

TESIS DE DOCTORADO EN FÍSICA

**MODELOS DE TEORÍAS DE CAMPOS CON
DIMENSIONES COMPACTAS**

Claudio Ccapa Ttira
Doctorando

Dr. C. D. Fosco
Director

Miembros del Jurado

Dr. J. V. Lolic (Instituto Balseiro)

Dr. F. D. Mazzitelli (Centro Atómico Bariloche - Instituto Balseiro)

Dr. M. J. Sanchez (Centro Atómico Bariloche - Instituto Balseiro)

Dr. N. N. Scoccola (Laboratorio TANDAR - Comisión Nacional de Energía
Atómica)

Febrero de 2011

Grupo de partículas y campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mi padre

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	iv
Abstract	vi
1. Introducción	1
1.1. Teoría de campos a temperatura finita	3
1.1.1. Integrales de camino en mecánica cuántica	4
1.1.2. Formalismo de Matsubara	6
1.2. Efecto Casimir	8
1.3. Dimensiones compactificadas	10
1.4. Organización de la Tesis	11
2. Representación dual de la teoría de campos a temperatura finita	13
2.1. Mecánica cuántica: $0 + 1$ dimensiones	14
2.1.1. Ideas generales	14
2.1.2. Campos auxiliares	17
2.1.3. Funcional a $T > 0$ a partir de $T = 0$	20
2.1.4. Funcional Generatriz	23
2.1.5. Oscilador anarmónico	26
2.2. Campo escalar	27
2.2.1. Función de partición libre	27
2.2.2. Campo interactuante: Teoría no perturbativa	29
2.2.3. Campo interactuante: Teoría perturbativa	31
2.2.4. Funcional generatriz: Campo escalar	34
2.3. Campo de Dirac	35
2.4. Campos de Gauge	37
3. Efecto Casimir	41
3.1. Energía de vacío	41
3.1.1. Dos superficies planas a $T > 0$	47

3.2. No superposición en el efecto Casimir	58
3.2.1. Tres superficies: esferas	61
3.2.2. Desarrollo perturbativo	64
4. Dimensión espacial compactificada	72
4.1. Dimensión extra compactificada	72
4.1.1. Reducción dimensional y teoría efectiva	73
4.1.2. Acción efectiva	75
4.2. Polarización del vacío para fermiones confinados	83
5. Conclusiones	93
Publicaciones asociadas	99
Agradecimientos	100

Resumen

En esta Tesis estudiaremos algunos modelos de teorías de campos con una dimensión compacta y con condiciones de borde no triviales. En el Capítulo 1, presentaremos los aspectos generales de ciertos modelos de teorías de campos con condiciones de borde, que tomaremos en cuenta en nuestra investigación; luego, en los Capítulos 2, 3 y 4 mostraremos los resultados originales de nuestro trabajo.

La teoría de campos a temperatura finita (TCTF), es un prototipo de las teorías de campos con dimensiones compactas. En la formulación de tiempo imaginario de la TCTF, la dimensión temporal se restringe al intervalo de longitud $1/T$, donde T es la temperatura, y los campos bosónicos (fermiónicos) están sujetos a condiciones de borde periódicos (antiperiódicos). Como marco alternativo, en el Capítulo 2, presentamos una nueva representación funcional de la TCTF, la cual se obtiene imponiendo restricciones adecuadas sobre la amplitud de vacío a $T = 0$. Las condiciones de periodicidad (antiperiodicidad) se introducen mediante la inserción de funcionales delta en la representación funcional de la amplitud de vacío, estas se exponencian a través de dos campos auxiliares, cada uno asociado a los campos canónicos conjugados. Esta representación se presenta para los campos escalar, fermiónico y de *gauge*.

En el Capítulo 3, analizamos algunas propiedades del efecto Casimir usando la representación funcional. En primer lugar encontramos una fórmula para la interacción finita de Casimir de $N > 1$ superficies de Dirichlet, sustrayendo los términos infinitos provenientes de las autoenergías y la configuración libre (ausencia de bordes); la expresión final no contiene factores de la métrica que provienen de la geometría de la superficie. Se analiza el caso de dos placas paralelas a temperatura finita incluyendo un término de interacción cuártica. También se analizan las propiedades de no superposición en la interacción de más de dos objetos, mostrando el caso particular de la interacción de tres esferas. En el caso de que las distancias relativas entre los objetos son grandes comparados con sus tamaños, realizamos un desarrollo perturbativo que nos muestra a cada orden las contribuciones del efecto de no superposición, siendo el orden más bajo el término de interacción de pares.

En el Capítulo 4, se abordan dos temas. En el primero, calculamos el tensor de polarización del vacío, evaluando los términos que conservan y violan paridad, para la electrodinámica cuántica en $4 + 1$ dimensiones; presentamos también los resultados

desde el punto de vista de $3+1$ dimensiones. En el segundo, analizamos las propiedades de polarización de vacío de fermiones sin masa confinados entre dos placas paralelas. Se avalúan la corriente y la densidad de carga inducida debido a un campo eléctrico externo constante normal a las placas, encontrando que la carga se distribuye de modo que contraresta al campo eléctrico externo.

Palabras clave: CONDICIONES DE BORDE, DIMENSIÓN COMPACTIFICADA, POLARIZACIÓN DEL VACÍO

Abstract

Field theory models with compact dimensions:

In this Thesis we will study some field theory models with one compact dimension and non trivial boundary conditions. In Chapter 1, we present general aspects of certain kind of field theory models with boundary conditions; later, in Chapters 2, 3 and 4 we show the original results of our work.

Field theory at finite temperature (FTFT) is a prototype of field theories with compact dimensions. In the imaginary time formalism of FTFT, the time dimension is restricted to the interval of length $1/T$, where T is the temperature, and the bosonic (fermionic) field satisfy the periodic (antiperiodic) boundary conditions in the time coordinate. As a alternative model, in Chapter 2, we present a new functional representation of FTFT, which is obtained imposing appropriate restrictions on the euclidean vacuum amplitude at zero temperature. The compact dimension and periodic boundary conditions are introduced by inserting delta functionals, these are exponentiated by two auxiliar fields, each one associated to the canonical conjugate fields (original fields). This new representation is implemented for scalar, fermionic and gauge fields.

In the Chapter 3, we analyze some properties of Casimir effect First, using functional representation, we obtain a finite expression for Casimir interaction of $N > 1$ Dirichlet surfaces, subtracting the divergent quantities like selfenergies and the free field configuration; the final expression contain no explicit factors of the metric that would come from the geometry of surfaces. We analyze the special case of two parallel plates at finite temperature, including a term of quartic interaction. After that, we analyze the non superposition properties of casimir interaction of more than two compact objects, and we show the particular case of three spheres. If the relative distance between objects is greater than its sizes, we perform a perturbative expansion which show us at each order the contributions to non superposition effect, being the first order the term of pairs interactions.

In the chapter 4, we analyze two topics. First, we calculate the vacuum polarization tensor for quantum electrodynamics in 4+1 dimensions, obtaining the conserved and non conserved parity terms of effective action; we present too these results from the point of view of 3+1 dimensions. In the second part, we analyze properties of vacuum

polarization of massless fermions confined to two parallel plates. We evaluate the induced current and density charge due to constant external electric field normal to plates, showing that charge is distributed to counterbalance the electric field.

Keywords: BOUNDARY CONDITIONS, COMPACTIFIED DIMENSION, VACUUM POLARIZATION

Capítulo 1

Introducción

Los modelos de teorías de campos con condiciones de borde no triviales y con dimensiones compactas han sido utilizados para describir una gran variedad de sistemas físicos que van desde los efectos de tamaño finito en los fenómenos críticos de la materia condensada (bajas energías) [1–3], hasta las teorías de unificación de las fuerzas fundamentales en la física de partículas (altas energías) [4–9]. En la materia condensada tenemos efectos interesantes como: el efecto Hall cuántico, el grafeno, los puntos cuánticos, hilos cuánticos, etc. Otros ejemplos son la teoría de transiciones de fase [10, 11], la gravedad clásica y cuántica [12–14], la entropía de los agujeros negros [15], la correspondencia AdS/CFT [16] y el principio holográfico [17, 18]. En el contexto de la teoría de cuerdas, las D-branas como las fronteras naturales para las cuerdas abiertas, tienen efectos interesantes en la teoría [19].

La relevancia de las condiciones de borde también se observa en algunos ejemplos famosos de la teoría cuántica tales como los experimentos de la doble rendija, el efecto de Bohm - Aharonov. Otro fenómeno íntimamente relacionado con las condiciones de borde es el efecto Casimir [20, 21].

La teoría de campos a temperatura finita $T > 0$ (TCTF) puede considerarse como un prototipo de las teorías de campos con dimensiones compactas. Las bases teóricas para un tratamiento sistemático de las TCTF han sido establecidas hace más de 50 años atrás en el trabajo pionero de Matsubara [25] y su generalización para incluir las teorías de campos relativistas [26]. El formalismo de Matsubara (o formalismo de tiempo imaginario), ha sido aplicado con gran éxito para calcular efectos térmicos en escenarios de la física de altas energías [27, 28] y la materia condensada. La importancia crucial de la propiedad de periodicidad (antiperiodicidad) en la coordenada de tiempo imaginario para las funciones de Green bosónicas (fermiónicas) ha dado lugar a que se establezcan conceptos e ideas que originalmente se conocían para la teoría de campos a temperatura cero. Por ejemplo: las identidades de Ward-Takahashi térmicas, el teorema de Goldstone, las relaciones de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) y el grupo

de renormalización a $T > 0$. Además, las nociones de campos de gauge abelianos y no abelianos, con todas sus consecuencias para la física de partículas pueden ser implementadas en el contexto de la TCTF en una forma bastante natural [27–29]. Por otro lado, existen además otros métodos para estudiar las TCTF, que permiten la presencia de las variables de tiempo y de temperatura simultáneamente, llamados formalismos de tiempo real.

Por razones diferentes a las anteriores, en el efecto Casimir deben imponerse también condiciones de borde sobre los campos. En este caso no corresponden a (anti) periodicidad en el tiempo imaginario, sino a condiciones que involucran a los campos y sus derivadas sobre superficies (“espejos”). La imposición de condiciones de borde modifica las fluctuaciones de vacío del sistema y afecta a los valores de expectación de cantidades físicas tales como el tensor de energía momento. En particular, surgen fuerzas de vacío que actúan sobre las superficies donde se imponen las condiciones de borde, éste es el fenómeno conocido como efecto Casimir. Las características de esta fuerza dependen de la naturaleza del campo cuántico, la topología del espacio-tiempo y su dimensión, la geometría de las superficies y la condición de borde que se imponga sobre el campo.

Finalmente, las condiciones de borde no triviales pueden aparecer en dimensiones espaciales extra. La idea de dimensiones extra compactificadas ha sido explorada desde los años 1920, cuando Kaluza [30] y Klein [31] realizaron un intento para unificar la gravitación y el electromagnetismo, extendiendo la Relatividad General a un espacio tiempo de 5 dimensiones ($M^4 \times S^1$). Recientemente se han investigado las consecuencias y predicciones de tales teorías para la física electrodébil, tema que ha atraído interés recientemente gracias a los modelos de Randall Sundrum, donde las dimensiones extra podrían jugar un rol importante en la física a escalas de energía del TeV. Por otro lado, la geometría de las dimensiones extra podría proporcionarnos nuevos métodos para explicar el problema de la jerarquía y las teorías de gravedad en 4 dimensiones.

Los efectos de dimensiones extra compactificadas pueden manifestarse a diferentes escalas, no solamente en escenarios de altas energías; sino también en fenómenos de bajas energías, como la física atómica. Un caso interesante es el de la electrodinámica (QED) en 5 dimensiones. En [32] se han considerado posibles efectos sobre el momento magnético anómalo, aunque tales correcciones sean despreciables para la observación. Otra consecuencia interesante de la posibilidad de la existencia de dimensiones extra podría implicar la violación de la ley de conservación de la carga [33], lo cual entraría en contradicción con los *tests* de QED a bajas energías.

En esta Tesis vamos a abordar el problema del cálculo de observables físicos en diferentes teorías de campos con condiciones de contorno no triviales, teniendo en cuenta los contextos enumerados más arriba, a saber: las teorías de campos a temperatura finita, el efecto Casimir y sus propiedades de no superposición, las consecuencias de

una dimensión extra compactificada sobre QED y la polarización del vacío de fermiones confinados.

Como paso previo al estudio de estos temas, describiremos a continuación los aspectos esenciales de la teoría de campos a temperatura finita, el efecto Casimir y las teorías de campo con dimensiones espaciales compactas.

1.1. Teoría de campos a temperatura finita

Uno de los conceptos fundamentales de la mecánica estadística es la noción de *ensamble*, entendido éste como un conjunto hipotético de sistemas idénticos. En la mecánica estadística del equilibrio tenemos tres tipos de *ensambles*: el **microcanónico**, usado para describir sistemas aislados que poseen una energía fija E , un número fijo de partículas N , y un volumen V ; el *ensamble canónico*, es adecuado para describir un sistema en contacto con un reservorio a temperatura T y que puede intercambiar energía libremente con él, pero el número de partículas y el volumen se mantiene fijos; y finalmente el *ensamble gran canónico*, donde el sistema puede intercambiar tanto partículas y energía con el reservorio, mientras que los valores de la temperatura, el volumen y el potencial químico μ , son constantes.

En los sistemas cuánticos relativistas, donde las partículas pueden ser creadas y destruidas, es más adecuado utilizar el *ensamble gran canónico*. No obstante, se puede pasar de un ensamble al otro realizando una transformada inversa de Laplace en las variables μ y/o en la variable $\beta = 1/T$, según sea el caso.

Consideremos un sistema descrito por el Hamiltoniano \hat{H} y un conjunto de operadores de número \hat{N}_i conservadas ($\hat{}$ indica el carácter de operador). En QED, por ejemplo, la diferencia entre el número de electrones y el número de positrones es una cantidad conservada.

La matriz densidad, $\hat{\rho}$, es el objeto fundamental en la mecánica estadística del equilibrio

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\left(-\beta(\hat{H} - \sum \mu_i \hat{N}_i)\right)}{\mathcal{Z}},$$

ya que permite calcular el valor medio de cualquier observable \hat{A} , como:

$$A = \langle \hat{A} \rangle = \frac{Tr \hat{A} \hat{\rho}}{Tr \hat{\rho}},$$

donde Tr denota la operación de traza, y \mathcal{Z} es la función de partición:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(V, T, \mu_1, \mu_2, \dots) = Tr \exp\left(-\beta(\hat{H} - \sum \mu_i \hat{N}_i)\right). \quad (1.1)$$

El conocimiento de \mathcal{Z} permite obtener todas las propiedades termodinámicas macroscópi-

cas. Por ejemplo, la presión, el número de partículas, la entropía, y la energía, están dadas, en el límite de volumen infinito, respectivamente por:

$$P = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial V}, \quad N_i = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial \mu_i},$$

$$S = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T}, \quad E = -PV + TS + \sum \mu_i N_i.$$

Una vez que la función de partición ha sido evaluada, la energía libre (de Helmholtz) \mathcal{F} está dada por:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}. \quad (1.2)$$

1.1.1. Integrales de camino en mecánica cuántica

Para desarrollar el formalismo funcional de la teoría de campos a $T > 0$, es conveniente considerar primeramente un sistema cuántico independiente del tiempo, con un solo grado de libertad, cuyo hamiltoniano es de la forma $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q})$, es decir no depende explícitamente del tiempo. La amplitud de transición del operador de evolución temporal

$$\hat{U}(t_b, t_a) = e^{-i(t_b - t_a)\hat{H}/\hbar}, \quad (1.3)$$

entre dos estados localizados ($|q_a\rangle$ y $|q_b\rangle$) del sistema, está dada por:

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \langle q_b | \hat{U}(t_b, t_a) | q_a \rangle \quad t_b > t_a, \quad (1.4)$$

donde $|q\rangle$ son las bases del espacio de configuración, que satisfacen las relaciones de completitud y ortogonalidad,

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1, \quad (1.5)$$

$$\langle q_a | q_b \rangle = \delta(q_a - q_b). \quad (1.6)$$

Los $|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar} |q\rangle$ son los elementos de la base rotante y $t_b > t_a$.

En la representación de integrales de camino, la amplitud de transición se puede escribir como:

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} e^{i\mathcal{S}[p,q]/\hbar}, \quad (1.7)$$

donde $\mathcal{S}[p, q]$ es la acción clásica en el formalismo de primer orden, esto es en el espacio de fases $(q(t), p(t))$,

$$\mathcal{S}[p, q] = \int_{t_a}^{t_b} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))]. \quad (1.8)$$

El símbolo primado en la medida de la integral funcional $\mathcal{D}'x$ indica que hay una integral más sobre las p que sobre las q , puesto que en la definición de la integral de camino la medida está dada por el producto infinito de las integrales ordinarias:

$$\int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right]. \quad (1.9)$$

La representación (1.7) tiene una interpretación simple: integrar sobre todos los caminos posibles en el espacio de fases, es decir, sumar sobre todas las historias posibles por las cuales puede evolucionar un sistema físico. Los posibles caminos que aparecen en la integral contribuyen a la suma ponderados por un factor de fase $e^{i\mathcal{S}[p,q]/\hbar}$ y están condicionados por la restricción de adoptar valores determinados en los tiempos inicial, t_a y final, t_b ; es decir, satisfacen condiciones de borde sobre las coordenadas $q(t_b) = q_b$, $q(t_a) = q_a$, mientras que los momentos permanecen sin restricciones. Sin embargo se podría proceder de otra manera, es decir, imponer restricciones sobre los momentos, mientras que las coordenadas permanezcan libres; esto correspondería a trabajar en la representación del operador evolución en el espacio de momentos,

$$\langle p_b, t_b | p_a, t_a \rangle = \int_{p(t_a)=p_a}^{p(t_b)=p_b} \frac{\mathcal{D}'p}{2\pi\hbar} \int \mathcal{D}q e^{\bar{\mathcal{S}}[p,q]/\hbar}, \quad (1.10)$$

donde la acción $\bar{\mathcal{S}}[p, x]$ y la $\mathcal{S}[p, x]$ están relacionadas de la siguiente manera:

$$\bar{\mathcal{S}}[p, q] = \mathcal{S}[p, q] - p_b q_b + p_a q_a. \quad (1.11)$$

Finalmente, es posible encontrar una representación simétrica en p y q [34]; si en lugar de la amplitud, se considera la traza:

$$Z_T(t_b, t_a) = \text{Tr}[e^{-i(t_b-t_a)\hat{H}/\hbar}]. \quad (1.12)$$

En las bases locales, la traza es una integral sobre la amplitud $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$, con $q_a = q_b$, es decir,

$$Z_T(t_b, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_a \langle q_a | e^{-i(t_b-t_a)\hat{H}/\hbar} | q_a \rangle. \quad (1.13)$$

La integral adicional sobre q_a permite la simetría entre p y q . En efecto, la medida de integración de la representación funcional para Z_T , se escribe como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_a \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} = \oint \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}, \quad (1.14)$$

donde el símbolo \oint indica que se satisfacen las condiciones de borde $q(t_a) = q(t_b)$.

Análogamente en la representación de momentos tendríamos de forma equivalente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_a}{2\pi\hbar} \int_{p(t_a)=p_a}^{p(t_b)=p_b} \frac{\mathcal{D}'p}{2\pi\hbar} \int \mathcal{D}q = \oint \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \int \mathcal{D}q, \quad (1.15)$$

con las condiciones periódicas $p(t_a) = p(t_b)$. Por lo tanto la función de partición (1.12) está dada por la integral de camino

$$Z_{MC}(t_b, t_a) = \oint \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} e^{i\mathcal{S}(p,q)/\hbar} = \oint \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \int \mathcal{D}q e^{i\bar{\mathcal{S}}(p,q)/\hbar}. \quad (1.16)$$

La expresión anterior luce como una generalización natural de las reglas de la mecánica estadística clásica. De acuerdo a estas reglas, cada elemento de volumen en el espacio de las fases $dq dp/\hbar$ es ocupado con una probabilidad $e^{-E/k_B T}$. En el formalismo de integrales de camino de la mecánica cuántica, cada elemento de volumen en el espacio de trayectorias $\mathcal{D}q \mathcal{D}p/\hbar$ es asociado con un factor de fase $e^{i\mathcal{S}(p,q)/\hbar}$.

A partir de aquí la transición a la mecánica cuántica estadística es bastante natural, debido a que los elementos de matriz de $e^{-\hat{H}/k_B T}$ pueden obtenerse a partir de la versión de \hat{U} en tiempo imaginario.

1.1.2. Formalismo de Matsubara

La representación funcional de la mecánica cuántica estadística resulta en lo que se conoce como formalismo de Matsubara. A tal fin, supongamos un sistema en contacto con un baño térmico a temperatura T y cuyo hamiltoniano \hat{H} es independiente del tiempo. Todas las cantidades termodinámicas se pueden obtener a partir de la función de partición de la mecánica estadística:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right) = \sum_n e^{-E_n/k_B T}, \quad (1.17)$$

donde la traza se ha evaluado usando el conjunto completo de autovectores de \hat{H} :

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (1.18)$$

Puesto que la traza puede tomarse en cualquier base, empleando la base $|q\rangle$, podemos escribir

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int dq \langle q|e^{-\beta\hat{H}}|q\rangle, \quad (1.19)$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B T}$. El integrando de la expresión anterior se puede interpretar como la prolongación analítica a tiempo imaginario,

$$t \rightarrow -i\tau, \quad (1.20)$$

de la amplitud de probabilidad de la mecánica cuántica (1.4):

$$\langle q_b | e^{-i(t_b - t_a)\hat{H}} | q_a \rangle \rightarrow \langle q_b | e^{-(\tau_b - \tau_a)\hat{H}} | q_a \rangle . \quad (1.21)$$

Por lo tanto, identificando $\tau_b - \tau_a = \beta$ tenemos,

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int dq \langle q | e^{-\beta\hat{H}} | q \rangle = \int dq \langle q, -i\beta | q, 0 \rangle , \quad (1.22)$$

o en forma más explícita, en la representación de integrales de camino,

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int_{q(\beta)=q(0)} \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{\mathcal{S}_E} , \quad (1.23)$$

donde

$$\mathcal{S}_E = \int_0^\beta d\tau (ip\dot{q} - H(p, q)) , \quad (1.24)$$

es la acción euclídeana de primer orden.

La condición de borde periódica, $q(\beta) = q(0)$, que surge debido a la traza en la definición de la función de partición, sólo se aplica a las coordenadas $q(\tau)$, mientras que los momentos $p(\tau)$ tienen condiciones de contorno libres en 0 y β . Esta condición rompe la invariancia de Lorentz e induce propiedades distintivas sobre el sistema.

La función de partición obtenida arriba para una teoría de campos 0+1 dimensional puede extenderse fácilmente a una teoría en $d + 1$ dimensiones. Además, por lo visto anteriormente, la teoría de campos euclídeana es el marco más adecuado para introducir la teoría de campos a temperatura finita.

Por ejemplo, para un campo escalar en $d + 1$ dimensiones $\varphi(\tau, x)$, la acción \mathcal{S}_E , resulta ser:

$$\mathcal{S}_E[\pi, \varphi] = \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \int d^d x [i\pi(\tau, x)\partial_\tau \varphi(\tau, x) - H(\pi(\tau, x), \varphi(\tau, x))] , \quad (1.25)$$

donde π es el campo canónico conjugado a φ y $\mathcal{H}(\pi, \varphi)$ es la densidad Hamiltoniana del sistema. La función de partición se obtiene inmediatamente, restringiendo el intervalo temporal a $\tau_b = \beta$, $\tau_a = 0$,

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int_{\varphi(0, \mathbf{x})=\varphi(\beta, \mathbf{x})} \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^d x [-i\pi\partial_\tau \varphi + \mathcal{H}(\pi, \varphi)]} , \quad (1.26)$$

con la integral evaluada sobre todos los caminos $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ que satisfagan

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi(\beta, \mathbf{x}) . \quad (1.27)$$

También puede verse que la teoría de campos euclídeana en $d + 1$ dimensiones, con

$0 \leq \tau < \beta$, es equivalente a la mecánica estadística cuántica en d dimensiones.

Otro análisis muestra que para un sistema fermiónico también se puede escribir la función de partición en el formalismo de tiempo imaginario, en este caso con condiciones de borde antiperiódicas, por ejemplo $\psi(0, \mathbf{x}) = -\psi(\beta, \mathbf{x})$. Un rasgo característico del formalismo de Matsubara (compartido con los formalismos de tiempo real) es que la dependencia temporal de los campos parece ser inevitable, incluso si uno se limitara al cálculo de objetos independientes del tiempo, como la energía libre. En efecto, el cálculo perturbativo requiere la introducción de funciones de correlación en espacio-tiempo.

1.2. Efecto Casimir

En su forma original, el efecto Casimir es la manifestación de una fuerza atractiva entre dos placas paralelas perfectamente conductoras y no cargadas [20]. En la teoría de campos, este efecto es una consecuencia de la alteración de las fluctuaciones de vacío del campo electromagnético por la presencia de condiciones de borde sobre las placas.

A partir de los años 70, este fenómeno recibió una atención creciente, debido al refinamiento de las predicciones teóricas y los métodos experimentales [35–37]. Las líneas de investigación actuales se concentran sobre los diversos factores que intervienen en este fenómeno; como la dependencia con la geometría de las superficies [38, 39], los efectos térmicos [40], la presencia de materiales reales (estructura y tamaño finito) [41], etc.

En la teoría cuántica de campos en un espacio con condiciones de contorno triviales, el término infinito de la energía de vacío se elimina por el hecho de que tal energía siempre se puede definir a menos de una constante aditiva. Por lo tanto todas las energías físicas se pueden medir a partir de esta energía de vacío en el espacio libre, la que se elige igual a cero. Matemáticamente este proceso se sustenta por el procedimiento de orden normal. Sin embargo, esto podría ser incorrecto cuando tenemos campos externos o condiciones de borde. En este caso hay un conjunto infinito de diferentes estados de vacío, correspondientes a cada diferente separación entre las placas.

Una teoría de campos bosónica se puede ver como un sistema de infinitos osciladores, tal que la energía de vacío del campo se escribe como la suma de todas las energías de vacío de cada modo,

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum \omega ; \quad (1.28)$$

esta suma, claramente, es infinita. La energía de Casimir E_c se obtiene de la suma (1.28) [42], imponiendo condiciones de contorno sobre el campo, por ejemplo sobre dos placas paralelas. Un resultado finito para E_c requiere la implementación de algún esquema de regularización, tal como el método de *heat kernel*, la regularización ζ [42, 43] o la regularización dimensional. Otro método que surge motivado por la física del proble-

ma, consiste en suprimir la contribución de los modos del campo que corresponden a frecuencias altas, ya que los espejos serían transparentes a éstos. A continuación calculemos la energía de Casimir, en este último esquema de regularización.

A modo de ejemplo, consideremos las fluctuaciones de vacío de un campo escalar sin masa en una dimensión espacial: $\phi(t, x)$. La presencia de las placas en los puntos $x = 0$ y $x = a$ se implementa mediante condiciones de borde de Dirichlet

$$\phi(t, 0) = \phi(t, a) = 0 \quad . \quad (1.29)$$

La solución de las ecuaciones de Klein Gordon dentro de un intervalo $0 < x < l$, con condiciones de Dirichlet sobre sus extremos, nos permite obtener las frecuencias $\omega_n = n\pi/l$, $n = 1, 2, 3, \dots$ de los modos del campo, por lo tanto la energía:

$$E(l) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \quad (1.30)$$

Para no tratar con integrales sobre momentos continuos, vamos a encerrar nuestro sistema (dos placas separadas por una distancia a) en el interior de una caja de separación L , con $L \gg a$. Para obtener la energía de Casimir debemos seguir la prescripción de sustraer la energía del sistema con las placas muy separadas (αL , $\alpha < 1$). La figura (1.1) muestra este procedimiento de sustracción, es decir:

$$E_c \Big|_{L \rightarrow \infty} = E_A + E_B + E_C - (E_{A'} + E_{B'} + E_{C'}) \quad (1.31)$$

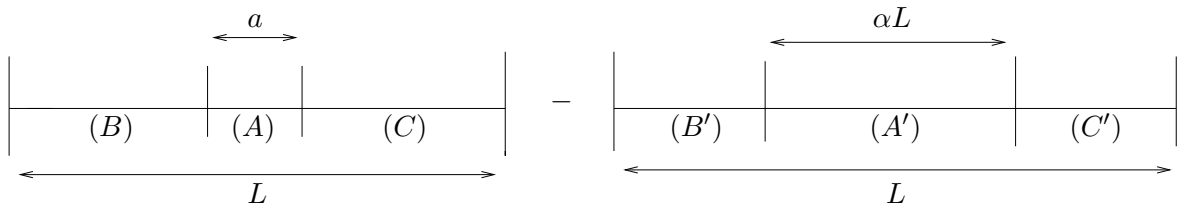


Figura 1.1: Representación del proceso de sustracción en el efecto Casimir

Cada término de la suma ($E_A = E(a)$, $E_{A'} = E(\alpha L)$, ...) se regulariza con el factor $e^{-\lambda \frac{n\pi}{l}}$ (regulador λ), de modo que:

$$E(l) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} e^{-\lambda \frac{n\pi}{l}} \simeq \frac{\pi}{2l} \left(\frac{l^2}{\pi^2 \lambda^2} - \frac{1}{12} + \frac{\lambda^2 \pi^2}{240l^2} \right), \quad (1.32)$$

por lo tanto reemplazando en (1.31) tenemos la energía de Casimir:

$$E_c = -\frac{\pi}{24a}. \quad (1.33)$$

El cálculo de la energía de Casimir también se puede abordar usando el formalismo de integrales funcionales, por ejemplo para un campo en d dimensiones espaciales, con condiciones de borde de Dirichlet sobre las placas en $x_d = 0$ y $x_d = a$, la energía de vacío resulta de tomar el límite de temperatura cero ($\beta \rightarrow \infty$) de la expresión apropiada para la energía libre (1.2):

$$E(a) = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \int_{\varphi(x,0)=\varphi(x,a)=0} \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi e^{-\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \int d^d x (i\pi \partial_\tau \varphi - H(\pi, \varphi))}. \quad (1.34)$$

Esta representación será usada posteriormente para calcular correcciones térmicas a la energía de Casimir. Un hecho importante es el parecido formal entre las ecuaciones (1.34) y (1.26). Lo cual indica que los métodos de calculo para obtener la función de partición se pueden utilizar para calcular las energías de Casimir.

Los cálculos de las energías de Casimir están plagadas por dos tipos de divergencias. El primero surge de calcular la energía total como la suma de todos los modos del campo, $\sum \frac{1}{2} \hbar \omega$, el cual requiere algún tipo de regularización, como por ejemplo la usada anteriormente, y el segundo proviene de calcular la densidad de energía local, a partir del valor de expectación en el vacío del tensor energía momento, $\langle T_{00} \rangle$, la cual típicamente diverge cerca de los bordes. Ambos tipos de divergencias no están relacionados. La energía de interacción entre un par de objetos es finita y puede ser calculada sin ambigüedades. La divergencia cerca de los bordes de la densidad de energía local no cambia cuando la posición relativa de los objetos varía. Las divergencias en la energía total están asociadas con la energía ubicada en las superficies: las autonegías; cuyas divergencias pueden ser o no removidas dependiendo de la geometría de las superficies.

1.3. Dimensiones compactificadas

Para describir las teorías con dimensiones compactificadas vamos a considerar una generalización del formalismo de Matsubara para tratar con la compactificación de las dimensiones espaciales de una teoría de campos euclideana. Esto permite importar muchos resultados y métodos de la TCTF a la teoría con la dimensión extra, tales como las técnicas de renormalización, los diagramas de Feynmann, etc.

Un caso particular y simple en el que se aumenta en una dimensión extra a un espacio euclideo \mathbb{R}^D , corresponde a una variedad \mathcal{M} con una topología $\mathbb{R}^D \times \mathcal{S}^1$, es decir, una compactificación circular. Desde el punto de vista topológico, el formalismo de Matsubara es equivalente a la integral de camino con soporte en $\mathbb{R}^{D-1} \times \mathcal{S}_\beta$, donde

\mathcal{S}_β es un círculo de radio β (inverso de la temperatura). De modo que el formalismo de Matsubara en su forma generalizada se puede considerar como un mecanismo para estudiar efectos térmicos y compactificaciones espaciales. Este concepto a sido desarrollado [44] considerando una variedad D dimensional simplemente no conectada con una topología $\Gamma_D^d = \mathbb{R}^{D-d} \times \mathcal{S}_{L_1} \times \mathcal{S}_{L_2} \times \dots \times \mathcal{S}_{L_d}$, donde L_1 es el inverso de la temperatura y los L_2, \dots, L_d corresponden a la compactificación de las $d-1$ dimensiones espaciales. La estructura topológica del espacio tiempo no modifica las ecuaciones locales del campo. Sin embargo, la topología modifica las condiciones de borde sobre los campos y las funciones de Green.

En la topología Γ_D^d (compactificación toroidal de un subespacio d dimensional), las reglas de Feynman se modifican introduciendo una prescripción de Matsubara generalizada, es decir, realizando los siguientes reemplazos en el espacio de momentos,

$$\int \frac{dk_1}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty}, \quad \int \frac{dk_i}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_i} \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty}; \quad k_1 \rightarrow \frac{2n_1\pi}{\beta}, \quad k_i \rightarrow \frac{2n_i\pi}{L_i}, \quad (1.35)$$

donde $L_i, i = 2, 3, \dots, d$. Por ejemplo, en una teoría con la siguiente acción

$$\mathcal{S}[\varphi] = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^{L_2} dx_2 \dots \int_0^{L_d} dx_d \int d^{D-d}\mathbf{x} [(\partial\varphi)^2 + m^2\varphi^2], \quad (1.36)$$

por cada línea, en un diagrama de Feynman, debemos incluir el factor

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n_1} \frac{1}{L_2} \sum_{n_2} \dots \frac{1}{L_d} \sum_{n_d} \int \frac{d^{D-d}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-d}} \mathcal{D}_0(\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_d}, \mathbf{k}), \quad (1.37)$$

donde \mathcal{D}_0 , es el propagador, dado por:

$$\mathcal{D}_0(\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_d}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_{n_1}^2 + \omega_{n_2}^2 + \dots + \omega_{n_d}^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (1.38)$$

1.4. Organización de la Tesis

La presente tesis, dedicada al estudio de algunos modelos de teorías de campos con dimensiones compactas y condiciones de borde no triviales, está organizada de la siguiente manera: En el **Capítulo 2**, se presenta una nueva representación funcional de la teoría de campos a temperatura finita. Comenzando con un campo bosónico en $0+1$ dimensiones, donde se muestra la manera correcta de implementar el formalismo; se obtienen las funciones de partición y las funciones de correlación usuales; también se implementa la nueva representación para campos bosónicos, fermiónicos y campos de gauge en $d+1$ dimensiones.

En el **Capítulo 3**, se estudian algunos aspectos del efecto Casimir. Primeramente se obtiene una fórmula para la energía de interacción de Casimir de $N > 1$ superficies de Dirichlet, despojada de cantidades divergentes. En particular, se aplica para el estudio de la interacción de dos placas paralelas a temperatura finita. En segundo lugar se obtiene una manera de medir los efectos de no superposición en la interacción de Casimir de $N > 2$ objetos; también se analiza este efecto desde el punto de vista de un desarrollo perturbativo en el límite de separación muy grande entre los objetos.

En el **Capítulo 4**, describimos algunos aspectos de la electrodinámica en $4 + 1$ dimensiones, con la dimensión extra compactificada; se obtiene el tensor de polarización de vacío, evaluando los términos que conservan y violan paridad e interpretando los resultados desde el punto de vista de $3 + 1$ dimensiones. En el mismo Capítulo, también se estudia la polarización del vacío de fermiones sin masa confinados entre dos placas paralelas de ancho ϵ . Se calculan la densidad de carga y la corriente inducida debido a un campo eléctrico externo normal a los bordes. Finalmente analizamos la contribución dependiente de ϵ a la acción efectiva para un campo externo transversal.

Capítulo 2

Representación dual de la teoría de campos a temperatura finita

En el capítulo anterior (sección 1.2), hemos descrito el formalismo de Matsubara o “formalismo de tiempo imaginario”, como un marco adecuado para estudiar la teoría de campos a temperatura finita. Una propiedad fundamental de este formalismo es que el campo bosónico (fermiónico) resulta periódico (antiperiódico) en la coordenada de tiempo imaginario, mientras que el campo canónico conjugado no está sujeto a ninguna restricción. Por ejemplo, si tenemos un campo bosónico en $d + 1$ dimensiones con un hamiltoniano cuadrático en su momento canónico conjugado; la integración de este campo a nivel de la función de partición (1.26), genera un modelo con un campo dinámico definido sobre $S^1 \times \mathbb{R}^d$, donde el radio de S^1 es proporcional al inverso de la temperatura, $\beta = 1/T$. Claramente, en el espacio de Fourier, las frecuencias sólo toman valores discretos, las cuales se conocen como *frecuencias de Matsubara*.

Recientemente, se han desarrollado nuevas formas de implementar las condiciones de contorno en los efectos Casimir estático y dinámico [45–47]. En estos modelos se usan campos auxiliares para imponer las condiciones de borde sobre las superficies; al integrar los campos originales se obtiene un modelo efectivo donde los campos dinámicos viven en las superficies. Usualmente el modelo efectivo tiene una dimensión menor que la teoría original debido a que la codimensión de los bordes es generalmente igual a uno, por ejemplo, las superficies (parametrizadas por dos variables) y las curvas en un espacio de 3 dimensiones, tienen codimensión igual 1 y 2 respectivamente. En el Capítulo 3, referido al efecto Casimir, analizamos justamente superficies con codimensión 1, donde las condiciones de borde se implementan por el procedimiento mencionado arriba.

Una versión menos natural de este mecanismo puede aplicarse sobre la teoría de campos a $T > 0$, introduciendo campos auxiliares para imponer la condición de periodicidad (antiperiodicidad) e integrando el campo original, la teoría efectiva resulta

ser una nueva representación de la TCTF, la cual llamaremos representación *dual* de la teoría de campos a temperatura finita.

En primer lugar presentaremos la discusión correspondiente a la teoría 0+1 dimensional. Posteriormente desarrollaremos los casos centrales de campos escalares, campos fermiónicos y campos de gauge.

2.1. Mecánica cuántica: 0 + 1 dimensiones

2.1.1. Ideas generales

Veamos cómo se puede obtener la función de partición dentro del contexto de un sistema con un solo grado de libertad, imponiendo condiciones apropiadas sobre la integral de camino para la amplitud de vacío a temperatura cero, \mathcal{Z}_0 . Comenzamos con la representación de integrales de camino de \mathcal{Z}_0 :

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\mathcal{S}[q(\tau), p(\tau)]}, \quad (2.1)$$

donde \mathcal{S} es la acción Euclideana de primer orden, $\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{L}$, con $\mathcal{L} = -ip\dot{q} + H(p, q)$ el Lagrangiano. H denota el Hamiltoniano, que (suponemos) tiene la forma: $H(p, q) = T(p) + V(q)$.

Por otro lado, \mathcal{Z}_0 se obtiene de tomar el límite de tiempo (imaginario) infinito de la amplitud de transición $\langle q_0, -iT | q_0, iT \rangle$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \langle q_0, -iT | q_0, iT \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_n |\langle q_0 | n \rangle|^2 e^{-2TE_n} = \lim_{T \rightarrow +\infty} |\langle q_0 | 0 \rangle|^2 e^{-2TE_0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde hemos introducido $|n\rangle$, los autoestados de \hat{H} , $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, y q_0 , el valor asintótico de q_0 a $T \rightarrow \pm\infty$ (usualmente, $q_0 \equiv 0$). E_0 es la energía de $|0\rangle$, el estado fundamental.

Nuestro objetivo es escribir una expresión alternativa para $\mathcal{Z}(\beta)$, partiendo de la amplitud de vacío, \mathcal{Z}_0 . Por el principio de superposición, introduzcamos representaciones de la unidad correspondientes a los tiempos $\tau = 0$ y $\tau = \beta$, de modo que \mathcal{Z}_0 se puede escribir como:

$$\mathcal{Z}_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int dq_2 dq_1 \langle q_0, -iT | q_2, -i\beta \rangle \langle q_2, -i\beta | q_1, 0 \rangle \langle q_1, 0 | q_0, iT \rangle, \quad (2.3)$$

o, como integrales de camino,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int dq_2 dq_1 \int_{q(\beta)=q_2}^{q(T)=q_0} \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\int_{\beta}^T d\tau \mathcal{L}} \\ &\times \int_{q(0)=q_1}^{q(\beta)=q_2} \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\int_0^{\beta} d\tau \mathcal{L}} \int_{q(-T)=q_0}^{q(0)=q_1} \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\int_{-T}^0 d\tau \mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La representación anterior resulta útil para tener una idea de la manera correcta de imponer las condiciones de contorno, para obtener la función de partición $\mathcal{Z}(\beta)$. Observemos que en el lado derecho el integrando está conformado por tres factores (integrales funcionales), de las cuales la segunda $\langle q_2, -i\beta | q_1, 0 \rangle$ nos hace recordar a la función de partición de temperatura finita, siempre que se tome $q(0) = q(\beta)$. Los otros dos términos $\langle q_0, -iT | q_2, -i\beta \rangle$ y $\langle q_1, 0 | q_0, iT \rangle$ deberían ser factorizados si solo queremos quedarnos con el segundo factor. Por lo tanto el siguiente paso parece ser imponer condiciones de borde periódicas sobre la coordenada $q(\tau)$ en \mathcal{Z}_0 (para quedarnos con el segundo factor). Sin embargo veremos que este procedimiento nos conduce a un resultado incorrecto.

Método incorrecto

Imponiendo condiciones periódicas sobre los caminos $q(\tau)$ tenemos:

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \delta(q(\beta) - q(0)) \exp \{ -\mathcal{S}[q(\tau), p(\tau)] \} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-E_0(2T-\beta)} \int dq_1 |\langle 0 | q_1 \rangle|^2 \langle q_1, -i\beta | q_1, 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

normalizando adecuadamente (dividiendo por la amplitud de vacío),

$$\frac{\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \delta(q(\beta) - q(0)) e^{-\mathcal{S}}}{\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\mathcal{S}}} = e^{\beta E_0} \int dq_1 |\langle 0 | q_1 \rangle|^2 \langle q_1, -i\beta | q_1, 0 \rangle, \quad (2.6)$$

del cual no se puede obtener el factor $\mathcal{Z}(\beta)$, debido a la presencia del módulo cuadrado de la función de onda del vacío en el argumento de la integral, $|\langle 0 | q_1 \rangle|^2$. Esta contribución extra que hace imposible la extracción de la función de partición se debe al hecho de que aún tenemos contribuciones de caminos fuera del intervalo $(0, \beta]$.

Método correcto

Veamos ahora que, para reproducir $\mathcal{Z}(\beta)$, tenemos que imponer condiciones de periodicidad sobre las variables del espacio de fases $(q(\tau), p(\tau))$. En efecto, definamos un objeto $\mathcal{Z}_s(\beta)$ que resulta de imponer restricciones sobre ambas coordenadas en la

funcional \mathcal{Z}_0 ,

$$\mathcal{Z}_s(\beta) \equiv \frac{\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \delta(q(\beta) - q(0)) \delta(p(\beta) - p(0)) e^{-\mathcal{S}}}{\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\mathcal{S}}}. \quad (2.7)$$

Usando el principio de superposición tenemos:

$$\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \delta(q(\beta) - q(0)) \delta(p(\beta) - p(0)) e^{-\mathcal{S}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int dp_1 dq_1 \left[\langle q_0, -iT | p_1, -i\beta \rangle \langle p_1, -i\beta | q_1, -i\beta \rangle \langle q_1, -i\beta | q_1, 0 \rangle \langle q_1, 0 | p_1, 0 \rangle \langle p_1, 0 | q_0, iT \rangle \right] \quad (2.8)$$

ó

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \delta(q(\beta) - q(0)) \delta(p(\beta) - p(0)) e^{-\mathcal{S}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-E_0(2T-\beta)} \\ &\times \int \frac{dp_1 dq_1}{2\pi} \langle q_0 | 0 \rangle \langle 0 | p_1 \rangle \langle q_1, -i\beta | q_1, 0 \rangle \langle p_1 | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-E_0(2T-\beta)} |\langle q_0 | 0 \rangle|^2 \int dq_1 \langle q_1, -i\beta | q_1, 0 \rangle \\ &= \mathcal{Z}_0 \times e^{\beta E_0} \mathcal{Z}(\beta) = \mathcal{Z}_0 \times \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-E_0)}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos concluir entonces que:

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = \text{Tr}[e^{-\beta:\hat{H}:}] \quad (2.10)$$

donde $:\hat{H}:$ denota el Hamiltoniano normalmente ordenado:

$$:\hat{H}: \equiv \hat{H} - E_0. \quad (2.11)$$

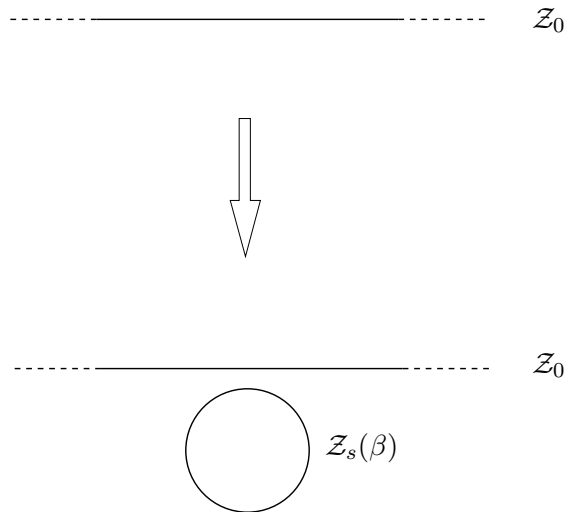


Figura 2.1: Representación del mecanismo de compactificación

Resumiendo todo lo realizado, podemos concluir que, imponiendo condiciones de periodicidad sobre las variables conjugadas $q(\tau)$, $p(\tau)$ en la funcional de la amplitud de vacío a temperatura cero, y descartando factores de no dependen de β (ya que estos pueden ser cancelados por la constante de normalización) obtenemos la función de partición $\mathcal{Z}_s(\beta)$, correspondiente al hamiltoniano original, donde la energía del estado de vacío se redefine como cero. Por otro lado, la sustracción de la energía de vacío generalmente es irrelevante porque casi siempre estamos interesados en calcular derivadas de la energía libre del sistema. En la figura (2.1), mostramos una representación pictórica del mecanismo de ‘compactificación’.

Observe que la introducción de condiciones de periodicidad para ambas variables no está en contradicción con la representación usual (1.23) donde sólo se aplican sobre las variable q . De hecho, en nuestro enfoque las nuevas condiciones son cruciales para deshacerse de los factores no deseados procedentes de caminos que se encuentran fuera del intervalo $[0, \beta]$. Podemos ilustrar explícitamente nuestro resultado, en la representación funcional:

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \delta(q(\beta) - q(0)) \delta(q(\beta) - q(0)) e^{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (ip\dot{q} - H(p,q))}. \quad (2.12)$$

2.1.2. Campos auxiliares

Ahora, veamos cómo el uso de campos auxiliares para imponer las condiciones de borde, conducen naturalmente a la representación dual. Las funciones delta δ en (2.7) requieren la introducción de dos campos auxiliares, ξ_1 y ξ_2 , que en este caso son números reales (independientes del tiempo). Usando la notación $Q_1 \equiv q$ y $Q_2 \equiv p$, tenemos

$$\prod_{a=1}^2 \left\{ \delta[Q_a(\beta) - Q_a(0)] \right\} = \int \frac{d^2\xi}{(2\pi)^2} e^{i \sum_{a=1}^2 \xi_a [Q_a(\beta) - Q_a(0)]}. \quad (2.13)$$

Usando esta representación para las funciones delta e intercambiando el orden de integración entre las variables auxiliares y las variables del espacio de fases, obtenemos la siguiente expresión para $\mathcal{Z}_s(\beta)$:

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = \mathcal{N}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_2}{2\pi} \int \mathcal{D}Q e^{-S(Q) + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau j_a(\tau) Q_a(\tau)}, \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{N} \equiv \mathcal{Z}_0$, y donde usamos la notación:

$$j_a(\tau) \equiv \xi_a [\delta(\tau - \beta) - \delta(\tau)], \quad (2.15)$$

mientras que la medida en el espacio de fases se ha escrito en términos de Q :

$$\mathcal{D}Q \equiv \prod_{-\infty < \tau < \infty} \frac{dq(\tau)dp(\tau)}{2\pi}. \quad (2.16)$$

En particular, para el caso del oscilador armónico con masa unidad y frecuencia ω , tenemos:

$$\mathcal{S}(Q) = \mathcal{S}_0(Q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q_a(\tau) \widehat{\mathcal{K}}_{ab} Q_a(\tau), \quad (2.17)$$

donde $\widehat{\mathcal{K}}_{ab}$ son los elementos del operador matricial 2×2 , $\widehat{\mathcal{K}}$, dado por:

$$\widehat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \omega^2 & i \frac{d}{d\tau} \\ -i \frac{d}{d\tau} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

La integral sobre Q es gaussiana, por lo tanto, podemos integrarla fácilmente, para obtener

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = 2\pi \mathcal{N}^{-1} (\det \widehat{\mathcal{K}})^{-\frac{1}{2}} \int \frac{d^2 \xi}{(2\pi)^2} e^{-\frac{1}{2} \xi_a M_{ab} \xi_b}, \quad (2.19)$$

donde

$$M \equiv \Omega(0_+) + \Omega(0_-) - \Omega(\beta) - \Omega(-\beta), \quad (2.20)$$

y $\Omega(\tau)$ denota la inversa del operador $\widehat{\mathcal{K}}$ (2.18); es decir,

$$\widehat{\mathcal{K}}_{ac} \Omega_{cb}(\tau) = \delta_{ab} \delta(\tau), \quad (2.21)$$

siendo Ω_{ab} los elementos de matriz de Ω .

La forma explícita de este objeto se encuentra fácilmente:

$$\Omega(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} & \frac{i}{2} \text{sgn}(\tau) \\ -\frac{i}{2} \text{sgn}(\tau) & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} e^{-\omega|\tau|}, \quad (2.22)$$

donde sgn denota la función signo.

La ecuación anterior (2.22) puede ser usada en (2.20), para obtener M :

$$\begin{aligned} M &= [\Omega(0_+) + \Omega(0_-)] (1 - e^{-\beta\omega}) \\ &= \begin{pmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} (n_B(\omega) + 1)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

con

$$n_B(\omega) \equiv (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}, \quad (2.24)$$

la función de distribución de Bose-Einstein.

Finalmente, como \mathcal{N} cancela exactamente el factor $(\det \widehat{\mathcal{K}})^{-\frac{1}{2}}$ en (2.19), llegamos

al primer resultado importante de esta sección, esto es, una representación *dual* para la función de partición, como una integral sobre las variables ξ_a :

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = \int \frac{d^2\xi}{2\pi} e^{-\frac{\omega^{-1}\xi_1^2 + \omega\xi_2^2}{2[n_B(\omega)+1]}}. \quad (2.25)$$

Observe que la integral es sobre dos variables reales ξ_a , las cuales son campos 0-dimensionales, es decir, una dimensión menos que la dimensión original de la teoría 0 + 1.

Con el fin de interpretar esta integral y compararla con la correspondiente versión de la mecánica estadística clásica, calcularemos la función de partición en el límite de alta temperatura. En este límite, $\mathcal{Z}_s(\beta)$ resulta ser:

$$\mathcal{Z}_s(\beta) \simeq \int \frac{d^2\xi}{2\pi} e^{-\beta H(\xi_1, \xi_2)} \quad (\beta \ll 1), \quad (2.26)$$

donde:

$$H(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \omega^2\xi_2^2). \quad (2.27)$$

Es notorio que si en (2.26) realizamos las siguientes identificaciones: $\xi_1 = p$ (momento clásico), y $\xi_2 = q$ (coordenada clásica), la misma corresponde exactamente a la función de partición del oscilador armónico de la mecánica estadística clásica

$$\mathcal{Z}_s(\beta) \simeq \int \frac{dpdq}{2\pi} e^{-\beta\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2q^2)} \quad (\beta \ll 1). \quad (2.28)$$

Este resultado nos motiva a escribir una representación para $\mathcal{Z}_s(\beta)$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = \int \frac{d^2\xi}{2\pi} e^{-\beta H_{eff}(\xi_1, \xi_2)}, \quad (2.29)$$

donde:

$$H_{eff}(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{1}{2\beta} (n_B(\omega) + 1)^{-1} (\omega^{-1}\xi_1^2 + \omega\xi_2^2), \quad (2.30)$$

es un ‘Hamiltoniano efectivo’; mostrando que la función de partición cuántica puede representarse de manera análoga a su contraparte clásica, usando un hamiltoniano dependiente de β , el cual tiende al hamiltoniano clásico en el límite de alta temperatura.

Integrando los campos auxiliares en la expresión exacta para la función de partición (2.25), obtenemos el resultado correcto:

$$\mathcal{Z}_s(\beta) = n_B(\omega) + 1 = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}. \quad (2.31)$$

En lo que sigue, para simplificar la notación, omitiremos el subíndice ‘s’ en $\mathcal{Z}_s(\beta)$, asumiendo implícitamente que estamos usando un Hamiltoniano normalmente ordenado.

Note que, un hecho importante resulta del análisis en el límite clásico (altas temperaturas): los campos auxiliares tienen una interpretación física. El multiplicador asociado a q juega el rol del momento canónico conjugado clásico, mientras que el correspondiente a p es como una generalización de la coordenada clásica. La misma interpretación puede mantenerse fuera del límite clásico, pero ahora con un hamiltoniano $H_{eff}(\xi_1, \xi_2)$ que se diferencia de su contraparte clásica porque tiene en cuenta correcciones cuánticas.

2.1.3. Funcional a $T > 0$ a partir de $T = 0$

La representación *dual* que presentamos en la sección anterior también es válida para teorías interactuantes. Aún cuando la acción \mathcal{S} no es cuadrática, podemos obtener una expresión formal para la función de partición en esta nueva representación. En efecto, denotando por $\mathcal{Z}(J)$ a la funcional generatriz a *temperatura cero* de las funciones de correlación de las variables canónicas:

$$\mathcal{Z}(J) = \int \mathcal{D}Q e^{-\mathcal{S}(Q) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau J_a(\tau) Q_a(\tau)} \quad (2.32)$$

y por $\mathcal{W}(J)$ la funcional correspondiente para las funciones conectadas. Podemos ver que la función de partición ($T > 0$) se puede escribir como:

$$\mathcal{Z}(\beta) = [\mathcal{Z}(0)]^{-1} \int \frac{d^2\xi}{(2\pi)^2} \exp\{\mathcal{W}[i j_1(\tau), i j_2(\tau)]\}, \quad (2.33)$$

donde el factor de normalización $\mathcal{Z}(0) = \mathcal{Z}_0$ es la funcional de vacío para el caso interactuante. Comparar (2.33) con (2.29) nos da la receta para obtener el Hamiltoniano efectivo: $H_{eff}(\xi_1, \xi_2) = -\beta\mathcal{W}[i j_1(\tau), i j_2(\tau)]$.

Por lo tanto, una forma alternativa de encontrar el hamiltoniano efectivo en el caso interactuante es obtener primeramente $\mathcal{W}[J]$ (a $T = 0$), luego reemplazar la fuente (arbitraria) $J_a(\tau)$ por $i j_a(\tau)$, donde $j_1(\tau)$ y $j_2(\tau)$ son las funciones de los campos auxiliares definidos en (2.15). Porsupuesto, \mathcal{W} solo puede calcularse exactamente en algunos casos especiales, o puede realizarse una expansión perturbativa en otros. De cualquier forma, \mathcal{W} puede expandirse funcionalmente en potencias de la fuente $J(\tau)$:

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{W}[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\tau_1, \dots, \tau_n} \mathcal{W}_{ab}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) J_{a_1}(\tau_1) \dots J_{a_n}(\tau_n), \quad (2.34)$$

donde cada coeficiente $\mathcal{W}^{(n)}$ es la función conectada de n -puntos; proporcionándonos inmediatamente de una expansión para H_{eff} en potencias de los campos auxiliares. Es importante recalcar que esta expansión no es necesariamente una expansión perturbativa. De hecho, la magnitud de cada término es controlado por $\mathcal{W}^{(n)}$, el cual podría

incluso ser exacto (no-perturbativo) en la constante de acoplamiento. Para mostrar esto, veamos qué sucede si mantenemos solamente hasta el término $n = 4$. Suponiendo que la acción \mathcal{S} tiene una simetría $\mathcal{Q}_a \rightarrow -\mathcal{Q}_a$; podemos ver que $\mathcal{W}[0]$ es cancelada por el factor \mathcal{N} . Por lo tanto en la función de partición (2.29) el ‘Hamiltoniano efectivo’ tiene la siguiente expansión:

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{1}{2\beta} \int_{\tau_1, \tau_2} \mathcal{W}_{a_1 a_2}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) j_{a_1}(\tau_1) j_{a_2}(\tau_2) \\ &- \frac{1}{4!\beta} \int_{\tau_1, \tau_2} \mathcal{W}_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) j_{a_1}(\tau_1) j_{a_2}(\tau_2) j_{a_3}(\tau_3) j_{a_4}(\tau_4) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

Usando la forma explícita de $j_a(\tau)$ en términos de los campos auxiliares, vemos que:

$$H_{eff} = H_{eff}^{(2)} + H_{eff}^{(4)} + \dots \quad (2.36)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{eff}^{(2)} &= \frac{1}{2} \mathcal{M}_{ab}^{(2)} \xi_a \xi_b \\ H_{eff}^{(4)} &= \frac{1}{4!} \mathcal{M}_{abcd}^{(4)} \xi_a \xi_b \xi_c \xi_d \\ \dots &= \dots \\ H_{eff}^{(2k)} &= \frac{1}{(2k)!} \mathcal{M}_{a_1 \dots a_{2k}}^{(2k)} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_{2k}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

La forma explícita de cada uno de los coeficientes $\mathcal{M}^{(2k)}$ puede ser escrita en términos de $\mathcal{W}^{(2k)}$. Por ejemplo $\mathcal{M}^{(2)}$ es una matriz diagonal:

$$\mathcal{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

con

$$c_a = \frac{1}{\beta} \int \frac{d\nu}{\pi} (1 - e^{-i\nu\beta}) \tilde{\mathcal{W}}_{aa}(\nu), \quad (2.39)$$

(donde la tilde indica la transformada de Fourier). Es fácil ver que c_1 juega el rol de un coeficiente efectivo en el término de energía cinética ($\propto p^2$) del Hamiltoniano efectivo, mientras que c_2 introduce un potencial cuadrático efectivo. En general ambos pueden depender de β , ω , y alguna constante de acoplamiento que el sistema pueda tener. Para el caso del oscilador armónico tienen una forma bastante simple:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\omega(n_B(\omega) + 1)}, \\ c_2 &= \frac{\omega}{n_B(\omega) + 1}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Del mismo modo, el término $\mathcal{M}^{(4)}$, puede ser escrito en términos de la función conectada de 4-puntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{abcd}^{(4)} = & \frac{1}{\beta} \left[-\mathcal{W}_{abcd}^{(4)}(0, 0, 0, 0) + 4\mathcal{W}_{abcd}^{(4)}(\beta, \beta, \beta, 0) \right. \\ & \left. - 6\mathcal{W}_{abcd}^{(4)}(\beta, \beta, 0, 0) + 4\mathcal{W}_{abcd}^{(4)}(\beta, 0, 0, 0) - \mathcal{W}_{abcd}^{(4)}(0, 0, 0, 0) \right]_{sym} \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde el subíndice *sym* denota la simetrización bajo un intercambio simultáneo de los argumentos: tiempo e índice discreto.

Aplicación en el caso libre

Veamos el uso de la fórmula (2.33) para el caso de una teoría libre (sin término de interacción). Para ello obtendremos la funcional conectada a temperatura cero \mathcal{W} para las variables del espacio de fases (p, q) a partir de la funcional conectada W para la variable q . Consideremos dos fuentes arbitrarias J_a ; $a = 1, 2$; y escribamos la definición de la función \mathcal{W} :

$$e^{\mathcal{W}[J_a]} = \int \mathcal{D}\mathcal{Q} e^{-S_0(\mathcal{Q}) + \int d\tau J_a(\tau) Q_a(\tau)}, \quad (2.42)$$

más explícitamente,

$$e^{\mathcal{W}[J_1, J_2]} = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (-ip\dot{q} + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}w^2q^2) + (J_1(\tau)q(\tau) + J_2(\tau)p(\tau))}. \quad (2.43)$$

Integrando sobre la variable p , tenemos una integral funcional solamente en el espacio de configuración q , de donde obtenemos la funcional W con un término de fuente modificado: $J_1(\tau) - i\frac{d}{d\tau}J_2(\tau)$, es decir,

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{W}[J_1, J_2]} &= e^{\frac{1}{2} \int d\tau J_2^2(\tau)} \int \mathcal{D}q e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}w^2q^2) + (J_1(\tau) - i\dot{J}_2(\tau))q(\tau)}, \\ e^{\mathcal{W}[J_1, J_2]} &= e^{\frac{1}{2} \int d\tau J_2^2(\tau)} e^{W[J_1(\tau) - i\dot{J}_2(\tau)]}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde i es la unidad imaginaria. Por lo tanto tenemos la siguiente relación:

$$\mathcal{W}[J_1, J_2] = W[J_1 - i\dot{J}_2] + \frac{1}{2} \int d\tau J_2^2, \quad (2.45)$$

válida para fuentes arbitrarias J_1 y J_2 .

Para el caso en consideración: el oscilador armónico libre; tenemos $W[J] = W_0[J] \equiv \frac{1}{2}J G_0 J$, con $G_0 = \frac{1}{2w} e^{-|\tau - \tau'|w}$. Donde hemos usado una notación simplificada, pues $\frac{1}{2}J G_0 J \equiv \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) G_0(\tau, \tau') J(\tau')$.

En particular si elegimos $J_1 = ij_1$ y $J_2 = ij_2$, como las funciones dependientes de las variables auxiliares definidas en (2.15), obtendremos la función de partición (2.29).

En efecto, en este caso:

$$\mathcal{W}_0[i j_1, i j_2] = W_0[i j_1 + \frac{d j_2}{d\tau}] - \frac{1}{2} \int d\tau j_2^2, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{W}_0[i j_1, i j_2] = -\frac{1}{2} j_1 G_0 j_1 + \frac{1}{2} i j_1 G_0 \frac{d j_2}{d\tau} + \frac{1}{2} i \frac{d j_2}{d\tau} G_0 j_1 + \frac{1}{2} \frac{d j_2}{d\tau} G_0 \frac{d j_2}{d\tau} - \frac{1}{2} j_2^2. \quad (2.47)$$

Cada uno de los términos de la expresión del lado derecho se pueden calcular. Por ejemplo, para el primer término tenemos

$$-\frac{1}{2} j_1 G_0 j_1 = -\frac{1}{2} \xi_1 \left(\frac{1}{w} (1 - e^{-\beta w}) \right) \xi_1. \quad (2.48)$$

El segundo y tercer término se anulan, mientras que el cuarto y último se simplifican

$$\frac{1}{2} \frac{d j_2}{d\tau} G_0 \frac{d j_2}{d\tau} - \frac{1}{2} j_2^2 \equiv -\frac{1}{2} \xi_2 w (1 - e^{-\beta w}) \xi_2. \quad (2.49)$$

Reuniendo todos los términos en (2.33) tenemos nuevamente la función de partición correcta:

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = [\mathcal{Z}(0)]^{-1} \int \frac{d^2 \xi}{(2\pi)^2} e^{-\frac{1}{2}(1-e^{-\beta w})(w^{-1}\xi_1^2 + w\xi_2^2)}, \quad (2.50)$$

Posteriormente aplicaremos la formula (2.33) en el caso interesante de un campo escalar interactuante.

2.1.4. Funcional Generatriz

Ahora procederemos con el cálculo de las funciones de correlación térmicas en el marco del formalismo que hemos desarrollado. Esto tiene interés por ejemplo en el cálculo de una teoría perturbativa. Como es usual, vamos a definir la funcional generatriz de las funciones de correlación, denotada por $\mathcal{Z}(\beta, J)$, y la funcional generatriz de las funciones de correlación conectadas $\mathcal{W}(\beta, J) \equiv \ln \mathcal{Z}(\beta, J)$. Con estas convenciones, las funciones de correlación conectadas están dadas por:

$$\langle Q_{a_1}(\tau_1) \dots Q_{a_n}(\tau_n) \rangle_{conn} = \left[\frac{\delta^n \mathcal{W}(\beta, J)}{\delta J_{a_1}(\tau_1) \dots \delta J_{a_n}(\tau_n)} \right]_{J=0}. \quad (2.51)$$

En la representación *dual* (2.29), la funcional generatriz se escribe como:

$$\mathcal{Z}(\beta, J) = \mathcal{N}^{-1} \int \frac{d^2 \xi}{2\pi} \int \mathcal{D}Q e^{-\mathcal{S}(Q) + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau Q_a(\tau) (J_a(\tau) + j_a(\tau))}, \quad (2.52)$$

aquí $\mathcal{S}(Q)$ indica la acción de primer orden.

Evaluemos $\mathcal{Z}(\beta, J)$ explícitamente para el caso del oscilador armónico. En este caso,

la integral sobre Q se realiza fácilmente:

$$\mathcal{Z}(\beta, J) = \int \frac{d^2\xi}{2\pi} e^{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 (J_a(\tau_1) + i j_a(\tau_1)) \Omega_{ab}(\tau_1, \tau_2) (J_b(\tau_2) + i j_b(\tau_2))} , \quad (2.53)$$

usando la forma explícita de j_a (2.15), la expresión anterior es equivalente a:

$$\mathcal{Z}(\beta, J) = \mathcal{Z}(J) \int \frac{d^2\xi}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \xi_a M_{ab} \xi_b - \xi_a L_a} , \quad (2.54)$$

donde $\mathcal{Z}(J)$ es la funcional generatriz a temperatura cero

$$\mathcal{Z}(J) = e^{-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 J_a(\tau_1) \Omega_{ab}(\tau_1, \tau_2) J_b(\tau_2)} \quad (2.55)$$

y

$$L_a \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau [\Omega_{ab}(\beta, \tau) - \Omega_{ab}(0, \tau)] J_b(\tau) . \quad (2.56)$$

Finalmente, efectuando la integral sobre los campos auxiliares en la expresión (2.54), tenemos:

$$\mathcal{Z}(\beta, J) = \mathcal{Z}(\beta) \mathcal{Z}(J) e^{\frac{1}{2} L_a [M^{-1}]_{ab} L_b} , \quad (2.57)$$

la cual, después de reemplazar las funciones L_a (2.56), resulta ser:

$$\mathcal{Z}(\beta, J) = \mathcal{Z}(\beta) \mathcal{Z}(J) e^{\frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' J_a(\tau) U_{ab}(\tau, \tau') J_b(\tau')} \quad (2.58)$$

donde la función $U^{(\beta)}(\tau_1, \tau_2)$ tiene la siguiente forma:

$$U^{(\beta)}(\tau_1, \tau_2) = [\Omega(\tau_1, \beta) - \Omega(\tau_1, 0)] M^{-1} [\Omega(\beta, \tau_2) - \Omega(0, \tau_2)] . \quad (2.59)$$

En resumen, hemos obtenido la siguiente representación para la funcional generatriz

$$\mathcal{Z}(\beta, J) = \mathcal{Z}(\beta) e^{-\frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' J_a(\tau) G_{ab}(\tau, \tau') J_b(\tau')} \quad (2.60)$$

donde G_{ab} representa la función de correlación o propagador de la teoría

$$G_{ab}(\tau_1, \tau_2) = G_{ab}(\tau_1 - \tau_2) = \langle Q_a(\tau_1) Q_b(\tau_2) \rangle , \quad (2.61)$$

la cual, es la suma de dos contribuciones distinguidas:

$$G_{ab}(\tau_1, \tau_2) = G_{ab}^{(0)}(\tau_1, \tau_2) - U_{ab}^{(\beta)}(\tau_1, \tau_2) . \quad (2.62)$$

La primera, $G^{(0)} = \Omega$, es la función de correlación a temperatura $T = 0$; mientras que la segunda, $U^{(\beta)}$, el término dependiente de la temperatura, es el propagador puramente

térmico.

Despreciando los términos independientes de la fuente (irrelevante para el cálculo de las funciones de correlación), la funcional generatriz de las funciones conectadas \mathcal{W} , tiene la siguiente estructura:

$$\mathcal{W}(\beta, J) = \frac{1}{2} \int d\tau_1 \int d\tau_2 J_a(\tau_1) G_{ab}(\tau_1, \tau_2) J_b(\tau_2). \quad (2.63)$$

A fin de comparar nuestro formalismo con los resultados que tenemos en la literatura ([34]), vamos a escribir en forma más explícita estos términos. En efecto, para $G^{(0)}$ y $U^{(\beta)}$, tenemos:

$$G^{(0)}(\tau, \tau') = e^{-\omega|\tau-\tau'|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} & -\frac{i}{2}\text{sgn}(\tau - \tau') \\ \frac{i}{2}\text{sgn}(\tau - \tau') & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

$$U_{ab}^{(\beta)}(\tau, \tau') = [\Omega_{a1}(\tau, \beta) - \Omega_{a1}(\tau, 0)] [M^{-1}]_{11} [\Omega_{1b}(\beta, \tau') - \Omega_{1b}(0, \tau')] + [\Omega_{a2}(\tau, \beta) - \Omega_{a2}(\tau, 0)] [M^{-1}]_{22} [\Omega_{2b}(\beta, \tau') - \Omega_{2b}(0, \tau')]. \quad (2.65)$$

Se puede ver que $G^{(0)}$ es invariante bajo traslaciones en ambos argumentos temporales, lo cual es coherente con la descripción de la teoría a temperatura cero, donde el argumento temporal no tiene restricciones. Por su parte, el término $U^{(\beta)}$, tiene una expresión sencilla cuando se supone que los argumentos temporales están entre 0 y β ,

$$U^{(\beta)}(\tau, \tau') = -\frac{1}{2} n_B(\omega) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(e^{-\omega(\tau-\tau')} + e^{\omega(\tau-\tau')}) & i(e^{-\omega(\tau-\tau')} - e^{\omega(\tau-\tau')}) \\ -i(e^{-\omega(\tau-\tau')} - e^{\omega(\tau-\tau')}) & \omega(e^{-\omega(\tau-\tau')} + e^{\omega(\tau-\tau')}) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Observe que el propagador térmico $U^{(\beta)}$, depende solamente de la diferencia de los argumentos temporales, por tanto, es natural definirlo dentro del intervalo $[-\beta, \beta]$.

Ahora podemos obtener la función de correlación $\langle qq \rangle$, en la que usualmente estamos interesados; esta se obtiene fácilmente de las expresiones (2.64) y (2.66), tomando la componente 11 de cada matriz, es decir:

$$G_{11}(\tau) = \frac{1}{2\omega} [(1 + n_B(\omega))e^{-\omega\tau} + n_B(\omega)e^{\omega\tau}], \quad (2.67)$$

para $0 < \tau \leq \beta$; la cual, es el resultado correcto (expresión (2.32) en [28] (pag. 23)). Es interesante ver que $G_{11}(\tau)$, es la solución única para la ecuación diferencial:

$$(-\partial_\tau^2 + \omega^2) G_{11}(\tau) = \delta(\tau) \quad (2.68)$$

sujeta a las condiciones de borde $G_{11}(\tau - \beta) = G_{11}(\tau)$. Además, como resultado de nuestra construcción, la parte de temperatura cero G_{11}^0 aparece naturalmente como el propagador para el sistema sin restricciones. Mientras que $U_{11}^{(\beta)}$, cuya estructura encierra las condiciones de frontera, es la solución de la ecuación homogénea.

En resumen, podemos reproducir la forma correcta de las funciones de correlación de 2 puntos para todas las variables del espacio de fases: $\langle qq \rangle$, $\langle qp \rangle$, $\langle pq \rangle$, y $\langle pp \rangle$, cuando los dos argumentos temporales satisfacen $0 < \tau, \tau' < \beta$. De otro modo, G se anula si uno de los argumentos está fuera del intervalo y el otro adentro; si ambas están fuera del intervalo, ésta coincide con la función $G^{(0)}$ ($T = 0$), es decir:

$$G(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0 & \text{if } \tau_1 > \beta \text{ and } 0 < \tau_2 < \beta \\ G^{(0)}(\tau_1, \tau_2) & \text{if } \tau_1 > \beta \text{ and } \tau_2 > \beta \\ G^{(0)}(\tau_1, \tau_2) & \text{if } \tau_1 < \beta \text{ and } \tau_2 < \beta \\ G^{(0)}(\tau_1 - \beta, \tau_2) & \text{if } \tau_1 > \beta \text{ and } \tau_2 < 0 \end{cases}, \quad (2.69)$$

los otros casos se obtienen por la simetría de Bose.

La última expresión muestra una propiedad muy importante, ya que nos permite verificar la consistencia del formalismo. En efecto, volviendo al caso interactuante considerado en la sección anterior, uno podría haber realizado las integrales en el orden inverso, es decir, primero sobre los campos auxiliares y después sobre las Q_a . Entonces la expansión perturbativa, vía el teorema de Wick, involucraría términos que son promedios Gaussianos, con G como la contracción fundamental. Puesto que los términos de interacción involucran un intervalo de tiempo infinito, tenemos correcciones perturbativas a la función de partición (cuando los tiempos están dentro del intervalo $[0, \beta]$), y también contribuciones que toman en cuenta el orden normal de Hamiltoniano (cuando los argumentos de temporales están fuera del intervalo $[0, \beta]$).

2.1.5. Oscilador anarmónico

Como aplicación directa del cálculo de las funciones de correlación, consideremos el oscilador anarmónico. La acción euclidiana correspondiente $S = S_0 + S_I$, contiene el término anarmónico cuártico S_I , dado por:

$$S_I = \frac{\lambda}{4!} \int d\tau q^4(\tau). \quad (2.70)$$

Cada uno de los términos del desarrollo perturbativo en la constante λ , se obtienen de la funcional generatriz de las funciones de correlación (2.58), de la siguiente manera

$$\mathcal{Z}(\beta) = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \left(e^{-S_I(\frac{\delta}{i\delta J})} \mathcal{Z}(\beta; J) \right) \Big|_{J=0}. \quad (2.71)$$

A primer orden perturbativo en la constante λ , tenemos:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \mathcal{Z}^{(0)}(\beta) \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int d\tau \frac{\delta^4}{\delta J^4} \right) e^{-\frac{1}{2} J G J} \Big|_{J=0}, \quad (2.72)$$

$$\mathcal{Z}(\beta) = \mathcal{Z}^{(0)}(\beta) \left(1 - \frac{3\lambda}{4!} \int_0^\beta d\tau G_{11}^2(0) \right), \quad (2.73)$$

en donde, reemplazando el valor de G_{11} , expresión (2.67):

$$G_{11}(0) = \frac{1}{2\omega} + \frac{1}{\omega(e^{\beta\omega} - 1)}, \quad (2.74)$$

obtenemos la función de partición $\mathcal{Z}(\beta)$ con la corrección a primer orden usual [27].

2.2. Campo escalar

El formalismo mostrado para el caso del oscilador armónico de la mecánica cuántica ($0 + 1$ dimensiones) puede ser extendido fácilmente al caso de las teorías de campos. En esta sección veremos primeramente su extensión al caso del campo escalar real φ (Euclidiano) en $d + 1$ dimensiones.

Sea $\varphi(x) = \varphi(\tau, \mathbf{x})$ donde $x = (\tau, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(d+1)}$, $\tau \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(d)}$. Procediendo en forma análoga al caso de un solo grado de libertad, consideremos primeramente el caso libre, sin interacción.

2.2.1. Función de partición libre

La acción euclidiana en términos de las variables del espacio de fases \mathcal{S}_0 , está dada por:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^{d+1}x \left[-i\pi\partial_\tau\varphi + \mathcal{H}_0(\pi, \varphi) \right], \quad (2.75)$$

con

$$\mathcal{H}_0(\pi, \varphi) \equiv \frac{1}{2} \left[\pi^2 + |\nabla\varphi|^2 + m^2\varphi^2 \right]. \quad (2.76)$$

Luego, la implementación de las condiciones de borde periódicas para el campo $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ y su conjugado canónico $\pi(\tau, \mathbf{x})$

$$\varphi(\beta, \mathbf{x}) = \varphi(0, \mathbf{x}), \quad \pi(\beta, \mathbf{x}) = \pi(0, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(d)}, \quad (2.77)$$

requieren la introducción de dos campos auxiliares (multiplicadores de Lagrange) independientes del tiempo: $\xi_a(\mathbf{x})$, $a = 1, 2$. Definiendo $\Phi = (\Phi_a)$ un campo con dos componentes, $a = 1, 2$, de modo que $\Phi_1 = \varphi$ y $\Phi_2 = \pi$, la función de partición $\mathcal{Z}_0(\beta)$

resulta ser:

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\xi \int \mathcal{D}\Phi e^{-\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \Phi_a \hat{\mathcal{K}}_{ab} \Phi_b + i \int d^{d+1}x j_a \Phi_a}, \quad (2.78)$$

con

$$j_a(x) \equiv \xi_a(\mathbf{x}) [\delta(\tau - \beta) - \delta(\tau)] \quad (2.79)$$

y

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \hat{h}^2 & i \frac{\partial}{\partial \tau} \\ -i \frac{\partial}{\partial \tau} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

donde definimos $\hat{h} \equiv \sqrt{-\nabla^2 + m^2}$, el operador de energía de primera cuantización para el campo escalar masivo. Realizando la integral sobre Φ se obtiene la función de partición en términos de los campos auxiliares:

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = \int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \xi_a(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x} | \hat{M}_{ab} | \mathbf{y} \rangle \xi_b(\mathbf{y})}, \quad (2.81)$$

donde $\hat{M} \equiv \hat{\Omega}(0_+) + \hat{\Omega}(0_-) - \hat{\Omega}(\beta) - \hat{\Omega}(-\beta)$ y

$$\hat{\Omega}(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \hat{h}^{-1} & \frac{i}{2} \text{sgn}(\tau) \\ -\frac{i}{2} \text{sgn}(\tau) & \frac{1}{2} \hat{h} \end{pmatrix} e^{-\hat{h}|\tau|}. \quad (2.82)$$

Una vez calculado el operador \hat{M}

$$\hat{M} \equiv \begin{pmatrix} \hat{h}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{h} \end{pmatrix} (\hat{n}_B + 1)^{-1}, \quad (2.83)$$

donde

$$\hat{n}_B \equiv \frac{1}{e^{\beta \hat{h}} - 1}, \quad (2.84)$$

podemos volver a reescribir la expresión (2.81) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0(\beta) &= \int \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y [\xi_1(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x} | \hat{h}^{-1} (\hat{n}_B + 1)^{-1} | \mathbf{y} \rangle \xi_1(\mathbf{y}) \right. \\ &\quad \left. + \xi_2(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x} | \hat{h} (\hat{n}_B + 1)^{-1} | \mathbf{y} \rangle \xi_2(\mathbf{y})] \right\}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Finalmente, integrando sobre los campos auxiliares, obtenemos que:

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = \det(\hat{n}_B + 1), \quad (2.86)$$

la cual, al ser evaluada en la base de autoestados del momento, concuerda con la forma usual de la función de partición, es decir:

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = \prod_{\mathbf{k}} [n_B(E_{\mathbf{k}}) + 1] , \quad (2.87)$$

donde $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Así también, la densidad de energía libre, $F_0(\beta)$ (1.2):

$$F_0(\beta) = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(1 - e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}) . \quad (2.88)$$

En el límite de altas temperaturas (límite clásico),

$$\mathcal{Z}_0(\beta) \simeq \int \mathcal{D}\xi e^{-\beta H(\xi)} \quad \beta \ll 1 , \quad (2.89)$$

con el ‘‘hamiltoniano’’

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \int d^d x [\xi_1^2(\mathbf{x}) + |\nabla \xi_2(\mathbf{x})|^2 + m^2 \xi_2^2(\mathbf{x})] . \quad (2.90)$$

La representación (2.89) tiene una interpretación bastante natural como la función de partición clásica, donde los campos auxiliares juegan el rol de las variables del espacio de fases, y la medida de integración corresponde a la medida de Liouville. Además, es claro que la representación (2.85) solamente involucra campos estáticos (con una dimensión menor al campo original), a diferencia del formalismo de Matsubara. El precio que debemos pagar por esta ‘reducción dimensional’ es que la ‘acción’ (el exponente de la funcional (2.85)) es espacialmente no local. Es local solamente en el límite de altas temperaturas.

2.2.2. Campo interactuante: Teoría no perturbativa

Anteriormente (subsección 2.1.4) hemos mostrado un ejemplo ilustrativo donde el formalismo *dual* nos permitió usar la información del sistema libre a $T = 0$ para obtener la función de partición a temperatura finita. Ahora consideraremos el mismo procedimiento para una teoría interactuante, cuya acción es:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_I , \quad \mathcal{S}_I = \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \varphi^4(x) . \quad (2.91)$$

Supongamos que conocemos la forma exacta de la función de 2-puntos $\mathcal{W}_{ab}^{(2)}$ a temperatura cero. En realidad, como el Hamiltoniano es cuadrático en el momento canónico, solo necesitamos conocer $\mathcal{W}_{11}^{(2)}$, puesto que es posible mostrar que cuando uno

de los campos es reemplazado por el momento canónico, el resultado es multiplicado por la correspondiente frecuencia (en el espacio de Fourier). En efecto, esto puede mostrarse, por ejemplo, evaluando la integral sobre el momento canónico.

Entonces, el hamiltoniano efectivo correspondiente a este término tiene la siguiente forma:

$$H_{eff}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \left[\xi_1(\mathbf{x}) C_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \xi_1(\mathbf{y}) + \xi_2(\mathbf{x}) C_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \xi_2(\mathbf{y}) \right], \quad (2.92)$$

donde las transformadas de Fourier de los coeficientes C_1 y C_2 son

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\beta} \int \frac{dk_0}{\pi} (1 - e^{-i\beta k_0}) \tilde{\mathcal{W}}_{11}(k_0, \mathbf{k}) \\ \tilde{C}_2(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\beta} \int \frac{dk_0}{\pi} (1 - e^{-i\beta k_0}) k_0^2 \tilde{\mathcal{W}}_{11}(k_0, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Observe que estos dos coeficientes que determinan la contribución cuadrática a la función de partición, podrían involucrar funciones de la constante de acoplamiento, puesto que nuestro desarrollo no es una expansión perturbativa sino que estamos considerando la información contenida en el propagador completo.

Supongamos que el propagador exacto es tal que existe solo una partícula con energía $E(\mathbf{k})$, entonces solo podemos tener un polo asociado a él en $\tilde{\mathcal{W}}_{11}$. Además, supongamos que, como es usual, las condiciones de renormalización se han impuesto de tal modo que el residuo es 1. En estas condiciones tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\beta E(\mathbf{k})} (1 - e^{-\beta E(\mathbf{k})}), \\ \tilde{C}_2(\mathbf{k}) &= \frac{E(\mathbf{k})}{\beta} (1 - e^{-\beta E(\mathbf{k})}). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Entonces la función de partición resulta ser la misma que corresponde al gas de Bose:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta E(\mathbf{k})}}. \quad (2.95)$$

El punto importante aquí, es que (2.95) se obtiene a partir de la información del espectro no-perturbativo. Este podría ser el caso, por ejemplo, de un modelo donde la masa es generada por un mecanismo no-perturbativo. Podríamos incluso tener una teoría con dos o más polos, correspondientes por ejemplo a diferentes estados ligados. Estos polos no triviales, que se obtienen en la teoría a $T = 0$, pueden ser tenidos en cuenta inmediatamente como los primeros términos en la expansión en potencias de los campos auxiliares. Es claro que, en general, debemos incluir términos superiores al término cuadrático. La aproximación cuadrática podría ser justificada, por ejemplo,

dentro del contexto de la aproximación de *large-N*.

2.2.3. Campo interactuante: Teoría perturbativa

Consideremos nuevamente la acción (2.91) de la teoría escalar con término de interacción, y el problema de calcular las correcciones perturbativas. Para esclarecer el método nos restringiremos a la situación en $3 + 1$ dimensiones.

Como es usual, nuestro objetivo es obtener $\mathcal{Z}(\beta)$ como una serie de potencias en la constante de acoplamiento, λ . De la representación (2.33), en realidad, de su generalización para campos escalares, sabemos que la función de partición, como una integral sobre los campos auxiliares, puede ser expandida al mismo orden que $\mathcal{W}[J]$. En el curso de este procedimiento es inevitable la aparición de infinitos (divergencias UV) en los cálculos de los diagramas de lazos para la funcional $\mathcal{W}[J]$ ($T = 0$). Vamos a suponer que todos estos infinitos han sido renormalizados de la manera usual en la teoría a temperatura cero. En particular, los vértice de $T = 0$ están normalmente ordenados, de modo que los diagramas *tadpoles* están ausentes. Sin embargo, los *tadpoles* de temperatura finita que aparecen en nuestro formalismo, son finitos; ésta es otra ventaja (propiedad) del método; es decir, la integral funcional en términos de los campos auxiliares no tiene divergencias ultravioletas, no solamente para los diagramas *tadpoles* sino para cualquier otro diagrama. De este modo, las correcciones térmicas están completamente libres del proceso de renormalización.

Veamos ahora el problema de calcular el Hamiltoniano efectivo en términos de la expansión perturbativa para $\mathcal{W}[J]$. Como en el caso de un solo grado de libertad, el Hamiltoniano efectivo está relacionado con $\mathcal{W}[J]$ mediante:

$$H_{eff}(\xi) = -\frac{1}{\beta} \mathcal{W}[ij(x)] \quad (2.96)$$

donde $\mathcal{W}[J]$ es la funcional generatriz de las funciones de correlación conectadas a $T = 0$. Puesto que las contribuciones de vacío pueden ser canceladas por el factor de normalización \mathcal{N} , suponemos que $\mathcal{W}[0] \equiv 0$.

La expansión perturbativa de \mathcal{W} se separa en dos partes, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{(0)} + \mathcal{W}^{(I)}$, con

$$\mathcal{W}_I[J] = \mathcal{W}^{(1)}[J] + \mathcal{W}^{(2)}[J] + \dots \quad (2.97)$$

donde el índice indica el orden en λ del término correspondiente. En consecuencia la expansión para el Hamiltoniano efectivo $H_{eff} = H_{eff}^{(0)} + H_{eff}^{(I)}$. Las correcciones perturbativas a la función de partición, o la energía libre $F = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}$, se encuentran evaluando los promedios gaussianos,

$$F(\beta) = F^{(0)}(\beta) + F^{(I)}(\beta), \quad (2.98)$$

con

$$F^{(I)}(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \langle e^{-\beta H_{eff}^{(I)}(\xi)} \rangle, \quad (2.99)$$

donde el símbolo de promedio se define con el peso cuadrático:

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}\xi \dots e^{-\beta H_{eff}^{(0)}(\xi)}}{\mathcal{Z}_0(\beta)}. \quad (2.100)$$

Para fijar ideas, calcularemos la primera corrección no trivial a la energía libre, es decir la contribución de primer orden F :

$$F^{(1)}(\beta) = \langle H_{eff}^{(1)}(\xi) \rangle, \quad (2.101)$$

donde los promedios Gaussianos requieren el conocimiento de los promedios básicos que involucran solo dos campos auxiliares. Estos son:

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(\mathbf{x}) \xi_1(\mathbf{y}) \rangle &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \frac{\omega(\mathbf{k})}{1 - e^{-\beta \omega(\mathbf{k})}} \\ \langle \xi_2(\mathbf{x}) \xi_2(\mathbf{y}) \rangle &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})(1 - e^{-\beta \omega(\mathbf{k})})}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Por otro lado, el cálculo estandar a $T = 0$ muestra que el primer término en la expansión de \mathcal{W} es:

$$\mathcal{W}^{(1)}[J] = -\frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \left[\int d^4 y \sum_a G_{1a}^{(0)}(x - y) J_a(y) \right]^4, \quad (2.103)$$

donde $G_{ab}^{(0)}(x - y)$ es el propagador libre a $T = 0$ para el campo escalar real y su conjugado canónico, es decir

$$G_{ab}^{(0)}(x - y) = \langle \Phi_a(x) \Phi_b(y) \rangle. \quad (2.104)$$

$G_{ab}^{(0)}(x - y)$ puede ser representado convenientemente en términos de su transformada de Fourier $\tilde{G}_{ab}^{(0)}(k)$, en la representación matricial (donde 1 corresponde a φ y 2 a π):

$$\tilde{G}^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2} \begin{pmatrix} 1 & ik_0 \\ -ik_0 & k_0^2 \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Usando ahora la regla que mapea términos en la expansión para \mathcal{W} en los términos

para los H_{eff} , podemos ver que:

$$H_{eff}^{(1)}(\xi) = \frac{\lambda}{4! \beta} \int d^4 x \left[\int d^4 y \sum_a G_{1a}^{(0)}(x-y) \right. \\ \left. \times \xi_a(\mathbf{y})(\delta(y_0 - \beta) - \delta(y_0)) \right]^4. \quad (2.106)$$

Entonces, usando tildes para denotar las transformadas de Fourier de los campos auxiliares, podemos ver que cada uno de los factores que aparecen integrados sobre x , pueden ser escritos en la siguiente forma:

$$\int d^4 y \sum_a G_{1a}^{(0)}(x-y) \xi_a(\mathbf{y}) [\delta(y_0 - \beta) - \delta(y_0)] \\ = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [e^{-\omega(\mathbf{k})|x_0-\beta|} - e^{-\omega(\mathbf{k})|x_0|}] \tilde{\xi}_1(\mathbf{k}) \\ + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{2} [\sigma(x_0) e^{-\omega(\mathbf{k})|x_0|} - \sigma(x_0 - \beta) e^{-\omega(\mathbf{k})|x_0-\beta|}] \tilde{\xi}_2(\mathbf{k}), \quad (2.107)$$

donde $\sigma(x)$ denota el signo de x .

Reemplazando la expresión anterior en (2.106) encontramos

$$H_{eff}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{4!} \int \left[\prod_{i=1}^4 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \right] (2\pi)^3 \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \mathcal{H}_{a_1 \dots a_4}^{(4,1)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4) \\ \times \tilde{\xi}_{a_1}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{\xi}_{a_4}(\mathbf{k}_4), \quad (2.108)$$

donde $\mathcal{H}^{(4,1)}$ es el kernel para el término cuártico. La forma explícita de los elementos de matriz del Kernel por supuesto dependen de los índices considerados. A menos de permutaciones de modulo, los términos no equivalentes se indican en las siguientes expresiones:

$$\mathcal{H}_{1111}^{(4,1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \lambda \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{d\nu_i}{2\pi} \right) 2\pi \delta \left(\sum_{j=1}^4 \nu_j \right) \prod_{l=1}^4 \left[\frac{e^{-i\beta\nu_l} - 1}{\nu_l^2 + \omega^2(\mathbf{k}_l)} \right], \quad (2.109)$$

$$\mathcal{H}_{1112}^{(4,1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \lambda \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{d\nu_i}{2\pi} \right) 2\pi \delta \left(\sum_{j=1}^4 \nu_j \right) \\ \times \prod_{l=1}^3 \left[\frac{e^{-i\beta\nu_l} - 1}{\nu_l^2 + \omega^2(\mathbf{k}_l)} \right] \frac{i\nu_4 (e^{-i\beta\nu_4} - 1)}{\nu_4^2 + \omega^2(\mathbf{k}_4)}, \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1122}^{(4,1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \lambda \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{d\nu_i}{2\pi} \right) 2\pi \delta\left(\sum_{j=1}^4 \nu_j\right) \\ &\times \prod_{l=1}^2 \left[\frac{e^{-i\beta\nu_l} - 1}{\nu_l^2 + \omega^2(\mathbf{k}_l)} \right] \prod_{r=3}^4 \left[\frac{i\nu_r (e^{-i\beta\nu_r} - 1)}{\nu_r^2 + \omega^2(\mathbf{k}_r)} \right], \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1222}^{(4,1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \lambda \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{d\nu_i}{2\pi} \right) 2\pi \delta\left(\sum_{j=1}^4 \nu_j\right) \\ &\times \frac{e^{-i\beta\nu_1} - 1}{\nu_1^2 + \omega^2(\mathbf{k}_1)} \prod_{r=2}^4 \left[\frac{i\nu_r (e^{-i\beta\nu_r} - 1)}{\nu_r^2 + \omega^2(\mathbf{k}_r)} \right], \end{aligned} \quad (2.112)$$

y

$$\mathcal{H}_{2222}^{(4,1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \lambda \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{d\nu_i}{2\pi} \right) 2\pi \delta\left(\sum_{j=1}^4 \nu_j\right) \prod_{l=1}^4 \left[\frac{i\nu_l (e^{-i\beta\nu_l} - 1)}{\nu_l^2 + \omega^2(\mathbf{k}_l)} \right]. \quad (2.113)$$

Lo que resta hacer es aplicar el teorema de Wick para obtener el promedio Gaussiano. Se puede ver que solo términos con un número par de patas para cada campo producen una contracción distinta de cero; es decir, solo términos como $\mathcal{H}_{1111}^{(4,1)}$, $\mathcal{H}_{1122}^{(4,1)}$, $\mathcal{H}_{2222}^{(4,1)}$ aparecen en este cálculo. Además, el primero y el tercero de estos tienen un factor 3 debido al número desigual de contracciones, mientras que para el segundo hay un factor 6 debido a la cantidad de permutaciones para índices diferentes.

Usando la forma explícita de las contracciones, e integrando sobre las frecuencias, después de un cálculo prolongado, pero directo, se encuentra el resultado apropiado, es decir:

$$F^{(1)} = \frac{\lambda}{8\beta} V \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} n_B(\omega(\mathbf{k})) \right)^2, \quad (2.114)$$

donde V es el volumen espacial del sistema.

Este mismo resultado se puede obtener siguiendo un procedimiento análogo al realizado para tratar el problema del oscilador armónico cuántico con un térmico de interacción cuártico (Sección 2.2.1). El cálculo se puede realizar no sin antes haber obtenido la funcional generatriz correspondiente.

2.2.4. Funcional generatriz: Campo escalar

El proceso de obtener la funcional generatriz para el campo escalar en $d+1$ dimensiones es una generalización directa del proceso seguido en la teoría $0+1$ dimensional. De modo que la función de correlación para los campos escalar y su conjugado canónico resulta ser:

$$G_{ab}(x, y) = G_{ab}^{(0)}(x - y) - U_{ab}^{(\beta)}(x - y), \quad (2.115)$$

donde $G_{ab}^{(0)}(x-y)$ es la función de correlación a temperatura cero, mientras $U_{ab}^{(\beta)}(x-y)$ es una función dependiente de la temperatura.

Usando la representación Fourier, estas funciones se escriben de forma explícita, como:

$$G_{ab}^{(0)}(x-y) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}(x-y)} G_{ab}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau) \quad (2.116)$$

donde:

$$G_{ab}^{(0)}(\mathbf{p}, \tau) = \frac{e^{-\omega(\mathbf{k})\tau}}{2\omega(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} 1 & i\omega(\mathbf{k}) \\ -i\omega(\mathbf{k}) & \omega^2(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

y

$$U^{(\beta)}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{n_B(\omega(\mathbf{k}))}{2\omega(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} e^{\omega(\mathbf{k})\tau} + e^{-\omega(\mathbf{k})\tau} & -i\omega(\mathbf{k})(e^{\omega(\mathbf{k})\tau} - e^{-\omega(\mathbf{k})\tau}) \\ -i\omega(\mathbf{k})(e^{\omega(\mathbf{k})\tau} - e^{-\omega(\mathbf{k})\tau}) & \omega^2(\mathbf{k})(e^{\omega(\mathbf{k})\tau} + e^{-\omega(\mathbf{k})\tau}) \end{pmatrix}, \quad (2.118)$$

las cuales se corresponden a las ecuaciones para el caso 0 + 1 tomando la identificación $w \leftrightarrow \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

2.3. Campo de Dirac

Consideremos el campo de Dirac en $d + 1$ dimensiones espacio temporales. El procedimiento será esencialmente el mismo que para el caso del campo escalar. La acción S_0^f para el caso libre está dado por $S_0^f = \int d^{d+1}x \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi$, donde $\not{\partial} = \gamma_\mu \partial_\mu$, $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$ y $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$.

Imponemos condiciones de antiperiodicidad para ambos campos:

$$\psi(\beta, \mathbf{x}) = -\psi(0, \mathbf{x}), \quad \bar{\psi}(\beta, \mathbf{x}) = -\bar{\psi}(0, \mathbf{x}) \quad (2.119)$$

como condiciones sobre ambos campos Grassmannianos. Estas condiciones nos llevan a introducir dos funciones δ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^f(\beta) &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(\psi(\beta, \mathbf{x}) + \psi(0, \mathbf{x})) \delta(\bar{\psi}(\beta, \mathbf{x}) + \bar{\psi}(0, \mathbf{x})) \\ &\times \exp \left[-S_0^f(\bar{\psi}, \psi) \right]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Dado que la acción de Dirac es de primer orden, la introducción de los dos multiplicadores de Lagrange, aparecen de forma mas natural que en el bosónico. Estos campos auxiliares, denotados por $\chi(\mathbf{x})$ y $\bar{\chi}(\mathbf{x})$ deben ser espinores de Grassmann independientes del tiempo. Entonces la expresión resultante para $\mathcal{Z}_0^f(\beta)$ es:

$$\mathcal{Z}_0^f(\beta) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_0^f(\bar{\psi}, \psi) + i \int d^{d+1}x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (2.121)$$

donde η and $\bar{\eta}$ son fuentes que dependen de χ y $\bar{\chi}$ a través de las siguientes relaciones:

$$\eta(x) = \chi(\mathbf{x})[\delta(\tau - \beta) + \delta(\tau)] , \quad \bar{\eta}(x) = \bar{\chi}(\mathbf{x})[\delta(\tau - \beta) + \delta(\tau)] . \quad (2.122)$$

Integrando sobre la variable $\psi, \bar{\psi}$, encontramos:

$$\mathcal{Z}_0^f(\beta) = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left[-\beta H_{eff}(\bar{\chi}, \chi) \right] \quad (2.123)$$

donde

$$H_{eff}(\bar{\chi}, \chi) = \int d^d x \int d^d y \bar{\chi}(\mathbf{x}) H^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \chi(\mathbf{y}) \quad (2.124)$$

con:

$$\begin{aligned} H^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle \mathbf{x}, 0 | (\not{\partial} + m)^{-1} | \mathbf{y}, 0 \rangle + \langle \mathbf{x}, \beta | (\not{\partial} + m)^{-1} | \mathbf{y}, \beta \rangle \\ &+ \langle \mathbf{x}, 0 | (\not{\partial} + m)^{-1} | \mathbf{y}, \beta \rangle + \langle \mathbf{x}, \beta | (\not{\partial} + m)^{-1} | \mathbf{y}, 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\beta} \left[2 S_f(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_f(\beta, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_f(-\beta, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

En la ultima línea, S_f , denota el operador de Dirac. Un cálculo inmediato muestra que

$$H^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\beta} \langle \mathbf{x} | \hat{u} (1 - \hat{n}_F)^{-1} | \mathbf{y} \rangle \quad (2.126)$$

donde $\hat{n}_F \equiv (1 + e^{\beta \hat{h}})^{-1}$ es la función de distribución de Fermi-Dirac, escrita en términos de \hat{h} , el operador de energía (definida de manera idéntica a su contraparte en el campo real). \hat{u} es un operador unitario, definido como

$$\hat{u} \equiv \frac{\hat{h}_D}{\hat{h}}, \quad \hat{h}_D \equiv \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m . \quad (2.127)$$

Entonces, integrando sobre los campos auxiliares, podemos verificar que:

$$\mathcal{Z}_0^f(\beta) = \det \hat{u} \det^{-1} [(1 - \hat{n}_F) \mathbf{I}] , \quad (2.128)$$

($\mathbf{I} \equiv$ la matriz identidad en la representación del algebra de Dirac) en la representación de momentos

$$\mathcal{Z}_0^f(\beta) = \left\{ \prod_{\vec{p}} \left[1 + e^{-\beta E(\vec{p})} \right] \right\}^{r_d} , \quad (2.129)$$

con $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ y $r_d \equiv$ la dimensión de la representación (hemos usado el hecho de que $\det \hat{u} = 1$).

Nuevamente, el procedimiento produjo el resultado correcto para la función de partición, con un Hamiltoniano normalmente ordenado. Por otro lado, para un campo de

Dirac en un campo estático externo correspondiente a un campo de gauge mínimamente acoplado $A_0 = 0$, tenemos

$$S^f(\bar{\psi}, \psi, A) = \int d^{d+1}x \left[\bar{\psi}(x) (\not{\partial} + i e \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) + m) \psi(x) \right]. \quad (2.130)$$

La dependencia en τ nos permite encontrar la siguiente expresión, con pocos cambios respecto del caso libre:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^f(\beta) &= \det \hat{u}(\mathbf{A}) \det^{-1}(\hat{n}_F(\mathbf{A}) \mathbf{I}) \\ &= e^{iK(\mathbf{A})} \det \left[(1 + e^{-\beta \hat{h}(\mathbf{A})}) \mathbf{I} \right] \end{aligned} \quad (2.131)$$

donde

$$\hat{h}(A) \equiv \sqrt{-\mathbf{D}^2 + m^2}, \quad \mathbf{D} \equiv \nabla - ie\mathbf{A}, \quad (2.132)$$

y:

$$e^{iK(\mathbf{A})} = \frac{\det(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D} + m)}{\det \sqrt{-\mathbf{D}^2 + m^2}}. \quad (2.133)$$

Note que el factor $\det \left[(1 + e^{-\beta \hat{h}(\mathbf{A})}) \mathbf{I} \right]$ puede ser diagonalizado formalmente en términos de las energías $E_\lambda(\mathbf{A})$ en presencia del campo externo. Por lo tanto encontramos la siguiente expresión:

$$\mathcal{Z}^f(\beta) = e^{iK(\mathbf{A})} \times \left\{ \prod_{\lambda} \left[1 + e^{-\beta E_\lambda(\mathbf{A})} \right] \right\}^{r_d}. \quad (2.134)$$

El factor $e^{iK(\mathbf{A})}$, tiene un origen topológico pues depende de la fase, $K(\mathbf{A})$, del determinante de \hat{h}_D . Además, \hat{h}_D puede ser considerado como un operador cinemático en una dimensión menor. Para fermiones de Dirac, sabemos que la fase $\det \hat{h}_D$ es no trivial solamente cuando d es impar, es decir, cuando $d + 1$ es par. Sin embargo las matrices $\boldsymbol{\gamma}$ que aparecen en $\det \hat{h}_D$ forman una representación reducible del algebra de Dirac en d dimensiones, con la matriz $\boldsymbol{\gamma}_\tau$ relacionando cada autovalor con su complejo conjugado. Por lo tanto, como conclusión, la fase $K(\mathbf{A})$ se anula. Por otro lado, un resultado no nulo se puede encontrar para otros sistemas fermiónicos, por ejemplo: los fermiones de Weyl en $d + 1 = \text{par}$.

2.4. Campos de Gauge

Veamos ahora la implementación de este formalismo para el campo de Gauge $\mathcal{A}_\mu(\tau, \mathbf{x})$ en un espacio tiempo de $d + 1$ dimensiones. La densidad Lagrangiana del campo está dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2, \quad (2.135)$$

donde el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Recordemos la notación $x_\mu \equiv (\tau, x_1, \dots, x_d) = (\tau, \mathbf{x})$, donde los índices griegos μ, ν recorren los valores $0, 1, \dots, d$, mientras que los índices latinos i, j recorrerán solamente las coordenadas espaciales, $i, j = 1, 2, \dots, d$. Para realizar el cálculo, elegimos el gauge temporal, es decir $\mathcal{A}_0(\tau, \mathbf{x}) = 0$; por su simplicidad y por la facilidad de como emerge la representación *dual* en esta teoría. De hecho en la cuantización canónica usando la formulación Hamiltoniana, es necesaria la fijación del gauge.

En el gauge temporal el Hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = \int d^d \mathbf{x} \mathcal{H}(\Pi(x), \mathcal{A}(x)) = \int d^d \mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \Pi^2(x) + \frac{1}{4} \mathcal{F}_{ij}^2(x) \right), \quad (2.136)$$

donde sólo aparecen términos con índices espaciales debido al gauge elegido. $\Pi_\mu(x)$ es el campo conjugado al campo $\mathcal{A}_\mu(x)$

Luego, la funcional generatriz a temperatura cero en el espacio de fases de los campos se escribe como:

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\mathcal{A} \exp \left[\int d\tau \int d^d \mathbf{x} (i\Pi \partial_\tau \mathcal{A}_i - \mathcal{H}(\Pi, \mathcal{A})) \right], \quad (2.137)$$

o, en forma más explícita como

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\mathcal{A} e^{\mathcal{S}(\Pi, \mathcal{A})}, \quad (2.138)$$

donde,

$$\mathcal{S}(\Pi, \mathcal{A}) = \int d\tau \int d^d \mathbf{x} \left(i\Pi_i \partial_\tau \mathcal{A}_i - \frac{1}{2} \Pi_i^2 - \frac{1}{2} A_i (-\partial_j^2 \delta_{ij} + \partial_i \partial_j) A_j \right). \quad (2.139)$$

Usando la prescripción que hemos detallado para obtener la función de partición correspondiente a $T > 0$, debemos introducir campos auxiliares para fijar las condiciones de periodicidad, en total son $2d$ campos auxiliares: ξ_i^Π y $\xi_i^{\mathcal{A}}$, cada uno asociado a los campos Π_i y \mathcal{A}_i respectivamente. Con esto, la función de partición resulta ser:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \mathcal{D}\xi_i^\Pi \mathcal{D}\xi_i^{\mathcal{A}} \int \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\mathcal{A} \exp \left[\mathcal{S} + i \int d^{d+1} x (J_i^\Pi \Pi_i + J_i^{\mathcal{A}} \mathcal{A}_i) \right], \quad (2.140)$$

donde las funciones J_i^Π y $J_i^{\mathcal{A}}$ son funciones de los campos auxiliares ξ_i^Π y $\xi_i^{\mathcal{A}}$ y se definen de manera similar a las definidas para el campo escalar (2.79), ya que ambos son campos bosónicos

$$J_i^{\Pi, \mathcal{A}}(\tau, \mathbf{x}) = \xi_i^{\Pi, \mathcal{A}} [\delta(\tau - \beta) - \delta(\tau)]. \quad (2.141)$$

El paso siguiente es efectuar la integración de los campos originales Π y \mathcal{A} respectivamente. La integración sobre el campo Π es inmediata debido a que la integral es gaussiana sobre esta variable,

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \mathcal{D}\xi_i^\Pi \mathcal{D}\xi_i^{\mathcal{A}} \int \mathcal{D}\mathcal{A} e^{\int d^{d+1}x [-\frac{1}{2}\mathcal{A}_i K_{ij} \mathcal{A}_j + (iJ_i^{\mathcal{A}} - J_i^\Pi \partial_t) \mathcal{A}_i - \frac{1}{2}(J_i^\Pi)^2]} , \quad (2.142)$$

donde hemos definido el operador $K_{ij} = (-\partial_\tau^2 - \partial_j^2)\delta_{ij} + \partial_i \partial_j$.

La siguiente integración sobre el campo \mathcal{A} , resulta más conveniente efectuarla en la representación de Fourier. Por lo tanto, la funcional pasa a escribirse como:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \mathcal{D}\xi_i^\Pi \mathcal{D}\xi_i^{\mathcal{A}} \int \mathcal{D}\mathcal{A} e^{\int d^{d+1}k [-\frac{1}{2}\mathcal{A}_i K_{ij} \mathcal{A}_j^* + iJ_i \mathcal{A}_i^* - \frac{1}{2}J_i^\Pi J_i^{\Pi*}]} , \quad (2.143)$$

en donde todos los campos son funciones de la variable de Fourier $k \equiv (w, \mathbf{k})$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(k)$; el asterisco (*) denota el complejo conjugado, el operador K_{ij} pasa a ser $K_{ij} = (w^2 + \mathbf{k}^2)\delta_{ij} - k_i k_j$, y definimos $J_i = J_i^{\mathcal{A}} + w J_i^\Pi$.

Por último efectuando la integral sobre el campo \mathcal{A} , obtenemos la representación *dual* del campo de gauge, que estabamos buscando:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \mathcal{D}\xi_i^\Pi \mathcal{D}\xi_i^{\mathcal{A}} e^{-\frac{1}{2} \int d^{d+1}k [J_i (K^{-1})_{ij} J_j^* + iJ_i^\Pi \delta_{ij} J_j^{\Pi*}]} . \quad (2.144)$$

Una forma mas explícita de esta funcional se obtiene al reemplazar en ella las funciones $J_i^{\Pi, \mathcal{A}}$,

$$J_i^{\Pi, \mathcal{A}}(w, \mathbf{k}) = \int d\tau \int d^d \mathbf{x} e^{-i(w\tau + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} J_i^{\Pi, \mathcal{A}}(\tau, \mathbf{x}) , \quad (2.145)$$

las cuales, al usar la relación entre $J^{\Pi, \mathcal{A}}$ y $\xi^{\Pi, \mathcal{A}}$ (2.79), resultan ser:

$$J_i^{\Pi, \mathcal{A}}(w, \mathbf{k}) = \xi_i^{\Pi, \mathcal{A}}(\mathbf{k}) (e^{-iw\beta} - 1) . \quad (2.146)$$

Por lo tanto la funcional de partición alcanza una forma compacta y simple:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \mathcal{D}\xi_i^\Pi \mathcal{D}\xi_i^{\mathcal{A}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{k} \xi_a(\mathbf{k}) M_{ab}(\mathbf{k}) \xi_b^*(\mathbf{k}) \right) , \quad (2.147)$$

donde los elementos de las matrices ξ y M (ξ_a y M_{ab} , $a, b = 1, 2$) con índices discretos $i, j = 1, 2, \dots, d$ y continuos \mathbf{k} , están dados por: $\xi \equiv (\xi_i^{\mathcal{A}}, \xi_i^\Pi)$ y

$$M(\mathbf{k}) = 4 \int dw \operatorname{sen}^2 \left(\frac{w\beta}{2} \right) \begin{pmatrix} (K^{-1})_{ij} & w (K^{-1})_{ij} \\ w (K^{-1})_{ij} & [w^2 (K^{-1})_{ij} - \delta_{ij}] \end{pmatrix} . \quad (2.148)$$

Las integrales en cada uno de los elementos de la matriz M se pueden realizar puesto

que conocemos la inversa del operador K_{ij} ,

$$(K^{-1})_{ij} = \frac{1}{w^2 + \mathbf{k}^2} \delta_{ij} - \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2 + \mathbf{k}^2} \right) \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}. \quad (2.149)$$

Se puede ver que los términos no diagonales se anulan mientras que los diagonales están dados por:

$$M_{11}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} (1 - e^{-\beta|\mathbf{k}|}) \mathcal{P} + 2\pi\beta \mathcal{Q} \quad (2.150)$$

$$M_{22}(\mathbf{k}) = -2\pi|\mathbf{k}| (1 - e^{-\beta|\mathbf{k}|}) \mathcal{P} \quad (2.151)$$

donde $\mathcal{P} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}$ y $\mathcal{Q} = \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}$ son los operadores de proyección.

Finalmente, efectuando la integral sobre los campos auxiliares en la representación *dual* (2.147), tenemos:

$$\ln \mathcal{Z}(\beta) = -2V \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln(1 - e^{-\beta|\mathbf{k}|}). \quad (2.152)$$

Esta expresión es el resultado usual que se encuentra en la literatura para el gas de fotones [27, 29, 36, 37], es decir la radiación del cuerpo negro.

Capítulo 3

Efecto Casimir

El problema de la interacción de Casimir de varios objetos, es un tópico interesante que ha sido considerado en varios contextos en la literatura [48–52]. En el presente Capítulo abordaremos este tema, implementando las condiciones de borde sobre las superficies mediante el uso de campos auxiliares. Primeramente obtendremos una fórmula para la interacción de Casimir de varias superficies (dos o más) a temperatura cero, la cual se extenderá fácilmente a su contraparte a temperatura finita con el fin de explorar las correcciones térmicas a la energía de Casimir; obtendremos algunos resultados conocidos mediante el uso de una relación de dualidad entre β (intervalo temporal) y a (la separación de dos espejos paralelos); también, discutiremos las correcciones perturbativa y no perturbativa al incluir un término de interacción cuártico.

En segundo lugar nos ocuparemos en estudiar las propiedades de no superposición en la interacción de Casimir de varios objetos. El problema de la no aditividad o no superposición en la interacción de Casimir entre más de dos objetos, consiste en que la interacción del conjunto no se puede escribir como la superposición de la interacción de todos los pares. El principio de superposición que rige en la interacción gravitatoria o electromagnética, deja de ser válida para la interacción de Casimir; lo mismo sucede para las interacciones nucleares y atómicas, por ejemplo: la interacción de van der Waals.

A continuación desarrollaremos el formalismo para abordar estos problemas.

3.1. Energía de vacío

En esta sección calcularemos la energía de vacío de un campo bosónico sujeto a condiciones de borde de Dirichlet sobre varias superficies. Luego, para considerar los efectos térmicos extenderemos nuestros resultados al caso de temperatura $T > 0$.

Consideremos un campo escalar sin masa φ en $d + 1$ dimensiones, sujeto a condiciones de Dirichlet sobre N superficies denotadas por $\Sigma^{(a)}$, $a = 1, 2, \dots, N$. La amplitud

de vacío euclídeana, la cual denotaremos por $\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}]$, es el objeto que nos permite obtener la energía de vacío total, mediante la relación:

$$E_0 = - \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \log \frac{\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}]}{\mathcal{Z}_0}, \quad (3.1)$$

donde T' es la extensión del intervalo de tiempo (imaginario), y \mathcal{Z}_0 es la amplitud de vacío libre (sin superficies). El rol de \mathcal{Z}_0 es solamente fijar la energía a cero cuando no hay superficies.

También estaremos interesados en calcular la energía libre, $\mathcal{F}(\beta)$, del sistema (campo con bordes en un baño térmico a temperatura $T > 0$), la cual se obtiene a partir de la función de partición $\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}, \beta]$ (1.2). Sin embargo, formalmente $\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}, \beta]$ es equivalente a la amplitud de vacío euclídeana $\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}]$ (3.1), diferenciándose solamente por el hecho de que la primera tiene el intervalo de tiempo imaginario acotado a $[0, \beta]$, mientras que la extensión de la segunda es infinita. Lo cual implica que, en el espacio de Fourier la función de partición incluye una suma discreta sobre las frecuencias de Matsubara. Teniendo en cuenta esta diferencia, basta con ocuparnos de la amplitud de vacío y traducir los resultados para obtener la energía libre, cuando sea necesario.

En la representación de integrales de camino, la amplitud de vacío puede escribirse como (siguiendo las convenciones de [1]):

$$\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}] = \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S(\varphi)}, \quad (3.2)$$

donde $S = S_0 + S_I$ es la acción euclídeana y $[\mathcal{D}\varphi]$ denota la medida de integración del campo escalar φ con las condiciones de Dirichlet sobre cada una de las superficies $\Sigma^{(a)}$. El término de la acción libre S_0 , está dada por:

$$S_0(\varphi) = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x (\partial\varphi)^2, \quad (3.3)$$

mientras que el término de interacción S_I :

$$S_I = \frac{\lambda}{4!} \int d^{d+1}x (\varphi)^4. \quad (3.4)$$

En primer lugar consideraremos la acción formada solamente por la parte libre, $S = S_0$. Más adelante veremos un ejemplo con $S_I \neq 0$ en el caso de dos superficies planas paralelas.

Ahora bien, tal como en la sección anterior; las condiciones de borde se implementan

por medio de funcionales delta que forman parte de la medida,

$$[\mathcal{D}\varphi] = \mathcal{D}\varphi \prod_{a=1}^N \delta_{\Sigma^{(a)}}[\varphi]. \quad (3.5)$$

Por motivos de simplicidad y claridad en la implementación de la representación, consideremos el caso tridimensional espacial, $d = 3$; aunque para cada paso del proceso tenemos su análogo en cualquier número de dimensiones. Entonces, sea $(\sigma^1, \sigma^2) \rightarrow \mathbf{y}^{(a)}(\sigma)$ ($\mathbf{y}^{(a)} \in \mathbb{R}^{(3)}$) una parametrización de la superficie $\Sigma^{(a)}$. Siguiendo el trabajo original de [46], usamos un campo auxiliar $\xi^{(a)}(\tau, \sigma)$ para exponenciar cada funcional delta:

$$\delta_{\Sigma^{(a)}}[\varphi] = \int \mathcal{D}\xi^{(a)} \exp\left(i \int d\tau \int d^2\sigma \sqrt{g^{(a)}(\sigma)} \xi^{(a)}(\tau, \sigma) \varphi[\tau, \mathbf{y}^{(a)}(\sigma)]\right), \quad (3.6)$$

donde $g^{(a)}(\sigma) \equiv \det[g_{\alpha\beta}^{(a)}(\sigma)]$, ($\alpha, \beta = 1, 2$) es el determinante de la métrica inducida $g_{\alpha\beta}^{(a)}$ sobre la superficie, y $\tau \equiv x_0$. En términos de la parametrización previa,

$$g_{\alpha\beta}^{(a)}(\sigma) = \frac{\partial \mathbf{y}^{(a)}(\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^{(a)}(\sigma)}{\partial \sigma^\beta} \quad (\text{sin suma sobre } a). \quad (3.7)$$

La ecuación (3.6) garantiza la invariancia de reparametrización sobre cada superficie, siendo que los campos auxiliares se comportan como escalares bajo estas transformaciones.

Insertando (3.6) en (3.5), tenemos una expresión simple para $\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}]$:

$$\mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}] = \int \left(\prod_{a=1}^N \mathcal{D}\xi^{(a)} \right) \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-S_0(\varphi) + i \int d^4x J(x) \varphi(x)\right\} \quad (3.8)$$

donde definimos $J(x) \equiv \sum_{a=1}^N J^{(a)}(x)$, con:

$$J^{(a)}(x) = \int d\tau d^2\sigma \sqrt{g^{(a)}(\sigma)} \xi^{(a)}(\tau, \sigma) \delta(x_0 - \tau) \delta^{(3)}[\mathbf{x} - \mathbf{y}^{(a)}(\sigma)]. \quad (3.9)$$

Al efectuar la integral (Gaussiana) sobre el campo φ , el resultado puede escribirse, en una forma compacta, como:

$$\mathcal{Z}_\Sigma = \mathcal{Z}_0 \int \mathcal{D}\xi e^{-S_\Sigma(\xi)}, \quad (3.10)$$

donde $\mathcal{Z}_\Sigma \equiv \mathcal{Z}[\{\Sigma^{(a)}\}]$, $\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi)}$ y $\mathcal{D}\xi = \prod_{a=1}^N \mathcal{D}\xi^{(a)}$ denota la medida de integración para los campos auxiliares. S_Σ resulta ser una acción no local para los

campos $\xi^{(a)}$, dada por:

$$S_{\Sigma}(\xi) = \frac{1}{2} \int d\tau d^2\sigma \int d\tau' d^2\sigma' \sum_{a,b=1}^N \left[\xi^{(a)}(\tau, \sigma) \times \mathcal{M}_{(ab)}(\tau, \sigma; \tau', \sigma') \xi^{(b)}(\tau', \sigma') \right], \quad (3.11)$$

donde cada elemento de matriz de \mathcal{M} se expresa en términos del propagador del campo escalar \mathcal{K} :

$$\mathcal{M}_{(ab)}(\tau, \sigma; \tau', \sigma') = \sqrt{g^{(a)}(\sigma)} \mathcal{K}(\tau - \tau'; \mathbf{y}^{(a)}(\sigma) - \mathbf{y}^{(b)}(\sigma')) \sqrt{g^{(b)}(\sigma')}, \quad (3.12)$$

el cual, en $d = 3$, por ejemplo, resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_0, \mathbf{x}) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega x_0} \tilde{\mathcal{K}}(\omega, \mathbf{x}), \\ \tilde{\mathcal{K}}(\omega, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{e^{-|\omega||\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Puesto que el sistema físico que estamos considerando es independiente del tiempo, la acción puede escribirse de la siguiente forma, después de realizar una transformación de Fourier de la coordenada temporal:

$$S_{\Sigma} = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^2\sigma \int d^2\sigma' \sum_{a,b=1}^N \left[\tilde{\xi}^{(a)*}(\omega, \sigma) \times \tilde{\mathcal{M}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \tilde{\xi}^{(b)}(\omega, \sigma') \right], \quad (3.14)$$

donde la tilde indica la transformada de Fourier del objeto. Luego

$$\tilde{\mathcal{M}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') = \sqrt{g^{(a)}(\sigma)} \tilde{\mathcal{K}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \sqrt{g^{(b)}(\sigma')}, \quad (3.15)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{K}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \equiv \tilde{\mathcal{K}}[\omega; \mathbf{y}^{(a)}(\sigma) - \mathbf{y}^{(b)}(\sigma')]. \quad (3.16)$$

Finalmente efectuando la integración (3.10) sobre los campos auxiliares, tenemos:

$$\frac{\mathcal{Z}_{\Sigma}}{\mathcal{Z}_0} = \left\{ \det [\tilde{\mathcal{M}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \delta(\omega - \omega')] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.17)$$

donde el determinante se refiere a los índices continuos $\omega, \omega', \sigma, \sigma'$, como también a los discretos a, b . Luego, usando la relación (3.1), para la energía de vacío E_0 , tenemos:

$$E_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \log [\tilde{\mathcal{M}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma')], \quad (3.18)$$

donde la traza afecta los índices σ, σ' y los a, b (la traza sobre las frecuencias se realiza explícitamente por medio de la integral). Reservaremos el símbolo 'tr' para los casos donde la traza es sobre las σ, σ' .

La energía de vacío (3.18) contiene toda la energía de interacción del sistema, la cual incluye también las autoenergías de cada superficie. Estas cantidades infinitas deben ser sustraídas para quedarnos solamente con la energía de *interacción* finita de Casimir, ésta es la energía que queremos calcular a continuación ya que será el resultado principal de esta sección. La configuración en la cual todas las superficies están muy alejadas ya ha sido sustraída desde el inicio (3.1).

La información de las autoenergías yacen en los elementos de la diagonal ($a = b$) de $\widetilde{\mathcal{M}}$. La extracción de estos elementos se realiza factorizando la matriz diagonal, del siguiente modo

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') = \int d^2\sigma'' \sum_{c=1}^N \widetilde{\mathcal{D}}_{(ac)}(\omega; \sigma, \sigma'') \widetilde{\mathcal{T}}_{(cb)}(\omega; \sigma'', \sigma'), \quad (3.19)$$

donde

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \equiv (\widetilde{\mathcal{M}}_{(aa)})(\omega; \sigma, \sigma') \delta_{ab} \quad (3.20)$$

(sin sumar sobre a). Por construcción, $\widetilde{\mathcal{T}}(\omega)$ tiene los siguientes elementos de matriz:

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') = \int d^2\sigma'' [\widetilde{\mathcal{M}}_{(aa)}(\omega)]^{-1}(\omega; \sigma, \sigma'') \widetilde{\mathcal{M}}_{(ab)}(\omega; \sigma'', \sigma'), \quad (3.21)$$

(sin sumar sobre a). Esta factorización implica que $\det(\mathcal{M}) = \det(\mathcal{D}) \det(\mathcal{T})$; por lo tanto, recordando (3.17) y (3.18), podemos escribir:

$$E_0 = \sum_{a=1}^N E_0^{(aa)} + E_I, \quad (3.22)$$

donde

$$E_0^{(aa)} = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{tr} \log [\widetilde{\mathcal{M}}_{(aa)}(\omega)], \quad (3.23)$$

es la autoenergía de Casimir del objeto etiquetado por el índice a , y:

$$E_I = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \log [\widetilde{\mathcal{T}}(\omega)], \quad (3.24)$$

es la energía de *interacción*. Las autoenergías no contribuyen a las fuerzas de Casimir entre superficies ¹, puesto que son independientes de las distancias relativas entre las superficies.

El término de interacción, E_I , depende de la matriz $\widetilde{\mathcal{T}}$ la cual tiene la siguiente

¹Ellos contribuyen a la 'presión' de Casimir sobre cada superficie.

estructura: $\tilde{\mathcal{T}} \equiv \mathcal{I} + \tilde{\mathcal{T}}'$, donde \mathcal{I} es la matriz identidad (en los índices continuos discretos) y $\tilde{\mathcal{T}}'$ contiene elementos no nulos fuera de la diagonal ($a \neq b$).

Como paso previo al resultado final para E_I , buscaremos una expresión diferente (pero equivalente) para $\tilde{\mathcal{T}}_{(ab)}$, de modo tal que la fórmula para la energía de interacción no contenga explícitamente factores de la métrica. En efecto, denotando por $G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma')$, la inversa de $\mathcal{K}_{(aa)}(\omega; \sigma, \sigma')$:

$$\int d^2\sigma'' \mathcal{K}_{(aa)}(\omega; \sigma, \sigma'') G^{(a)}(\omega; \sigma'', \sigma') = \delta^{(2)}(\sigma - \sigma'), \quad (3.25)$$

tenemos que:

$$\left[\tilde{\mathcal{M}}_{(aa)}(\omega) \right]^{-1}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{g^{(a)}(\sigma)}} G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma') \frac{1}{\sqrt{g^{(a)}(\sigma')}}, \quad (3.26)$$

y

$$\tilde{\mathcal{T}}'_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{g^{(a)}(\sigma)}} \tilde{\mathcal{O}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \sqrt{g^{(b)}(\sigma')}, \quad (3.27)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{O}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \equiv \begin{cases} \int d^2\sigma'' G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma'') \mathcal{K}^{(ab)}(\omega; \sigma'', \sigma') & \text{if } a \neq b \\ 0 & \text{if } a = b \end{cases}. \quad (3.28)$$

La forma de escribir $\tilde{\mathcal{T}}'_{(ab)}$ es muy conveniente, pues permite que los determinantes de la métrica se puedan cancelar; sabiendo esto, llegamos a una expresión final simple que depende solamente de $\tilde{\mathcal{O}}$, el resultado más importante de esta sección: la energía de *interacción* de Casimir (o simplemente la energía de Casimir)

$$E_I = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \log \left[\mathcal{I} + \tilde{\mathcal{O}}(\omega) \right]. \quad (3.29)$$

Un elemento importante en el cálculo de E_I es $G^{(a)}$, este objeto posee una forma que depende implícitamente, de la geometría de cada superficie, y en general no puede evaluarse exactamente, excepto en casos simples. Sin embargo, muchas propiedades que veremos en secciones posteriores son independientes de este objeto.

La energía de Casimir E_I (3.29) a $T = 0$, se extiende fácilmente a su análogo a $T > 0$, es decir la energía libre, $\mathcal{F}(\beta)$; reemplazando la integral sobre las frecuencias, por una suma discreta sobre las frecuencias de Matsubara w_n ,

$$\mathcal{F}(\beta) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tr} \log \left[\mathcal{I} + \tilde{\mathcal{O}}(w_n) \right]. \quad (3.30)$$

Ahora, veamos el caso particular e importante de considerar solo dos superficies: $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$ ($N = 2$). La energía de interacción $E_I(\{\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}\})$, se obtiene expandiendo

en (3.29) el logaritmo, en potencias de \mathcal{O} . Las contribuciones de las potencias impares se anulan al tomar la traza sobre los índices discretos, entonces:

$$E_I(\{\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}\}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{tr} \left\{ [\mathcal{O}_{(12)}(\omega) \mathcal{O}_{(21)}(\omega)]^k \right\}, \quad (3.31)$$

sumando la serie obtenemos:

$$E_I(\{\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}\}) = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{tr} \log \left[1 - G^{(1)}(\omega) \mathcal{K}_{(12)}(\omega) G^{(2)}(\omega) \mathcal{K}_{(21)}(\omega) \right], \quad (3.32)$$

o

$$\mathcal{F}^{(12)}(\beta) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tr} \log \left[1 - G^{(1)}(\omega_n) \mathcal{K}_{(12)}(\omega_n) G^{(2)}(\omega_n) \mathcal{K}_{(21)}(\omega_n) \right], \quad (3.33)$$

para el caso a temperatura finita.

La expresión (3.29) para la interacción de N cuerpos, es la generalización de la fórmula ‘TGTG’ (3.32) para la interacción de dos cuerpos, descrita en [48, 51, 53, 54].

3.1.1. Dos superficies planas a $T > 0$

Como aplicación del formalismo presentado anteriormente, procederemos con el cálculo de la energía de Casimir para un campo escalar a temperatura finita $T > 0$, sujeta a condiciones de borde de Dirichlet sobre dos espejos paralelos. En este caso, la acción libre $S = S_0$ incluyendo un término de masa, está dado por:

$$S_0(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^d x (\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2). \quad (3.34)$$

En las coordenadas euclidianas: $x = (x_0, x_1, \dots, x_d)$ ($x_0 \equiv \tau$); las dos superficies corresponden a las regiones: $x_d = 0$ and $x_d = a$, y son parametrizadas de la siguiente forma:

$$\Sigma^{(1)} \equiv (x_{\parallel}, 0), \quad \Sigma^{(2)} \equiv (x_{\parallel}, a), \quad (3.35)$$

donde $x_{\parallel} = (\tau, \mathbf{x}_{\parallel}) = (\tau, x_1, \dots, x_{d-1})$. Además, suponemos que en la representación funcional para la función de partición, análoga a (3.2), el factor dependiente de β proveniente de la integración sobre los momentos ha sido absorbido en la definición de $\mathcal{D}\varphi$.

Los campos auxiliares $\xi_1(x_{\parallel})$ y $\xi_2(x_{\parallel})$, que están en un espacio de d dimensiones, nos permiten definir la corriente singular (3.9), J_p , con la información de la posición de los espejos:

$$J_p(x) \equiv \delta(x_d) \xi_1(x_{\parallel}) + \delta(x_d - a) \xi_2(x_{\parallel}), \quad (3.36)$$

la cual, no contiene factores de la métrica puesto que las superficies son planas.

Debido a que las superficies en consideración son paralelas, podemos realizar una transformación de Fourier sobre las coordenadas \mathbf{x}_{\parallel} , es decir las coordenadas paralelas a las superficies. Realizando esta transformación podemos escribir la función de partición, a partir de la ecuación (3.33), del siguiente modo:

$$\mathcal{Z}^{12}(\beta, a) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^d \mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^d} \times \text{tr} \log \left[1 - G^{(1)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) \mathcal{K}_{(12)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) G^{(2)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) \mathcal{K}_{(21)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) \right] \quad (3.37)$$

donde cada una de las matrices $G^{(1)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel})$ y $\mathcal{K}_{(12)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel})$ están dados por:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) = G^{(2)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) &= 2\sqrt{\omega_n^2 + \mathcal{E}^2(\mathbf{k}_{\parallel})}, \\ \mathcal{K}_{(12)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) = \mathcal{K}_{(21)}(\omega_n, \mathbf{k}_{\parallel}) &= \frac{e^{-a\sqrt{\omega_n^2 + \mathcal{E}^2(\mathbf{k}_{\parallel})}}}{2\sqrt{\omega_n^2 + \mathcal{E}^2(\mathbf{k}_{\parallel})}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por lo tanto, la expresión finita de la energía libre por unidad de área, resulta ser:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) = \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[1 - e^{-2a\sqrt{\omega_n^2 + \mathcal{E}^2(\mathbf{k}_{\parallel})}} \right]. \quad (3.39)$$

Esta es la versión a temperatura finita de la energía de Casimir o energía de Casimir *térmica*, la cual tiene la contribución de $T = 0$ (energía de vacío) y las contribuciones puramente térmicas. En efecto al tomar el límite $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$), obtenemos la energía de Casimir por unidad de área:

$$\mathcal{E}_c^{(0)}(a) \equiv \mathcal{F}_c^{(0)}(\infty, a) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_{\parallel}}{(2\pi)^d} \ln \left(1 - e^{-2a\sqrt{k_{\parallel}^2 + m^2}} \right). \quad (3.40)$$

Es evidente que la suma y la integral en las ecuaciones anteriores convergen, pues el integrando decae exponencialmente para grandes valores de los momentos e índices. Este comportamiento debería ser esperado, puesto que por construcción, las partes divergentes se han sustraído.

Denotemos por $\mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a)$ la parte solamente *dependiente de temperatura* de la energía libre, es decir

$$\mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) = \mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) - \mathcal{F}_c^{(0)}(\infty, a), \quad (3.41)$$

en forma mas explícita, se escribe como la diferencia entre una integral y una serie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) &= \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[1 - e^{-\frac{2a}{\beta} \sqrt{(2\pi n)^2 + (\beta \mathcal{E}(\mathbf{k}_{\parallel}))^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \ln \left[1 - e^{-\frac{2a}{\beta} \sqrt{(2\pi\nu)^2 + (\beta \mathcal{E}(\mathbf{k}_{\parallel}))^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Exploraremos mas detalladamente este resultado en las subsecciones siguientes.

Dualidad

Hemos mencionado anteriormente la similitud entre las teorías de campos a temperatura finita y las teorías con una dimensión espacial compactificada. Parece natural sugerir que esta semejanza formal pueda conducir a una relación de dualidad entre la longitud de compactificación del tiempo imaginario β y la distancia a entre las placas en la dirección de la coordenada x_d . Para obtener la dualidad entre β y a a nivel de la energía libre, calcularemos este objeto en una forma alternativa; basándonos en el conocimiento exacto de las energías de los modos del campo, que emergen de la existencia de condiciones de contorno de Dirichlet.

La energía ω_l de cada uno de los modos estacionarios, está dado por:

$$w_l(\mathbf{k}_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\pi^2 l^2}{a^2} + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (3.43)$$

Dado que cada uno de los modos se comportan como los grados de libertad del oscilador armónico, la energía libre $f[w_l(\mathbf{k}_{\parallel})]$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f[w_l(\mathbf{k}_{\parallel})] &= -\frac{1}{\beta} \ln \left[\sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta w_l(\mathbf{k}_{\parallel})(N+\frac{1}{2})} \right] \\ &= \frac{1}{2} w_l(\mathbf{k}_{\parallel}) + \frac{1}{\beta} \ln \left[1 - e^{-\beta w_l(\mathbf{k}_{\parallel})} \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Los dos términos del lado derecho claramente separan la parte dependiente y no dependiente de la temperatura. Tomando la parte dependiente de la temperatura, sumando sobre todos los grados de libertad y dividiendo por el área paralela se obtiene, $\mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a)$, la parte *dependiente de temperatura* de la densidad de energía libre:

$$\mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{l=1}^{+\infty} \ln \left[1 - e^{-\beta w_l(\mathbf{k}_{\parallel})} \right], \quad (3.45)$$

o de otro modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) &= \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \ln [1 - e^{-\beta w_l(\mathbf{k}_{\parallel})}] \\ &- \frac{1}{\beta} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \ln [1 - e^{-\beta \mathcal{E}(\mathbf{k}_{\parallel})}] . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Recordemos que estamos estudiando la energía libre para un mismo sistema, aunque con diferentes normalizaciones: sustracción $a \rightarrow \infty$ en (3.39) y $\beta \rightarrow \infty$ en (3.46). Entonces podemos escribir:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) = \mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) - \lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) , \quad (3.47)$$

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) - \mathcal{E}_c^{(0)}(a) = \mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a) - \mathcal{F}_t^{(0)}(\beta) , \quad (3.48)$$

donde $\mathcal{F}_t^{(0)}(\beta)$ es un objeto independiente de a .

Por lo tanto, si estamos interesados con cantidades que dependen de β y a , por ejemplo para estudiar la dependencia en temperatura de la fuerza de Casimir, es decir, derivadas con respecto a β y a de la expresión anterior

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} [\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a)] = \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial a} [\mathcal{F}_t^{(0)}(\beta, a)] , \quad (3.49)$$

o de otra manera

$$\tilde{\mathcal{F}}_c^{(0)}(\beta, a) = \tilde{\mathcal{F}}_t^{(0)}(\beta, a) \equiv \tilde{\mathcal{F}}^{(0)}(\beta, a) , \quad (3.50)$$

donde las tildes denotan la sustracción de cualquier término con una derivada segunda mixta nula.

Comparando la forma explícita de la densidad de energía libre entre (3.39) y (3.46), obtenemos la siguiente identidad:

$$[\beta \tilde{\mathcal{F}}_t^{(0)}](2a, \beta/2) = [\beta \tilde{\mathcal{F}}_c^{(0)}](\beta, a) , \quad (3.51)$$

la que combinada con (3.50), nos da una relación de dualidad entre a y β ²:

$$2a \rightarrow \beta , \quad \beta/2 \rightarrow a , \quad \tilde{\mathcal{F}}^{(0)}(2a, \beta/2) = \frac{\beta}{2a} \tilde{\mathcal{F}}^{(0)}(\beta, a) . \quad (3.52)$$

A continuación aplicaremos la relación de dualidad y la fórmula (3.39) para diferentes dimensiones. El caso $d = 1$, puede resolverse en forma exacta; mientras que para $d \geq 1$, solo podemos obtener resultados asintóticos, es decir, en los límites de altas y

²Esta relación de dualidad ha sido mostrada anteriormente para el caso $d = 3$ en [55, 56]

bajas temperaturas.

Aplicaciones en dimensiones $d = 1$ y $d > 1$

Para el caso $d = 1$, la energía libre (descartando constantes irrelevantes) está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n \neq 0} \ln(1 - e^{-2a|\omega_n|}), \quad (3.53)$$

equivalentemente, se puede expresar como un producto infinito:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) = \frac{1}{\beta} \ln \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^{2n}), \quad (3.54)$$

donde $q = e^{-2\pi a/\beta}$, y $|q| < 1$ para $T > 0$. Esta forma es más conveniente, pues permite la aplicación de las propiedades de las funciones elípticas; de modo que la suma resulta ser:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) = \frac{\pi a}{6\beta^2} + \frac{1}{\beta} \ln[\eta(2a/\beta i)], \quad (3.55)$$

donde $\eta(z)$ es la función η de Dedekind. Al tomar el límite $T \rightarrow 0$, se obtiene el resultado apropiado: $\mathcal{E}_c^{(0)}(a) = \frac{\pi}{24a}$.

La relación de dualidad (3.52) se satisface directamente por el hecho de que la función η satisface la propiedad $\eta(1/z) = \sqrt{iz} \eta(z)$.

Aunque para dimensiones mayores $d > 1$ la energía libre no se puede calcular exactamente, la relación (3.52) se sigue satisfaciendo para cualquier valor de temperatura T y separación de las placas a . En particular si conocemos el comportamiento para $a \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow 0$) podemos invocar la relación de dualidad para conocer el comportamiento para $\beta \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0\infty$), es decir, los comportamientos de altas y bajas temperaturas.

Escribamos la energía (3.39) en $d + 1$ dimensiones, como

$$\beta \mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) = C_d \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-1} \sum_n \int_0^\infty dx x^{d-2} \ln \left(1 - e^{-\gamma\sqrt{n^2+x^2}}\right) \quad (3.56)$$

donde C_d es un factor que solo depende de la dimensión y $\gamma = 4\pi a/\beta$. La relación de dualidad implica que ésta ecuación deber ser equivalente a la ecuación donde γ es reemplazado por $(2\pi)^2/\gamma$ (ó $a \rightarrow \beta/2$ (3.52)).

En el límite de temperaturas altas $\beta \rightarrow 0$, la fórmula (3.56), corresponde a $\gamma \rightarrow \infty$; por lo tanto, $n = 0$ contiene la contribución mas significativa de la expansión, con $n = 1, 2, \dots$ como correcciones superiores.

La forma explícita del primer término es:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) \sim -\frac{1}{2\pi^{d/2}\beta} \frac{\Gamma(d/2)\zeta(d)}{(2a)^{d-1}}, \quad \beta \rightarrow 0, \quad (3.57)$$

donde aplicando la fórmula de dualidad (3.52) $\gamma \rightarrow (2\pi)^2/\gamma$, podemos obtener la primera contribución en el régimen de bajas temperaturas,

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) \sim -\frac{1}{2\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2)\zeta(d)}{(\beta)^d} \quad (\beta \rightarrow \infty), \quad (3.58)$$

la cual es independiente de a . Las siguientes contribuciones ($n = 1, 2, \dots$) involucran integrales más complejas; sin embargo para dimensión $d = 3$, se reducen a términos como $e^{-n\gamma\sqrt{n^2+x^2}}$. Por lo tanto, la contribución correspondiente al término con $n = 1$ ($\beta \rightarrow 0$ ó $\gamma \rightarrow \infty$) está dada por:

$$-\frac{1}{2a\beta^2} e^{-4\pi a/\beta}, \quad (3.59)$$

de nuevo, la relación de dualidad implica que,

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) \sim -\frac{1}{2a\beta^2} e^{-\pi\beta/a} \quad (\beta \rightarrow \infty). \quad (3.60)$$

Reuniendo estos resultados para $d = 3$, podemos ver que, para temperaturas altas, $\beta \rightarrow 0$:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) \sim -\frac{1}{16\pi} \frac{\zeta(3)}{a^2\beta} - \frac{1}{2a\beta^2} e^{-4\pi a/\beta}, \quad (3.61)$$

mientras que para temperaturas bajas $\beta \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{F}_c^{(0)}(\beta, a) \sim -\frac{\pi^2}{1440a^3} \left[1 + \frac{360}{\pi^3} \frac{a^3}{\beta^3} \zeta(3) + \frac{720}{\pi^2} \frac{a^2}{\beta^2} e^{-\pi\beta/a} \right]. \quad (3.62)$$

Campo interactuante

Los resultados de la subsección anterior se aplican para un campo libre (sin interacción). Consideremos ahora la inclusión del término de interacción (3.4) a la acción libre (3.3). Para abordar el problema, podemos proceder de dos maneras. El primero es el procedimiento ‘perturbativo’, que consiste en expandir el término de interacción en potencias sucesivas de la constante de acoplamiento λ , posponiendo la integración sobre el campo escalar hasta el final del cálculo. El segundo método es un procedimiento no perturbativo, que toma como punto de partida una analogía con la representación (2.33) de la TCTF, donde primero debe calcularse la funcional conectada $\mathcal{W}[J]$, bajo alguna aproximación, con un término de fuente que fije las condiciones de borde, es decir: $J = J_p$ (3.36).

Desarrollo perturbativo. La serie que contiene todos las contribuciones de todos los órdenes en la constante λ proviene de evaluar:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\beta, a) &= \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_I(\varphi)} e^{-S_0(\varphi)} \\ &= \mathcal{Z}^{(0)}(\beta, a) \langle e^{-S_I(\varphi)} \rangle ,\end{aligned}\quad (3.63)$$

donde el promedio $\langle \dots \rangle$ denota el promedio funcional con la acción libre y la medida de integración $[\mathcal{D}\varphi]$, es decir:

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{\int [\mathcal{D}\varphi] \dots e^{-S_0(\varphi)}}{\int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_0(\varphi)}} . \quad (3.64)$$

El término de primer orden del desarrollo perturbativo, $\mathcal{F}^{(1)}$:

$$\mathcal{F}^{(1)}(\beta, a) = \frac{\lambda}{4!\beta} \int d^{d+1}x \langle [\varphi(x)]^4 \rangle , \quad (3.65)$$

contiene como argumento de la integral la contracción de cuatro campos; como es habitual, podemos usar el teorema de Wick para escribirlo en términos de contracciones fundamentales, es decir de las funciones de correlación de puntos.

Las funciones de correlación se construyen a partir de la funcional generatriz $Z_0^J(\beta, a)$:

$$\mathcal{Z}_0^J(\beta, a) = \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_0(\varphi) + \int d^{d+1}x J(x)\varphi(x)} , \quad (3.66)$$

donde $J(x)$ es un campo externo arbitrario. En forma más explícita, haciendo notoria la presencia de las condiciones de borde, tenemos:

$$\mathcal{Z}_0^J(\beta, a) = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 e^{-S_0[\varphi] + \int d^{d+1}x [iJ_p(x) + J(x)]\varphi(x)} . \quad (3.67)$$

Realizando la integral (Gaussiana) sobre el campo escalar φ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{Z}_0^J(\beta, a)}{\mathcal{Z}_0(\beta, a)} &= \int \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{x_{\parallel}, y_{\parallel}} \xi_{\alpha}(x_{\parallel}) \Omega_{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) \xi_{\beta}(y_{\parallel}) \right. \\ &\quad \left. + i \int_{x_{\parallel}} \xi_{\alpha}(x_{\parallel}) L_{\alpha}(x_{\parallel}) + \frac{1}{2} \int_{x, y} J(x) \Delta(x, y) J(y) \right] ,\end{aligned}\quad (3.68)$$

donde: $L_{\alpha}(x_{\parallel}) \equiv \int_y \Delta(x_{\parallel}, a_{\alpha}; y) J(y)$, con $a_{\alpha} = (\alpha - 1)a$, $\alpha = 1, 2$. Finalmente, integrando sobre los campos auxiliares, tenemos el resultado esperado:

$$\mathcal{Z}_0^J(\beta, a) = \mathcal{Z}_0(\beta, a) \exp \left(\frac{1}{2} \int_{x, y} J(x) (\Delta(x; y) - M(x; y)) J(y) \right) , \quad (3.69)$$

que incluye la función de correlación térmica $G(x, y) = \Delta(x; y) - M(x; y)$ del sistema a temperatura finita. La primera contribución $\Delta(x; y)$ es la función de correlación térmica sin condiciones de borde, mientras que la segunda $M(x; y)$ contiene explícitamente la información de las condiciones de borde impuestas sobre el campo:

$$\begin{aligned} G(x; y) &= \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = \Delta(x; y) - M(x; y) \\ &= \Delta(x; y) - \int_{x'_{\parallel}, y'_{\parallel}} \left\{ \Delta(x_{\parallel}, x_d; x'_{\parallel}, a_{\alpha}) \right. \\ &\quad \times \left. [\Omega^{-1}]_{\alpha\beta}(x'_{\parallel}, y'_{\parallel}) \Delta(y'_{\parallel}, a_{\beta}; y_{\parallel}, y_d) \right\}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

A manera de verificación, se puede ver que el propagador satisface las condiciones de borde impuestas sobre las placas en $x_d = 0$ y $x_d = a$. Por ejemplo, cuando uno de sus argumentos se aproxima a una de las placas, el propagador se anula, en efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{x_d \rightarrow a_{\gamma}} G(x; y) &= \Delta(x_{\parallel}, a_{\gamma}; y) - \int_{x'_{\parallel}, y'_{\parallel}} \left\{ \Omega_{\gamma\alpha}(x_{\parallel}; x'_{\parallel}) [\Omega^{-1}]_{\alpha\beta}(x'_{\parallel}, y'_{\parallel}) \Delta(y'_{\parallel}, a_{\beta}; y_{\parallel}, y_d) \right\} \\ &= \Delta(x_{\parallel}, a_{\gamma}; y) - \int_{y'_{\parallel}} \delta_{\gamma\beta} \delta(x_{\parallel}, y'_{\parallel}) \Delta(y'_{\parallel}, a_{\beta}; y_{\parallel}, y_d) \\ &= \Delta(x_{\parallel}, a_{\gamma}; y) - \Delta(x_{\parallel}, a_{\gamma}; y) = 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

de forma análoga para el segundo argumento.

Por otro lado, el término $M(x; y)$ del propagador, viene dado por:

$$M(x; y) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} e^{i w_n (\tau_x - \tau_y) + i \mathbf{k}_{\parallel} (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} \widetilde{M}(w_n, \mathbf{k}_{\parallel}; x_d, y_d), \quad (3.72)$$

donde la matriz $\widetilde{M}(w_n, \mathbf{k}_{\parallel}; x_d, y_d)$ es igual a:

$$\frac{e^{-(|x_d|+|y_d|)\mathcal{E}} - e^{-(|x_d-a|+|y_d|+a)\mathcal{E}} - e^{-(|x_d|+|y_d-a|+a)\mathcal{E}} + e^{-(|x_d-a|+|y_d-a|)\mathcal{E}}}{2\mathcal{E}(1 - e^{-2a\mathcal{E}})}, \quad (3.73)$$

con $\mathcal{E} = \sqrt{w_n^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}$.

Con estos resultados podemos retomar el cálculo de la primera corrección a la energía libre de Casimir (3.65). En este punto surge el problema de tratar con las divergencias, debido a que estamos frente a una teoría interactuante. Para sustraer desde el inicio las contribuciones independientes de a , podemos trabajar solamente con las derivadas de la energía libre respecto de a . Obviamente, esto es una fuerza, y contiene la misma información que la energía del cual se haya sustraído los términos infinitos independientes de a .

Denotando por F_{cas} estas derivadas, tenemos:

$$F_{cas} = F_{cas}^{(0)} + F_{cas}^{(1)}, \quad (3.74)$$

donde el término $F_{cas}^{(1)}$ es la corrección de primer orden a la fuerza de Casimir libre $F_{cas}^{(0)}$. En $F_{cas}^{(1)}$ hay un término donde solamente aparece $\Delta(x, y)$; este puede renormalizarse de la forma usual en la teoría de campos a temperatura finita, es decir, por la sustracción del término de temperatura cero, más la inclusión de un contratérmino de masa de primer orden [27].

Entonces, manteniendo solamente los términos dependientes de β y a , vemos que

$$F_{cas}^{(1)} = F_{cas, \Delta M}^{(1)} + F_{cas, MM}^{(1)}, \quad (3.75)$$

donde:

$$F_{cas, \Delta M}^{(1)} = -\frac{g}{2\beta} \Delta^T(x, x) \int d^{d+1}x \frac{\partial M(x, x)}{\partial a} \quad (3.76)$$

y

$$F_{cas, MM}^{(1)} = \frac{g}{4\beta} \int d^{d+1}x M(x, x) \frac{\partial M(x, x)}{\partial a}. \quad (3.77)$$

Denotando por $f_{\Delta, M}$ and f_{MM} la fuerza por unidad de área (omitiendo los subíndices y superíndices), la primera corrección a la fuerza de Casimir será:

$$\frac{F_{cas}^{(1)}}{A_{d-1}} = f_{\Delta, M} + f_{M, M}, \quad (3.78)$$

donde:

$$f_{\Delta, M} = -\frac{g}{2\beta} \Delta^T(0) \sum_n \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_d \frac{\partial \widetilde{M}(\mathbf{k}_{\parallel}, w_n, x_d)}{\partial a}, \quad (3.79)$$

y

$$\begin{aligned} f_{M, M} &= \frac{g}{4\beta^2} \sum_{n, l} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_d \\ &\times \widetilde{M}(\mathbf{k}_{\parallel}, w_n, x_d) \frac{\partial \widetilde{M}(\mathbf{p}_{\parallel}, w_l, x_d)}{\partial a}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

son términos que dependen de $\widetilde{M}(w_n, \mathbf{k}_{\parallel}; x_d)$ (3.73). A continuación efectuamos la integral sobre la coordenada x_d , después de realizar el cambio de variable $x \rightarrow x + \frac{a}{2}$ (para obtener una forma más simétrica), encontrando:

$$f_{\Delta, M} = -\frac{g}{4\beta} \Delta^T(0) \sum_n \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \left(\frac{1}{2E_k} + \frac{a}{2} \operatorname{csch}^2(aE_k) - \frac{\coth(aE_k)}{2E_k} \right). \quad (3.81)$$

donde la función dependiente de temperatura $\Delta^T(0)$ está dada por:

$$\Delta^T(0) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega} n_B(\beta, \omega), \quad (3.82)$$

y $n_B(\beta, \omega)$ es la función de distribución de Bose, con $\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Podemos expresar $f_{\Delta, M}$ definiendo la función n_k que se obtiene de la función de distribución de Bose $n_B(\beta, \omega)$ reemplazando β por $2a$ y ω por $E_k = \sqrt{\omega_n^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}$, es decir,

$$n_k(2a, E_k) \equiv \frac{1}{e^{2a E_k} - 1}. \quad (3.83)$$

Luego, con estas notaciones, vemos que la contribución a la fuerza

$$f_{\Delta, M} = \frac{g}{4\beta} \Delta^T(0) \sum_n \int \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\frac{n_k}{E_k} - 2a n_k (1 + n_k) \right], \quad (3.84)$$

es claramente convergente.

El otro término se obtiene de manera similar. Usando las mismas notaciones, tenemos:

$$f_{M, M} = \frac{g}{4\beta^2} \sum_{n, l} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} f(k, p), \quad (3.85)$$

el cual también es convergente; donde p representa $(\omega_l, \mathbf{p}_{\parallel})$, y

$$\begin{aligned} f(k, p) &= (n_p + 1) \left(\frac{n_p}{E_k^2} - \frac{n_k n_p}{E_k / 2a} \right) \\ &+ \left(n_p + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{n_k}{E_k E_p} - \frac{E_k n_p - E_p n_k}{E_k (E_k^2 - E_p^2)} \right) - \frac{n_p}{2E_k (E_k + E_p)}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Tratamiento No-perturbativo. Este método consiste en integrar, aunque de manera formal, el campo escalar *antes* de realizar la expansión perturbativa. En efecto, introduciendo los campos auxiliares, desde el principio, para imponer las condiciones de Dirichlet, la función de partición se escribe como:

$$\mathcal{Z}(\beta, a) = \int \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 e^{-\mathcal{W}[iJ_p]}, \quad (3.87)$$

donde \mathcal{W} denota la funcional generatriz de las funciones de correlación conectadas a temperatura finita, definida mediante:

$$e^{-\mathcal{W}[J]} \equiv \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int d^{d+1}x J(x)\varphi(x)}, \quad (3.88)$$

donde J es una corriente arbitraria, que debe ser reemplazada por J_p (3.36), para implementar las condiciones de borde sobre los dos espejos. Supongamos que en el

curso de evaluar \mathcal{W} , se ha usado un procedimiento de renormalización usual, para darle sentido a los posibles infinitos. Luego, escribamos la expansión funcional de $\mathcal{W}[J]$ en potencias de la fuente J :

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{W}_0 + \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \int d^{d+1}y \mathcal{W}_2(x, y) J(x) J(y) + \dots \quad , \quad (3.89)$$

donde, las \mathcal{W}_k son funciones de correlación conectadas de k -puntos. Los términos impares están ausentes debido a que la perturbación es cuadrática.

En alguna aproximación apropiada, la expansión funcional puede truncarse. Por supuesto esta no debe ser una expansión trivial en la constante de acoplamiento; en su lugar, por ejemplo, un campo medio o una expansión de *large N*. Entonces el término más importante será el cuadrático:

$$\mathcal{Z}(\beta, a) \sim \mathcal{Z}(\beta) \mathcal{Z}_q(\beta, a) \quad , \quad (3.90)$$

donde $\mathcal{Z}(\beta) = e^{\mathcal{W}_0}$ es la función de partición térmica en ausencia de placas, mientras que

$$\mathcal{Z}_q(\beta, a) = \int \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 e^{-\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \int d^{d+1}y \mathcal{W}_2(x, y) J_p(x) J_p(y)} \quad , \quad (3.91)$$

depende del propagador completo (renormalizado) $\mathcal{W}_2(x, y)$. Usando la forma explícita de J_p , vemos que la integral

$$\mathcal{Z}_q(\beta, a) = \int \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 e^{-S_q(\xi)} \quad , \quad (3.92)$$

es gaussiana, con

$$S_q(\xi) = \frac{1}{2} \int d^d x_{\parallel} d^d y_{\parallel} \xi_a(x_{\parallel}) \Omega_{ab}^q(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \xi_b(y_{\parallel}) \quad , \quad (3.93)$$

donde

$$\Omega^q(x_{\parallel} - y_{\parallel}) = \begin{bmatrix} D(x_{\parallel} - y_{\parallel}; 0) & D(x_{\parallel} - y_{\parallel}; -a) \\ D(x_{\parallel} - y_{\parallel}; a) & D(x_{\parallel} - y_{\parallel}; 0) \end{bmatrix} \quad . \quad (3.94)$$

El propagador *completo* de tiempo-imaginario D , tiene en general la siguiente forma:

$$D(\tau_x - \tau_y; \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\omega_n(\tau_x - \tau_y) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \tilde{D}(\omega_n, \mathbf{k}) \quad , \quad (3.95)$$

donde, en general, la $\tilde{D}(\omega_n, \mathbf{k})$, es una función complicada de los argumentos. Sin embargo, veamos que las correcciones no perturbativas producen un resultado simple. En efecto, si consideramos el propagador en la versión resumada IR del campo escalar

sin masa:

$$\tilde{D}(\omega_n, \mathbf{k}) = [\omega_n^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + \Pi_{\beta}(T)]^{-1}, \quad (3.96)$$

con $\Pi_{\beta}(T)$ siendo la masa térmica. Por ejemplo en $d = 3$, las primeras dos contribuciones no triviales corresponden a un término que es lineal en λ más un término no-analítico:

$$\Pi_{\beta}(T) = \frac{\lambda T^2}{24} \left[1 - 3\left(\frac{g}{24\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots \right]. \quad (3.97)$$

Después de reemplazar esta expresión, vemos que la correspondiente contribución a la energía libre de Casimir, resulta ser:

$$\mathcal{F}_c(\beta, a) = \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[1 - e^{-2a\sqrt{\omega_n^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + \Pi_{\beta}(T)}} \right], \quad (3.98)$$

donde la contribución $a \rightarrow \infty$ ha sido sustraída.

Note que en esta expresión, la energía libre es equivalente a lo que se habría obtenido para un campo masivo (con una masa dependiente de la temperatura). Dado que una masa introduce una longitud de decaimiento $l(T)$ (del orden inverso a la masa térmica) en el problema; es inmediato ver que la energía libre de Casimir será despreciable cuando $a \gg \sqrt{\Pi_{\beta}(T)}$, esto implica una dependencia no trivial con la constante de acoplamiento.

3.2. No superposición en el efecto Casimir

En esta sección analizaremos las propiedades de no superposición de la energía de Casimir para un sistema de más de dos superficies. La energía de vacío (3.22) del campo sujeto a condiciones de Dirichlet sobre N superficies, tiene dos contribuciones: El primero, claramente es un término aditivo, pues es la suma de las energías de autointeracción de cada superficie $E_0^{(aa)}$ dada por (3.23). El segundo término, es la energía de interacción E_I (3.29), el cual no se puede escribir como la suma de la interacción entre pares de superficies; éste es el término sensible al fenómeno que queremos investigar. Para mayor claridad volvemos a escribirlo:

$$E_I = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \log \left[\mathcal{I} + \mathcal{O}(\omega) \right]. \quad (3.99)$$

Es conocido que la interacción de Casimir entre varios objetos no es aditiva, en este sentido se han realizado muchos estudios. Algunas más recientes muestran incluso comportamientos inesperados como el efecto de interacción repulsiva entre tres objetos [57], lo cual claramente es una señal de que la interacción de Casimir depende de una manera no trivial de la geometría de las superficies.

Abordaremos el problema de manera formal y general, luego consideraremos algunas simplificaciones que mencionaremos en el transcurso de la sección. En primer lugar debemos establecer una manera de ‘medir’ el fenómeno de la no-superposición. De nuevo, trabajaremos en $d = 3$, pero los resultados se pueden adaptar directamente para otras dimensiones.

Suponiendo que conocemos la energía de interacción entre N superficies $E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^N)$, ¿cómo es la energía de $N + 1$ superficies, $E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^{N+1})$?. Veremos que la superficie extra Σ_{N+1} , modifica totalmente la energía del sistema original.

Si la superposición fuere válida, la diferencia entre las dos energías debería ser la suma de las energías de interacción entre Σ_{N+1} y cada una de las Σ_a , con $a = 1, \dots, N$. Por lo tanto, $\delta E_I(N)$, definido por:

$$\delta E_I(N) \equiv E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^{N+1}) - E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^N) - \sum_{a=1}^N E_I(\{\Sigma^{(N+1)}, \Sigma^{(a)}\}), \quad (3.100)$$

es la cantidad que nos permite ‘medir’ la no superposición; es decir, la superposición se rompe siempre que $\delta E_I(N) \neq 0$. Recíprocamente, para que la energía de las N superficies satisfagan superposición necesitamos: $\delta E_I(M) = 0$, para $M = 2, \dots, N - 1$.

Para evaluar $\delta E_I(N)$, necesitamos conocer la forma de $E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^{N+1}) - E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^N)$ y de $E_I(\{\Sigma^{(N+1)}, \Sigma^{(a)}\})$. Éste último ya es conocido, puesto que es la energía de interacción para el par de superficies, $\Sigma^{(N+1)}$ y $\Sigma^{(a)}$:

$$E_I(\{\Sigma^{(N+1)}, \Sigma^{(a)}\}) = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{tr} \log \left[1 - G^{(N+1)}(\omega) \mathcal{K}_{(N+1,a)}(\omega) G^{(a)}(\omega) \mathcal{K}_{(a,N+1)}(\omega) \right]. \quad (3.101)$$

El otro componente para evaluar $\delta E_I(N)$ se obtiene del siguiente modo. Usando el álgebra de los determinantes, podemos relacionar el determinante de una matriz de orden $(N + 1)$ y una de orden N :

$$\det [\mathcal{I}_{(ab)} + \mathcal{O}_{(ab)}]_{(N+1) \times (N+1)} = \det [\mathcal{I}_{(ab)} + \mathcal{O}'_{(ab)}]_{N \times N}, \quad (3.102)$$

donde:

$$\mathcal{O}'_{(ab)} \equiv \mathcal{O}_{(ab)} - \mathcal{O}_{(a N+1)} \mathcal{O}_{(N+1 b)}. \quad (3.103)$$

Por lo tanto, la diferencia entre las energías para las $N + 1$ y N superficies puede ponerse en la siguiente forma:

$$E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^{N+1}) = E_I(\{\Sigma_a\}_{a=1}^N) + \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \log [\mathcal{I} - \mathcal{Q}], \quad (3.104)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') &\equiv \int d^2\sigma'' \int d^2\sigma''' \sum_{c=1}^N \left\{ [(\mathcal{I} + \mathcal{O})^{-1}]_{(ac)}(\omega; \sigma, \sigma'') \right. \\ &\times \left. \mathcal{O}_{(c N+1)}(\omega; \sigma'', \sigma''') \mathcal{O}_{(N+1 b)}(\omega; \sigma''', \sigma') \right\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Ahora se puede extraer la energía de interacción entre pares, resultando

$$\delta E_I(N) = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \log[I + \Lambda(\omega)] \quad (3.106)$$

con:

$$\begin{aligned} \Lambda_{(ab)} &= [I - \mathcal{O}_{(N+1 a)} \mathcal{O}_{(a N+1)}]^{-1} \\ &\times \left\{ \sum_{c=1}^N [\mathcal{O} (\mathcal{I} + \mathcal{O})^{-1}]_{(ac)} \mathcal{O}_{(c N+1)} \mathcal{O}_{(N+1 b)} \right. \\ &\left. - \mathcal{O}_{(a N+1)} \mathcal{O}_{(N+1 b)} + \mathcal{O}_{(N+1 a)} \mathcal{O}_{(a N+1)} \delta_{ab} \right\} \end{aligned} \quad (3.107)$$

donde I en el primer factor es el operador identidad de las funciones definidas sobre el espacio de parámetros, mientras que \mathcal{I} también actúa sobre los índices de espacio (los índices discretos no se suman), y los productos deben ser entendidos en el sentido operatorial, considerando los *kernels* como elementos de matriz con índices continuos.

A pesar de que su forma es bastante complicada, podemos extraer algunas conclusiones. La más inmediata es que la intensidad de los efectos de no superposición resulta despreciable si la magnitud de los elementos de matriz \mathcal{O} entre la superficie $(N+1)$ -ésima y los previos es pequeña.

Además, para que la corrección sea más pequeña que los términos de superposición, necesitamos que los $\mathcal{O}_{(ab)}$, para $a, b = 1, \dots, N$ sean pequeños. Por tanto la conclusión principal de esta parte nos dice que para que la superposición sea válida, todos los elementos de matriz de \mathcal{O} deben ser pequeños. De hecho podemos ver que, cuando este es el caso, la forma de la corrección al orden más bajo en los elementos de matriz, depende de los elementos de matriz que involucran a todos los bordes:

$$\delta E_I(N) \sim -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{a,b=1}^N \text{tr} \left[\mathcal{O}_{(N+1 a)} \mathcal{O}_{(ab)} \mathcal{O}_{(b N+1)} \right]. \quad (3.108)$$

Suponiendo que \mathcal{O} es pequeño, se puede emplear una expansión perturbativa de la energía de interacción. Antes de seguir con el tratamiento perturbativo general; vamos a considerar solamente tres superficies, para tener una mejor comprensión del fenómeno de no superposición.

3.2.1. Tres superficies: esferas

Como un caso particular, para poner en manifiesto el fenómeno de no superposición, consideraremos el caso de tres objetos compactos. Toda la información de la interacción de las superficies está encerrada en la matriz \mathcal{O} (simétrica) definida en (3.21), necesaria para obtener la energía de interacción (3.24). Los elementos de matriz \mathcal{O}_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) nos dan información de la interacción entre todos los pares de superficies $\Sigma^{(i)}$ y $\Sigma^{(j)}$. Los elementos de la diagonal son unidades, debido a que las autointeracciones ya han sido extraídas.

Nuestro objetivo es decomponer la matriz $\mathcal{I} + \mathcal{O}$ en una parte que contenga solamente la interacción entre pares de superficies: la contribución de superposición; y otra que contenga la información de la no superposición. En efecto, usando las propiedades de matrices en bloques ([58]), donde asumimos que las propiedades para matrices finitas se cumplen para matrices infinitas, tenemos la siguiente factorización:

$$\det(\mathcal{I} + \mathcal{O}) = \det \mathcal{N} \det \mathcal{Q}. \quad (3.109)$$

El primer término $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{12} \mathcal{N}_{13} \mathcal{N}_{23}$, es el producto de los factores \mathcal{N}_{ij} , que tienen la siguiente forma:

$$\mathcal{N}_{ij} = 1 - \mathcal{T}_{ij} \mathcal{T}_{ji}. \quad (3.110)$$

Observemos que en \mathcal{N} la interacción entre pares está factorizada, cada \mathcal{N}_{ij} es solamente la interacción entre las superficies $\Sigma^{(i)}$ y $\Sigma^{(j)}$.

El término restante $\mathcal{Q} = \Omega / \mathcal{N}$, contiene una combinación no trivial de todos los elementos \mathcal{N}_{ij} , de la siguiente forma:

$$\Omega = 1 - (\Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \Gamma_{23}) + 2 (\Gamma_{12} \Gamma_{13} \Gamma_{23})^{1/2} \quad (3.111)$$

donde hemos definido $\Gamma_{ij} = 1 - \mathcal{N}_{ij}$.

Consideremos ahora tres esferas con radios iguales R , los cuales están muy separados entre sí, es decir, R es muy pequeño comparado con la distancia entre los centros \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_j de cada par de esferas: $R \ll |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. En ésta aproximación podemos despreciar la estructura de las superficies en el cálculo de los términos \mathcal{N}_{ij} ; por lo tanto, el factor $\mathcal{K}^{(ij)}(\omega; \sigma, \sigma')$ será reemplazado por $\mathcal{K}(\omega, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$, mientras que el término $G^{(a)}$ (3.28) se obtiene calculando la inversa del desarrollo en armónicos esféricos del propagador

$$\mathcal{K}^{(ii)}(\omega; \sigma, \sigma') = \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}^{(i)}(\sigma) - \mathbf{x}^{(j)}(\sigma')|}}{4\pi|\mathbf{x}^{(i)}(\sigma) - \mathbf{x}^{(j)}(\sigma')|} = \sum_{l,m} \sum_{l',m'} Y_{l,m}^*(\theta, \psi) A_{lm,l'm'} Y_{l',m'}(\theta', \psi'). \quad (3.112)$$

Los elementos $A_{lm,l'm'}$ se escriben como productos de funciones de Bessel esféricas, de

la siguiente forma:

$$A_{lm,l'm'} = -|\omega| j_l(i|\omega|R) h_l(i|\omega|R) \delta_{ll'} \delta_{mm'} .$$

De este modo, encontramos que

$$\Gamma_{ij} = 4\pi \left(\frac{\mathcal{K}(\omega, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{m(\omega, R)} \right)^2 , \quad (3.114)$$

donde:

$$\mathcal{K}(\omega, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \frac{e^{-|\omega| |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{4\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.115)$$

y

$$m(\omega, R) = \frac{1 - e^{-2|\omega|R}}{2|\omega|4\pi R^2} . \quad (3.116)$$

Supongamos el caso particular en que una esfera ($\Sigma^{(3)}$) está muy alejada de los otros dos ($\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$). En estas condiciones se encuentra que los términos Γ_{13} y Γ_{23} son muy pequeños (~ 0), por lo tanto $\Omega = 1$; en consecuencia la energía total proviene solamente del término $N = N_{12}$, es decir, de la interacción entre las superficies $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$, como era de esperarse para ésta configuración particular de las superficies.

Para graficar mejor la interacción de las tres esferas, vamos a escribir la energía de interacción total (3.24), usando la descomposición (3.109), como la suma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_S + \mathcal{E}_{NS} , \quad (3.117)$$

donde \mathcal{E}_S y \mathcal{E}_{NS} están dados respectivamente por:

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{tr} \log (1 - \mathcal{O}_{ij} \mathcal{O}_{ji}) , \quad (3.118)$$

$$\mathcal{E}_{NS} = \frac{1}{2} \log \prod_w \det(Q) . \quad (3.119)$$

Claramente la energía \mathcal{E}_S , es la *energía de superposición* del sistema, debido a que aparece como la suma de la interacción entre cada par de superficies (3.32). Por ende \mathcal{E}_{NS} es la *energía de no superposición*.

Dado que estamos interesados en \mathcal{E}_{NS} , escribamos en forma más explícita este término. Efectuando un cambio de variable que nos permita independizarnos de la escala: $\mathbf{x}_i = \mathbf{r}_i/R$ y $k = \omega R$. A partir de (3.115) y (3.116), definimos las siguientes funciones:

$$g(k) = \frac{4\sqrt{\pi} k}{1 - e^{-2k}} , \quad (3.120)$$

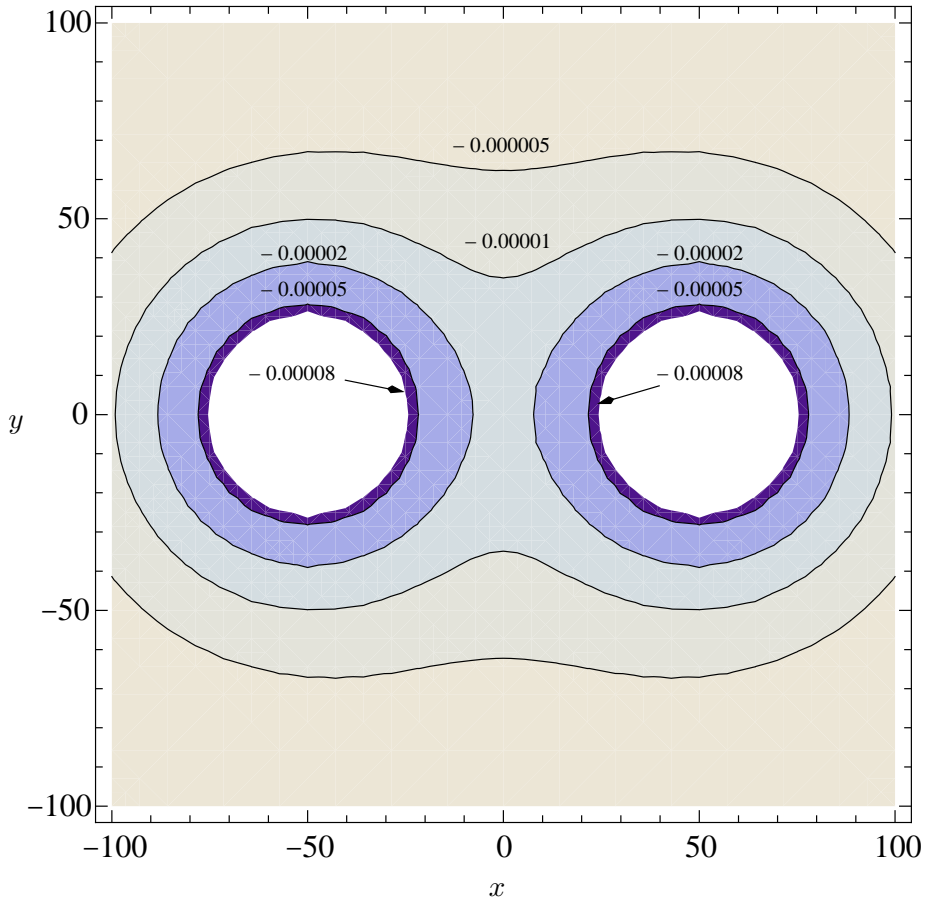


Figura 3.1: Curvas para valores constantes de la energía de superposición de Casimir.

$$K_{ij} \equiv K(k, |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) = \frac{e^{-k|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (3.121)$$

De este modo, la energía de Casimir de no superposición resulta ser:

$$\mathcal{E}_{NS} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^\infty dk \log \mathcal{Q}(k, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad (3.122)$$

donde:

$$\mathcal{Q} = \left(\frac{1 - g^2(k)(K_{12}^2 + K_{13}^2 + K_{23}^2 - 2g(k)K_{12}K_{13}K_{23})}{(1 - g^2(k)K_{12}^2)(1 - g^2(k)K_{13}^2)(1 - g^2(k)K_{23}^2)} \right). \quad (3.123)$$

Para visualizar más de cerca el comportamiento de los términos \mathcal{E}_S y \mathcal{E}_{NS} como función de la separación entre las esferas. Consideremos que los centros de las esferas forman un triángulo isósceles (sobre el plano xy), en la que dos de ellas ($\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$) se encuentran fijas y separadas por una distancia 100 veces su radio; mientras que el centro de la tercera esfera $\Sigma^{(3)}$ es móvil, representado por la coordenada (x, y) . El origen de coordenadas está ubicada de forma simétrica sobre el centro de la línea que une las esferas fijas. En las figuras (3.1) y (3.2) se muestran las energías \mathcal{E}_S y \mathcal{E}_{NS} respectivamente como función de (x, y) .

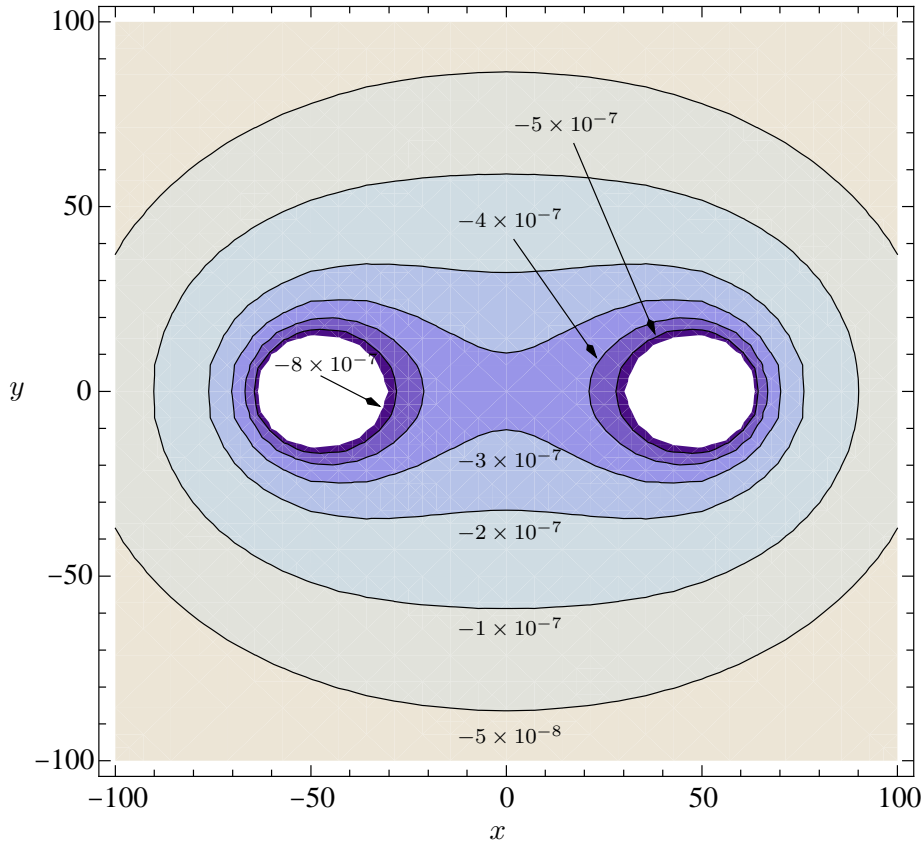


Figura 3.2: Curvas para valores constantes de la energía de no superposición de Casimir.

La figura (3.3) muestra las energía para la configuración en que las tres esferas son ubicadas en la misma línea, el eje x ; dos de ellas fijas y la tercera móvil representada por la coordenada x . Puede verse que la magnitud de la energía \mathcal{E}_S es mayor que la correspondiente a \mathcal{E}_{NS} , y ambas contribuciones se tornan despreciables cuando $x \rightarrow \infty$.

3.2.2. Desarrollo perturbativo

Supongamos que las N superficies $\Sigma^{(a)}$ son objetos compactos, y que la distancia entre cada par de superficies es mucho más grande que el tamaño de cada objeto. En estas condiciones, $|\mathcal{O}_{(ab)}| \ll 1$, ya que el kernel $G^{(a)}$, es determinado por la *inversa* de $\tilde{\mathcal{K}}$ a pequeñas distancias, mientras $\tilde{\mathcal{K}}_{(ab)}$ es, esencialmente, $\tilde{\mathcal{K}}$ a largas distancias, el cual decrece con la distancia. Por lo tanto, la pequeñez del operador \mathcal{O} , nos permite realizar una expansión de la energía de interacción, en potencias de este operador.

La expansión perturbativa de E_I , resulta ser:

$$E_I = \sum_{l=1}^{\infty} E_{I;l}, \quad (3.124)$$

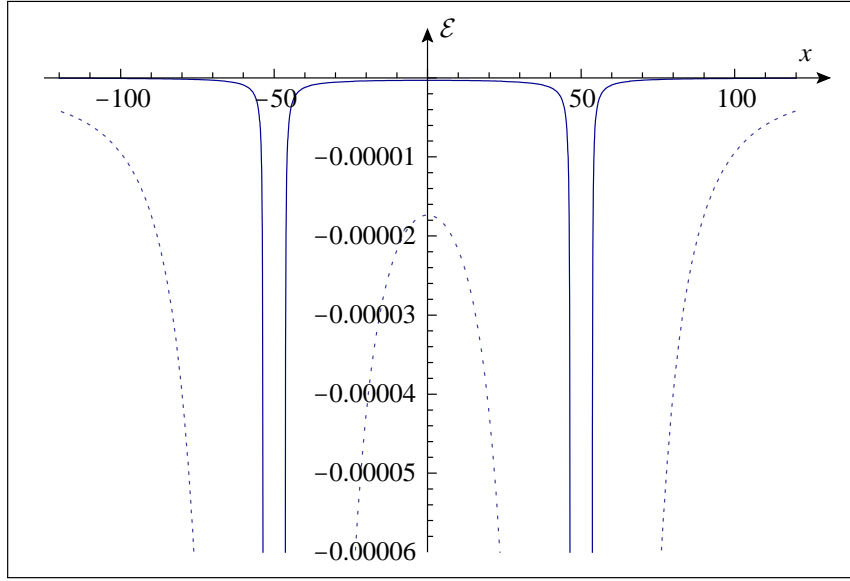


Figura 3.3: Comparación entre los términos de superposición \mathcal{E}_S (línea punteada) y de no superposición \mathcal{E}_{NS} (línea continua) de la energía de Casimir en unidades de R .

donde

$$E_{I;l} = \frac{(-1)^{l-1}}{2l} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \left[(\tilde{\mathcal{O}}(\omega))^l \right], \quad (3.125)$$

o efectuando la potencia y tomando la traza sobre los índices discretos,

$$E_{I;l} = \frac{(-1)^{l-1}}{2l} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \dots \neq a_l \neq a_1} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{O}}_{(a_1 a_2)}(\omega) \tilde{\mathcal{O}}_{(a_2 a_3)}(\omega) \dots \tilde{\mathcal{O}}_{(a_l a_1)}(\omega) \right]. \quad (3.126)$$

En este punto, cabe señalar que la ausencia de factores que dependan explícitamente de la métrica no rompe la invariancia de reparametrización. En efecto, lo que sucede es que cada $G^{(a)}$ tendrá una propiedad de transformación no trivial bajo reparametrización, lo cual compensa la pérdida de invariancia de las integrales sobre los parámetros.

Vamos a estudiar la forma explícita de los primeros términos de la expansión (3.124). El término $l = 1$ se anula; el siguiente término, correspondiente a $l = 2$, el orden más bajo no trivial, está dado por:

$$\begin{aligned} E_{I;2} &= -\frac{1}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{a \neq b} \int d^2\sigma \int d^2\sigma' \tilde{\mathcal{O}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \tilde{\mathcal{O}}_{(ba)}(\omega; \sigma', \sigma) \\ &\equiv \sum_{a < b} E^{(ab)}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

donde

$$\begin{aligned}
E^{(ab)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''} G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma') \mathcal{K}^{(ab)}(\omega; \sigma', \sigma'') \\
&\times G^{(b)}(\omega; \sigma'', \sigma''') \mathcal{K}^{(ba)}(\omega; \sigma''', \sigma). \quad (3.128)
\end{aligned}$$

Podemos ver que a este orden, la energía total se obtiene como la suma de las ‘energías de interacción’ de pares, en una suerte de ‘principio de superposición’. El siguiente término viola esta propiedad, como podemos ver, escribiendo la siguiente contribución:

$$\begin{aligned}
E_{I;3} &= \frac{1}{6} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{a,b,c} \int d^2\sigma \int d^2\sigma' \int d^2\sigma'' \\
&\times \tilde{\mathcal{O}}_{(ab)}(\omega; \sigma, \sigma') \tilde{\mathcal{O}}_{(bc)}(\omega; \sigma', \sigma'') \tilde{\mathcal{O}}_{(ca)}(\omega; \sigma'', \sigma) \\
&\equiv \sum_{a < b < c} E^{(abc)}, \quad (3.129)
\end{aligned}$$

donde $E^{(abc)}$, se puede considerar como la ‘energía de interacción de tres cuerpos’, dada por:

$$E^{(abc)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \widetilde{\text{Tr}} \left[G^{(a)}(\omega) \mathcal{K}^{(ab)}(\omega) G^{(b)}(\omega) \mathcal{K}^{(bc)}(\omega) G^{(c)}(\omega) \mathcal{K}^{(ca)}(\omega) \right]. \quad (3.130)$$

A propósito, este término coincide con (3.108) para las $N + 1$ superficies. En efecto, como se esperaría, la violación de la superposición al menor orden proviene del término no cuadrático en la energía.

Un ingrediente fundamental en el cálculo de los diferentes términos de la expansión para E_I es el kernel $G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma')$, cuya forma depende de la geometría de las superficies y del número de dimensiones espaciales.

Con el fin de obtener algunos resultados exactos, debemos realizar algunas simplificaciones. En primer lugar denotemos por $\mathbf{x}^{(a)}$ el baricentro de la superficie $\Sigma^{(a)}$; $R^{(a)}$ denota el radio mínimo de la esfera $S^{(a)}$ centrada en $\mathbf{x}^{(a)}$, que encierra la superficie Σ_a . Bajo la condición $|\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}| \gg R^{(a)}, R^{(b)}$, podemos reemplazar $\mathbf{y}^{(a)}(\sigma)$ por $\mathbf{x}^{(a)}$ y $\mathbf{y}^{(b)}(\sigma')$ por $\mathbf{x}^{(b)}$, puesto que $\mathcal{K}^{(ab)}(\omega; \sigma', \sigma'')$ es aproximadamente constante adentro de $S^{(a)}$. Luego la aproximación siguiente es válida:

$$\mathcal{K}^{(ab)}(\omega; \sigma', \sigma'') \simeq \tilde{\mathcal{K}}(\omega; \mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}). \quad (3.131)$$

Usando este resultado en la expresión (3.128), podemos escribir $E^{(ab)}$ de una forma que nos hace recordar la interacción electrostática:

$$E^{(ab)} \simeq \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3x \int d^3y \rho^{(a)}(\omega; \mathbf{x}) V(\omega; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho^{(b)}(\omega; \mathbf{y}), \quad (3.132)$$

donde introducimos:

$$\begin{aligned}\rho^{(a)}(\omega; \mathbf{x}) &\equiv q_a(\omega) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(a)}) , \\ q_a(\omega) &\equiv \int d^2\sigma \int d^2\sigma' G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma')\end{aligned}\quad (3.133)$$

y

$$V(\omega; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv -\frac{1}{2} \left[\tilde{K}(\omega; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]^2 . \quad (3.134)$$

Por lo tanto, a este orden, la energía de interacción para el par a, b , puede considerarse que proviene de la integral sobre ω de la energía de interacción de un conjunto de cargas puntuales ubicadas en $\mathbf{x}^{(a)}$ y $\mathbf{x}^{(b)}$, cuyas cargas $q_a(\omega)$ y $q_b(\omega)$ son determinadas por la geometría de las superficies respectivas.

La forma explícita del ‘potential de interacción’ es:

$$V(\omega; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv -\frac{1}{2} \frac{e^{-2|\omega||\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{(4\pi)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} , \quad (3.135)$$

donde el signo nos indica que la interacción es siempre atractiva. Las integrales sobre \mathbf{x} e \mathbf{y} se pueden efectuar, sin embargo estas se mantienen con el propósito de mostrar que cada una de las superficies actúan como ‘cargas puntuales’. La misma aproximación puede ser usada para simplificar los términos de mayor orden.

En general la forma exacta de $G^{(a)}$ no se conoce para una superficie arbitraria. Consideremos algunos casos particulares donde sea posible calcularla, u obtener un valor aproximado de ella.

- $d = 1$

Este es el caso mas simple, donde las superficies son solo dos puntos. $\tilde{K}(w, x)$ y $G^{(a)}$ están dados por:

$$\tilde{K}(w, x) = \frac{e^{-|w||x|}}{2|w|} , \quad (3.136)$$

$$G^{(a)}(w) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-|w||x|}}{2|w|} \right)^{-1} = 2|w| , \quad (3.137)$$

respectivamente. Luego, el operador \mathcal{O} es una matriz que sólo depende de ω y cuyos elementos son $\mathcal{O}_{(ab)}(\omega) = e^{-|\omega||x^{(a)} - x^{(b)}|}$. El decaimiento exponencial nos permite asegurar la convergencia de la expansión perturbativa, sin importar la distancia relativa entre los espejos.

En estas condiciones, el primer término (de superposición) de la energía correspondiente a los dos espejos ubicados en los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, tiene la siguiente forma:

$$E^{(12)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} (2|\omega|)^2 V(\omega; x^{(1)} - x^{(2)}) , \quad (3.138)$$

donde

$$V(\omega; x^{(1)} - x^{(2)}) = -\frac{1}{2} \frac{e^{-2|\omega||x^{(1)}-x^{(2)}|}}{(2|\omega|)^2}. \quad (3.139)$$

Suponiendo que la distancia entre los espejos es a , tenemos que

$$E^{(12)} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-2|\omega|a} = -\frac{1}{4\pi a} = -\frac{0,07958}{a}, \quad (3.140)$$

difiere del resultado exacto: $E = -\frac{\pi}{24a} \simeq -\frac{0,1309}{a}$, el cual es mayor aproximadamente por un 60%. Sin embargo, en este caso, es posible calcular exactamente las contribuciones a todos los ordenes; de los cuales, solamente los términos de orden par son no nulos. Por lo tanto:

$$E_{I;2l} = -\frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (e^{-2|\omega|a})^{2l} = -\frac{1}{4l^2\pi a}. \quad (3.141)$$

Sumando todas las $E_{I;2l}$, tenemos:

$$\sum_{l=1}^{\infty} E_{I;2l} = -\frac{1}{4\pi a} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = -\frac{1}{4\pi a} \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi}{24a}, \quad (3.142)$$

lo cual concuerda con el resultado exacto.

■ $d = 2$

En dos dimensiones espaciales las superficies son curvas $\Gamma^{(a)}$, descritas por un solo parámetro σ . En este caso el Kernel resulta ser:

$$\tilde{\mathcal{K}}(w, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} K_0(|w||\mathbf{x}|), \quad (3.143)$$

donde K_0 es la función modificada de Bessel de segunda clase K_α , con $\alpha = 0$.

Consideremos dos tipos de curvas. Por ejemplo, para un círculo de radio R parametrizado por el ángulo ϕ , usando métodos estándar tenemos:

$$G^{(a)}(\omega; \phi, \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi')}}{I_{|n|}(|\omega|R)K_{|n|}(|\omega|R)}. \quad (3.144)$$

En cambio, para una línea infinita, parametrizada por $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, se obtiene:

$$G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma') = 2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \omega^2 \right) K_0(|\omega||\sigma - \sigma'|). \quad (3.145)$$

Para seguir con el desarrollo perturbativo, vamos suponer que las superficies no se solapan y que se encuentran muy alejadas; bajo estas condiciones, la aproximación

(3.131):

$$\mathcal{K}_{(ab)}(\omega; |\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}|) \sim \tilde{\mathcal{K}}(\omega; |\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}|) \quad (3.146)$$

se justifica siempre que $|\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}| \gg \max\{\eta^{(a)}\}$; donde $\eta^{(a)}$ y $\mathbf{x}^{(a)}$ denotan el radio y el centro de cada círculo $\Gamma^{(a)}$ respectivamente. Por lo tanto la energía de interacción ‘de pares’ esta dada por:

$$E^{(ab)} \sim -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{[K_0(|\omega||\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}|)]^2}{I_0(|\omega|\eta^{(a)})K_0(|\omega|\eta^{(a)})I_0(|\omega|\eta^{(b)})K_0(|\omega|\eta^{(b)})}. \quad (3.147)$$

Para dos círculos $\Gamma^{(1)}$ y $\Gamma^{(2)}$, la serie (3.124) se puede sumar, o equivalentemente usar la fórmula (3.32) para obtener la energía de interacción total:

$$E_I \sim -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \log \left[1 - \frac{[K_0(|\omega||\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}|)]^2}{I_0(|\omega|\eta^{(a)})K_0(|\omega|\eta^{(a)})I_0(|\omega|\eta^{(b)})K_0(|\omega|\eta^{(b)})} \right]. \quad (3.148)$$

▪ $d = 3$

Ahora analicemos el caso importante de superficies en tres dimensiones, bajo los requerimientos de la expansión perturbativa. A partir del kernel (3.13) podemos obtener las cargas $q_a(\omega)$ para esferas de radio R , desarrollando $G^{(a)}$ en armónicos esféricos y usando relaciones de las funciones de Bessel, se obtiene:

$$q(\omega) = \frac{4|\omega|R^2}{I_{1/2}(|\omega|R)K_{1/2}(|\omega|R)}, \quad (3.149)$$

el cual junto con con el potencial (3.135) nos permite escribir una expresión formal para la energía E^{12} de dos esferas (3.132). La expresión anterior ya fue mencionada anteriormente como m^{-1} en (3.116). También es posible escribir la forma completa de la energía de interacción E_I , la cual, ya se ha usado en la sección 3,4,1 e integrado en forma numérica. Sin embargo aún podemos realizar algunas simplificaciones adicionales.

Supongamos que las superficies en $d = 3$ están formadas por un arreglo infinito de elementos de superficie débilmente acoplados. En este caso podemos tomar la aproximación local para el kernel $G^{(a)}$, concentrada alrededor de $\sigma = \sigma'$:

$$G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma') \sim \eta^{(a)}(\omega, \sigma) \delta^{(2)}(\sigma - \sigma'), \quad (3.150)$$

donde $a = 1, 2$, y $\eta^{(a)}$ será determinada a continuación, recordando que $G^{(a)}$ se define como el inverso de $\mathcal{K}_{(aa)}(\omega; \sigma, \sigma')$.

Analicemos la forma de $\mathcal{K}_{(aa)}(\omega; \sigma, \sigma')$ en la vecindad de un punto $\mathbf{y}^{(a)}(\sigma)$ sobre

la superficie Σ_a (σ representa dos parámetros):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{(aa)}(\omega; \sigma, \sigma') &\sim \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \partial_{\alpha} \mathbf{y}^{(a)}(\sigma)(\sigma^{\alpha} - \sigma'^{\alpha})}}{2\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + \omega^2}} \\ &\sim \frac{1}{4\pi \sqrt{g_{\alpha\beta}^{(a)}(\sigma) \delta\sigma^{\alpha} \delta\sigma^{\beta}}} \exp \left[-|\omega| \sqrt{g_{\alpha\beta}^{(a)}(\sigma) \delta\sigma^{\alpha} \delta\sigma^{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (3.151)$$

donde \mathbf{k}_{\parallel} es la proyección del momento sobre el plano tangente en el punto $\mathbf{y}^{(a)}(\sigma)$, y $\delta\sigma^{\alpha} \equiv \sigma^{\alpha} - \sigma'^{\alpha}$.

Ahora, suponiendo que el flujo de momento entre los diferentes elementos de superficie es pequeño, llegamos a la siguiente expresión:

$$\mathcal{K}_{(aa)}(\omega; \sigma, \sigma') \sim \frac{1}{2\sqrt{g^{(a)}(\sigma)|\omega|}} \delta^{(2)}(\sigma - \sigma'). \quad (3.152)$$

Por lo tanto tenemos:

$$G^{(a)}(\omega; \sigma, \sigma') \sim 2\sqrt{g^{(a)}(\sigma)|\omega|} \delta^{(2)}(\sigma - \sigma') \Rightarrow \eta(\omega, \sigma) = 2|\omega| g^{(a)}(\sigma). \quad (3.153)$$

Con estos resultados, consideremos la energía de interacción para dos superficies $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$, en la aproximación local para los kernels $G^{(1)}$ y $G^{(2)}$. A primer orden tenemos:

$$E^{(12)} = -\frac{2^2}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \int d^2\sigma \sqrt{g^{(1)}(\sigma)} \int d^2\sigma' \sqrt{g^{(2)}(\sigma')} [\mathcal{K}^{(12)}(\omega; \sigma, \sigma')]^2, \quad (3.154)$$

el cual, luego de efectuar la integración sobre ω , resulta:

$$E^{(12)} = \int d^2\sigma \sqrt{g^{(1)}(\sigma)} \int d^2\sigma' \sqrt{g^{(2)}(\sigma')} V(\sigma, \sigma'), \quad (3.155)$$

donde el término:

$$V(\sigma, \sigma') = -\frac{1}{32\pi^3} \frac{1}{|\mathbf{y}^{(1)}(\sigma) - \mathbf{y}^{(1)}(\sigma')|^5} \quad (3.156)$$

tiene el aspecto de un potencial local atractivo, cuya forma es idéntica a la interacción de van der Waals.

Para finalizar, consideremos el caso de dos placas paralelas infinitas Σ_1 y Σ_2 , dentro de la aproximación cuadrática. Claramente, los planos no pueden considerarse como pequeñas superficies; aunque la aproximación de superposición sea válida, no podemos considerar a los planos como objetos puntuales.

Usando las coordenadas \mathbf{x}_{\parallel} para parametrizar los planos que están ubicados en $z = 0$ y $z = a$, tenemos:

$$G^{(1)}(\omega; \mathbf{x}_{\parallel}, \mathbf{x}'_{\parallel}) = \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} 2 \sqrt{k_{\parallel}^2 + \omega^2} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})}, \quad (3.157)$$

y otra expresión similar para Σ_2 . Luego \mathcal{O} resulta ser:

$$\mathcal{O}(\omega; \mathbf{x}_{\parallel}, \mathbf{x}'_{\parallel}) = \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{-\sqrt{k_{\parallel}^2 + \omega^2} |z - z'| + i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})}, \quad (3.158)$$

donde se evidencia que, incluso en este caso, la norma del operador es pequeña. Reemplazando esta expresión en (3.32) obtenemos la energía por unidad de área \mathcal{E}_0 :

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{-2a\sqrt{k_{\parallel}^2 + \omega^2}} = \frac{1}{16\pi^2 a^3} \simeq -0,00633 a^{-3}. \quad (3.159)$$

Este valor resulta ser muy cercano a la energía $\mathcal{E}_{I;2} \simeq -0,006854 a^{-3}$, lo cual es una señal de que las correcciones son muy pequeñas.

De otra manera, si imaginamos que cada plano está compuesto por elementos de superficie infinitesimales débilmente interactuantes (no es un conductor), y calculamos la energía en la aproximación de superposición de todos los elementos de superficie, entonces la energía por área al primer orden no trivial, $\mathcal{E}_{I;2}$, puede obtenerse integrando la energía de interacción entre un simple punto en un plano y todos los puntos en el otro plano. Esto corresponde a la integral:

$$\mathcal{E}_{I;2} = 4 \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \int d^2 x_{\parallel} V(\omega; \sqrt{a^2 + \mathbf{x}_{\parallel}^2}). \quad (3.160)$$

Evaluando la integral exactamente, tenemos:

$$\mathcal{E}_{I;2} = -\frac{1}{24\pi^2 a^3} \simeq -0,00422 a^{-3}, \quad (3.161)$$

el cual resulta alejarse aún más del resultado previo (corresponde a un material diferente). La razón es que a diferencia de lo que sucede en $d = 1$, la aproximación de tener una pequeña superficie introduce un error, el cual se acumula cuando consideramos una superficie infinita.

Capítulo 4

Dimensión espacial compactificada

Este Capítulo está compuesto por dos secciones en los cuales analizaremos dos modelos de teorías de campos con dimensiones espaciales compactas. En el primero, estudiaremos algunos aspectos de la electrodinámica cuántica en un espacio-tiempo de $4 + 1$ dimensiones, QED_{4+1} , con la dimensión extra compactificada. En particular, vamos a investigar la polarización del vacío de la teoría a un lazo, ante la presencia de un flujo magnético no nulo a través del área encerrada por la dimensión compactificada. También, interpretaremos los resultados del modelo, desde el punto de vista en $3 + 1$ dimensiones. En el segundo, analizaremos el efecto de polarización del vacío de fermiones confinados a dos planos paralelos, con condiciones de borde de *bag model*; también evaluaremos corriente y la densidad de carga inducida debido a un campo magnético externo constante en dirección normal a los bordes.

4.1. Dimensión extra compactificada

La acción euclideana de QED_{4+1} , tiene la siguiente estructura:

$$S(\mathcal{A}; \bar{\psi}, \psi) = S_g(\mathcal{A}) + S_f(\mathcal{A}; \bar{\psi}, \psi), \quad (4.1)$$

donde S_g y S_f son, la acción para el campo de gauge U(1) y la acción fermiónica respectivamente. Ambos tienen la forma usual; la primera:

$$S_g(\mathcal{A}) = \frac{1}{4} \int d^5x \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta}, \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha$; la segunda es la acción de Dirac, S_f , dada por:

$$S_f(\bar{\psi}, \psi; \mathcal{A}) = \int d^{3+1}x ds \bar{\psi}(x, s) (\mathcal{D} + m) \psi(x, s), \quad (4.3)$$

donde $x \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$, es la coordenada del espacio en 3+1 dimensiones, s denota la coordenada extra x_4 y (x, s) representa la coordenada en 4+1 dimensiones. El símbolo $/$ denota la contracción del operador \mathcal{D} con las matrices de Dirac, es decir $\mathcal{D} = \gamma_\alpha \mathcal{D}_\alpha$, en 4+1 dimensiones. La derivada covariante $\mathcal{D}_\alpha \equiv \partial_\alpha + ig\mathcal{A}_\alpha$ incluye una constante de acoplamiento g con dimensiones de $(\text{masa})^{-\frac{1}{2}}$. Definimos a la componente de las matrices de Dirac correspondiente a la dimensión extra, como $\gamma_s \equiv \gamma_5$, donde γ_5 es la matriz de 3+1 dimensiones. En cuanto a las notaciones y subíndices que hemos usado en las definiciones arriba; las letras iniciales del alfabeto griego α, β, \dots se usan para todas las coordenadas del espacio tiempo de 4+1 dimensiones, mientras que las letras μ, ν indican las coordenadas en 3+1 dimensiones. El radio de compactificación es R , de modo que $s \sim s + L$, $L = 2\pi R$. Es decir:

$$\begin{aligned} \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ d^5x \equiv d^{3+1}x dx_4 = d^{3+1}x ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Tal como se ha mencionado en la sección 1.1 del Capítulo 1. La longitud L de la coordenada extra compactificada juega el mismo rol que β , la “longitud” de la coordenada temporal en la formulación de Matsubara de la TCTF. Aprovechando esta analogía, podemos usar un proceso conocido en la TCTF: el desarrollo en modos y su relación con la invariancia de gauge [1]; para lograr una reducción dimensional de la teoría.

4.1.1. Reducción dimensional y teoría efectiva

Para construir la teoría efectiva en el espacio-tiempo de 3+1 dimensiones, debemos quedarnos con el término de modo cero e integrar perturbativamente sobre todos los otros modos. Con este motivo descomponemos el campo de gauge $\mathcal{A}(x, s)$ en sus componentes de modo cero (A_α) y no cero (Q_α):

$$\mathcal{A}_\alpha(x, s) = L^{-\frac{1}{2}}A_\alpha(x) + Q_\alpha(x, s), \quad (4.5)$$

donde los términos de la descomposición pueden definirse como:

$$A_\alpha(x) = L^{-\frac{1}{2}} \int_0^L ds \mathcal{A}_\alpha(x, s), \quad (4.6)$$

y

$$Q_\alpha(x, s) = \mathcal{A}_\alpha(x, s) - L^{-\frac{1}{2}}A_\alpha(x), \quad (4.7)$$

de modo que $\int_0^L ds Q_\alpha(x, s) = 0$. El factor $L^{-\frac{1}{2}}$ se ha incluido para que el campo de modo cero tenga las unidades usuales de masa en 3+1 dimensiones.

La descomposición realizada (4.5) tiene una interpretación natural cuando con-

sideramos el desarrollo de Fourier del campo de gauge a lo largo de la dimensión compactificada:

$$\mathcal{A}_\alpha(x, s) = L^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n s} \tilde{\mathcal{A}}_\alpha(x, n), \quad (4.8)$$

con $\omega_n \equiv \frac{2\pi n}{L}$; de donde podemos identificar

$$A_\alpha(x) = \tilde{\mathcal{A}}_\alpha(x, 0), \quad Q_\alpha(x, s) = L^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{i\omega_n s} \tilde{\mathcal{A}}_\alpha(x, n). \quad (4.9)$$

Por lo tanto, quedándonos con el término de modo cero, a primer orden en la teoría perturbativa, tenemos la siguiente reducción dimensional para la acción del campo de gauge:

$$S_g(\mathcal{A}) \rightarrow S_g(A) = S_g(A_\mu, A_s), \quad (4.10)$$

donde

$$S_g(A_\mu, A_s) = \int d^{3+1}x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu A_s \partial_\mu A_s + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(A) F_{\mu\nu}(A) \right), \quad (4.11)$$

con $F_{\mu\nu}(A) \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. En cuanto a la acción fermiónica, S_f , la reducción anterior nos permite escribir:

$$S_f(\mathcal{A}; \bar{\Psi}, \Psi) \rightarrow S_f(A_\mu, A_s; \bar{\Psi}, \Psi); \quad (4.12)$$

sin embargo no es posible una reducción dimensional tal como sucede para el campo de gauge; debido a que en el cálculo de la acción efectiva a un lazo fermiónico, tal lazo puede representarse como una serie de lazos en $3 + 1$ dimensiones, cada uno con masa diferente. Aunque las contribuciones de los modos más pesados pueden suprimirse, el hecho de que tengamos un número infinito de ellos nos impide cortar la serie (incluso si hubiera un modo cero).

Por lo tanto, para la acción fermiónica, tenemos la siguiente expresión explícita:

$$S_f = \int d^{3+1}x \int_0^L ds \bar{\Psi}(x, s) (D + \gamma_s D_s + m) \Psi(x, s), \quad (4.13)$$

con

$$D = \gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu), \quad D_s = \partial_s + ieA_s, \quad (4.14)$$

donde $e = gL^{-\frac{1}{2}}$ es una constante de acoplamiento adimensional, el cual jugará el mismo rol que la carga eléctrica en la teoría en $3 + 1$ dimensiones.

En cuanto a las transformaciones del campo de gauge para los términos del desarrollo en modos (4.5); la componente A_μ transforma de la forma usual como el campo de gauge en $3 + 1$ dimensiones:

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x), \quad (4.15)$$

mientras que la componente correspondiente a la dimensión extra, A_s , transforma como un escalar desde el punto de vista de $3 + 1$ dimensiones, es decir:

$$\delta A_s(x) = \Omega , \quad (4.16)$$

donde $\Omega = \frac{2\pi k}{eL}$ es una constante, con k un número entero y e la constante de acoplamiento entre el campo de gauge y el campo fermiónico (cargado). Así mismo, al campo fermiónico acoplado al campo de gauge (que transformación según (4.15) y (4.16)), le corresponde la transformación:

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) &\rightarrow e^{-ie(\alpha(x)+\Omega s)}\Psi(x, s) , \\ \bar{\Psi}(x, s) &\rightarrow e^{ie(\alpha(x)+\Omega s)}\bar{\Psi}(x, s) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.1.2. Acción efectiva

La acción efectiva para el campo de gauge A_μ tiene un interés natural debido su interpretación física directa desde el punto de vista del espacio en $3 + 1$ dimensiones. A continuación calculemos éste objeto. La acción efectiva que sólo depende del campo de gauge (reducida dimensionalmente), $\Gamma(A)$, está definida por:

$$\Gamma(A) \equiv \Gamma(A; \bar{\Psi}, \Psi) \Big|_{\bar{\Psi}=\Psi=0} ,$$

donde $\Gamma(A; \bar{\Psi}, \Psi)$ es la acción efectiva completa. El objeto $\Gamma(A)$ nos permite derivar las funciones irreducibles de una partícula (1PI) conteniendo solamente patas externas A_μ y A_s . La primera, A_μ , tiene una interpretación inmediata en $3+1$ dimensiones, mientras que la segunda, A_s , (se comporta como un escalar (4.16)) toma un valor arbitrario constante que se puede determinar mediante una condición externa al modelo. A primer orden, los términos no triviales provienen del lazo fermiónico:

$$\Gamma(A) = \Gamma^{(0)}(A) + \Gamma^{(1)}(A) + \dots \quad (4.18)$$

donde $\Gamma^{(0)}(A) = S_g(A)$ y

$$e^{-\Gamma^{(1)}(A)} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_f(A, \bar{\psi}, \psi)} . \quad (4.19)$$

Consideremos un modelo con un campo magnético constante perpendicular al área encerrada por la coordenada compactificada, cuyo flujo constante es no nulo, es decir:

$$\int_0^L ds A_s = \theta , \quad (4.20)$$

donde θ es una constante; por lo tanto:

$$A_s = \frac{\theta}{eL}, \quad (4.21)$$

lo cual nos permite fijar el gauge. En efecto, debido a que la transformación de gauge desplaza a A_s por un múltiplo de $\frac{2\pi}{eL}$, podemos fijar el valor de θ a la región fundamental:

$$0 \leq \theta < 2\pi. \quad (4.22)$$

Vale aclarar que esta configuración del campo de gauge puede ser interpretada como topológica, en el sentido de que corresponde localmente (no globalmente) a un *gauge* puro. De hecho, el *gauge* no puede extenderse lejos de la región fundamental, puesto que la transformación de gauge podría ser multivaluada. Este tipo de configuración (dimensión extra compactificada a un círculo), es percibida por los campos cargados, de una forma semejante al efecto Aharonov-Bohm. La configuración del campo puede realizarse una manera similar a éste efecto: un campo singular que apunta en la dirección ortogonal al plano del círculo. Además así como en el efecto Aharonov-Bohm la región del espacio donde la intensidad del campo no se anula, no puede ser alcanzado por los campos cargados. Esta configuración puede entenderse fácilmente en el caso de una teoría en $2 + 1$ dimensiones. El espacio tiene la forma de un cilindro, si suponemos que x_2 es la dimensión extra compactificada; la configuración del campo de gauge correspondiente al vacío podría tener un flujo singular a lo largo del eje del cilindro. Esto significa que está fuera del espacio cilíndrico (puesto que se necesita una tercera coordenada). De manera similar, la configuración que vamos a usar se realiza a través de un campo singular tipo monopolo en una variedad con dimensión mayor (mayor que $4 + 1$).

Para continuar con el cálculo de la acción efectiva, procedemos con el desarrollo de Fourier de los campos fermiónicos a lo largo de la coordenada s :

$$\begin{aligned} \psi(x, s) &= L^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{iwns} \psi_n(x), \\ \bar{\psi}(x, s) &= L^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-iwns} \bar{\psi}_n(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Con éstas expresiones la acción fermiónica se escribe como:

$$S_f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int d^{3+1}x \bar{\psi}_n(x) \left(\not{D} + i\gamma_s \left(w_n + \frac{\theta}{L} \right) + m \right) \psi_n(x), \quad (4.24)$$

así mismo, la medida fermiónica en (4.19) resulta ser:

$$\mathcal{D}\psi(x, s)\mathcal{D}\bar{\psi}(x, s) = \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{D}\psi_n(x)\mathcal{D}\bar{\psi}_n(x); \quad (4.25)$$

más explícitamente, la acción correspondiente a cada modo n , S_f^n ($S_f = \sum S_f^n$), resulta ser:

$$S_f^n = \int d^{3+1}x \bar{\psi}_n(x)(\mathcal{D} + M_n e^{-i\phi_n\gamma_5})\psi_n(x), \quad (4.26)$$

donde

$$M_n = \sqrt{m^2 + \left(w_n + \frac{\theta}{L}\right)^2}, \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{w_n + \frac{\theta}{L}}{m}\right). \quad (4.27)$$

La presencia del término con γ_5 , indica que la simetría de paridad se ha perdido. Para estudiar este fenómeno más claramente, realizamos una rotación quirral de las variables fermiónicas en 3 + 1 dimensiones, es decir, el siguiente cambio de variables:

$$\psi_n(x) \rightarrow e^{-i\gamma_5\phi_n/2}\psi_n(x), \quad \bar{\psi}_n(x) \rightarrow \bar{\psi}_n(x)e^{-i\gamma_5\phi_n/2}; \quad (4.28)$$

reemplazando en (4.26) tenemos:

$$S_f^n = \int d^{3+1}x \bar{\psi}_n(x)(\mathcal{D} + M_n)\psi_n(x). \quad (4.29)$$

En ésta última expresión la dependencia explícita con γ_5 se ha perdido; sin embargo, el cambio de variables induce un Jacobiano anómalo \mathcal{J}_n para cada modo, el cual, aparece en la expresión para $\Gamma^{(1)}$, del siguiente modo:

$$e^{-\Gamma^{(1)}(A)} = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n e^{-\Gamma_{3+1}^{(1)}(A, M_n)}, \quad (4.30)$$

con

$$\mathcal{J}_n = \exp\left(\frac{ie^2}{16\pi^2}\phi_n \int d^{3+1}x \tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right), \quad (4.31)$$

donde $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$; $\Gamma_{3+1}^{(1)}(A, M_n)$ es la acción efectiva en 3 + 1 dimensiones que posee la contribución fermiónica a un lazo, siendo M_n la masa del fermión. El factor $e^{-\Gamma_{3+1}^{(1)}(A, M_n)}$ es el determinante fermiónico, es decir:

$$e^{-\Gamma_{3+1}^{(1)}(A, M_n)} = \det(\mathcal{D} + M_n). \quad (4.32)$$

Por lo tanto, la expresión general para la acción efectiva a un lazo, compuesta por los términos par e impar bajo transformaciones de paridad etiquetadas por los subíndices

p e i respectivamente, está dada por:

$$\Gamma^{(1)}(A) = \Gamma_p^{(1)}(A) + \Gamma_i^{(1)}(A), \quad (4.33)$$

donde:

$$\Gamma_p^{(1)}(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{3+1}^{(1)}(A, M_n), \quad (4.34)$$

y

$$\Gamma_i^{(1)}(A) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \mathcal{J}_n. \quad (4.35)$$

Término que conserva paridad

Nos ocuparemos de la parte de $\Gamma_p^{(1)}(A)$ que contribuye al tensor de polarización de vacío para las componentes A_μ del campo de gauge, no estamos interesados en funciones de respuesta que involucren las componentes s de la corriente; por lo tanto, es útil definir:

$$\Gamma_p^{(1)}(A_\mu) \equiv \Gamma_p^{(1)}(A_\mu, A_s) - \Gamma_p^{(1)}(0, A_s). \quad (4.36)$$

Notemos que $\Gamma_p^{(1)}(0, A_s) \equiv \Gamma_s(A_s)$ no contribuye a las funciones de respuesta que involucren a A_μ , aunque si puede ser usada para estudiar las correcciones al potencial efectivo para A_s , a un lazo fermiónico. La forma exacta de esta función está dada por [1]:

$$\Gamma_s(A_s) = -2L \int d^{3+1}x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(\cosh(Lk) + \cos \theta). \quad (4.37)$$

El tensor de polarización del vacío $\Pi_{\mu\nu}$ se obtiene del primer término no trivial del desarrollo de la acción efectiva $\Gamma_p^{(1)}(A_\mu)$ en potencias de los campos de gauge, esto es, el término cuadrático:

$$\Gamma_p^{(1)}(A_\mu) = \frac{1}{2} \int d^{3+1}x \int d^{3+1}y A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) + \dots; \quad (4.38)$$

de forma análoga, para un campo de gauge A_μ y fermión de masa M_n en QED_{3+1} , tenemos un desarrollo análogo:

$$\Gamma_{3+1}^1(A, M_n) = \frac{1}{2} \int d^{3+1}x \int d^{3+1}y A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}^{(n)}(x, y) A_\nu(y) + \dots. \quad (4.39)$$

Por lo tanto, a partir de la fórmula (4.34), la polarización de vacío se escribe como la suma

$$\Pi_{\mu\nu}^p = \sum_n \Pi_{\mu\nu}^{(n)}, \quad (4.40)$$

con $\Pi_{\mu\nu}^{(n)} = \Pi^{(n)}(k^2)\delta_{\mu\nu}^T(k)$, donde $\delta_{\mu\nu}^T(k) \equiv \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2$ es el proyector transverso, y

$$\Pi^{(n)}(k^2) = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left[1 + \beta(1-\beta) \frac{k^2}{M_n^2} \right], \quad (4.41)$$

la cual es formalmente idéntica a la parte escalar renormalizada del tensor de polarización de vacío en 3 + 1 dimensiones. Observemos que la renormalización efectuada en $\Pi^{(n)}(k^2)$ debe interpretarse como una sustracción para la teoría en 4 + 1 dimensiones, produciendo una polarización de vacío logarítmicamente divergente como en 3 + 1 dimensiones, una vez que todas las simetrías se han tomado en cuenta. La sustracción realizada en 3 + 1 dimensiones no satisface completamente las condiciones de renormalización para la teoría en 4 + 1 dimensiones, debido a que el cero de $\Pi^{(n)}$ está en $k^2 = 0$, para cada término n , pero en el límite $k^2 \rightarrow 0$ no necesariamente conmuta con la suma infinita sobre todos los modos. En efecto, la conmutatividad no está garantizada, debido a que la serie (4.40) no converge uniformemente.

Para tener el polo apropiado en el propagador, necesitamos realizar una renormalización finita, en efecto, la suma en (4.40) puede calcularse explícitamente usando la técnica de regularización ζ [59]. A partir de las ecuaciones (4.40) y (4.41) tenemos: $\Pi_{\mu\nu}^p = \Pi(k^2) \delta_{\mu\nu}^T(k)$, con

$$\Pi(k^2) = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \Pi(k^2, \beta), \quad (4.42)$$

$$\Pi(k^2, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[\frac{(bn + \frac{\theta}{L})^2 + m^2 + \beta(1-\beta)k^2}{(bn + \frac{\theta}{L})^2 + m^2} \right], \quad (4.43)$$

donde $b = 2\pi/L$. Usando la regularización ζ , podemos calcular el objeto $\Pi(k^2, \beta)$, de la siguiente forma:

$$\Pi(k^2, \beta) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d}{ds} \left(Z_1^{m^2}(s, b^2, \frac{\theta}{L}) \right) \right] - \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d}{ds} \left(Z_1^{m^2 + \beta(1-\beta)k^2}(s, b^2, \frac{\theta}{L}) \right) \right], \quad (4.44)$$

donde $Z_1(s, \dots)$ son las funciones generalizadas zeta no homogéneas,

$$Z_1^{M^2} \left(s, b^2, \frac{\theta}{L} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(bn + \frac{\theta}{L} \right)^2 + M^2 \right]^{-s}, \quad (4.45)$$

con $M^2 = m^2$ o $M^2 = m^2 + \beta(1-\beta)k^2$. Esta función también puede ser escrita en todo el plano complejo s [59], de la siguiente forma,

$$Z_1^{M^2} \left(s, b^2, \frac{\theta}{L} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \left[\Gamma \left(s - \frac{1}{2} \right) M^{1-2s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi n}{Mb} \right)^{s-\frac{1}{2}} \cos(n\theta) K_{s-\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi mn}{b} \right) \right]. \quad (4.46)$$

Por lo tanto, usando las fórmulas explícitas para las funciones $K_{\pm}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n} = -\ln(1 - e^{-\alpha})$, obtenemos el factor regularizado:

$$\Pi(k^2, \beta) - \Pi(0, \beta) = \ln \left[\frac{\cosh \left(mL \sqrt{1 + \frac{\beta(1-\beta)k^2}{m^2}} \right) - \cos \theta}{\cosh(mL) - \cos \theta} \right]. \quad (4.47)$$

Finalmente, con estos resultados, tenemos el tensor de polarización regularizado $\Pi_{\mu\nu}^p = \Pi_R^p(k^2) \delta_{\mu\nu}^T(k)$, donde:

$$\begin{aligned} \Pi_R^p(k^2) &= \Pi_p(k^2) - \Pi_p(0) \\ &= \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln(1 + F(k^2)), \end{aligned} \quad (4.48)$$

con

$$F(k^2) = \frac{\cosh \left[mL \sqrt{1 + \beta(1-\beta) \frac{k^2}{m^2}} \right] - \cosh(mL)}{\cosh(mL) - \cos(\theta)}. \quad (4.49)$$

Es interesante notar que, aunque la teoría es en 5 dimensiones, el tensor de polarización del vacío requiere ser renormalizado fijando sólo la posición y el residuo de un polo, como en 4 dimensiones. En efecto el grado de divergencia superficial, $\delta(\gamma)$, para una gráfico 1PI γ en QED_5 es:

$$\delta(\gamma) = 5 - \frac{3}{2}E_G - 2E_F + \frac{1}{2}V, \quad (4.50)$$

donde E_G y E_F son el número de líneas externas de campos de gauge y fermiones, respectivamente, y V es el número de vértices. Para el tensor de polarización del vacío a un loop, tenemos $\delta(\gamma) = 3$; el cual se reduce a 1 al tomar en cuenta la invariancia de gauge. Además, como los términos divergentes sólo pueden ser polinomios pares en los momentos, tenemos un grado de divergencia cero, esto es una divergencia logarítmica, ya controlada en (4.42)

Veamos ahora las propiedades y consecuencias inmediatas que se obtienen de las expresiones (4.48), (4.49). El procedimiento más natural es analizar su comportamiento para diferentes regímenes de los momentos. En el caso de momentos pequeños, es decir, $k^2 \ll m^2$. El primer término o término principal de la expansión $k^2/m^2 \rightarrow 0$, ya ha sido considerado para imponer las condición de renormalización $\Pi_R^p \rightarrow 0$, por lo tanto ya no es una predicción, sino que muestra el hecho de que el modelo contiene la ley de Coulomb a grandes distancias. El siguiente término contiene un efecto no trivial, que sería sensible a la presencia del flujo; expandiendo el tensor renormalizado hasta

el orden $(\frac{k}{m})^2$, encontramos que:

$$\Pi_R(k^2) \sim -\frac{e^2}{30\pi} \left[\frac{mL \sinh(mL)}{\cos(\theta) - \cosh(mL)} \right] \frac{k^2}{m^2}, \quad k \sim 0. \quad (4.51)$$

Estos resultados, junto con la acción efectiva correspondiente al fotón, producen, por ejemplo, una corrección en el potencial electrostático debido a una carga puntual. Para el átomo de Hidrógeno, la energía potencial corregida resulta ser:

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2}{4\pi r} - \frac{e^4}{120\pi^2 m^2} \left[\frac{mL \sinh(mL)}{\cosh(mL) - \cos \theta} \right] \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (4.52)$$

Si tomamos $\theta \rightarrow 0$ y $mL \rightarrow 0$, tenemos la corrección usual:

$$V_{eff}(r) \rightarrow -\frac{e^2}{4\pi r} - \frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (4.53)$$

Es interesante estudiar la forma del cociente entre la forma corregida (nueva) (4.52) y la usual (4.53):

$$\xi(mL, \theta) = \frac{\frac{mL}{2} \sinh(mL)}{\cosh(mL) - \cos \theta}; \quad (4.54)$$

en el caso con flujo nulo, tenemos:

$$\xi(mL, 0) = \frac{\frac{mL}{2}}{\tanh(\frac{mL}{2})}, \quad (4.55)$$

el cual para valores pequeños de mL se aproxima a 1, y crece linealmente con mL cuando $mL \gg 1$. En el caso opuesto, donde el efecto del flujo es máximo, correspondiente a $\theta = \pi/2$, el comportamiento es muy diferente:

$$\xi(mL, \frac{\pi}{2}) = \frac{mL}{2} \tanh(mL), \quad (4.56)$$

este tiende a cero cuadráticamente para valores pequeños de mL , y crece linealmente para valores grandes de mL , aunque con una pendiente diferente.

Por otro lado, es interesante saber que a partir de la ecuación (4.54), podemos obtener un estimado de la longitud de L de la coordenada extra compactificada. Para ello necesitamos tomar algunas consideraciones. Suponiendo que estamos dentro de la aproximación de flujo nulo; consideremos que la contribución de la polarización del vacío al cambio en los niveles de energía de los átomos muónicos es del orden del 0,5 % [60], entonces podemos tomar $\xi(mL, 0) \lesssim 1,0001$. Tal elección implica que la corrección debida a una dimensión extra no presenta cambios significativos en los datos actuales. Teniendo en cuenta estos hechos, obtenemos: $L \lesssim 0,003[m]^{-1}$, en unidades naturales; o en unidades de metros tenemos que $L \lesssim 10^{-14} m$. Para tener una mayor exactitud

en la cota, deberíamos tomar en cuenta otros efectos que manifiesten una dependencia física de las dimensiones extra.

Consideremos ahora el régimen para valores de momento muy grandes. Este régimen está definido mediante la condición $k^2 \gg m^2$, aunque k (y m) se consideran mucho más pequeños que L^{-1} . Esto se acentúa por el hecho de que la masa de los modos de Kaluza Klein son mas grandes que el momento del fotón. Por lo tanto tenemos la siguiente expresión:

$$\Pi_R^p(k^2) \sim \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left(1 + \beta(1-\beta) \frac{k^2}{m_{eff}^2} \right), \quad (4.57)$$

donde

$$m_{eff} \equiv \frac{2 |\sin(\theta/2)|}{L}. \quad (4.58)$$

Para concluir el análisis, también cabe mencionar que debido a la existencia de un flujo no nulo, el comportamiento para grandes valores del momento difiere de su comportamiento en la teoría QED_{3+1} , debido a la aparición de una masa efectiva m_{eff} ; esta masa debe ser muy pequeña para no destruir el conocido efecto de anti apantallamiento a pequeñas distancias, siendo que L es chico, esto sólo se puede lograr con una valor de θ muy chico, es decir $\theta \ll 1$. Por lo tanto,

$$m_{eff} \equiv \frac{2 |\sin(\theta/2)|}{L} \sim \frac{|\theta|}{L} \ll \frac{1}{L}, \quad (4.59)$$

en unidades naturales. Si $L^{-1} \equiv \Delta$ es la escala de momentos grandes impuestos por los modos de Kaluza-Klein, y queremos que m_{eff} sea mas pequeña que la masa del electrón, para recobrar el comportamiento esperado de la carga efectiva a pequeñas distancias; debemos pedir que:

$$|\theta| \ll \frac{m}{\Delta}. \quad (4.60)$$

Término de quiebre de paridad

El término que rompe la invarianza de paridad, Γ_i , se obtiene tomando en cuenta las expresiones (4.35) y (4.31):

$$\Gamma_i = \frac{ie^2}{16\pi^2} \Psi \int d^{3+1}x \hat{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.61)$$

donde hemos introducido el factor:

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n; \quad (4.62)$$

la suma de esta serie es muy conocida [61],

$$\Psi = \arctan \left[\tanh \left(\frac{mL}{2} \right) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (4.63)$$

Los posibles efectos debido a este término son más difíciles de elucidar, ya que se requiere la existencia de un campo de gauge abeliano en una variedad no trivial.

4.2. Polarización del vacío para fermiones confinados

En esta sección estudiaremos las propiedades a un loop del tensor de polarización del vacío $\Pi_{\mu\nu}$ para un campo fermiónico sin masa, confinado a una región \mathcal{M} , definido por la condición $0 \leq x_3 \leq \epsilon$. Concretamente, consideraremos un campo de Dirac euclideo no masivo en $3 + 1$ dimensiones, que satisface condiciones de borde de *bag model* [62], es decir, corriente normal nula, sobre dos planos estáticos en $x_3 = 0$ y $x_3 = \epsilon$. Las coordenadas euclidianas están denotadas por los subíndices $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

El hecho de que el campo de Dirac esté confinado a la región entre las dos placas (espejos), implica que $\Pi_{\mu\nu}$ se anula idénticamente fuera de $0 < x_3 < \epsilon$. Si tuvieramos fermiones fuera de la región de confinamiento ($x_3 < 0$, por ejemplo), $\Pi_{\mu\nu}$ no se anularía, sin embargo, sus propiedades allí serían equivalente al caso en el que tendríamos una sola placa ($x_3 = 0$).

El efecto del confinamiento de los fermiones sobre la propagación del campo de gauge, se puede obtener integrando sobre todos los grados de libertad de los fermiones, es decir, calculando la acción efectiva:

$$e^{-\Gamma_f(A)} = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_f(\bar{\psi}, \psi; A)}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_f(\bar{\psi}, \psi; 0)}}, \quad (4.64)$$

donde la acción fermiónica, S_f , tiene en cuenta el acoplamiento (minimal) con el campo de gauge como también las condiciones de borde de *bag model*.

Las condiciones de borde se implementan de acuerdo al procedimiento presentado en [62], introduciendo términos de interacción local en la acción, a través de potenciales tipo *delta* acoplados a las formas bilineales $\bar{\psi}\psi$; de ésta manera, el problema original se reduce a un caso unidimensional donde los campos viven en las superficies de los espejos. Por su puesto el propagador resultante deberá estar de acuerdo con el que se obtendría por otro método; por ejemplo, usando la expansión en múltiples reflexiones (MRE) [63–65], tal procedimiento fue usado en [66] para el cálculo de $\Pi_{\mu\nu}$ para un campo de Dirac en un semiespacio.

La función de Green fermiónica en la región entre dos espejos ha sido calculada

en [67]. Nosotros presentamos aquí una derivación alternativa. Procediendo como en [62], escribamos la acción fermiónica,

$$\mathcal{S}_f(\bar{\psi}, \psi; A) = \int d^4x \bar{\psi}(x) [\not{\partial} + gV(x_3) + ie \not{A}(x)] \psi(x), \quad (4.65)$$

con la inclusión de un “potencial” V , el cual establece dos placas en las coordenadas $x_3 = 0$ y $x_3 = \epsilon$, definido de la siguiente forma:

$$V(x_3) = \delta(x_3) + \delta(x_3 - \epsilon). \quad (4.66)$$

La constante g , se fija a un valor igual a 2, para que las condiciones de borde sean las del *bag model*; un valor diferente de 2 podría producir condiciones de borde “imperfectas” [62]. Las matrices γ euclidianas, son hermíticas y satisfacen: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$.

A partir de (4.64), podemos escribir la acción efectiva,

$$\Gamma_f(A) = -\text{Tr} \ln [1 + ie(\not{\partial} + 2V)^{-1} \not{A}], \quad (4.67)$$

cuyo desarrollo en potencias del campo A_μ nos permite obtener la polarización de vacío, $\Pi_{\mu\nu}$, este es el kernel que determina la forma del primer término no trivial en el desarrollo:

$$\Gamma_f(A) = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) + \dots \quad (4.68)$$

La forma explícita de $\Pi_{\mu\nu}$, en el espacio de coordenadas, esta dado por:

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = -e^2 \text{tr} [S_F(y, x) \gamma_\mu S_F(x, y) \gamma_\nu], \quad (4.69)$$

donde:

$$S_F(x, y) = \langle x | (\not{\partial} + 2V)^{-1} | y \rangle, \quad (4.70)$$

es el propagador fermiónico exacto (en el espacio de coordenadas) para $e = 0$, es decir, el propagador fermiónico sin acomplamiento con el campo de gauge. La notación entre *brackets* ha sido usada para denotar la versión de los operadores en el espacio de coordenadas (en este caso, la inversa del operador $\not{\partial} + 2V$).

Puesto que las condiciones de borde solo afectan a la coordenada x_3 , aún tenemos una simetría de traslación en las coordenadas paralelas (las coordenadas perpendiculares a la coordenada x_3), $x_\parallel \equiv (x_0, x_1, x_2)$; por lo tanto, $S_F = S_F(x_\parallel - y_\parallel; x_3, y_3)$. Es natural trabajar en la representación de Fourier mixta \tilde{S}_F (de S_F), la cual resulta de realizar la transformada de Fourier solamente en las coordenadas paralelas. Si p_\parallel es la coordenada de Fourier asociada a la coordenada x_\parallel , entonces $S_F(x_\parallel - y_\parallel; x_3, y_3) \rightarrow \tilde{S}_F(p_\parallel; x_3, y_3)$, representa la transformación.

En la representación mixta, el problema de calcular el propagador \tilde{S}_F , se reduce a resolver un problema unidimensional:

$$\left[\gamma_3 \partial_{x_3} - i \not{p}_\parallel + 2V(x_3) \right] \tilde{S}_F(p_\parallel; x_3, y_3) = \delta(x_3 - y_3). \quad (4.71)$$

La solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea, dada arriba, puede ser escrita como la suma de dos términos:

$$\tilde{S}_F(p_\parallel; x_3, y_3) = \tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, y_3) + \tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3), \quad (4.72)$$

donde el primer término, $\tilde{S}_F^{(0)}$, es el propagador libre fermiónico en ausencia de condiciones de borde; mientras que el segundo, \tilde{U} , tiene en cuenta las condiciones de borde de *bag model* del problema. La forma explícita de $\tilde{S}_F^{(0)}$ puede obtenerse directamente de la función de Green $\tilde{S}_F^{(0)}(x; y)$ para el operador de Dirac libre:

$$\tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, y_3) = \frac{1}{2} \left[\text{sgn}(x_3 - y_3) \gamma_3 - i \frac{\not{p}_\parallel}{|p_\parallel|} \right] e^{-|p_\parallel| |x_3 - y_3|}. \quad (4.73)$$

Reemplazando (4.72) en (4.71), obtenemos la siguiente ecuación implícita para $\tilde{U}(p_\parallel, x_3, y_3)$:

$$(\gamma_3 \partial_{x_3} + i \not{p}_\parallel) \tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3) = -2V(x_3) \left[\tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, y_3) + \tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3) \right], \quad (4.74)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3) &= -2 \left[\tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, 0) \tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; 0, y_3) + \tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, 0) \tilde{U}(p_\parallel; 0, y_3) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, \epsilon) \tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; \epsilon, y_3) + \tilde{S}_F^{(0)}(p_\parallel; x_3, \epsilon) \tilde{U}(p_\parallel, \epsilon, y_3) \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

La última ecuación indica que para obtener $\tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3)$, primero debemos conocer las $\tilde{U}(p_\parallel, 0, y_3)$ y $\tilde{U}(p_\parallel, \epsilon, y_3)$. Estos asimismo, pueden obtenerse resolviendo el sistema de dos ecuaciones que resulta de evaluar (4.75) en $x_3 = 0$ y $x_3 = \epsilon$, respectivamente. Una vez que estos objetos han sido encontrados la expresión explícita para $\tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3)$, puede ser expresado como una suma de cuatro términos, ordenados de acuerdo a su contenido de matriz γ :

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p_\parallel; x_3, y_3) &= \tilde{U}_0(p_\parallel; x_3, y_3) I + \tilde{U}_1(p_\parallel; x_3, y_3) \left(-i \frac{\not{p}_\parallel}{|p_\parallel|} \right) \\ &\quad + \tilde{U}_2(p_\parallel; x_3, y_3) \left(-i \frac{\not{p}_\parallel}{|p_\parallel|} \gamma_3 \right) + \tilde{U}_3(p_\parallel, x_3, y_3) \gamma_3, \end{aligned} \quad (4.76)$$

donde hemos introducido cuatro funciones \tilde{U}_a ($a = 0, 1, 2, 3$), las que, para $0 < x_3 < \epsilon$

y $0 < y_3 < \epsilon$, están dadas por:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_0(p_{||}; x_3, y_3) &= \frac{1}{2(e^{2|p_{||}\epsilon} + 1)} \left[e^{|p_{||}(x_3+y_3)} + e^{-|p_{||}(x_3+y_3-2\epsilon)} \right], \\
\tilde{U}_1(p_{||}; x_3, y_3) &= -\frac{1}{2(e^{2|p_{||}\epsilon} + 1)} \left[e^{|p_{||}(x_3-y_3)} + e^{-|p_{||}(x_3-y_3)} \right], \\
\tilde{U}_2(p_{||}; x_3, y_3) &= -\frac{1}{2(e^{2|p_{||}\epsilon} + 1)} \left[e^{|p_{||}(x_3+y_3)} - e^{-|p_{||}(x_3+y_3-2\epsilon)} \right], \\
\tilde{U}_3(p_{||}; x_3, y_3) &= \frac{1}{2(e^{2|p_{||}\epsilon} + 1)} \left[e^{|p_{||}(x_3-y_3)} - e^{-|p_{||}(x_3-y_3)} \right].
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Un cálculo simple pero tedioso muestra que, efectivamente, las condiciones de borde de *bag model* se verifican completamente, es decir, las siguientes ecuaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} (I - \gamma_3) \tilde{S}_F(p_{||}; x_3, y_3) &= 0 \\
\lim_{x_3 \rightarrow \epsilon^-} (I + \gamma_3) \tilde{S}_F(p_{||}; x_3, y_3) &= 0
\end{aligned} \tag{4.78}$$

(también para aquellas que corresponden a la coordenada y_3).

Analicemos ahora las propiedades ultravioletas del propagador \tilde{S}_F , definido en (4.72). Veremos que los dos términos tienen un comportamiento muy diferente. El primero, $\tilde{S}_F^{(0)}$, el propagador libre en ausencia de condiciones de borde, su comportamiento ultravioleta es bastante conocido ($\sim p^{-1}$ en el espacio de momentos). En la representación de Fourier ‘mixta’ (depende de $p_{||}$ y x_3, y_3), su comportamiento va como $\sim |p_{||}|^0$ cuando $x_3 = y_3$, y decae exponencialmente cuando $x_3 \neq y_3$. Por otro lado, el término \tilde{U} decae exponencialmente en cualquier caso, excepto cuando ambos, x_3 y y_3 , se aproximan a la misma frontera, es decir, cuando $x_3 + y_3 \rightarrow 0$ o $x_3 + y_3 \rightarrow 2\epsilon$. Además, podemos ver que el origen de este comportamiento proviene de los términos \tilde{U}_0 y \tilde{U}_2 (mientras que \tilde{U}_1 y \tilde{U}_3 siempre decrecen exponencialmente, sin importar los valores de x_3 y y_3).

Una representación alternativa de la expresión S_F , se obtiene expandiendo en series los términos $(e^{2|p_{||}\epsilon} + 1)^{-1}$, que aparecen en las expresiones para \tilde{U}_a :

$$\frac{1}{e^{2|p_{||}\epsilon} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(n+1)|p_{||}\epsilon}. \tag{4.79}$$

Como resultado, después de algunas manipulaciones algebraicas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_F(p_{||}; x_3, y_3) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[\tilde{S}_F^{(0)}(p_{||}; x_3, y_3 + 2n\epsilon) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_3 \tilde{S}_F^{(0)}(p_{||}; x_3, -y_3 + 2n\epsilon) \right];
\end{aligned} \tag{4.80}$$

el cual puede interpretarse naturalmente como la representación MRE de \tilde{S}_F . De aquí podemos resaltar la parte del propagador que controla el comportamiento ultravioleta. Puesto que todos los términos en la suma pueden escribirse en función del propagador $\tilde{S}_F^{(0)}$, es fácil ver los términos que controlan el régimen de momentos grandes, $|p_{\parallel}|$, son: $n = 0$ (para $x_3 = y_3$ o $x_3 + y_3 = 0$) y $n = 1$ (para $x_3 + y_3 = 2\epsilon$).

Para obtener una expresión más explícita de $\Pi_{\mu\nu}$, vamos a reemplazar en (4.69) los resultados encontrados previamente para S_F . En primer lugar, dado que $\Pi_{\mu\nu}$ debe ser función de $(x_{\parallel} - y_{\parallel}; x_3, y_3)$, podemos escribir su transformada de Fourier respecto a las variables paralelas, del siguiente modo:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_{\parallel}; x_3, y_3) = -e^2 \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[\tilde{S}_F(p_{\parallel}; y_3, x_3) \gamma_{\mu} \tilde{S}_F(p_{\parallel} + k_{\parallel}; x_3, y_3) \gamma_{\nu} \right]. \quad (4.81)$$

El cual puede escribirse como la contribución de cuatro términos,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_{\parallel}; x_3, y_3) &= \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{LL}(k_{\parallel}; x_3, y_3) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{LU}(k_{\parallel}; x_3, y_3) \\ &+ \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{UL}(k_{\parallel}; x_3, y_3) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{UU}(k_{\parallel}; x_3, y_3), \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{LL}(k_{\parallel}; x_3, y_3) = -e^2 \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[\tilde{S}_F^{(0)}(p_{\parallel}; y_3, x_3) \gamma_{\mu} \tilde{S}_F^{(0)}(p_{\parallel} + k_{\parallel}; x_3, y_3) \gamma_{\nu} \right], \quad (4.83)$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{LU}(k_{\parallel}; x_3, y_3) = -e^2 \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[\tilde{S}_F^{(0)}(p_{\parallel}; y_3, x_3) \gamma_{\mu} \tilde{U}(p_{\parallel} + k_{\parallel}; x_3, y_3) \gamma_{\nu} \right], \quad (4.84)$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{UL}(k_{\parallel}; x_3, y_3) = -e^2 \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[\tilde{U}(p_{\parallel}; y_3, x_3) \gamma_{\mu} \tilde{S}_F^{(0)}(p_{\parallel} + k_{\parallel}; x_3, y_3) \gamma_{\nu} \right], \quad (4.85)$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{UU}(k_{\parallel}; x_3, y_3) = -e^2 \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[\tilde{U}(p_{\parallel}; y_3, x_3) \gamma_{\mu} \tilde{U}(p_{\parallel} + k_{\parallel}; x_3, y_3) \gamma_{\nu} \right]. \quad (4.86)$$

Reemplazando las expresiones explícitas para $\tilde{S}_F^{(0)}$ y \tilde{U} , y evaluando las trazas, encontramos que la suma $\tilde{\Pi}^{LU} + \tilde{\Pi}^{UL}$ se anula. Por lo tanto nos quedamos con,

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_{\parallel}; x_3, y_3) = \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^L(k_{\parallel}; x_3, y_3) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^U(k_{\parallel}; x_3, y_3), \quad (4.87)$$

donde: $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^L \equiv \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{LL}$ y $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^U \equiv \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{UU}$.

Antes de continuar con $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ aplicado a algunos casos particulares, veamos un efecto relacionado: las condiciones de borde en 0 y ϵ rompen la simetría quiral de la teoría no confinada sin masa. Una medida local y cuantitativa de este rompimiento está basada en el valor de expectación del observable bilineal, el condensado fermiónico: $\rho(x) \equiv \langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle$.

En términos del propagador fermiónico, podemos expresar ρ de la siguiente forma:

$$\rho(x) = -\text{tr}[S_F(x, x)] . \quad (4.88)$$

Luego, tomando en cuenta la invarianza traslacional a lo largo de las coordenadas paralelas, y la forma específica de \tilde{S}_F , tenemos:

$$\rho(x) = \rho(x_3) = - \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \text{tr}[\tilde{S}_F(p_{||}; x_3, x_3)] , \quad (4.89)$$

la cual se puede calcular exactamente, esto es:

$$\rho(x_3) = -\frac{\pi^4}{2\epsilon^3} \frac{3 + \cos\left(\frac{2\pi x_3}{\epsilon}\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi x_3}{\epsilon}\right)} . \quad (4.90)$$

Observemos que ésta expresión es simétrica respecto a $x_3 = \frac{\epsilon}{2}$, y es finita en cualquier lado, excepto en $x_3 = 0$ y $x_3 = \epsilon$.

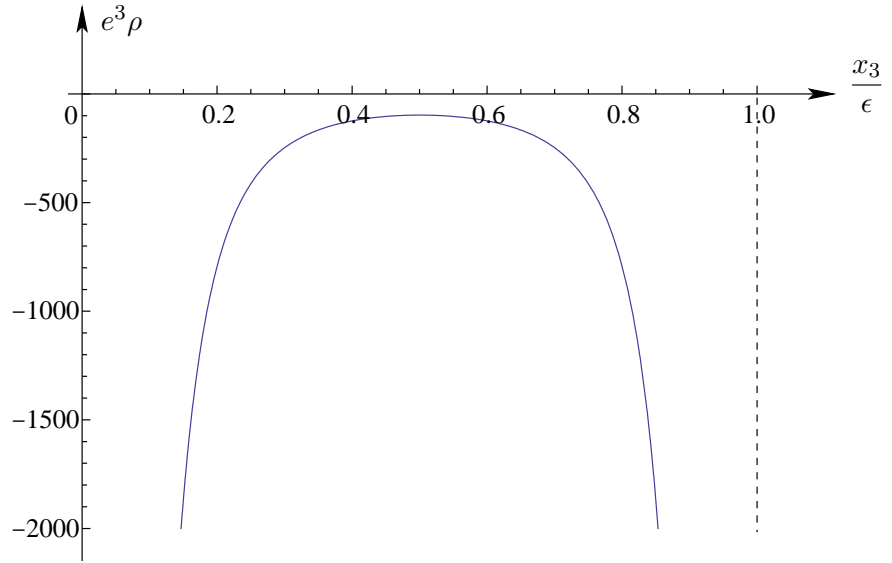


Figura 4.1: $e^3 \rho$ como función de $\frac{x_3}{\epsilon}$

Como puede inferirse a partir de la figura (4.1), para valores finitos de ϵ , $\rho(x_3)$ diverge en los bordes, y tiene un valor máximo de $-\pi^4/\epsilon^3$ en $x_3 = \epsilon/2$. Puede mostrarse también que tiende a 0 cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ y x_3 está lejos de los bordes. Esta concentración alrededor de los bordes también se ve en la corriente de vacío inducida, j_μ , para algunas configuraciones particulares del campo electromagnético. Estas corrientes inducidas son, en la aproximación lineal, determinadas por $\Pi_{\mu\nu}$ y el campo de gauge

A_μ correspondiente. En nuestras convenciones:

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= e \langle \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \rangle \\ &= -i \int d^4y \Pi_{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) , \end{aligned} \quad (4.91)$$

y en la representación de Fourier mixta:

$$\tilde{j}_\mu(k_\parallel; x_3) = -i \int dy_3 \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k_\parallel; x_3, y_3) \tilde{A}_\nu(k_\parallel; y_3) . \quad (4.92)$$

Evaluemos la corriente en el caso particular de un campo eléctrico estático con incidencia normal a las placas (en la dirección x_3). Esto corresponde a $F_{01} = E$, donde E es una constante. En el gauge $A_3 = 0$: $A_0 = -Ex_3$, y $A_\mu = 0$ para $\mu \neq 0$. Por lo tanto,

$$j_\mu = j_\mu(x_3) = iE \int dy_3 \tilde{\Pi}_{\mu 0}(0; x_3, y_3) y_3 , \quad (4.93)$$

usualmente, es más conveniente trabajar en la versión de tiempo real (Minkowski), en la que j_M^μ , es:

$$j_M^0(x_3) = -E \int dy_3 \tilde{\Pi}_{00}(0; x_3, y_3) y_3 , \quad (4.94)$$

y (para $l \neq 0$):

$$j_M^l(x_3) = +E \int dy_3 \tilde{\Pi}_{l0}(0; x_3, y_3) y_3 . \quad (4.95)$$

Dado que el sistema conserva paridad, $j_1 = j_2 = 0$ para los campos externos. Por lo tanto, nos enfocamos en j_M^0 y j_M^3 . Recordando (4.87), vemos que estas corrientes reciben dos contribuciones:

$$\begin{aligned} j_M^0(x_3) &= -E \int dy_3 \left[\tilde{\Pi}_{00}^L(0; x_3, y_3) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Pi}_{00}^U(0; x_3, y_3) \right] y_3 . \end{aligned} \quad (4.96)$$

y análogamente para j_M^3 .

Para obtener j_M^0 , primero veamos que:

$$\tilde{\Pi}_{00}^L(0; x_3, y_3) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{2|p||x_3-y_3|} 2 \left(1 - \frac{p_0^2}{p^2} \right) = -\frac{e^2}{6\pi^2|x_3-y_3|^3} , \quad (4.97)$$

el cual es finita para todo $x_3 \neq y_3$. La integración respecto a y_3 , para calcular la corriente, produce una divergencia. Sin embargo, las condiciones de renormalización usuales, nos indican que debemos usar la parte finita de Hadamard de esta integral.

Por su parte, para $\tilde{\Pi}_{00}^U$ encontramos lo siguiente:

$$\tilde{\Pi}_{00}^U(0; x_3, y_3) = \mathcal{M}_1\left(\frac{x_3 - y_3}{\epsilon}\right) + \mathcal{M}_2\left(\frac{x_3 + y_3}{\epsilon}\right), \quad (4.98)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(u) &= -\frac{e^2}{\epsilon^3} \left[-\frac{1}{72} + \frac{\zeta(3)}{8\pi^2} + F_1(u) \right], \\ \mathcal{M}_2(v) &= -\frac{e^2}{\epsilon^3} \left[\frac{5}{72} + F_2(v) \right], \end{aligned} \quad (4.99)$$

donde:

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \frac{1}{24\pi^2 u^2} - \frac{\cos(\pi u)}{24 \sin^2(\pi u)} + \frac{1}{384\pi^2} \left[(1-u)\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - (1-u)\psi^{(2)}\left(1 - \frac{u}{2}\right) - (1+u)\psi^{(2)}\left(1 + \frac{u}{2}\right) + (1+u)\psi^{(2)}\left(\frac{1+u}{2}\right) \right], \\ F_2(v) &= \frac{1}{48} \csc^3(\pi v) \left[2 \sin(2\pi v) + \pi(1-v)(3 + \cos(2\pi v)) \right], \end{aligned} \quad (4.100)$$

donde ζ es la función zeta de Riemann y $\psi^{(2)}(z) = \frac{d^3(\ln \Gamma(z))}{dz^3}$.

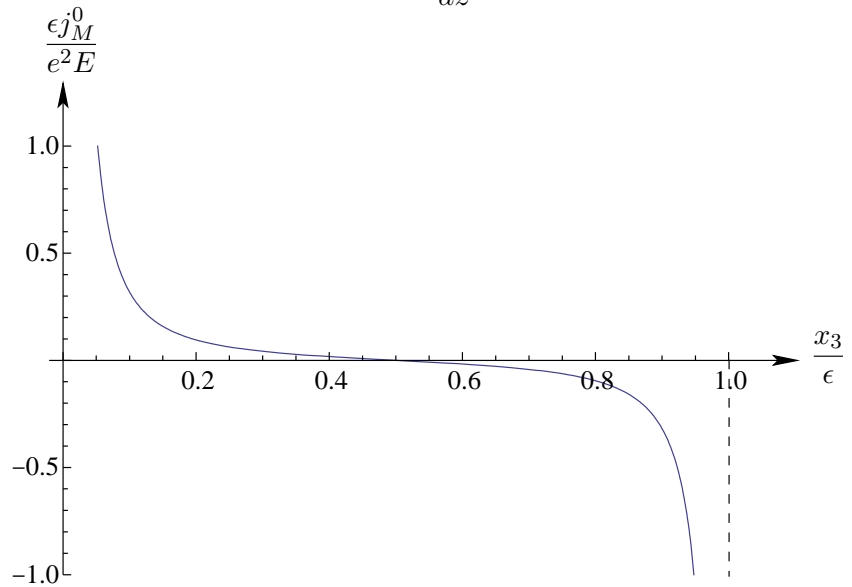


Figura 4.2: $\frac{\epsilon j_M^0}{e^2 E}$ como función de $\frac{x_3}{\epsilon}$

En la figura (4.2), se grafica la forma de la función $\frac{\epsilon j_M^0}{e^2 E}$ como una función de $\frac{x_3}{\epsilon}$ que obtuvimos en los resultados anteriores.

Por otro lado, si consideramos j_M^3 , bajo la misma configuración de campo externo, encontramos que se anula, es decir, $j_M^3 = 0$. No debería sorprendernos que la corriente normal se anule en los bordes, ya que las condiciones de bag model deben hacer pre-

cisamente eso. El caso de que la corriente se anule dentro del *slab* debe ser considerado como una característica de la configuración en el estado estacionario, que se alcanza una vez que la densidad de carga tiene el patrón mostrado arriba.

El perfil de la densidad de carga mostrado arriba corresponde al caso de un campo eléctrico normal. Para explorar una situación un poco distinta a ésta, presentaremos aquí una expresión exacta para la acción efectiva Γ_f , para un caso donde el campo de gauge depende solamente de las coordenadas paralelas. Procediendo como en [62], aplicado a nuestro caso, encontramos lo siguiente:

$$e^{-\Gamma_f(A_{\parallel})} = \det \mathcal{K}, \quad (4.101)$$

donde \mathcal{K} es el objeto

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 + V & (V - \gamma_3)e^{-\epsilon\mathcal{H}} \\ (V + \gamma_3)e^{-\epsilon\mathcal{H}} & 1 + V \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

con

$$\mathcal{H} \equiv \sqrt{-\mathcal{D}_{\parallel}^2}, \quad V \equiv \frac{-\mathcal{D}_{\parallel}}{\mathcal{H}}. \quad (4.103)$$

donde \mathcal{D}_{\parallel} , es el operador de Dirac paralelo: $\mathcal{D}_{\parallel} = \gamma_{\alpha}D_{\alpha}$, $\alpha = 0, 1, 2$, y $D = \partial_{\parallel} + A_{\parallel}(x_{\parallel})$.

Después de un poco de álgebra, el determinante se puede escribir en la siguiente forma equivalente:

$$\det \mathcal{K} = [\det(1 + V)]^2 \det \left[1 - \frac{1 + \gamma_3}{2}(1 + V)e^{-2\epsilon\mathcal{H}} \right]. \quad (4.104)$$

Como consecuencia, $\Gamma_f(A_{\parallel})$ recibe dos contribuciones, una que proviene del determinante de $(1 + V)$, el cual esencialmente es bidimensional e independiente de ϵ ; y el otro término Γ_{ϵ} , que depende de ϵ , es finito (debido al factor exponencial), y tiende a cero cuando $\epsilon \rightarrow \infty$:

$$\Gamma_{\epsilon}(A_{\parallel}) = -\text{Tr} \log \left[1 - \frac{1 + \gamma_3}{2}(1 + V)e^{-2\epsilon\mathcal{H}} \right]. \quad (4.105)$$

En resumen, encontramos la forma de la corriente inducida de vacío; la que muestra que debido al campo eléctrico normal, la densidad de carga inducida se distribuye para contrapesar el campo eléctrico externo. Obtuvimos una expresión para la acción efectiva, que resulta de considerar una configuración de gauge paralela que contiene términos que representan la contribución de ancho finito. Esta es finita y contiene un factor $\frac{1+\gamma_3}{2}$, el cual es un proyector que toma en cuenta la supresión de algunos de los modos fermiónicos debido a las condiciones de borde. Además se han visto efectos cuánticos ante la presencia de campos eléctricos estáticos, que bien podrían ser

estudiados en la teoría de respuesta lineal. El efecto depende solamente de la función de polarización del vacío, y no toma en cuenta efectos no perturbativos, como la creación de partículas en la presencia de un campo electromagnético externo. Además debido a que el campo es estático, no podemos ver la creación de pares que, por ejemplo, aparecería con un campo eléctrico oscilante.

Capítulo 5

Conclusiones

En una teoría de campos con dimensiones compactas, la implementación de las condiciones de borde constituye una parte muy importante del formalismo de la teoría. En particular, la imposición de condiciones de borde mediante campos auxiliares que actúan como multiplicadores de Lagrange nos ha conducido a nuevas interpretaciones y resultados. En efecto, este hecho se ha mostrado con mayor claridad en el Capítulo 2, donde hemos obtenido una nueva representación de la teoría de campos a temperatura finita. Esta representación *dual* se escribe en función de los campos auxiliares, los cuales tienen una dimensión menor que la original, y la Acción efectiva resulta ser no local e independiente del tiempo. La representación *dual* tiene una interpretación natural como una generalización de la mecánica estadística clásica, cuyo Hamiltoniano debe ser modificado para incluir las correcciones cuánticas y donde los campos auxiliares juegan un rol semejante a las coordenadas del espacio de fases en la teoría clásica. El Hamiltoniano del sistema resulta ser normalmente ordenado, es decir la energía de vacío se redefine como cero. Se ha mostrado que esta representación resulta adecuada para describir teorías de campos bosónicos y fermiónicos a temperatura finita; obteniéndose algunos objetos de la teoría, tales como la función de partición y las funciones de correlación de dos puntos. Otra ventaja del formalismo es la ausencia de divergencias ultravioletas, es decir, los diagramas *tadpol* de temperatura finita y cualquier otro diagrama resultan ser finitos.

El efecto Casimir es otro resultado de una teoría de campos con dimensiones compactas. En el Capítulo 3 se ha abordado éste tema, encontrando una fórmula general para la interacción de Casimir de N superficies de Dirichlet. A partir de esta fórmula hemos analizado el efecto de no superposición, mostrando en primer lugar el caso simple de tres esferas. Luego, hemos mostrado una manera de medir el efecto de no superposición realizando un desarrollo perturbativo válido para la configuración donde la separación relativa de los objetos es mayor que el tamaño de los mismos; como resultado, el primer orden no nulo se interpreta como la interacción entre pares, es decir

la superposición; los signos de la no superposición aparecen en los términos superiores, correspondiendo a interacción de ternas, cuaternas, etc. Se han mostrado ejemplos explícitos en dimensiones espaciales $d = 1, 2$ y 3 , solo en el primer caso es posible obtener la serie exacta completa, mientras que para dimensiones mayores es necesario realizar algunas simplificaciones. También hemos analizado la interacción de Casimir de dos placas a temperatura finita, encontrando resultados exactos para dimensión $1+1$, mientras que para dimensiones mayores se obtuvieron valores para altas y bajas temperaturas. Al incluir un término de interacción cuártico hemos analizado el fenómeno en dos formas diferentes. El primero, usando el método perturbativo usual, encontramos que la primera corrección a la fuerza de Casimir es finita; el segundo método nos ha permitido encontrar correcciones no perturbativas de una manera controlada, usando la funcional generatriz exacta de temperatura finita como punto de partida.

En el Capítulo 4 analizamos la electrodinámica cuántica en $4 + 1$ dimensiones, con la dimensión extra compactificada; obteniendo los términos que conservan y violan paridad de la acción efectiva a orden un lazo. En particular, hemos mostrado que el flujo de un campo magnético perpendicular al anillo de la dimensión extra, tiene efectos sobre el tensor de polarización del vacío. Por ejemplo, la aparición de una masa efectiva que depende del parámetro θ (parámetro del flujo) en el régimen de momentos grandes. Esta masa debe ser más pequeña que la masa del electrón para obtener el comportamiento adecuado de las cargas efectivas a distancias cortas. Por otro lado, también hemos analizado las propiedades de la polarización de vacío de fermiones sin masa confinados entre dos placas paralelas; mostrando la corriente y la densidad de carga inducida debido a un campo eléctrico externo constante normal a las placas, obteniéndose que la densidad de carga diverge cerca de las placas y tiene un valor máximo en el punto medio entre las placas; esta concentración alrededor de los bordes también es visible para la corriente inducida, la cual es un signo de que la carga se distribuye de modo que contraresta al campo eléctrico externo. En el caso de un campo de gauge transversal, dependiente solamente de las coordenadas paralelas, hemos mostrado que la acción efectiva contiene un término que depende de, ϵ , la distancia entre las placas.

Bibliografía

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications, 4th. Ed., (2002).
- [2] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory - Algebraic Aspects and Applications*, 1. ed. (World Scientific, Singapore, 2009).
- [3] E. Brezin and J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B 257** 867, 1985.
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B 429** 263, 1998.
- [5] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370, 1999.
- [6] I. Antoniadis, *Phys. Lett.* **B 246**, 377, 1990.
- [7] I. Antoniadis, C. Muñoz and M. Quirós, *Nucl. Phys.* **B 397**, 515 (1993).
- [8] I. Antoniadis, S. Dimopoulos, A. Pomarol, M. Quirós, *Nucl. Phys.* **B 544**, 503 (1999).
- [9] I. Antoniadis, A. Pomarol, M. Quirós, *Phys. Rev.* **D 60**, 095008 (1999).
- [10] H. W. Diehl, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, London, 1986), Vol 10.
- [11] J. L. Cardy, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, London, 1987), Vol 11.
- [12] J. Isenberg and J. Nester, *General Relativity and Gravitation*, edited by A. Held (Plenum Press, New York, 1980), Vol. 1.
- [13] T. Regge and C. Teitelboim, *Ann. Phys. (N.Y.)* **88**, 286 (1974).
- [14] G. Esposito, A. Yu Kamenshchik and G. Polifrone, *Euclidean Quantum Gravity on Manifolds with Boundary* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- [15] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi and K. Krasnov, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904–907 (1998).

-
- [16] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Phys. Rep.* **323** 183 (2000).
- [17] L. Smolin, *Nucl. Phys.* **B601** 209 (2001).
- [18] R. Bousso, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825 (2002).
- [19] C. V. Johnson, Prepared for Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 99): Strings, Branes, and Gravity, Boulder, Colorado, 31 May - 25 Jun 1999.
- [20] H.B.G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* 51(1948) 793
- [21] P. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, San Diego (1994).
- [22] V. John, G. Jungman and S. Vaidya, *Nucl. Phys.* **B 455** (1995) 505
- [23] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 405
- [24] J. Avron and R. Seiler, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985)259
- [25] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [26] H. Ezawa, Y. Tomonaga and H. Umezawa, *N. Cimento Ser. X*, **5**, 810
- [27] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge (2006).
- [28] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [29] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particles Systems*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [30] T. Kaluza, *Sitz. Preus. Acad. Wiss.* *K1* 966, 1921.
- [31] Klein, *Z. Phys.* **37** (1926) 895.
- [32] P. Nath, M. Yamaguchi, *Phys. Rev. D*, **60** 116006, 1999.
- [33] S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, *JHEP* **08** 041, 2000.
- [34] Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, . World Scientific Publishing Company; 3 edition (March 2004).

- [35] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and Y. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, Oxford Univ. Press, Oxford, UK (2009) (International series of monographs on physics. 145).
- [36] K. A. Milton, J. Phys. **A37** R209, 2004.
- [37] Proceedings, 9th Conference, QFEXT09, Norman, USA, September 21-25, 2009. Prepared for 9th Conference on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions (QFEXT 09): Devoted to the Centenary of H. B. G. Casimir, Norman, Oklahoma, 21-25 Sep 2009. Published in Int. J. Mod. Phys. A25 (2010) 2171-2408.
- [38] T. Emig, Int. J. Mod. Phys. **A25**, 2177-2195, 2010.
- [39] R. Buscher and T. Emig, Phys. Rev. Lett. **94**:133901, 2005.
- [40] I. H. Brevik and J. B. Aarseth, J. Phys. **A39**: 6187-6194, 2006.
- [41] T. Emig, N. Graham, R.L. Jaffe and M. Kardar, Phys. Rev. Lett. **99**:170403, 2007.
- [42] M. Bordag, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Phys. Rept. 353:1-205, 2001.
- [43] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko and S. Zerbini *Zeta regularization techniques with applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 1994.
- [44] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson and A.E. Santana, Nucl. Phys. **B 631** 83, 2002.
- [45] T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe and M. Kardar, Phys. Rev. D **77** 025005, 2008.
- [46] R. Golestanian and M. Kardar, Phys. Rev. A **58**, 1713 (1998).
- [47] C. D. Fosco, F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **76** 085007, 2007
- [48] T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe and M. Kardar, Phys. Rev. Lett. **99** 170403, 2007.
- [49] T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe and M. Kardar, Phys. Rev. D **77**: 025005, 2008.
- [50] J. Babington and S. Scheel, J. Phys. A: Math. Theor. **43** 215402.
- [51] A. Bulgac and A. Wirzba, Phys. Rev. Lett. **87** 120404, 2001.
- [52] A. Bulgac, P. Magierski and A. Wirzba, Phys. Rev. D **73** 025007, 2006.
- [53] O. Kenneth and I. Klich, Phys. Rev. B **78** 014103, 2008.

-
- [54] O. Kenneth and I. Klich, Phys. Rev. Lett. **97** 160401, 2006.
- [55] L. S. Brown and G. J. Maclay, Phys. Rep. **184** 1272, 1969.
- [56] F. Ravndal and D. Tollefsen, Phys. Rev. D **40** 4191, 1989.
- [57] M. Levin, A. P. McCauley, A. W. Rodriguez, M. T. Homer Reid and Steven G. Johnson, Phys. Rev. Lett. **105** 090403, 2010.
- [58] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*, Technical University of Denmark, 2008: <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?3274>.
- [59] E. Elizalde, *Ten applications of spectral zeta-functions*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [60] M.I. Eides, H. Grotch and V.A. Shelyuto, Phys. Rep. **342** 63, 2001.
- [61] C. Fosco, G. L. Rossini and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. **79**, 1980 (1997)
[Erratum-ibid. 79, 4296 (1997)]
- [62] C.D. Fosco and E.L. Losada, Phys. Rev. **D 78**: 025017, 2008.
- [63] R. Balian and C. Bloch, Annals Phys. 60, 401 (1970); Ibid., Annals Phys. 64, 271 (1971).
- [64] T. H. Hansson and R. L. Jaffe, Phys. Rev. D 28, 882 (1983).
- [65] T. H. Hansson and R. L. Jaffe, Annals Phys. 151, 204 (1983).
- [66] C. D. Fosco, A. P. C. Malbouisson and I. Roditi, Phys. Lett. B 609, 430 (2005).
- [67] K.A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy* (World Scientific, River Edge, NJ, 2001), p. 301.

Publicaciones asociadas

1. Vacuum polarization for compactified QED_{4+1} in a magnetic flux background. C. Ccapa Ttira, C.D. Fosco, A.P.C. Malbouisson and I. Roditi. Published in Phys. Rev. A **81**: 032116, 2010.
2. Vacuum polarization from confined fermions in $3 + 1$ dimensions. C.Ccapa Ttira, C.D. Fosco and E. Losada, Phys. Rev. D **82**: 085008, 2010.
3. Non-superposition effects in the Dirichlet Casimir effect. C. Ccapa Ttira, C.D. Fosco and E.L. Losada, Published in J. Phys. A **43**: 235402, 2010.
4. A Dual Path Integral Representation for Finite Temperature Quantum Field Theory. C. Ccapa Ttira, C.D. Fosco, A.P.C. Malbouisson and I. Roditi, Published in Phys. Rev. D **77**: 105030, 2008.

Agradecimientos

A mi familia, que desde lejos a seguido y apoyado mi carrera en todo momento, han sido un soporte y una motivación, y en especial a mi padre. A mi esposa Verónica, mi compañera de la vida, por soportarme durante estos años varias noches largas de trabajo y haberme impulsado a no flaquear en cada emprendimiento.

A mi director de tesis, Cesar Fosco, por su enorme paciencia en enseñarme muchas cosas, no solamente en el campo académico sino también en otros campos de la vida. Su disposición de ayudar en todo momento y su valiosa guía en cada detalle han sido imprescindibles para desarrollar este trabajo; sin duda el impacto de su influencia permanecerá latente no solo en mi desarrollo profesional sino también en mi vida.

Al CONICET, por haberme dado la oportunidad de realizar el doctorado durante todos estos cinco años, y haberme dado la oportunidad de realizar varios viajes asistiendo a conferencias y workshops. Al grupo de Partículas del Centro Atómico Bariloche por haberme acogido y ofrecerme todo el equipo necesario para trabajar. A los compañeros y amigos del grupo de Partículas y del CAB, que conocí durante estos años, ellos me dieron el complemento necesario, la compañía, en otras actividades no menos importantes; aunque algunos ya no están y siguieron otros rumbos. Nombrarlos me llevaría seguramente a omitir a algunos, por ello solo quiero darles las gracias a todos ellos.