 l \frac{|\tilde{\delta}_C(\mathbf{l})|^2}{l} . \quad (3.57)$$

Volviendo ahora al caso no conmutativo, $\theta \neq 0$, se desean evaluar las integrales en (3.50). Los pasos seguidos en el caso conmutativo hasta (3.54) son también válidos en este caso y llevan a,

$$\mathcal{F}(\mathbf{l}) = \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \int_0^1 d\alpha \frac{e^{i\theta \mathbf{k} \wedge \mathbf{l}}}{[k_0^2 + \mathbf{k}^2 + \alpha(1-\alpha)\mathbf{l}^2]^2} . \quad (3.58)$$

Pasando $\mathcal{d}^2 k$ a coordenadas polares, se puede integrar en la variable angular, φ , para obtener,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{l}) &= \int \mathcal{d}k_0 \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \mathcal{d}k \frac{k}{[k_0^2 + k^2 + \alpha(1-\alpha)\mathbf{l}^2]^2} \int_0^{2\pi} \mathcal{d}\varphi e^{i\theta k l \sin(\varphi)} = \\ &= \int \mathcal{d}k_0 \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \mathcal{d}k \frac{k J_0(\theta k l)}{[k_0^2 + k^2 + \alpha(1-\alpha)\mathbf{l}^2]^2} , \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde J_0 es la función de Bessel de primera especie de orden cero. Siguiendo con las demás integrales es conveniente, por simplicidad, dejar la integral en $\mathcal{d}k$ para el final,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{l}) &= \int_0^\infty \mathcal{d}k \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^\infty \mathcal{d}k_0 \frac{k J_0(\theta k l)}{[k_0^2 + k^2 + \alpha(1-\alpha)\mathbf{l}^2]^2} = \\ &= \int_0^\infty \mathcal{d}k \int_0^1 d\alpha \frac{k J_0(\theta k l)}{4 [k^2 + \alpha(1-\alpha)\mathbf{l}^2]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \int_0^\infty \mathcal{d}k \frac{J_0(\theta k l)}{4k^2 + \mathbf{l}^2} = \\ &= \frac{1}{8l} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 \mathbf{l}^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta \mathbf{l}^2}{2} \right) \right] = \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$= \frac{1}{8l} \left[J_0 \left(i \frac{\theta \mathbf{l}^2}{2} \right) - L_0 \left(\frac{\theta \mathbf{l}^2}{2} \right) \right] , \quad (3.61)$$

donde $L_0(z)$ es la función de Struve modificada de orden cero y ${}_0F_1(a, z)$ es la función hipergeométrica confluyente regularizada, que se ha llevado a una función de Bessel de argumento imaginario utilizando identidades de este tipo de funciones[25]. En la Figura (3.2) se representa gráficamente la diferencia de funciones que aparece en el numerador de (3.60). Un aspecto interesante que puede apreciarse en esta figura es que $J_0(0) - L_0(0) = 1$ de modo que (3.60) coincide con el resultado conmutativo (3.56) cuando $\theta = 0$; más aún, (3.60) va al resultado conmutativo de forma suave.

Con el resultado (3.60) se obtiene finalmente la contribución de segundo orden en λ a la energía en el caso no conmutativo,

$$E_C^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{64} \int \mathcal{d}^2 l \frac{|\tilde{\delta}_C(\mathbf{l})|^2}{l} \left[J_0 \left(i \frac{\theta \mathbf{l}^2}{2} \right) - L_0 \left(\frac{\theta \mathbf{l}^2}{2} \right) \right] . \quad (3.62)$$

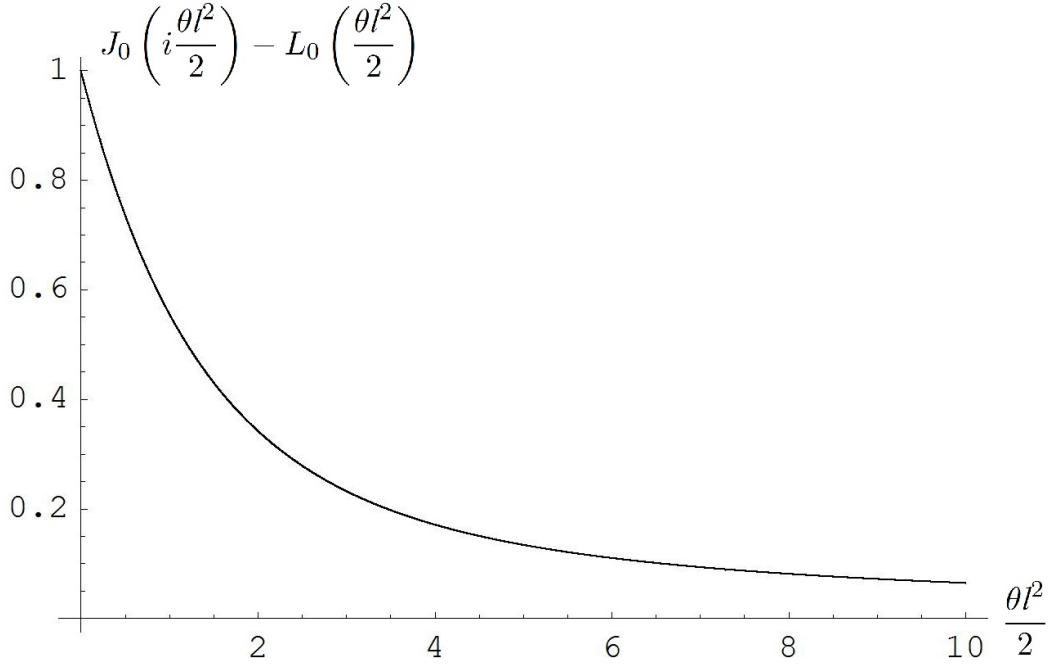


Figura 3.2. Se representa aquí el numerador de (3.60), $J_0\left(i\frac{\theta l^2}{2}\right) - L_0\left(\frac{\theta l^2}{2}\right)$, en función de $\frac{\theta l^2}{2}$. Puede verse aquí que esta función va al valor 1 al ir al caso conmutativo, $\theta = 0$. Para valores mayores del argumento $\left(\frac{\theta l^2}{2} \approx 16\right)$ esta función comienza a oscilar fuertemente dificultando su representación gráfica.

3.3.3. Tercer orden en λ

La contribución de tercer orden en λ a la energía (3.38) estará dada por,

$$E_C^{(3)} = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{3!T} \langle S_B^3 \rangle_0^c. \quad (3.63)$$

Calculando esta contribución conectada a través de pasos similares a los seguidos para los órdenes anteriores se obtiene,

$$E_C^{(3)} = -\frac{\lambda^3}{36} \int dk_0 d^2 k d^2 l d^2 l' \tilde{\delta}_C(-(\mathbf{k} + \mathbf{l})) \tilde{\delta}_C(\mathbf{k} - \mathbf{l}') \tilde{\delta}_C(\mathbf{l} + \mathbf{l}') \times \\ \times \frac{e^{i\theta(\mathbf{k} \wedge \mathbf{l} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{l}' + \mathbf{l} \wedge \mathbf{l}')}}{(k_0^2 + \mathbf{k}^2)(k_0^2 + \mathbf{l}^2)(k_0^2 + \mathbf{l}'^2)}. \quad (3.64)$$

Realizando los cambios $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{l}' \rightarrow \mathbf{l}' + \mathbf{k}$ esto puede llevarse nuevamente a una expresión en la que sólo algunas de las integrales a evaluar dependen de la forma de la curva, mientras que las otras dan cuenta de un factor propio de este orden del desarrollo. Esta nueva expresión es,

$$E_C^{(3)} = -\frac{\lambda^3}{36} \int \mathcal{d}^2 l \mathcal{d}^2 l' e^{i\theta \mathbf{l} \wedge \mathbf{l}'} \tilde{\delta}_C(-\mathbf{l}) \tilde{\delta}_C(\mathbf{l} + \mathbf{l}') \tilde{\delta}_C(-\mathbf{l}') \mathcal{F}(\mathbf{l}, \mathbf{l}') , \quad (3.65)$$

$$\text{con } \mathcal{F}(\mathbf{l}, \mathbf{l}') = \int \mathcal{d}k_0 \mathcal{d}^2 k \frac{e^{-2i\theta \mathbf{k} \wedge \mathbf{l}}}{(k_0^2 + \mathbf{k}^2)(k_0^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2)(k_0^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{l}'|^2)} . \quad (3.66)$$

Con el objetivo de integrar la expresión para $\mathcal{F}(\mathbf{l}, \mathbf{l}')$ se ha buscado aplicar la estrategia utilizada en el orden anterior, introduciendo parámetros de Feynman y redefiniendo \mathbf{k} de manera conveniente, sin éxito. Se puede al menos decir que $\mathcal{F}(\mathbf{l}, \mathbf{l}')$ será convergente pero, sin conocer su dependencia explícita en \mathbf{l} y \mathbf{l}' y sin haber elegido una curva \mathcal{C} , nada puede decirse de $E_C^{(3)}$, que es la magnitud de interés.

3.3.4. Aplicación a un borde circular

En esta sección se busca calcular explícitamente las contribuciones de primer y segundo orden en λ a la energía para el caso particular de un borde circular. Es decir, se considerará la curva \mathcal{C} dada por la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$ o, equivalentemente, dada de forma paramétrica por,

$$\mathbf{z}(\xi) = (R \cos(\xi), R \sen(\xi)) . \quad (3.67)$$

El cálculo de la contribución de primer orden es trivial a partir de (3.45) y resulta,

$$E_R^{(1)} = \frac{\lambda}{4} \Lambda R . \quad (3.68)$$

Para el cálculo de la contribución de segundo orden es necesario conocer la transformada de Fourier de $\delta_C(\mathbf{x})$ (ver (3.62)). Esto puede hacerse a partir de la forma paramétrica (3.67) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \delta_C(\mathbf{x}) &= \int d\xi \left| \frac{d\mathbf{z}(\xi)}{d\xi} \right| \delta^{(2)}[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\xi)] = \\ &= \int_0^{2\pi} d\xi R \delta^{(2)}[\mathbf{x} - (R \cos(\xi), R \sen(\xi))] = \\ &= \int_0^{2\pi} d\xi R \int \mathcal{d}^2 k e^{i\mathbf{k}[\mathbf{x} - (R \cos(\xi), R \sen(\xi))]} = \\ &= \int \mathcal{d}^2 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int_0^{2\pi} d\xi R e^{-i\mathbf{k}(R \cos(\xi), R \sen(\xi))} . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Esta expresión muestra que la transformada de Fourier de $\delta_C(\mathbf{x})$ es,

$$\tilde{\delta}_C(\mathbf{k}) = \int_0^{2\pi} d\xi R e^{-i\mathbf{k}(R \cos(\xi), R \sen(\xi))} = 2\pi R J_0(Rk) . \quad (3.70)$$

Insertando este resultado en (3.62)¹⁰, pasando a coordenadas polares e integrando en la variable angular,

$$\begin{aligned} E_R^{(2)} &= -\frac{\lambda^2}{64} \int d^2l \frac{[2\pi R J_0(Rl)]^2}{l} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l^2}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{\lambda^2}{64} 2\pi R^2 \int_0^\infty dl [J_0(Rl)]^2 \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Por último, con el cambio de variable $\rho = l\sqrt{\theta}$,

$$\begin{aligned} E_R^{(2)} &= -\frac{\lambda^2}{64} 2\pi \frac{R^2}{\sqrt{\theta}} \int_0^\infty d\rho \left[J_0 \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \rho \right) \right]^2 \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\rho^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{\lambda^2}{64} 2\pi R \frac{R}{\sqrt{\theta}} \frac{1}{\pi^2} H \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \text{con } H \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right) &= 8\pi \left(\Gamma \left(\frac{5}{4} \right) \right)^2 {}_4F_5 \left(\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\}, \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right)^4 \right) + \\ &+ \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right)^2 \pi \left(\Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \right)^2 {}_4F_5 \left(\left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}, \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right)^4 \right) - \\ &- \frac{R}{\sqrt{\theta}} 16 {}_5F_6 \left(\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\}, \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right\}, \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right)^4 \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde ${}_mF_n(\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_n\}, x)$ son funciones hipergeométricas generalizadas. En la Figura 3.3 se representa a H como función de $\frac{R}{\sqrt{\theta}}$.

Se observa aquí que $E_R^{(2)}$ depende de la comparación entre la escala de distancias introducida por la no conmutatividad de las coordenadas ($\sqrt{\theta}$) y una distancia que caracteriza a la curva en la que se imponen las condiciones de borde (en este caso R), como se esperaba al principio del capítulo. En particular, cuando estas cantidades son del mismo orden, es decir $\frac{R}{\sqrt{\theta}} \sim 1$, $E_R^{(2)}$ toma el valor,

$$E_R^{(2)} \approx -\frac{\lambda^2}{64} 2\pi R. \quad (3.74)$$

En el régimen fuertemente no conmutativo, es decir $\frac{R}{\sqrt{\theta}} \rightarrow 0$, $E_R^{(2)}$ tiene el siguiente comportamiento,

$$E_R^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{64} 2\pi R \frac{R}{\sqrt{\theta}} \left\{ \frac{8 \left(\Gamma \left(\frac{5}{4} \right) \right)^2}{\pi} - \frac{16 R}{\pi^2 \sqrt{\theta}} + \frac{\left(\Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \right)^2}{\pi} \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right)^2 + \mathcal{O} \left[\left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \right)^3 \right] \right\}. \quad (3.75)$$

¹⁰Recuérdese (3.60)

A la vista de (3.57) y (3.62), si quisiera evaluarse únicamente la corrección introducida por la no conmutatividad respecto del caso conmutativo, debería calcularse,

$$\Delta E_R^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{64} 2\pi \frac{R^2}{\sqrt{\theta}} \int_0^\infty d\rho \left[J_0 \left(\frac{R}{\sqrt{\theta}} \rho \right) \right]^2 \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\rho^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\rho^2}{2} \right) - 1 \right]. \quad (3.76)$$

Desafortunadamente, esta expresión no ha podido evaluarse de forma analítica, ni tampoco se ha logrado la convergencia con los métodos numéricos empleados¹¹ (*Mathematica*).

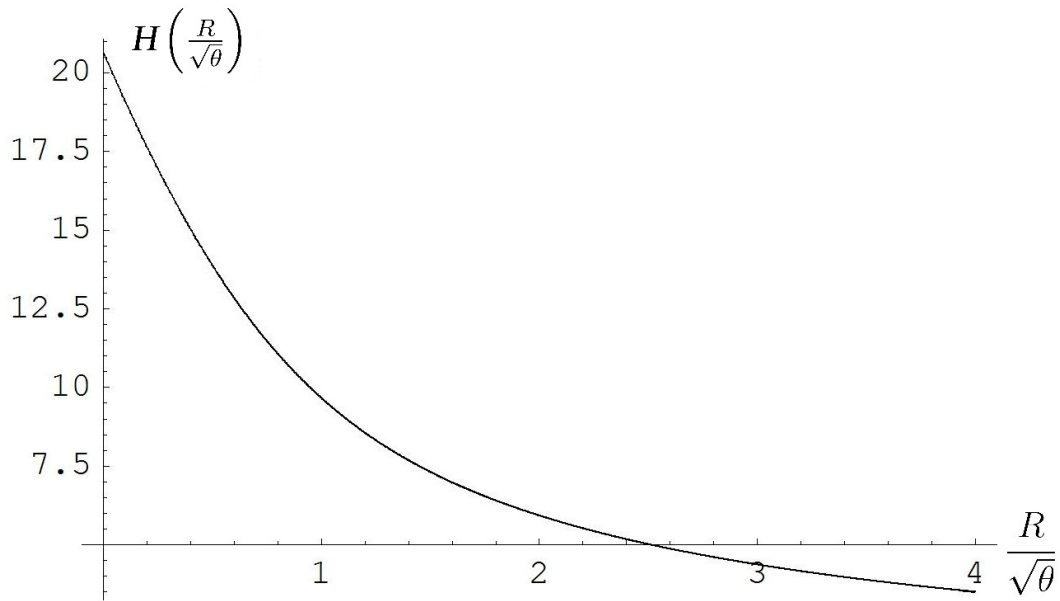


Figura 3.3. Se representa aquí la función H de (3.72) en función de $\frac{R}{\sqrt{\theta}}$.

3.3.5. Aplicación a un borde recto

En el caso de un borde recto, ubicado en $x_2 = a$, la contribución de primer orden a la energía por unidad de longitud del borde será simplemente,

$$\frac{E^{(1)}}{L} = \frac{\lambda}{2} \frac{\Lambda}{4\pi}. \quad (3.77)$$

Por otro lado, para el cálculo del segundo orden, puede procederse como en el caso del borde circular y hallar la transformada de Fourier de la $\delta_C(\mathbf{x})$, que para un borde recto es,

$$\tilde{\delta}_C(\mathbf{k}) = 2\pi\delta(k_1)e^{-ik_2a}. \quad (3.78)$$

A partir de allí, resulta,

¹¹Esta expresión bien podría ser divergente, pero ello tampoco se ha probado.

$$E^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{64} \int \not{d}^2 l \frac{[2\pi\delta(l_1)]^2}{l} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l^2}{2} \right) \right], \quad (3.79)$$

que como es de esperar no depende de la posición a de la recta. Ahora, integrando en l_1 aparecerá un factor divergente que se corresponde con la longitud total del borde a lo largo de x_1 . Dividiendo por ese factor, se obtiene la contribución de segundo orden por unidad de longitud,

$$\frac{E^{(2)}}{L} = -\frac{\lambda^2}{64} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\not{d}l_2}{l_2} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l_2^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l_2^2}{2} \right) \right], \quad (3.80)$$

que es divergente, como podía esperarse dada la extensión infinita de las regiones consideradas. Para evaluar la corrección que aporta el considerar un espacio no conmutativo respecto del caso conmutativo debe evaluarse,

$$\Delta \left(\frac{E^{(2)}}{L} \right) = -\frac{\lambda^2}{64} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\not{d}l_2}{l_2} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l_2^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l_2^2}{2} \right) - 1 \right]. \quad (3.81)$$

Al igual que en el caso del borde circular, no pudo verificarse la convergencia de esta corrección. Sin embargo, en este caso, se puede obtener algo más de información considerando dos bordes rectos separados una distancia a , como se hará a continuación, y tender luego $a \rightarrow 0$.

3.3.6. Aplicación a dos bordes rectos paralelos

Considerando ahora dos bordes rectos paralelos, uno en $x_2 = a$ y otro en $x_2 = 0$, la transformada de Fourier de la curva será,

$$\tilde{\delta}_C(\mathbf{k}) = 2\pi\delta(k_1) [1 + e^{-ik_2 a}]. \quad (3.82)$$

Entonces, en este caso, la contribución de segundo orden en λ a la energía es,

$$E_a^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{64} \int \not{d}^2 l \frac{[2\pi\delta(k_1) (1 + e^{-ik_2 a})]^2}{l} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l^2}{2} \right) \right]. \quad (3.83)$$

Nuevamente, luego de integrar en l_1 conviene considerar una contribución por unidad de longitud,

$$\frac{E_a^{(2)}}{L} = -\frac{\lambda^2}{64} \int_{-\infty}^{\infty} \not{d}l_2 \frac{2(1 + \cos(l_2 a))}{l_2} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l_2^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l_2^2}{2} \right) \right], \quad (3.84)$$

que es divergente como en el caso de un único borde recto. Aquí la corrección del caso no conmutativo respecto del conmutativo se calcula como,

$$\Delta \left(\frac{E_a^{(2)}}{L} \right) = -\frac{\lambda^2}{64} \int_{-\infty}^{\infty} \not{d}l_2 \frac{2(1 + \cos(l_2 a))}{l_2} \left[{}_0F_1 \left(1, \frac{\theta^2 l_2^4}{16} \right) - L_0 \left(\frac{\theta l_2^2}{2} \right) - 1 \right]. \quad (3.85)$$

Si bien en este caso no pudo verificarse la convergencia, sí se pudo calcular la derivada de esta expresión respecto de a , siendo dicha derivada nula. Es decir que la corrección es independiente de a , por lo que será igual que en el caso de un único borde recto y a su vez igual al caso $a \rightarrow \infty$. Es razonable esperar entonces que esta corrección, y la correspondiente a un borde recto, sean nulas¹².

3.4. Conclusiones

En este capítulo se estudió la imposición de condiciones de borde y algunos de sus efectos en una teoría escalar real no conmutativa, sin autointeracción, en 2+1 dimensiones. Se comenzó por introducir estas condiciones a partir de una interacción específica con el borde, de la forma $S_B = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \phi(x_0, \mathbf{x}) \star \delta_C(\mathbf{x}) \star \phi(x_0, \mathbf{x})$. Luego se calculó el propagador para esta teoría entre bordes rectos paralelos. A continuación, se estudió el desarrollo perturbativo en λ de la energía de vacío del campo con el borde hasta el tercer orden, observando que recién a partir del segundo orden se mostraban efectos no conmutativos. A cada orden se pudo separar en la energía un factor dependiente de las características de la curva asociada al borde, de otro propio a dicho orden del desarrollo e independiente del borde bajo consideración. Estos factores independientes de la curva sólo pudieron evaluarse hasta el segundo orden. Por último, se procedió a la aplicación de este desarrollo para un borde circular y luego uno y dos bordes rectos. Para el borde circular, se pudieron calcular las contribuciones a la energía hasta el segundo orden, pero no se pudo garantizar la convergencia de las integrales necesarias para evaluar la corrección no conmutativa respecto del caso conmutativo. Para los bordes rectos, las contribuciones de cada orden a la energía son divergentes. Nuevamente no se pudo verificar la convergencia de las integrales necesarias para calcular las correcciones respecto del caso conmutativo para estos bordes, pero se argumentó que las mismas debieran ser nulas. Es interesante comentar, en relación a esto último, que en trabajos previos [19] se encontró para el campo escalar complejo, también sobre un plano no conmutativo (más el tiempo conmutativo) con bordes rectos paralelos con ciertas condiciones de borde similares a las analizadas aquí, que la energía de vacío total (sin desarrollar en λ) no cambia respecto del caso conmutativo al introducir no conmutatividad. Esto se relaciona con el hecho de que sólo una de las coordenadas está involucrada en la definición del borde.

¹²Es importante decir aquí que para ambas correcciones el programa empleado para los cálculos arrojó el resultado 0 si bien advirtió no poder verificar la convergencia de las integrales.

ACCIÓN EFECTIVA PARA SOLUCIONES DE VACÍO PARTICULARES

En este capítulo se buscará calcular la acción efectiva cuántica, a orden \hbar en una expansión semi-clásica, para distintas teorías escalares en configuraciones particulares del campo. Estas configuraciones corresponderán a ciertas soluciones de vacío no triviales halladas por otros autores [26]. Las teorías escalares a considerar contarán con un término de Grosse-Wulkenhaar en la acción, que permite la renormalización de las mismas dando solución a las ya mencionadas divergencias UV/IR [11]. Para el estudio de las mismas será conveniente introducir una base matricial en la que desarrollar los campos. Dicha base se presentará a continuación. Luego se introducirán explícitamente los modelos y las soluciones a considerar y se procederá al cálculo de la acción efectiva.

En todo este capítulo se considerarán únicamente dos coordenadas espaciales (más eventualmente una temporal) con relaciones de conmutación dadas por (2.2), como en los capítulos anteriores.

4.1. Base matricial

Con el objetivo de simplificar el cálculo del producto de Moyal entre campos (funciones), resulta conveniente el desarrollar los mismos en una base matricial cuyos elementos se multipliquen entre sí como lo harían los operadores de la forma $|m\rangle\langle n|$ de un oscilador armónico, con $|m\rangle$ y $|n\rangle$ autoestados de número. Al hacer esto, el producto de Moyal entre campos se reducirá a un producto de tipo matricial. Esto ayudará posteriormente en el tratamiento de la acción en teorías escalares con términos de Grosse-Wulkenhaar. En esta sección se construirá la mencionada base siguiendo los pasos de [11].

Antes de proceder, conviene mencionar que si bien aquí se trabajará únicamente con dos coordenadas espaciales, el desarrollo en una base matricial puede generalizarse a un número mayor de dimensiones [27].

Para construir la base matricial se puede comenzar introduciendo las siguientes funciones de creación y destrucción,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2) , \quad \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - ix_2) , \quad (4.1)$$

que puede invertirse dando,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \bar{a}) , \quad x_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{a} - a) , \quad (4.2)$$

y permite calcular las derivadas sobre funciones complejas,

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2) , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2) . \quad (4.3)$$

Entonces, dada una función compleja sobre el plano, f , al aplicar a la misma a o \bar{a} a través del producto de Moyal se obtiene¹,

$$\begin{aligned} (a \star f)(x) &= a(x)f(x) + \frac{\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(x) , & (f \star a)(x) &= a(x)f(x) - \frac{\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(x) \\ (\bar{a} \star f)(x) &= \bar{a}(x)f(x) - \frac{\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial a}(x) , & (f \star \bar{a})(x) &= \bar{a}(x)f(x) + \frac{\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial a}(x) . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Considérese en particular la función gaussiana, f_0 , dada por,

$$f_0(x) = 2e^{-\frac{1}{\theta}(x_1^2 + x_2^2)} , \quad (4.5)$$

que cumple la propiedad de que,

$$(f_0 \star f_0)(x) = f_0(x) . \quad (4.6)$$

A partir de (4.4), (4.3) y (4.5) puede verse que²,

$$\bar{a}^{\star m} \star f_0 = 2^m \bar{a}^m f_0 , \quad f_0 \star a^{\star n} = 2^n a^n f_0 , \quad (4.7)$$

y

$$\begin{aligned} a \star \bar{a}^{\star m} \star f_0 &= \begin{cases} m\theta(\bar{a}^{\star(m-1)} \star f_0) & \text{para } m > 0 \\ 0 & \text{para } m = 0 \end{cases} \\ f_0 \star a^{\star n} \star \bar{a} &= \begin{cases} n\theta(f_0 \star a^{\star(n-1)}) & \text{para } n > 0 \\ 0 & \text{para } n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se pueden entonces definir funciones f_{mn} a través de,

$$f_{mn} = \frac{1}{\sqrt{m!n!\theta^{m+n}}} \bar{a}^m \star f_0 \star a^{\star n} , \quad (4.9)$$

¹Aquí, como antes, $\theta = \theta_{12} = -\theta_{21}$

²Aquí se utiliza la notación $h^{\star m} = h \star h \star h \star \dots \star h$ (m veces).

que, en vista de (4.8) y (4.6), se multiplicarán entre sí como se pretendía,

$$(f_{mn} \star f_{kl})(x) = \delta_{nk} f_{ml}(x) . \quad (4.10)$$

Entonces, desarrollando un par de campos ϕ y χ en la base de funciones f_{mn} como $\phi(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \phi_{mn} f_{mn}(x)$ y $\chi(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \chi_{mn} f_{mn}(x)$, con $\phi_{mn}, \chi_{mn} \in \mathbb{C}$, su producto de Moyal resulta,

$$(\phi \star \chi)(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (\phi\chi)_{mn} f_{mn}(x), \quad \text{con} \quad (\phi\chi)_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{mk} \chi_{kn} , \quad (4.11)$$

De esta manera el producto de Moyal se ha reducido a un producto matricial como se pretendía.

Es conveniente mencionar que para que una función $g(x)$ desarrollada en la base matricial sea cualquier función compleja sobre el plano no conmutativo, los elementos de la secuencia de coeficientes $\{g_{mn}\}$ deben decaer rápidamente [11].

4.2. Cálculo de la acción efectiva

Se desea calcular la acción efectiva a orden \hbar en una expansión semiclásica alrededor de soluciones de vacío particulares para distintos modelos escalares. De hecho, dado que la acción efectiva a orden árbol no es más que la acción clásica, se calcularán directamente las correcciones cuánticas de orden \hbar .

Se utilizará entonces el método de *steepest-descent* [23] [28]. Es decir, dada una acción euclídea $S(\phi)$ para un campo escalar real, que da lugar a una funcional generatriz³,

$$\mathcal{Z}(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}[S(\phi)-J\phi]} , \quad (4.12)$$

se puede expandir el campo alrededor de una solución clásica, ϕ_c , como,

$$\phi = \phi_c + \sqrt{\hbar} \chi . \quad (4.13)$$

Esto dará lugar al desarrollo,

$$S(\phi) - J\phi = S(\phi_c) - J\phi_c + \frac{\hbar}{2} \int dx dy \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right]_{\phi=\phi_c} \chi(x)\chi(y) + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}) . \quad (4.14)$$

Reteniendo únicamente los términos hasta orden \hbar esto dará una funcional generatriz gaussiana,

³Aquí se utilizará la notación $J\phi = \int dx J(x)\phi(x)$ por brevedad y porque se pretende únicamente recordar de manera esquemática un método conocido.

$$\mathcal{Z}(J) \sim \mathcal{N} \mathcal{Z}_0(J) \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{1}{2} \int dx dy \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right]_{\phi=\phi_c} \chi(x)\chi(y)}, \quad (4.15)$$

donde $\mathcal{Z}_0(J)$ es la contribución de los términos de orden cero en (4.14). Esta gaussiana puede integrarse, como es habitual, obteniéndose⁴,

$$\mathcal{Z}(J) \sim \mathcal{N} \mathcal{Z}_0(J) \left[\det \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right]_{\phi=\phi_c} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

A partir de aquí puede calcularse la generatriz de gráficos conectados como $\mathcal{W}(J) = \hbar \ln \mathcal{Z}(J)$ y luego la acción efectiva, $\Gamma[\phi]$, mediante una transformada de Legendre de $\mathcal{W}(J)$. De allí resulta la corrección de orden \hbar a la acción efectiva,

$$\Gamma_1[\phi] = \frac{1}{2} tr \ln \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right]_{\phi=\phi_c}. \quad (4.17)$$

Esta corrección es la cantidad que interesará calcular en el resto del capítulo. En lo que sigue se eliminará el subíndice 1, pero debe recordarse que lo que se calcula es esta corrección y no la acción efectiva completa.

4.2.1. Campo escalar real en el plano

En este primer caso se considerará un campo escalar real masivo, ϕ , sobre el plano no conmutativo, sin coordenada temporal. Se dotará a este campo de una autointeracción ϕ^4 y, como se había mencionado previamente, se considerará en la acción un término armónico de Grosse-Wulkenhaar. La acción a considerar es entonces,

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \star \partial_i \phi + 2\Omega^2 ((\theta^{-1})_{ij} x_j \phi) \star ((\theta^{-1})_{ik} x_k \phi) + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right), \quad (4.18)$$

donde θ^{-1} es la matriz inversa a la que determina las relaciones de conmutación entre coordenadas, Ω es un parámetro que caracteriza al término de Grosse-Wulkenhaar y μ_0 es el parámetro de masa de la teoría.

Ahora, desarrollando el campo en la base matricial,

$$\phi(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \phi_{mn} f_{mn}(x) \quad (4.19)$$

y utilizando las distintas definiciones y propiedades vistas para la base matricial, esta acción puede llevarse a la forma[11],

⁴ \mathcal{N} se elige de manera que $\mathcal{Z}(0) = 1$

$$S = 2\pi\theta \sum_{m,n,k,l} \left(\frac{1}{2} \phi_{mn} G_{mn;kl} \phi_{kl} + \frac{\lambda}{4!} \phi_{mn} \phi_{nk} \phi_{kl} \phi_{lm} \right), \quad (4.20)$$

donde se ha utilizado también que,

$$\int d^2x f_{mn}(x) = 2\pi\theta \delta_{mn}, \quad (4.21)$$

lo cual se deduce de (4.6), (4.8) y las propiedades de traza del producto de Moyal integrado.

En esta expresión para la acción, $G_{mn;kl}$ proviene de la parte cuadrática correspondiente a la acción libre y el término de Grosse-Wulkenhaar y tiene la siguiente forma explícita,

$$G_{mn;kl} = (\mu_0^2 + (n+m+1)\mu^2) \delta_{nk} \delta_{ml} - \mu^2 \sqrt{\kappa(n+1)(m+1)} \delta_{n+1,k} \delta_{m+1,l} - \mu^2 \sqrt{\kappa n m} \delta_{n-1,k} \delta_{m-1,l}, \quad (4.22)$$

con las definiciones $\mu^2 = \frac{2(1+\Omega^2)}{\theta}$ y $\sqrt{\kappa} = \frac{1-\Omega^2}{1+\Omega^2}$.

Es evidente que $G_{mn;kl}$ se simplifica notablemente si se considera $\Omega^2 = 1$, motivo por el cual se utilizará dicho valor en lo que sigue. Cuando se elige este valor de Ω se dice que el sistema se encuentra en el punto autodual, por su propiedad de invariancia ante la dualidad de Langmann-Szabo [29]. Con esta elección es entonces,

$$G_{mn;kl} = \left[\mu_0^2 + (n+m+1) \frac{4}{\theta} \right] \delta_{nk} \delta_{ml}. \quad (4.23)$$

Se puede ahora, a partir de (4.20) calcular $\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_{mn} \delta\phi_{kl}}$ y luego $\Gamma(\phi)$, resultando,

$$\Gamma[\phi] = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_{mn} \delta\phi_{kl}} \right]_{\phi=\phi_c} = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[2\pi\theta \left(G_{mn;kl} + \frac{\lambda}{2} \phi_{nk} \phi_{lm} \right) \right]_{\phi=\phi_c}. \quad (4.24)$$

Es este el momento de elegir una configuración particular, ϕ_c . De acuerdo con las soluciones encontradas en [26], se puede comenzar considerando una configuración de la forma⁵⁶,

$$\phi_c(x) = a_{m_0} f_{m_0 m_0}(x) \quad \Rightarrow \quad \phi_{mn} = a_{m_0} \delta_{m m_0} \delta_{n m_0}, \quad a_{m_0} \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Insertando esta solución en (4.24) se obtiene,

⁵Vale mencionar que el coeficiente a_{m_0} debe cumplir ciertas condiciones para que este sea efectivamente un estado de vacío, las cuales pueden consultarse en [26]. Se asumirá aquí y en lo que sigue que dichas condiciones sobre los coeficientes se cumplen.

⁶En lo que resta de este capítulo se dejará de emplear la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos y se sumará únicamente cuando se lo indique de forma explícita.

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi] &= \frac{1}{2} tr \ln \left[2\pi\theta \left(\mu_0^2 + (n+m+1)\frac{4}{\theta} \right) \delta_{nk}\delta_{ml} + 2\pi\theta \frac{\lambda}{2} a_{m_0}^2 \delta_{nm_0} \delta_{km_0} \delta_{mm_0} \delta_{lm_0} \right] = \\
&= \frac{1}{2} tr \ln \left\{ 2\pi\theta \left[\left(\mu_0^2 + (n+m+1)\frac{4}{\theta} \right) + \frac{\lambda}{2} a_{m_0}^2 \delta_{km_0} \delta_{lm_0} \right] \delta_{nk}\delta_{ml} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \ln \left\{ 2\pi\theta \left[\left(\mu_0^2 + (n+m+1)\frac{4}{\theta} \right) + \frac{\lambda}{2} a_{m_0}^2 \delta_{km_0} \delta_{lm_0} \right] \right\} \delta_{nk}\delta_{ml}\delta_{mk}\delta_{nl} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_m \ln \left\{ 2\pi\theta \left[\left(\mu_0^2 + (2m+1)\frac{4}{\theta} \right) + \frac{\lambda}{2} a_{m_0}^2 \delta_{mm_0} \right] \right\} . \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Se puede considerar también una solución más general, de la forma,

$$\phi_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_{nn}(x) \quad \Rightarrow \quad \phi_{mn} = a_n \delta_{mn}, \quad a_n \in \mathbb{R} . \tag{4.27}$$

Con una configuración de este tipo se tiene,

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi] &= \frac{1}{2} tr \ln \left[2\pi\theta \left(\mu_0^2 + (n+m+1)\frac{4}{\theta} \right) \delta_{nk}\delta_{ml} + 2\pi\theta \frac{\lambda}{2} a_n a_m \delta_{nk}\delta_{ml} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_m \ln \left\{ 2\pi\theta \left[\left(\mu_0^2 + (2m+1)\frac{4}{\theta} \right) + \frac{\lambda}{2} a_m^2 \right] \right\} . \tag{4.28}
\end{aligned}$$

En ambos casos, la evaluación de las series resultantes requiere de la determinación de valores para los coeficientes de las configuraciones propuestas, lo cual puede hacerse a partir de las condiciones que los mismos deben satisfacer para que estas configuraciones sean soluciones[26]. Esto, sin embargo, no parece ayudar finalmente en el cálculo de las series ni cambia sustancialmente sus formas, por lo que no se avanzará aquí en ese sentido.

4.2.2. Campo escalar real en 2+1 dimensiones

En esta sección se considerará el mismo modelo de la anterior, agregando ahora una coordenada temporal conmutativa. La acción, considerando al campo ya desarrollado en la base matricial, será entonces,

$$S = 2\pi\theta \sum_{m,n,k,l} \left(\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \phi_{mn}(t_1) G_{mn;kl}(t_1, t_2) \phi_{kl}(t_2) + \frac{\lambda}{4!} \int dt \phi_{mn}(t) \phi_{nk}(t) \phi_{kl}(t) \phi_{lm}(t) \right) , \tag{4.29}$$

donde ahora es,

$$G_{mn;kl}(t_1, t_2) = \left(-\partial_t^2 + \mu_0^2 + (n+m+1)\frac{4}{\theta} \right) \delta_{nk}\delta_{ml}\delta(t_1 - t_2) . \tag{4.30}$$

Procediendo como antes,

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi] &= \frac{1}{2}tr \ln \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_{kl}(t_2)\delta\phi_{mn}(t_1)} \right]_{\phi=\phi_c} = \\ &= \frac{1}{2}tr \ln \left[2\pi\theta \left(G_{mn;kl}(t_1 - t_2) + \frac{\lambda}{2}\phi_{nk}(t_1)\phi_{lm}(t_2)\delta(t_1 - t_2) \right) \right]_{\phi=\phi_c} .\end{aligned}\quad (4.31)$$

Como configuración particular, puede elegirse la misma que se adoptó inicialmente en la sección anterior, donde ahora se considera, por generalidad, una posible dependencia temporal de los coeficientes,

$$\phi_c(\mathbf{x}, t) = a_{m_0}(t)f_{m_0m_0}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \phi_{mn}(t) = a_{m_0}(t)\delta_{mm_0}\delta_{nm_0}, \quad a_{m_0}(t) \in \mathbb{R} . \quad (4.32)$$

Entonces, para esta configuración,

$$\Gamma[\phi] = \frac{1}{2}\sum_m \int dt \ln \left[2\pi\theta \left(-\partial_t^2 + \mu_0^2 + (2m+1)\frac{4}{\theta} + \frac{\lambda}{2}a_{m_0}^2(t)\delta_{mm_0} \right) \right] . \quad (4.33)$$

Nuevamente, de manera análoga a lo que se hizo anteriormente, puede considerarse la configuración más general,

$$\phi_c(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)f_{nn}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \phi_{mn}(t) = a_n(t)\delta_{mn}, \quad a_n(t) \in \mathbb{R} , \quad (4.34)$$

que lleva a,

$$\Gamma[\phi] = \frac{1}{2}\sum_m \int dt \ln \left[2\pi\theta \left(-\partial_t^2 + \mu_0^2 + (2m+1)\frac{4}{\theta} + \frac{\lambda}{2}a_m^2(t) \right) \right] . \quad (4.35)$$

4.2.3. Campo escalar complejo en 2+1 dimensiones

En esta sección se considerará un campo escalar complejo masivo, sobre el mismo espacio de 2+1 dimensiones considerado en la sección anterior. La acción euclídea a considerar para este campo será la utilizada en [30], a saber,

$$S = \int d^3x \left(\partial_i\phi^*\partial_i\phi + \Omega^2\phi^* \star ((\theta^{-1})_{\alpha\mu}x_\mu) \star \phi \star ((\theta^{-1})_{\alpha\gamma}x_\gamma) + \mu_0^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi^* \star \phi \star \phi^* \star \phi \right) , \quad (4.36)$$

donde se suma sobre índices repetidos, yendo el índice i sobre las 3 coordenadas y los índices griegos únicamente sobre las coordenadas espaciales. Es importante notar que además del término de autointeracción cuártico propuesto en esta acción existe otro posible⁷, que surge de multiplicar

⁷Cualquier otro es equivalente a uno de estos dos por la propiedad cíclica de la integral.

los campos en otro orden, cuyo integrando es $\phi^* \star \phi^* \star \phi \star \phi$. Para este último, sin embargo, no ha sido posible demostrar la renormalizabilidad [31] y es por ello que no se lo considerará.

Desarrollando los campos en la base matricial y escogiendo el punto autodual (que en este caso resulta ser $\Omega^2 = 2$), la acción puede reescribirse como,

$$S = 2\pi\theta \sum_{m,n,k,l} \left(\int dt_1 dt_2 \phi_{mn}^*(t_1) G_{mn;kl}(t_1, t_2) \phi_{kl}(t_2) + \frac{\lambda}{4!} \int dt \phi_{ml}^* \phi_{mn} \phi_{kn}^* \phi_{kl} \right) , \quad (4.37)$$

con

$$G_{mn;kl}(t_1, t_2) = \left(-\partial_t^2 + \mu_0^2 + (n + m + 1) \frac{2}{\theta} \right) \delta_{mk} \delta_{nl} \delta(t_1 - t_2) . \quad (4.38)$$

Para el cálculo de la corrección a la acción efectiva a orden \hbar se puede utilizar también el método de *steepest-descent* esquematizado anteriormente, partiendo en este caso de la generatriz,

$$\mathcal{Z}(J, J^*) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-\frac{1}{\hbar} [S(\phi, \phi^*) - J^* \phi - J \phi^*]} . \quad (4.39)$$

Desarrollando en este caso ambos campos alrededor de soluciones clásicas, ϕ_c y ϕ_c^* , y recordando que al integrar una gaussiana en campos complejos el exponente en el determinante análogo al de (4.16) es (-1) en lugar de $(-\frac{1}{2})$ [23], se llega a que,

$$\Gamma[\phi, \phi^*] = tr \ln \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x) \delta\phi^*(y)} \right]_{\phi=\phi_c, \phi^*=\phi_c^*} . \quad (4.40)$$

Considerando los campos desarrollados en la base matricial y la acción (4.37) resulta,

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi, \phi^*] &= tr \ln \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_{kl}(t_2) \delta\phi_{mn}^*(t_1)} \right]_{\phi=\phi_c, \phi^*=\phi_c^*} = \\ &= tr \ln \left[2\pi\theta \left[G_{mn;kl}(t_1, t_2) + \frac{2\lambda}{4!} \sum_r (\phi_{rl}^* \phi_{rn} + \phi_{kr}^* \phi_{mr}) \delta(t_1 - t_2) \right] \right]_{\phi=\phi_c, \phi^*=\phi_c^*} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se puede considerar ahora una configuración similar a las utilizadas anteriormente,

$$\begin{aligned} \phi_c(\mathbf{x}, t) &= a_{m_0}(t) f_{m_0 m_0}(\mathbf{x}) &\Rightarrow & \phi_{mn}(t) = a_{m_0}(t) \delta_{mm_0} \delta_{nm_0} , \\ \phi_c^*(\mathbf{x}, t) &= a_{m_0}^*(t) f_{m_0 m_0}(\mathbf{x}) &\Rightarrow & \phi_{mn}^*(t) = a_{m_0}^*(t) \delta_{mm_0} \delta_{nm_0} , \end{aligned} \quad (4.42)$$

con $a_{m_0}(t) \in \mathbb{C}$. Con esta configuración se tiene,

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi, \phi^*] &= tr \ln 2\pi\theta \left[\left(-\partial_t^2 + \mu_0^2 + (n + m + 1) \frac{2}{\theta} \right) \delta_{mk} \delta_{nl} + \frac{2\lambda}{4!} |a(t_1)|^2 (\delta_{nl} \delta_{lm_0} + \delta_{mk} \delta_{km_0}) \right] \times \\ &\times \delta(t_1 - t_2) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

En este caso, la estructura de la parte de interacción no permite factorizar las deltas de Kronecker en los índices discretos de la base matricial. Se puede entonces, ingenuamente, buscar diagonalizar el operador correspondiente a esta parte con la esperanza de que esto permita diagonalizar también la parte cuadrática (es decir, la que proviene de la parte libre de la acción y el término de Grosse-Wulkenhaar). Desafortunadamente, este no es el caso y se requiere una diagonalización del operador completo, que no ha sido llevada a cabo. Se presentará aún así la diagonalización de la parte de interacción, dado que esta podría ser útil para cálculos de teoría de campos en la red o en régimen de acoplamiento fuerte[32].

Se buscarán entonces los autovectores y autovalores de $\delta_{nl}\delta_{lm_0} + \delta_{mk}\delta_{km_0} \equiv T$. La condición de autovector es,

$$(T\phi)_{mn} = \alpha\phi_{mn} \quad , \quad (4.44)$$

con α el autovalor. Por otro lado, al evaluar la acción de T sobre un vector cualquiera se tiene,

$$(T\phi)_{mn} = a\delta_{nm_0} + b\delta_{mm_0}, \quad \text{con} \quad a = \sum_{k=0}^N \phi_{km_0}, \quad b = \sum_{l=0}^N \phi_{m_0l} \quad , \quad (4.45)$$

donde N actúa como un *cutoff* en los índices discretos de la base matricial. Es conveniente en este punto buscar un par de vectores ortonormales, η y ξ , que sean combinación de δ_{nm_0} y δ_{mm_0} y hagan las veces de base de la imagen de T . Es sencillo ver que los vectores de componentes,

$$\eta_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}}\delta_{nm_0} \quad \text{y} \quad \xi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N - \frac{1}{N}}} \left(\delta_{mm_0} - \frac{1}{N}\delta_{nm_0} \right) \quad , \quad (4.46)$$

son ortogonales entre sí y de módulo unitario. Esto permite reescribir (4.45) como,

$$(T\phi)_{mn} = \left(a\sqrt{N} + \frac{b}{\sqrt{N}} \right) \eta_{mn} + b\sqrt{N - \frac{1}{N}} \xi_{mn} \quad . \quad (4.47)$$

Ahora, escribiendo ϕ como combinación lineal de η y ξ , $\phi = c\eta + d\xi$, pueden calcularse los coeficientes a y b ,

$$a = c\sqrt{N} \quad \text{y} \quad b = \frac{c}{\sqrt{N}} + d\sqrt{1 - \frac{1}{N}} \quad . \quad (4.48)$$

Teniendo en cuenta esto, igualando (4.47) con la condición de autovector (4.44) y recordando que η y ξ son ortogonales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} c(N + \frac{1}{N} - \alpha) + d\sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} = 0 \\ c\sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} + d(N - \frac{1}{N} - \alpha) = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

De aquí resultan los autovalores $\alpha = \frac{N+1}{2}$ y $\alpha = \frac{N-1}{2}$. Si se desean conocer explícitamente los autovectores, es sencillo reemplazar cada autovalor en (4.49) y resolver para c y d .

4.3. Conclusiones

En este capítulo se han calculado las correcciones a un lazo a la acción efectiva para distintas configuraciones de vacío no triviales en teorías escalares no conmutativas, llegando a expresiones en términos de series e integrales para varias de ellas.

Todas estas correcciones tienen la forma $\sim tr \ln(G + F_c)$, donde G representa la parte libre y F_c es la parte de interacción evaluada en una configuración particular. Un camino posible a seguir a partir de aquí sería el de invertir $(G + F_c)$ con la intención de elaborar un desarrollo en derivadas para teorías no conmutativas equivalente al que se plantea en [33] para el caso conmutativo, y evaluar así contribuciones de orden superior. Brevemente, y de manera esquemática, la idea en el caso conmutativo consiste en agregar una fluctuación al campo por encima de la configuración de vacío, pasando de $tr \ln(G + F_c)$ a $tr \ln(G + F_c + \tilde{F})$, donde \tilde{F} es la parte de interacción evaluada en la fluctuación. Esto puede reescribirse como,

$$tr \ln(G + F_c + \tilde{F}) = tr \ln(G + F_c) + tr \ln(1 + (G + F_c)^{-1} \tilde{F}) , \quad (4.50)$$

y luego desarrollar el logaritmo. El primer término en este desarrollo es la corrección ya calculada. Los siguientes serán de la forma $tr(G + F_c)^{-1} \tilde{F} \dots (G + F_c)^{-1} \tilde{F}$. Para calcular estas trazas deben utilizarse relaciones de conmutación que introducen derivadas del campo; de allí el nombre de desarrollo en derivadas.

En esta tesis se han estudiado distintos aspectos de las teorías no conmutativas, especialmente las teorías de campos escalares sobre el plano no conmutativo más eventualmente el tiempo conmutativo.

Luego de motivar el estudio de las teorías no conmutativas en general y presentar un ejemplo en el cual la no conmutatividad aparece como una descripción efectiva en cierto límite, se observó que podría ser interesante estudiar la descripción de teorías de campos no conmutativas desde un sistema rotante. Se piensa que esto podría tener efectos sobre la renormalizabilidad de estas teorías. En este sentido, se señaló que el estudio de la introducción de condiciones de borde en teorías de campos no conmutativas podría ser un paso útil para una eventual imposición de una rotación al sistema.

A continuación, se sentaron las herramientas básicas para el estudio de teorías de campos no conmutativas y se analizó en particular la teoría para el campo escalar real en 2+1 dimensiones con autointeracción ϕ^4 . Utilizando este ejemplo se introdujo la problemática de la mezcla UV/IR, un problema típico que afecta a la renormalización de este tipo de teorías. Se observó que, en vista de que la mezcla UV/IR relaciona el comportamiento del campo a cortas distancias con el comportamiento del mismo a largas distancias, puede ser interesante el estudio de estas teorías en volúmenes finitos.

En consideración de esto y de lo dicho respecto de teorías en sistemas rotantes, se discutió luego la implementación de condiciones de borde (en particular condiciones tipo Dirichlet) en teorías escalares no conmutativas y se calculó el propagador para el campo escalar real entre bordes rectos paralelos. Siguiendo con el estudio de las condiciones de borde, ahora para una curva de forma arbitraria, \mathcal{C} , se realizó un desarrollo de la energía de vacío en la constante λ que define la intensidad del acoplamiento entre el campo y el borde. Se analizaron los primeros tres términos de este desarrollo, logrando aislar en los mismos una parte dependiente de la forma de \mathcal{C} de otro propio del desarrollo e independiente de la curva considerada. Se aplicó este desarrollo, a modo de ejemplos, a un borde circular, un borde recto y dos bordes rectos paralelos.

Por último, se consideraron teorías escalares reales y complejas, con un término de Grosse-Wulkenhaar en el punto autodual, que soluciona el problema de la mezcla UV/IR, y se calcularon las correcciones a un lazo a la acción efectiva para ciertas configuraciones particulares del cam-

po. Se mencionó finalmente que invirtiendo los operadores que dan origen a estas correcciones se podría elaborar un desarrollo en derivadas, como el utilizado en teorías conmutativas, que permita explorar contribuciones de orden superior.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a César por guiarme durante el curso de mi Maestría y la escritura de esta tesis, por tenerme paciencia y transmitirme siempre confianza y tranquilidad. Gracias también por las charlas sobre tópicos diversos en nuestras reuniones.

Gracias al Grupo de Partículas por brindar un ambiente ameno y estimulante. Gracias también por enseñarme las materias de mi Maestría, la mayoría de ellas de forma personalizada.

Gracias al Instituto (y su comunidad) por la formación brindada en un lugar tan especial. Gracias al Instituto y Fundación YPF por la beca que me otorgaron durante estos años.

Gracias a mis compañeros de curso: Luis, Jimmy, Rodrigo, Nicolás, Jorge y Lourdes, por el camino compartido juntos en el Instituto y por las reuniones y salidas a cenar. Gracias a Nico y Rodrigo por una amistad que precede a los días del IB, por la preparación para el ingreso al IB y por haber compartido habitaciones conmigo. Gracias a Nico por todas esas horas de preparación de finales, desde Mecánica hasta Campos y, por supuesto, por el trabajo de Efecto Zeeman.

Gracias a Juan Manuel, David y Pablo por las salidas de rosarinos en Bariloche y los buenos momentos compartidos.

Sin dudas no estaría terminando hoy esta tesis sin el apoyo constante y tan presente de mi familia a través de estos años y en todas las empresas de mi vida. Gracias a mis padres, abuelos, hermanas, tíos, primos, tíos abuelos, bisabuela, Pedro, Griselda, Tere, Nelly. Quería dedicarle unas líneas a cada uno, pero se me iría la tesis en agradecimientos. Por ahora tendré que conformarme con decirles que son una familia genial. Gracias por todo lo que me dieron y enseñaron y por estar siempre.

Venir a Bariloche no sólo trajo amigos y compañeros. Aquí también conocí a la mujer que amo y que me hace tan feliz. Gracias Sole por la relación tan perfecta que tenemos, por estar conmigo siempre, desde que me levanto hasta que me voy a dormir, y por todas las cosas geniales que vivimos y que sé que vamos a vivir.

No es sencillo encontrar amigos con los que pueda mantenerse una relación a la distancia con relativamente poco contacto y hablarse cada vez con la familiaridad de haberse visto el día anterior. Tampoco es fácil encontrar gente con cosas tan curiosas para contar y con semejante elocuencia al hacerlo. Gracias Diego por nuestra amistad.

Es importante encontrar compañeros y amigos con los que compartir en el ámbito académico, pero también es importante encontrar amigos con los que compartir otros intereses y buenos momentos, sin los cuales este tiempo en Bariloche hubiese sido indudablemente muy diferente. Gracias a Nacho y Vale, Napo, Ale, Chewy, Gonza, Tito, Cascarón, Carlitos, Fer, Sebas... y gracias especialmente a ElGeneral, Paletas, Hellraiser, Alito, Moloco, Alucard, Titán, Ryan, Nobu, Nandor, PepeGrillo y Belisario.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. S. Snyder, "Quantized Space-Time", Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [2] H. S. Snyder, "The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time", Phys. Rev. 72, 68 (1947).
- [3] M. Wohlgenannt, "Non-Commutative Geometry & Physics", arXiv:hep-th/0602105v1.
- [4] R. J. Szabo, "Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces", arXiv:hep-th/0109162v4.
- [5] A. Connes, "Noncommutative Geometry". Puede descargarse en forma gratuita del sitio oficial del autor <http://www.alainconnes.org/en/>.
- [6] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, "Noncommutative Field Theory", arXiv:hep-th/0106048v4.
- [7] C. D. Fosco, A. López, "Noncommutative effective theory of vortices in a complex scalar field", J. Phys. A 37, 4123 (2004), arXiv:hep-th/0203078v1.
- [8] G. Dunne, R. Jackiw, "'Peierles Substitution' and Chern-Simons Quantum Mechanics", arXiv:hep-th/9204057v1.
- [9] G. V. Dunne, R. Jackiw, C. A. Trugenberger, "'Topological' (Chern-Simons) quantum mechanics", Phys. Rev. D 41, 661 (1990).
- [10] L. Faddeev, R. Jackiw, "Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems", Phys. Rev. 60, 1692 (1988).
- [11] H. Grosse, R. Wulkenhaar, "Renormalisation of ϕ^4 -theory on noncommutative \mathbb{R}^2 in the matrix base", JHEP 0312, 019 (2003), arXiv:hep-th/0307017v1.
- [12] A. Vilenkin, "Quantum field theory at finite temperature in a rotating system", Phys. Rev. D 21, 2260 (1980).
- [13] L. Castellani, "Noncommutative geometry and physics: a review of selected recent results", arXiv:hep-th/0005210v2.
- [14] C. D. Fosco, G. Torroba, "Planar field theories with space-dependent noncommutativity", J. Phys. A 38, 3695 (2005), arXiv:hep-th/0405090v2.
- [15] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, "Noncommutative Perturbative Dynamics", arXiv:hep-th/9912072v2.

- [16] M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, " Comments on Noncommutative Perturbative Dynamics", arXiv:hep-th/0002186v2.
- [17] H. Grosse, R. Wulkenhaar, " Renormalisation of φ^4 -theory on noncommutative \mathbb{R}^4 to all orders", Lett. Math. Phys. 71, 13 (2005), arXiv:hep-th/0403232v1.
- [18] N. Graham, R. L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, O. Schröder, H. Weigel, "The Dirichlet Casimir Problem", Nucl. Phys B 677, 379 (2004), arXiv:hep-th/0309130v1.
- [19] C. D. Fosco, G. A. Moreno, " Casimir effect in 2+1 dimensional noncommutative theories", Phys. Lett. B 659, 901 (2008), arXiv:0711.4272[hep-th].
- [20] C. D. Fosco, P. Scuracchio, "Dirichlet boundary conditions in a noncommutative theory", JHEP 09, 066 (2010).
- [21] L. Mezincescu, "Star operation in Quantum Mechanics", arXiv:hep-th/0007046v2. Esta referencia contiene algunos errores, por lo que es recomendable consultar también [22].
- [22] D. Bigatti, L. Susskind, "Magnetic fields, branes, and noncommutative geometry", Phys. Rev. D 62 066004(2000).
- [23] J. Zinn-Justin, "Quantum Field Theory and Critical Phenomena", Clarendon Press (2002)
- [24] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, " An Introduction to Quantum Field Theory", Perseus Books (1995)
- [25] E. W. Weisstein, " Confluent Hypergeometric Limit Function."From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricLimitFunction.html>
- [26] A. de Goursac, A. Tanasa, J-C. Wallet, "Vacuum configurations for renormalizable non-commutative scalar models", arXiv:0709.3950v1[hep-th].
- [27] P. M. Scuracchio, "Efectos cuánticos en teorías no conmutativas renormalizables", Tesis (Maestría en Ciencias Físicas), San Carlos de Bariloche, Universidad Nacional de Cuyo, Instituto Balseiro, 2010 16p.
- [28] C. Itzykson, J-B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill (1980)
- [29] E. Langmann, R. J. Szabo, "Duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces", Phys. Lett. B 533, 168 (2002), arXiv:hep-th/0202039v2.
- [30] C. D. Fosco, G. A. Moreno, " One-loop effects in a self-dual planar noncommutative theory", JHEP 11, 046 (2007), arXiv:0710.0818[hep-th].
- [31] A. de Goursac, J-C. Wallet, R. Wulkenhaar, "Noncommutative Induced Gauge Theory", Eur. Phys. J. C 51, 977 (2007), arXiv:hep-th/0703075v2.
- [32] J. Smit, "Introduction to Quantum Fields on a Lattice", Cambridge University Press (2002)
- [33] I. J. R. Aitchison, C. M. Fraser, "Derivative expansions of fermion determinants: Anomaly-induced vertices, Goldstone-Wilczek currents, and Skyrme terms", Phys. Rev. D 31, 2605 (1985).