

TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**CORRECCIONES A LA ENTROPÍA DE  
ENTRELAZADO Y LA CONSTANTE DE NEWTON**

**Eduardo Testé Lino**  
Maestrando

**Dr. Horacio Casini**  
Director

**Miembros del Jurado**

Dr. Roberto Trincherro (Instituto Balseiro)

Dr. Diego Mazzitelli (Instituto Balseiro)

Dr. Manuel Cáceres (Instituto Balseiro)

Diciembre de 2013

Grupo de Partículas y Campos, Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



# Índice de símbolos

EE	Entropía de entrelazado
BH	Agujero negro
MD	Miembro derecho
MI	Miembro izquierdo
$\Delta G^{-1} \equiv \Delta \left(\frac{1}{G}\right)$	Corrección a la constante de Newton
QFT	Teoría cuántica de campos
CFT	Teoría cuántica de campos con simetría conforme



# Índice de contenidos

Índice de símbolos	iii
Índice de contenidos	v
Resumen	vii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Acción gravitatoria efectiva y fórmula de Adler</b>	<b>5</b>
2.1. Gravedad inducida y acción efectiva . . . . .	5
2.2. Fórmula de Adler . . . . .	9
<b>3. Entropía de entrelazado</b>	<b>17</b>
3.1. Descripción general . . . . .	17
3.1.1. La entropía geométrica. . . . .	20
3.2. Método de réplicas para calcular la EE . . . . .	21
3.2.1. Método de réplicas en espacio euclídeo . . . . .	21
3.3. Cálculo de la EE en espacio plano para los campos escalar y fermiónico libres . . . . .	26
3.3.1. Método de heat-kernel . . . . .	26
3.3.2. Cálculo de la EE para el campo escalar libre . . . . .	28
3.3.3. Cálculo de la EE para el campo fermiónico libre . . . . .	31
3.4. Relación entre la entropía de entrelazado y la constante de Newton $G$ .	36
3.4.1. Aplicación a teorías masivas . . . . .	39
<b>4. Resultados</b>	<b>41</b>
4.1. Cálculo de (4.2) para el campo escalar . . . . .	42
4.1.1. Tensor de energía impulso del campo escalar . . . . .	42
4.1.2. Término $\langle P S_m[\phi, g] \rangle$ . . . . .	45
4.1.3. Expresión (4.2) para el campo escalar en $d$ dimensiones . . . . .	45
4.1.4. Los términos finitos $S_{\text{ent}}^m$ . . . . .	47

4.2. Comprobación de (4.2) para el campo escalar en $d = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ dimensiones . . . . .	48
4.2.1. Comprobación en $d = 3$ . . . . .	48
4.2.2. Comprobación en $d = 4$ . . . . .	49
4.2.3. Comprobación en $d = 5$ . . . . .	50
4.2.4. Comprobación en $d = 6$ . . . . .	50
4.2.5. Comprobación en $d = 7$ . . . . .	51
4.3. Cálculo de (4.2) para el campo fermiónico . . . . .	51
4.3.1. Tensor de energía impulso del campo fermiónico . . . . .	51
4.3.2. Expresión (4.2) para el campo fermiónico en $d$ dimensiones . . . . .	52
4.4. Comprobación de (4.2) para fermiones en $d = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ dimensiones . . . . .	54
4.4.1. Comprobación en $d = 3$ . . . . .	54
4.4.2. Comprobación en $d = 4$ . . . . .	54
4.4.3. Comprobación en $d = 5$ . . . . .	55
4.4.4. Comprobación en $d = 6$ . . . . .	56
4.4.5. Comprobación en $d = 7$ . . . . .	56
4.5. La fórmula (4.2) en $d = 2$ . . . . .	56
<b>5. Comentarios Finales</b>	<b>63</b>
<b>A. Diagonalización de <math>\Delta</math> en una variedad con singularidad cónica</b>	<b>65</b>
A.1. Campo escalar . . . . .	65
A.2. Campo fermiónico . . . . .	67
<b>B. Teorema-<math>c</math> de Zamolodchikov</b>	<b>69</b>
B.1. Enunciado del Teorema- $c$ . . . . .	70
B.2. Demostración en espacio euclídeo . . . . .	70
B.2.1. Positividad de reflexión . . . . .	73
B.2.2. Aplicación de (B.24) al grupo de renormalización . . . . .	75
B.2.3. Derivación de la expresión (4.67) . . . . .	76
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>83</b>

# Resumen

La entropía de entrelazado es una magnitud relevante en diversas áreas de la física, que ha sido relacionada con varias magnitudes de la teoría de campos. En este trabajo proponemos una fórmula para el término de área de la entropía de entrelazado de un campo cuántico arbitrario en términos de correadores de la traza del tensor de energía impulso. Esta igualdad es sugerida por la fórmula de Bekenstein-Hawking que relaciona la entropía de un agujero negro con el área del horizonte de eventos y la constante de Newton. En el caso de la entropía de entrelazado, existe una relación similar entre el término de área de la misma y la corrección  $\Delta G^{-1}$  a la constante de Newton que hace un campo cuántico. Para calcular  $\Delta G^{-1}$ , derivamos una generalización a toda dimensión de una fórmula debida a Adler, lo que nos permite establecer la igualdad que proponemos en cualquier dimensión. Comprobamos por cálculos explícitos que la igualdad se cumple para los campos libres escalar y fermiónico en todas las dimensiones.

**Palabras clave:** ENTROPÍA DE ENTRELAZADO, ENTROPÍA GEOMÉTRICA, AGUJEROS NEGROS, RENORMALIZACIÓN DE LA CONSTANTE DE NEWTON

# Abstract

The entanglement entropy is a useful magnitude in many branches of theoretical physics; in particular, it has been related with magnitudes of quantum field theory. In this work we propose a formula for the area term of the entanglement entropy of a quantum field in terms of the correlator of the trace of the energy momentum tensor. This equality is suggested by the Bekenstein-Hawking's relation among the entropy of a black hole, the area of the event horizon and the Newton's constant. In the case of the entanglement entropy there exist a similar relation between the area term and the correction  $\Delta G^{-1}$  to the Newton's constant that made a quantum field. For getting  $\Delta G^{-1}$  (and hence the proposed formula), we use a generalization to any dimension of a formula due to Adler. We check by explicit calculations that the proposed formula holds for free scalar and fermions fields in any dimensions.

**Keywords:** ENTANGLEMENT ENTROPY, GEOMETRIC ENTROPY, BLACK HOLES, RENORMALIZATION OF NEWTON'S CONSTANT





# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis trata sobre el estudio de dos magnitudes: el término de área de la entropía de entrelazado (EE) de un campo cuántico y la corrección a la constante de Newton que hace el mismo campo. La motivación para ello es que estas dos magnitudes están relacionadas: si  $S_{\text{ent}}/A$  es el término de área por unidad de área de la EE y  $\Delta G^{-1}$  es la corrección a la constante de Newton, se tiene que

$$S_{\text{ent}}/A = \frac{1}{4} \Delta G^{-1} . \quad (1.1)$$

La forma de esta relación es la misma que la expresión de Bekenstein-Hawking para la entropía de agujero negro. Tanto  $S_{\text{ent}}$  como  $\Delta G^{-1}$  son divergentes en el ultravioleta, por lo que el sentido de (1.1) no es inmediato. Sin embargo, cuando la teoría que se estudia tiene masa  $m$ , o alguna escala, es posible identificar sin ambigüedad, dentro de la expresión divergente de  $S_{\text{ent}}$ , ciertos términos finitos cuya dependencia con la masa no se modifica al redefinir el regulador de  $S_{\text{ent}}$ . Estos términos, que llamamos términos finitos, fueron calculados por Wilczek y Hertzberg en [1]. Por otra parte, en [2], Adler deriva una fórmula (fórmula de Adler), que permite calcular, en términos del correlador de la traza del tensor de energía impulso de un campo cuántico, la corrección  $\Delta G^{-1}$  a la constante de Newton que hace dicho campo. Esta fórmula se obtuvo en un contexto conocido como gravedad inducida, cuya idea central es considerar que la acción de Einstein-Hilbert para la descripción de la gravedad es una parte de una teoría efectiva, por lo que sus constantes: la constante de Newton y la constante cosmológica, deben ser calculadas o determinadas por los parámetros de una teoría fundamental.

La idea de este trabajo es investigar si en  $\Delta G^{-1}$ , dada por la fórmula de Adler, es posible identificar términos finitos cuya dependencia con la masa no se modifique por una redefinición de los reguladores involucrados (como se hizo con  $S_{\text{ent}}$  en [1]) y además, comprobar si tales términos finitos de  $\Delta G^{-1}$ , están relacionados con los términos finitos de  $S_{\text{ent}}$  en la forma que indica (1.1).

La relación (1.1), que derivamos al final del Capítulo 3, se establece en espacio curvo [3, 4]. Sin embargo, la igualdad que obtenemos de calcular la EE ( $S_{\text{ent}}$ ) en espacio plano, y de utilizar la fórmula de Adler en (1.1), que permite calcular  $\Delta G^{-1}$  en

términos de correladores de campos en espacio plano, es una igualdad que pertenece totalmente a la teoría cuántica de campos en espacio plano.

Esta igualdad la comprobamos válida para los campos libres escalar y fermiónico en distintas dimensiones, y la proponemos como válida cuando se consideran campos con interacción. De esto último ser correcto, la fórmula a la que nos referimos, que tiene el aspecto

$$\frac{1}{4\pi A} S_{\text{ent}} = \langle P S_m[\phi, g] \rangle_E - \frac{1}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle_E, \quad (1.2)$$

podiera ser relevante si uno de los miembros es difícil, o prácticamente imposible de calcular, en teorías interactuantes. De hecho, lo poco que se conoce de la EE para teorías interactuantes es a través de herramientas como correspondencia holográfica. La fórmula que proponemos, (1.2), pudiera ser una herramienta alternativa para calcular (una parte de) la EE.

El interés que se ha visto en los últimos tiempos en la EE, se justifica por ser esta una herramienta muy útil en varias áreas de la física, en particular, en teoría cuántica de campos. Por ejemplo, esta ha permitido una demostración del teorema- $c$  en dos y tres dimensiones [5]. Además, la EE se utiliza como parámetro de orden en confinamiento de teorías de gauge y teorías topológicas [6, 7], y para transiciones de fase en materia condensada, donde, en ciertos casos, su comportamiento puede definir la clase de universalidad del modelo que se estudie [8, 9]. En  $d = 2$ , la cantidad  $c$ , la carga central del álgebra de Virasoro, es quizás el dato más importante sobre una teoría conforme; la EE está directamente relacionada con ella [8, 10]:

$$S_{\text{ent}} = \frac{c}{3} \ln L/\epsilon,$$

donde  $L$  es la longitud del sistema unidimensional al que se le calcula la EE y  $\epsilon$  un parámetro que regulariza la divergencia ultravioleta  $\epsilon \rightarrow 0$ . La EE tiene una relación muy estrecha con la entropía de agujeros negros.

El estudio de (1.2) en el caso de campos libres, que es a lo que está dedicada la tesis, nos da cierta seguridad sobre su validez general. Sin embargo, en el caso simple del campo escalar, surge un detalle cuya implicación física no nos es muy clara. De todos los términos que forman (1.2), destaca el  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  (en (1.2),  $\Theta$  es la traza del tensor de energía impulso del campo). Aunque este término no es difícil de calcular, su valor, como veremos, depende del acople no minimal  $\xi$  del campo escalar  $\phi$  con el escalar de curvatura  $R$ . Al mismo tiempo, el tensor de energía impulso del campo escalar admite cierta libertad en su definición (mejora), que introduce una ambigüedad sobre qué  $\Theta$  elegir para sustituir en el segundo sumando del miembro derecho de (1.2). La ambigüedad de  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  con  $\xi$  está directamente relacionada con la ambigüedad de  $\Theta$ . La igualdad (1.2), que relaciona la EE y la corrección a la constante de Newton, elige, de todos los  $\xi$ , uno en particular. Comprobamos que (1.2) se cumple en todas las

dimensiones  $d$ , para el caso escalar, solo si  $\xi$  es el acople conforme

$$\xi_d = \frac{d-2}{4(d-1)}. \quad (1.3)$$

En cierto modo, esta elección que hace (1.2) para ser válida, es natural. Solo hay dos acoples con la curvatura que significan algo, el minimal,  $\xi = 0$ , y el conforme, dado por (1.3). En el caso fermiónico no surge esta ambigüedad.

Otro punto a destacar sobre la igualdad (1.2), es que esta recupera, en el límite  $d \rightarrow 2$ , una expresión conocida de  $d = 2$ , que solo se establece con ideas que son válidas en  $d = 2$ , por ejemplo, utiliza el teorema- $c$  de Zamolodchikov. Como la fórmula que recupera es válida para cualquier teoría (interactuante o no), y la demostración que hacemos del límite  $d \rightarrow 2$  no supone nada sobre el tipo de teoría, el caso  $d = 2$  es general. En  $d = 2$ , (1.2) es válida también para teorías interactuantes.

El orden de la tesis es el siguiente. En el Capítulo 2, hacemos una derivación de la generalización a toda dimensión de la fórmula de Adler, que nos permite calcular la corrección a la constante de Newton que hace un campo cuántico arbitrario, a partir de una expresión en términos del correlador de la traza del tensor de energía impulso del campo en espacio plano. En el Capítulo 3, introducimos la entropía de entrelazado y presentamos el método de réplicas para calcularla. A partir de una expresión general obtenida por este método, calculamos el término divergente principal (término de área) de la EE, para los campos escalar y fermiónico libres masivos. Al final del capítulo, establecemos una relación entre el término de área de la EE de un campo y la corrección a la constante de Newton que hace el mismo campo (relación (1.1)). Con esto, y la fórmula del Capítulo 2, obtenemos la relación que proponemos, (1.2): relación en espacio plano que vincula el término de área de la EE con una expresión que depende del correlador de la traza del tensor de energía impulso de la teoría. En el Capítulo 4, realizamos cálculos explícitos para comprobar (1.2); esto lo hacemos identificando los términos finitos contenidos en las expresiones divergentes de  $S_{\text{ent}}$  y  $\Delta G^{-1}$  para los campos escalar y fermiónico libres masivos en varias dimensiones. Al final del Capítulo 4, discutimos el límite  $d \rightarrow 2$  de la fórmula (1.2). El último capítulo está dedicado a las conclusiones del trabajo. La tesis tiene dos apéndices, en el primero se diagonaliza el operador Laplaciano en una variedad bidimensional con una singularidad cónica, lo que necesitamos para evaluar la EE, y en el segundo, presentamos con cierto detalle una demostración del teorema- $c$  de Zamolodchikov.



# Capítulo 2

## Acción gravitatoria efectiva y fórmula de Adler

En este capítulo derivamos generalización a toda dimensión  $d$  de la fórmula de Adler [2], que permite calcular el aporte que hace un campo cuántico general  $\phi$  al valor de la constante de Newton  $G$ . Originalmente, esta fórmula se obtuvo en  $d = 4$  en el contexto de explicar la descripción de la gravedad dada por la acción de Einstein-Hilbert como parte de una teoría efectiva, idea que fue introducida en los trabajos de Zel'dovich y Sakharov y que se conoce como gravedad inducida [2, 11, 12].

### 2.1. Gravedad inducida y acción efectiva

La mejor teoría del campo gravitatorio que conocemos hoy es la teoría general de la relatividad formulada por Einstein en 1916, cuyo esquema consiste en escribir todas las acciones materiales de forma covariante<sup>1</sup> y agregar la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_{grav} = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.1)$$

con  $G$ , la constante de Newton,  $\Lambda$ , la constante cosmológica y  $R$  y  $g$ , el escalar de curvatura y el determinante asociados con la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$ , que se identifica con el campo gravitatorio. Al extremar (2.1) más la acción material respecto de  $g_{\mu\nu}$ , se obtienen las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio  $g_{\mu\nu}$ . En (2.1) y en lo que sigue trabajamos en la convención de  $c = 1$ , al igual que en la de  $\hbar = 1$ .

Por otra parte, a diferencia del campo gravitatorio, el resto de los campos de la naturaleza han sido descritos por teorías cuánticas que, a pesar de contener infinitos en la mayoría de los cálculos de magnitudes observables, se ha logrado demostrar que son renormalizables. Supongamos ahora que tenemos una teoría que cumple todas las exigencias teóricas importantes actuales y que describe bien los hechos experimentales,

---

<sup>1</sup>Por materia, en el contexto de la relatividad general, entendemos todos los campos, excepto el campo gravitatorio.

dada por la acción

$$S[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}] = \int d^d x \mathcal{L}[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}],$$

donde  $\{\phi_L\}$  son campos ligeros (de masa “pequeña”), cuya dinámica es directamente observable, y  $\{\phi_P\}$  son campos pesados (de masa “grande”) que influyen la dinámica de la parte  $\{\phi_L\}$  de la teoría, pero que no son directamente observables. Como solo tenemos acceso a  $\{\phi_L\}$ , es conveniente escribir la función de partición o integral funcional de la teoría de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Z &= \int D\{\phi_L\} D\{\phi_P\} e^{iS[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}]} \\ &= \int D\{\phi_L\} e^{iS_{eff}[\{\phi_L\}]}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde la acción efectiva de los campos ligeros  $S_{eff}[\{\phi_L\}]$  se define por

$$e^{iS_{eff}[\{\phi_L\}]} = \int D\{\phi_P\} e^{iS[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}]}. \quad (2.3)$$

Para distinguirla de  $S_{eff}[\{\phi_L\}]$ , llamamos a la teoría  $S[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}]$ : teoría fundamental. En general, la forma de la teoría  $S_{eff}[\{\phi_L\}]$  no es nada simple, pero, si se conociera exactamente, describiría tan bien como  $S[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}]$  la dinámica de  $\{\phi_L\}$ , además de que, al igual que  $S[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}]$ , sería una teoría renormalizable<sup>2</sup>. Usualmente se trabaja con, o solo se conoce, una parte de  $S_{eff}[\{\phi_L\}]$ , aquella que conserva de  $S_{eff}[\{\phi_L\}]$  solo los primeros términos en una expansión en las constantes de acoplamiento pequeñas. Podemos citar dos ejemplos conocidos de esta idea de una acción efectiva para campos ligeros: el modelo de Heisenberg-Euler de acción efectiva para la interacción no lineal del campo electromagnético o de fotones, y la teoría de Fermi de la interacción débil. En el primero, tenemos como acción fundamental la de la electrodinámica cuántica

$$S_{QED}[A_\mu, \{\psi, \bar{\psi}\}] = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_e)\psi \right),$$

con  $A_\mu$  y  $\psi$  los campos para el fotón y el electrón respectivamente;  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  y  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Al integrar, a la forma de (2.2-2.3), el campo  $\psi$ , que se clasifica

---

<sup>2</sup>Cuando se habla de teoría efectiva, puede pensarse que es una teoría no renormalizable. Sin embargo, lo que aquí llamamos teoría efectiva, expresión (2.3), sí es una teoría renormalizable si, la teoría fundamental a partir de la cual se obtiene, lo es. En la teoría fundamental, la demostración de la renormalizabilidad puede realizarse si las simetrías, con las cuales se establecen las relaciones de Ward, son simetrías de fácil expresión, como la simetría de gauge. Al integrar el campo pesado en (2.3), las relaciones de Ward se conservan, solo que pueden tomar un aspecto irreconocible expresadas en términos de los campos de  $S_{eff}$ , pero existen, y hacen que  $S_{eff}$  sea renormalizable. Lo que sí es cierto es que, si expandimos  $S_{eff}$  en potencias de alguna constante de acoplamiento, y solo nos quedamos con una parte de la serie, esa teoría: la que solo se define por los primeros términos de la serie, es, en general, no renormalizable (al cortar la serie destruimos algunas relaciones de Ward). La teoría de Einstein-Hilbert, que consiste en conservar, de una  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$ , solo hasta términos  $\mathcal{O}(R)$ , es, por ello, no renormalizable.

en este ejemplo como el campo pesado ( $\{\phi_P\} = \{\psi, \bar{\psi}\}$ ), se tiene

$$\begin{aligned} e^{iS_{eff}[A_\mu]} &= \int D\bar{\psi} D\psi e^{iS_{QED}[A_\mu, \{\psi, \bar{\psi}\}]} \\ S_{eff}[A_\mu] &= \int d^4 \mathcal{L}_{eff} \\ \mathcal{L}_{eff} &= \frac{1}{2}(E^2 - H^2) + \frac{2\alpha^2}{45m_e^4}[(E^2 - H^2)^2 + 7(E \cdot H)^2] + \dots \end{aligned}$$

donde  $E$  y  $H$  son las componentes eléctricas y magnéticas de  $F_{\mu\nu}$ , y  $\alpha$ , la constante de estructura fina,  $\alpha = e^2/\hbar c$ . En una situación donde el campo electromagnético es débil y varía suavemente (en una escala de la longitud de onda de Compton del electrón  $\lambda = \hbar/m_e c$ ), los dos primeros términos que hacemos explícitos en el desarrollo de  $S_{eff}[A_\mu]$  son una buena teoría. El segundo término describe una interacción no lineal efectiva entre los fotones, debido a la existencia del campo del electrón.

El segundo ejemplo viene de integrar los bosones de gauge masivos  $Z$  y  $W_\pm$  en la teoría electrodébil de Weinberg y Salam:  $S_{WS}[\{\text{fermiones}\}, \{\text{bosones}\}]$ , que, como se conoce, tiene una expansión perturbativa renormalizable en las constantes de acoplamiento  $g, g'$  [13]. Tomamos los bosones de gauge,  $\{\text{bosones}\} = Z$  y  $W_\pm$ , como los campos pesados ( $\{\text{bosones}\} = \{\phi_P\}$ ), de (2.3) se tiene

$$e^{iS_{eff}[\{\text{fermiones}\}]} = \int D\{\text{bosones}\} e^{iS_{WS}[\{\text{fermiones}\}, \{\text{bosones}\}]}.$$

La teoría de Fermi es el primer término en el desarrollo perturbativo de  $S_{eff}[\{\text{fermiones}\}]$  en las constantes  $g, g'$ , y la constante de Fermi viene determinada por la masa  $M_W$  del bosón de gauge  $W$  y  $g$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}G_F = \frac{g^2}{8M_W^2}.$$

Si solo nos quedamos con la primera parte del desarrollo en las constantes de acoplamiento de las teorías  $S_{eff}[A_\mu]$  y  $S_{eff}[\{\text{fermiones}\}]$ , y las usamos más allá de la aproximación de árbol, se comprueba que no son teorías renormalizables (aunque  $S_{eff}[A_\mu]$  y  $S_{eff}[\{\text{fermiones}\}]$  completas sí lo son). Una característica de las teorías no renormalizables, como estas, es que sus constantes de acoplamiento no son adimensionales. Este es el caso de la teoría (2.1), ya que su constante de acoplamiento  $G^{-1}$  tiene unidades de masa cuadrado:

$$\dim[G^{-1}] = \dim[\Lambda] = 2 ; \quad G^{-1/2} = m_{\text{Planck}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}.$$

La idea de la gravedad inducida es que la acción (2.1) no es fundamental, sino una aproximación o una parte de la acción efectiva que se obtiene de una teoría fundamental  $S[\{\phi_L\}, \{\phi_P\}]$  al integrar campos pesados  $\{\phi_P\}$ , lo cual implica que la constante de Newton viene determinada por las constantes de  $S$ . El campo gravitatorio  $g_{\mu\nu}$  lo tomamos como un campo ligero  $\{\phi_L\}$ , de hecho, su masa es cero, pues la gravedad es



una fuerza de largo alcance. En este caso, se interpreta que (2.1) es una parte de la teoría efectiva  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$  semejante, por ejemplo, a la de Fermi de la interacción débil. Se tiene entonces que

$$e^{iS_{eff}[g_{\mu\nu}]} = \int D\{\psi\} e^{iS[\{\psi\}, g_{\mu\nu}]}, \quad (2.4)$$

donde  $S[\{\psi\}, g_{\mu\nu}]$  es una acción que pretende representar una teoría fundamental (cuantizable, renormalizable, etc.) para el campo gravitatorio  $g_{\mu\nu}$  y para el resto de los campos de la naturaleza  $\{\psi\}$ ; y  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$  es una teoría efectiva para el campo  $g_{\mu\nu}$ . La acción de Einstein-Hilbert (2.1) es solo la primera parte del desarrollo en derivadas de  $g_{\mu\nu}$  de  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$ , resultado de trazar o integrar  $\{\psi\}$  de la teoría fundamental (desconocida)  $S[\{\psi\}, g_{\mu\nu}]$ , y por ello, no debe ser tomada como punto de partida para una teoría cuántica de la gravedad. Aun cuando en  $S[\{\psi\}, g_{\mu\nu}]$  no existan términos que contengan el escalar de curvatura  $R$  (cuyo coeficiente define la constante de Newton), la integral funcional (2.4) crea una acción efectiva  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$  que sí puede contener términos  $R$ , por lo que la acción de Einstein-Hilbert puede surgir totalmente de la integración por  $\{\psi\}$ , sin tener que ponerla de un inicio en  $S[\{\psi\}, g_{\mu\nu}]$ , lo que implica que la constante de Newton se define totalmente por las constantes que caracterizan al resto de los campos o a la interacción de estos campos con términos de curvatura superior [2].

Si hacemos la separación<sup>3</sup>

$$S[\{\psi\}, g_{\mu\nu}] = S_m[\{\psi\}, g_{\mu\nu}] + S_g[g_{\mu\nu}], \quad (2.5)$$

la teoría  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$  es distinta a la teoría  $S_g[g_{\mu\nu}]$ . En esta última, el campo gravitatorio  $g_{\mu\nu}$  puede interactuar con los campos  $\{\psi\}$ , que son grados de libertad independientes, y en  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$ , los campos  $\{\psi\}$  no existen sino en la propia redefinición de la dinámica  $S_{eff}[g_{\mu\nu}]$  de  $g_{\mu\nu}$ . Como estamos interesados en calcular el aporte a la constante de Newton que hace un campo específico  $\phi$  al ser integrado, nos basta una teoría  $S_{eff}[\phi, g_{\mu\nu}]$  que solo contenga a  $g_{\mu\nu}$  y a  $\phi$ . Teniendo en cuenta (2.5) tenemos

$$\begin{aligned} e^{iS_{eff}[g_{\mu\nu}]} &= \int D\phi e^{iS[\phi, g_{\mu\nu}]} = e^{iS_g[g_{\mu\nu}]} \int D\phi e^{iS_m[\phi, g_{\mu\nu}]} = e^{i(S_g[g_{\mu\nu}] + W[g_{\mu\nu}])} \\ e^{iW[g_{\mu\nu}]} &= e^{i(S_{eff}[g_{\mu\nu}] - S_g[g_{\mu\nu}])} = \int D\phi e^{iS_m[\phi, g_{\mu\nu}]}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $W[g_{\mu\nu}]$  es la acción efectiva para  $g_{\mu\nu}$ , creada solo por la parte material  $S_m[\phi, g_{\mu\nu}]$  de  $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ . La teoría  $S_g[g_{\mu\nu}]$  se modifica  $S_g[g_{\mu\nu}] \rightarrow S_{eff}[g_{\mu\nu}] = S_g[g_{\mu\nu}] + W[g_{\mu\nu}]$  al incluir en  $g_{\mu\nu}$  la dinámica de  $\phi$ . Si expandimos  $S_{eff}$  y  $S_g$  en derivadas de  $g_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G_{eff}} (R - 2\Lambda_{eff}) + \mathcal{O}(R^2) \right) \\ S_g &= \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G_0} (R - 2\Lambda_0) + \mathcal{O}_0(R^2) \right), \end{aligned}$$

<sup>3</sup>La separación es única bajo las condiciones:  $\mathcal{L}_m[\{0\}, g_{\mu\nu}] = 0$ ,  $\mathcal{L}_g[\eta_{\mu\nu}] = 0$ ,  $\mathcal{L}_m[\{\psi\}, \eta_{\mu\nu}] = \mathcal{L}_m[\{\psi\}]$ , si  $S[\{\psi\}, g_{\mu\nu}] = \int d^d x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g)$

y definimos

$$W = S_{eff} - S_g = \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi\Delta G} (R - 2\Delta\Lambda) + \mathcal{O}(R^2) \right),$$

con<sup>4</sup>  $\Delta G^{-1} = G_{eff}^{-1} - G_0^{-1}$  y  $\Delta\Lambda = \Lambda_{eff} - \Lambda_0$ , de (2.6) tenemos

$$W[g_{\mu\nu}] = \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi\Delta G} (R - 2\Delta\Lambda) + \mathcal{O}(R^2) \right) = -i \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi, g_{\mu\nu}]} \right]. \quad (2.7)$$

Interpretamos (2.7) de la siguiente forma: trazar o integrar cualquier campo  $\phi$  con una acción material  $S_m[\phi, g_{\mu\nu}]$ , dada en un espacio curvado descrito por el campo métrico (y gravitatorio)  $g_{\mu\nu}$ , define completamente la corrección  $W[g_{\mu\nu}]$  que se hace a la teoría  $S_g[g_{\mu\nu}]$  y la convierte en la teoría  $S_{eff} = S_g[g_{\mu\nu}] + W[g_{\mu\nu}]$ . En particular, (2.7) define la corrección  $\Delta G$ , asociada a  $\phi$ , que se hace a la constante de Newton.

Si  $\phi$  es muy masivo (no observable a las escalas de energía accesibles), la teoría que vemos para  $g_{\mu\nu}$  es la descrita por  $S_{eff}$ ; (2.7) describe la diferencia entre la teoría  $S_{eff}$  para  $g_{\mu\nu}$  que nos es accesible y la teoría  $S_g$  para  $g_{\mu\nu}$  que ve un observador hipotético a una escala de energía del orden de la masa de  $\phi$ . En (2.7) está la información de cómo modifica  $\phi$  la constante de Newton en  $\Delta G$ . La fórmula de Adler es una forma de obtener  $\Delta G^{-1}$  a partir de (2.7) [2].

## 2.2. Fórmula de Adler

Necesitamos un operador  $P$  que, actuando sobre el miembro izquierdo de (2.7), extraiga el término  $\frac{1}{16\pi\Delta G}$ . Formalmente:

$$\frac{1}{16\pi\Delta G} = P \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi\Delta G} (R - 2\Delta\Lambda) + \mathcal{O}(R^2) \right) = -iP \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi, g_{\mu\nu}]} \right] \quad (2.8)$$

Comprobemos que una forma para  $P$  es:

$$P \cdot = \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{\delta_{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} \cdot \Big|_{y=0} \right), \quad (2.9)$$

a la vez que aclaramos el significado de cada término de este operador. Apliquemos primero  $P$  a la parte de interés:  $\int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi\Delta G} (R - 2\Delta\Lambda)$  (en lo que sigue utilizamos  $G$  por  $\Delta G$  y  $\Lambda$  por  $\Delta\Lambda$ ). En (2.9),  $\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)}$  es la derivada funcional respecto de  $g_{\mu\nu}(y)$ ; al actuar esta sobre la acción de Einstein-Hilbert (2.1), se obtienen las ecuaciones de Einstein

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) = -\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + g^{\mu\nu} \Lambda)$$

<sup>4</sup>En toda la tesis, la notación  $\frac{1}{\Delta G}$ , o  $\Delta G^{-1}$ , indica la variación ( $\Delta$ ) de  $G^{-1}$ . Escribimos  $\Delta G$ , o de  $\Delta G^{-1}$  por comodidad, aunque lo que significar es  $\Delta(G^{-1})$ .

y

$$g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) \Big|_{y=0} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g(0)} \left( \left(\frac{d}{2} - 1\right) R(0) - d\Lambda \right). \quad (2.10)$$

Aquí y en el resto del capítulo, usamos la signatura  $(-, +, +, +, \dots)$  y la convención de signo para los tensores de Riemann y de energía impulso dados en [14] ( $d$  es la dimensión de la variedad espacio-tiempo). El paso de evaluar en el punto de coordenadas arbitrario  $y = 0$  puede verse como una funcional  $g_{\mu\nu}(y) \mapsto R(y)|_{y=0}$ , que convierte la función  $g_{\mu\nu}(y)$  en los valores de  $R$  en  $y = 0$ . Para no abusar de la notación, ponemos  $R(0)[g_{\mu\nu}]$  en lugar de  $R(0)$ :

$$R(0) = R(0)[g_{\mu\nu}] = R[g_{\mu\nu}(y)]|_{y=0} = \int d^d y R(y) \delta(y).$$

Con esta notación resulta más claro que  $R(0)[g_{\mu\nu}]$  es una funcional de  $g_{\mu\nu}$ , que cambia al variar  $g_{\mu\nu}$ . Lo mismo podríamos hacer con  $\sqrt{-g(0)}$ , pero esta solo depende de los valores de  $g_{\mu\nu}$  en  $y = 0$  (y no de sus derivadas) y en el próximo paso trabajaremos solo con métricas donde  $g_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$ , con lo que  $\sqrt{-g(0)} = 1$ .

Sea entonces  $\delta_{\mathbf{R}}$  el valor de una funcional de  $g_{\mu\nu}$  evaluada en la métrica conformalmente plana de curvatura constante<sup>56</sup>  $\mathbf{R}$ :  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}(x) = \eta_{\mu\nu}(1 + A\mathbf{R}x^2 + \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4))$ , menos la misma funcional evaluada en la métrica plana  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Aplicando  $\delta_{\mathbf{R}}$  a (2.10), tenemos (como ambas métricas en  $x = 0$  son  $\eta_{\mu\nu}$ , omitimos  $\sqrt{-g(0)} = 1$ ).

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{R}} \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g(0)} \left( \left(\frac{d}{2} - 1\right) R(0) - d\Lambda \right) &\equiv \frac{1}{16\pi G} \left( \left(\frac{d}{2} - 1\right) R(0)[g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}] - d\Lambda \right) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi G} \left( \left(\frac{d}{2} - 1\right) R(0)[\eta_{\mu\nu}] - d\Lambda \right) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{d}{2} - 1\right) \mathbf{R}, \end{aligned}$$

<sup>5</sup>El sistema de coordenadas  $x$  que permite expresar  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}(x)$  en la forma simple dada, se eligió, además, de forma que  $x = 0$  sea el mismo punto donde  $y = 0$ .

<sup>6</sup>La constante  $A$  en la definición de la métrica conformalmente plana de curvatura  $\mathbf{R}$  constante, depende de la dimensión. Esta será determinada después (expresión (2.17)), para no interrumpir la discusión de la aplicación del operador  $P$ .

donde  $R(0)[g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}] = \mathbf{R}$ , por definición de  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}$ , y  $R(0)[\eta_{\mu\nu}] = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned}
& P \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) = \\
&= \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{\delta_{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) \right) \Big|_{y=0} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{1}{\mathbf{R}} \delta_{\mathbf{R}} \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g(0)} \left( \left(\frac{d}{2} - 1\right) R(0) - d\Lambda \right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{1}{\mathbf{R}} \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{d}{2} - 1\right) \mathbf{R} \\
&= \frac{1}{16\pi G} . \tag{2.11}
\end{aligned}$$

El conjunto  $\lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{\delta_{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}}$  puede verse como una derivada evaluada en  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , lo que hace que el operador  $P$  sea una especie de “segunda derivada evaluada en  $\eta_{\mu\nu}$ ”. De esta observación es de esperar que  $P$  elimine los términos  $\mathcal{O}(R^2)$  (ver (2.8)). La notación  $\mathcal{O}(R^2)$  se refiere a escalares de la forma  $\mathcal{O}((\partial g_{\mu\nu})^4)$ , lo que a su vez representa escalares que son  $\mathcal{O}$  de su argumento(s) cuando su(s) argumento(s) tienden a cero, y  $(\partial g_{\mu\nu})^4 = \partial^i g_{\mu\nu} \partial^j g_{\mu\nu}$  con  $i + j = 4$ ,  $i, j \geq 0$  son sus posibles argumentos. Por tanto

$$\begin{aligned}
& P \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) = \\
&= \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{\delta_{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} \underbrace{\left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) \right) \Big|_{y=0}}_{\mathcal{O}(R^2)}
\end{aligned}$$

Para ver que lo subrayado es  $\mathcal{O}(R^2)$ , utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
& \left( g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) \right) \\
&= g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda g_{\mu\nu})} + \partial_\lambda \partial_\sigma \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu})} + \dots \right) \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) ,
\end{aligned}$$

y observamos que el operador  $g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda g_{\mu\nu})} + \partial_\lambda \partial_\sigma \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu})} + \dots \right)$  mantiene el grado en las derivadas, lo que significa que

$$g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda g_{\mu\nu})} + \partial_\lambda \partial_\sigma \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu})} + \dots \right) \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) = \mathcal{O}(R^2) ,$$

de lo cual obtenemos que  $\left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) \right) \Big|_{y=0} = \mathcal{O}(R^2)$ .

Como parte de  $P$ , esta última  $\mathcal{O}(R^2)$  se evalúa en  $y = 0$ , y hacemos explícito que es una funcional escribiendo  $\mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial g_{\mu\nu})^4]$ .

$$P \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) = \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \frac{\delta_{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} \mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial g_{\mu\nu})^4]$$

Por definición de  $\delta_{\mathbf{R}}$

$$\delta_{\mathbf{R}} \mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial g_{\mu\nu})^4] \equiv \mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}})^4] - \mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial \eta_{\mu\nu})^4],$$

con  $\mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial \eta_{\mu\nu})^4] = 0$ , pues estamos evaluando un término de curvatura en la métrica plana  $\eta_{\mu\nu}$ . Para el otro sumando tenemos que, cuando  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ , la única forma que tiene  $\mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}})^4]$  de comportarse es  $\propto \mathbf{R}^2$ , ya que  $R^2$  es uno de los escalares de menor grado que puede construirse con  $(\partial g_{\mu\nu})^4$  y, con  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}$  (espacio de curvatura constante  $\mathbf{R}$ ),  $R^2 = \mathbf{R}^2$ .

$$\therefore \frac{\delta_{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} \mathcal{O}(R^2)(0)[(\partial g_{\mu\nu})^4] \propto \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{R}} \xrightarrow{g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} 0,$$

y

$$P \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) = 0.$$

Como se quería,  $P$  elimina todo de la acción efectiva gravitatoria, excepto el coeficiente de  $R$ . Veamos ahora la acción de  $P$  sobre el miembro derecho de (2.8). Aplicamos primero la parte  $g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)}$ .

$$\begin{aligned} \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} (-i) \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \right] \right) \Big|_{y=0} &= \\ &= \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} S_m[\phi, g] \right) \Big|_{y=0}}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con  $S_m[\phi, g] = S_m[\phi, g_{\mu\nu}]$ . Definimos el tensor de energía impulso  $T^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}]$  para el campo que describe  $S_m$  en el punto de coordenadas “ $x$ ” y dependiente de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y su densidad  $\bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] = \sqrt{-g} T^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}]$ , por

$$\begin{aligned} S_m[\phi, g] &= \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L}[\phi, g_{\mu\nu}] = \int d^d x \bar{\mathcal{L}}[\phi, g_{\mu\nu}] \\ \delta S_m[\phi, g] &= \int d^d x \delta \bar{\mathcal{L}}[\phi, g_{\mu\nu}] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] \right) \delta g_{\mu\nu}(x) \quad (2.13) \\ &= \int d^d x \frac{1}{2} \bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] \delta g_{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} S_m[\phi, g] \right) \Big|_{y=0} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(0) \bar{T}^{\mu\nu}(0)[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \bar{T}(0)[g_{\mu\nu}]. \quad (2.14)$$

Supongamos que (2.12) es bien comportada y que tiene sentido hacer la siguiente

separación de  $\delta_{\mathbf{R}}$ :

$$\delta_{\mathbf{R}} = \delta + \delta_{\mathbf{R}}^2 \quad ,$$

donde  $\delta$  es la parte principal (diferencial) de  $\delta_{\mathbf{R}}$ , lineal en  $\delta g_{\mu\nu}$

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}} - \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(A\mathbf{R}x^2 + \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4)) \quad ,$$

y  $\delta_{\mathbf{R}}^2$  es  $\mathcal{O}((\delta g^{\mathbf{R}})^2)$ . Por la forma de  $\delta g_{\mu\nu}$ , se sigue que

$$\delta_{\mathbf{R}}^2/\mathbf{R} = \mathcal{O}((\delta g^{\mathbf{R}})^2)/\mathbf{R} = \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4)/\mathbf{R} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}} \longrightarrow \eta_{\mu\nu} \quad .$$

Por lo tanto, bajo el límite  $\delta_{\mathbf{R}} = \delta$ . En (2.12) sustituimos (2.14) y aplicamos el diferencial funcional  $\delta$ .

$$\begin{aligned} \delta \dots &= \delta \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} S_m[\phi, g] \right) \Big|_{y=0}}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}} = \\ & \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \delta \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} S_m[\phi, g] \right) \Big|_{y=0}}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}} \\ & + \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \frac{1}{2} \bar{T}(0)[g_{\mu\nu}] i \int d^d x \frac{1}{2} \bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] \delta g_{\mu\nu}(x)}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}} \\ & - \frac{(\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \frac{1}{2} \bar{T}(0)[g_{\mu\nu}]) (\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} i \int d^d x \frac{1}{2} \bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] \delta g_{\mu\nu}(x))}{[\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}]^2} \\ \\ \delta \dots &= \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \delta \left( g_{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(y)} S_m[\phi, g] \right) \Big|_{y=0}}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}} \\ & + \frac{i}{4} \int d^d x \left( \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \bar{T}(0)[g_{\mu\nu}] \bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] \delta g_{\mu\nu}(x)}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}} \right. \\ & \left. - \frac{(\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \bar{T}(0)[g_{\mu\nu}]) (\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}] \delta g_{\mu\nu}(x))}{[\int D\phi e^{iS_m[\phi, g]}]^2} \right) . \end{aligned}$$

Para completar  $P$ , sustituimos  $\delta g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(A\mathbf{R}x^2 + \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4))$ , dividimos por  $(\frac{d}{2} - 1)\mathbf{R}$  y tomamos el límite  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ . Basta sustituir la parte  $\eta_{\mu\nu}A\mathbf{R}x^2$  de  $\delta g_{\mu\nu}$ , pues  $\mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4)/\mathbf{R} \longrightarrow 0$ , cuando  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned} P \left( -i \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]} \right] \right) &= \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]} P S_m[\phi, g]}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]}} \\ & + \frac{iA}{4(\frac{d}{2} - 1)} \int d^d x x^2 \left( \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]} T(0) T(x)}{\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]}} \right. \\ & \left. - \frac{(\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]} T(0)) (\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]} T(x))}{[\int D\phi e^{iS_m[\phi, \eta]}]^2} \right) , \quad (2.15) \end{aligned}$$

donde utilizamos que, en el límite  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ,  $\bar{T}^{\mu\nu}(x)[g_{\mu\nu}]g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{T}^{\mu\nu}(x)[\eta_{\mu\nu}]\eta_{\mu\nu} = T(x)$ , siendo  $T(x)$  la traza del tensor de energía-impulso en espacio-tiempo plano.

Por último, calculamos la constante  $A$  de la métrica conformalmente plana,

$$g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}(x) = \eta_{\mu\nu}(1 + A\mathbf{R}x^2 + \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4)), \quad (2.16)$$

que depende de la dimensión  $d$  del espacio-tiempo. Esta puede calcularse a partir de la definición  $R(0) = g^{ik}g^{jl}R_{ijkl}(0)$  que, para  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}(x) = \eta_{\mu\nu}\lambda(x) = \eta_{\mu\nu}(1 + A\mathbf{R}x^2 + \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, x^4))$ , toma la forma:

$$\mathbf{R} = \lambda^2(0) \eta^{ik}\eta^{jl}R_{ijkl}(0),$$

con  $\lambda^2(0) = 1$ . En general

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\partial_i\partial_l g_{jk} + \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_j\partial_l g_{ik}) + g_{\alpha\beta} [\Gamma_{il}^{\alpha}\Gamma_{jk}^{\beta} - \Gamma_{ik}^{\alpha}\Gamma_{jl}^{\beta}].$$

En el sistema de coordenadas donde  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{R}}(x)$  tiene la forma (2.16),  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}(0) = 0$ . Además

$$\partial_j\partial_l g_{ik}^{\mathbf{R}}|_{x=0} = 2A\mathbf{R}\eta_{ik}\eta_{jl} + \partial_j\partial_l \mathcal{O}_{ik}(\mathbf{R}^2, x^4)|_{x=0} = 2A\mathbf{R}\eta_{ik}\eta_{jl} \quad , \text{etc}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{R} &= \frac{1}{2}2A\mathbf{R} \eta^{ik}\eta^{jl}(\eta_{jk}\eta_{il} + \eta_{il}\eta_{jk} - \eta_{ik}\eta_{jl} - \eta_{jl}\eta_{ik}) \\ 1 &= -2Ad(d-1). \end{aligned}$$

Con esto, la dependencia de  $A$  con  $d$  es

$$A = -\frac{1}{2d(d-1)}. \quad (2.17)$$

Sustituimos (2.17) en (2.15)

$$\begin{aligned} P\left(-i \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} \right]\right) &= \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} P S_m[\phi,\eta]}{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]}} \\ &- \frac{i}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \left( \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} T(0) T(x)}{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} T(0)) (\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} T(x))}{[\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]}]^2} \right). \quad (2.18) \end{aligned}$$

Haciendo uso de la correspondencia entre valor de expectación de funcionales y valores de expectación de vacío de productos temporalmente ordenados de operadores [15],

$$\begin{aligned} \langle A(0) \rangle_0 &= \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} A(0)}{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]}} \\ \langle \mathcal{T}A(x)B(0) \rangle_0 &= \frac{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]} A(x)B(0)}{\int D\phi e^{iS_m[\phi,\eta]}}, \quad (2.19) \end{aligned}$$

(2.18) queda

$$P \left( -i \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \right] \right) = \langle P S_m[\phi, g] \rangle_0 - \frac{i}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 (\langle \mathcal{T} T(x) T(0) \rangle_0 - \langle T(x) \rangle_0 \langle T(0) \rangle_0).$$

Definimos:  $\Theta(x) = T(x) - \langle T(x) \rangle_0$ , con lo cual

$$\langle \mathcal{T} \Theta(x) \Theta(0) \rangle_0 = \langle \mathcal{T} T(x) T(0) \rangle_0 - \langle T(x) \rangle_0 \langle T(0) \rangle_0. \quad (2.20)$$

Finalmente, y cambiando  $G$  por  $\Delta G$ , nos queda la fórmula de Adler [2]

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi\Delta G} &= P \left( -i \ln \left[ \int D\phi e^{iS_m[\phi, g]} \right] \right) \\ \frac{1}{16\pi\Delta G} &= \langle P S_m[\phi, g] \rangle_0 - \frac{i}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \mathcal{T} \Theta(x) \Theta(0) \rangle_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se dejó planteada la acción de  $P$  sobre  $S_m[\phi, g]$  (la acción material para  $\phi$  en espacio tiempo curvado), sin especificar la forma de este término, por conveniencia, teniendo en cuenta que en el Capítulo 4 aplicaremos (2.21) solo a los campos escalar libre  $\phi$  y fermiónico libre  $\psi$ , que solo pueden acoplarse con escalares de curvatura, y no con términos con índices, como  $R_{\mu\nu}$ . En tal caso, la expresión para  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_0$  es muy sencilla. El operador  $P$  extrae, de la acción material en espacio curvado  $S_m[\phi, g]$ , el coeficiente de  $R$ ; para el campo fermiónico  $\psi$  no existe acoplamiento directo con el escalar de curvatura (por cuestiones dimensionales, para que la teoría  $S_m[\psi, g]$  sea renormalizable), por lo que  $R$  no existe en la acción material de  $\psi$  y  $P S_m[\psi, g] = 0$ . Para el caso escalar, como veremos, este término introduce una ambigüedad, debido al acoplamiento no minimal del campo escalar  $\phi$  con la curvatura  $\frac{\xi}{2}\phi^2 R$ . También la ambigüedad está presente, para el campo escalar, en el sumando del correlador de los  $\Theta$ , a través de una ambigüedad en la definición del tensor de energía impulso.

Como el integrando de (2.21) contiene términos definidos en espacio plano, conviene pasar esta fórmula a la signatura  $(+, -, -, -, \dots)$ . Además, en el Capítulo 4 haremos cálculos explícitos con (2.21), por lo que es más conveniente también llevar (2.21) a espacio euclídeo (o tiempo imaginario). Con estos dos cambios, (2.21) queda

$$\frac{1}{16\pi\Delta G} = \langle P S_m[\phi, g] \rangle_E - \frac{1}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle_E, \quad (2.22)$$

donde, por comodidad, eliminamos de la notación el ordenamiento temporal y el subíndice 0 en el correlador (que sobrentendemos al haber un correlador) y agregamos el subíndice  $E$ , para señalar que es el correlador euclídeo. La notación  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  se refiere a que primero se aplica  $P$  a  $S_m$ , y después se lleva el resultado a espacio euclídeo.





# Capítulo 3

## Entropía de entrelazado

### 3.1. Descripción general

La entropía de entrelazado es una magnitud de amplio uso en tiempos recientes. Es una herramienta útil en problemas donde se relacionan teoría cuántica, gravedad, termodinámica y teoría de la información. En particular, es de interés en investigaciones relativas a entropía de agujeros negros, teoría cuántica de la gravedad, teorías conformes, correspondencia holográfica y decoherencia.

Para definir la entropía de entrelazado, necesitamos introducir la entropía de von Neumann

$$S[\rho] = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) , \quad (3.1)$$

asociada al estado cuántico<sup>1</sup>  $\rho$ . En general, se conocen varias propiedades de (3.1) como funcional<sup>2</sup> de  $\rho$ , por ejemplo (tomando por referencia el caso discreto), si  $\rho$  representa un estado puro  $\rho_a$ ,  $S[\rho_a] = 0$  ( dado que  $\rho_a = |a\rangle\langle a| \Rightarrow \rho_a^2 = \rho_a \Rightarrow$  sus autovalores son todos nulos, excepto uno de ellos de valor uno). Para un estado impuro  $\rho = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i|$  con  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ ,  $S[\rho]$  caracteriza la distribución  $\{p_i\}$  de estados puros contenidos en  $\rho$ , y si, en esta base  $\{|a_i\rangle\}_{i=1,\dots,N}$  que diagonaliza a  $\rho$ , se tiene que  $p_i = \frac{1}{N}$ , entonces  $S[\rho]$  es máxima e igual a  $\ln N$ , caso en que recuperamos la conocida fórmula de la entropía de Boltzmann. Al imponer ciertas condiciones extras (motivadas en estadística o teoría de la información), además de las mencionadas, sobre una funcional general de  $\rho$ , (3.1) puede demostrarse como la única que recupera las relaciones termodinámicas .

Supongamos ahora que tenemos un sistema cuyo espacio de estados (puros) es el espacio de Hilbert  $H$ . Cuando dicho sistema se considera formado por dos subsistemas 1 y 2, el espacio de Hilbert de los estados del sistema global es el producto tensorial de los espacios de Hilbert  $H_1$  del sistema 1 y  $H_2$  del sistema 2:  $H = H_1 \otimes H_2$ . Supongamos también que un observador  $O_1$  solo tiene acceso al subsistema 1, lo que implica que

---

<sup>1</sup>Para plantear (3.1) es necesaria la caracterización de un estado cuántico por un operador densidad  $\rho$  (hermítico positivo de traza uno que actúa sobre un espacio de Hilbert  $H$ ), y no es posible en la caracterización (más limitada) de un estado cuántico por un vector de  $H$ . De hecho, esta última caracterización describe solo a estados puros (que tienen entropía cero).

<sup>2</sup>Esta entropía (de von Neumann) no es un observable en el sentido usual: no es un operador con autovalores y valor medio, sino una funcional del estado  $\rho$ .

todos sus observables tienen soporte en  $H_1$ . Si el estado global del sistema es  $\Phi \in H$ , el estado que ve el observador  $O_1$ , cuyos observables solo tienen soporte en  $H_1$ , es

$$\rho_1 = \text{Tr}_{H_2} \Phi . \quad (3.2)$$

Aun si el estado global  $\Phi \in H$  es un estado puro, el estado  $\rho_1$  definido por (3.2) es, en general, impuro. Lo impuro de  $\rho_1$  refleja el hecho de que el observador  $O_1$  está perdiendo cierta información del estado global  $\Phi$  al solo tener acceso al subsistema 1. Decimos que (3.1) es una entropía de entrelazado (EE), cuando  $S$  se calcula para un estado  $\rho_1$  que se obtiene de un estado puro  $\Phi$  definido en  $H = H_1 \otimes H_2$ , al tomar traza por el espacio de Hilbert  $H_2$ . Con ello, la EE ( $S_{\text{ent}}$ )

$$S_{\text{ent}} = S[\rho_1] = S[\text{Tr}_{H_2} \Phi] , \quad (3.3)$$

queda definida por  $\Phi$  y la factorización  $H_1, H_2$  que se haga de  $H$ . Como (3.2) define, en general, un  $\rho_1$  impuro, la entropía (3.3) es, en general, no nula.

La  $S_{\text{ent}}$  se utiliza e interpreta como una medida de la correlación cuántica o entrelazado entre las “componentes” de  $\Phi$  en  $H_1$  y  $H_2$ , lo que se manifiesta en la correlación que existe entre los observables con soporte en  $H_1$  y los observables con soporte en  $H_2$  que actúan sobre  $\Phi \in H = H_1 \otimes H_2$ , de aquí su nombre. Quizás el ejemplo más sencillo de entrelazado donde ciertos vectores de  $H, H_1, H_2$  tienen un referente físico real<sup>3</sup> es el de un par de espines en un estado tipo EPR<sup>4</sup>, en donde  $H = H_1 \otimes H_2$  es el producto de dos espacios  $H_1, H_2$ , de dos dimensiones cada uno, donde viven los vectores  $| \rangle_1, | \rangle_2$  de los espines 1 y 2 respectivamente.

El estado puro  $|0\rangle \in H$

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2) , \quad (3.4)$$

representa el estado conjunto de dos espines 1 y 2 de espín total cero<sup>5</sup>, y tiene la propiedad matemática de no poderse escribir como el producto  $| \rangle_1 | \rangle_2$  de ningunos vectores de  $H_1, H_2$  ( caso en que se dice que  $|0\rangle$  es un vector entrelazado). Físicamente,  $|0\rangle$  puede lograrse por alguna interacción física (y por tanto local) entre los espines 1 y 2. Supongamos que tal interacción cesa pues los espines se alejan a los lugares remotos

<sup>3</sup>Experimentos basados en pares EPR y para probar desigualdad de Bell, fueron hechos por primera vez en 1982 por A. Aspect [16].

<sup>4</sup>EPR = Einstein, Podolsky, Rosen, quienes utilizaron una construcción similar a la dada en este ejemplo como paradoja en contra de la completitud de la mecánica cuántica [17]. El artículo puede decirse que trascendió más bien como un teorema (el primero de su tipo) sobre un nuevo aspecto de la mecánica cuántica (no en contra de la misma) implícito en su formalismo. Este es el entrelazado o correlación no local, idea que resultaba muy perturbadora ante la creencia en lo que expresaron como realismo local. La ilustración de este ejemplo en términos de espines fue dada más tarde por D. Bohm.

<sup>5</sup>Si convenimos en que  $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$  es una base ortonormal para  $H_1$  que representa espín arriba (+), abajo (-), respecto de una dirección  $\vec{n}$ , con autovalores  $+1, -1$  respectivamente, del operador de espín en esa dirección  $S_1 = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$ , y lo mismo para el espín 2, entonces basta cambiar cualquier  $+$  o  $-$  en (3.4) para que sea muy difícil que (3.4) tenga un referente real (que cumpla leyes de conservación, etc).

$A$  y  $B$ . Según las mediciones del espín 1 en el lugar  $A$ , el estado de 1 es totalmente impuro, y lo mismo para 2 en  $B$ , (lo que tiene asociado una  $S_{\text{ent}} \neq 0$ ), sin embargo, como se conoce, existen correlaciones no locales que implican que, una medición local del estado puro global afecta de una forma determinada el resultado de otra medición local (sobre el mismo sistema), posiblemente remota a la primera. Estas correlaciones se hacen totalmente evidentes en este ejemplo si la dirección  $\vec{h}$  en la que se mide el espín 1 en  $A$  es la misma dirección  $\vec{h}$  en la que se mide el espín 2 en  $B$  (remoto de  $A$ ). Una propiedad importante de (3.4) (que lo distingue de un intento *naive* de análogo clásico) es que, *con independencia de  $\vec{h}$* , por cada  $+$  en  $A$ , se tiene un  $-$  en  $B$  y viceversa ( $+$  ó  $-$  es la proyección del espín en  $\vec{h}$ ). Estas correlaciones han sido medidas [16] y no son posibles de explicar por ningún modelo local de variables ocultas [18].

Es útil ver que, por ejemplo, el estado separable  $|+\rangle_1|-\rangle_2$  no muestra estas correlaciones (basta elegir  $\vec{h}$  en una dirección distinta de la definida por  $|+\rangle_1$ ) y, no casualmente, cuando trazamos por  $H_2$  el estado  $|+\rangle_1|-\rangle_2 \Leftrightarrow \tilde{\Phi} = |+\rangle_1|-\rangle_2\langle +|_1\langle -|_2$ , resulta un estado puro  $|-\rangle_1\langle -|_1$ , por lo que su  $S_{\text{ent}}$  es cero. Este es el otro extremo de (3.4),  $\tilde{\Phi} = |+\rangle_1|-\rangle_2\langle +|_1\langle -|_2$  es un estado que no tiene correlaciones<sup>6</sup> entre observables con soporte en  $H_1$  y observables con soporte en  $H_2$  y  $S_{\text{ent}} = 0$ , mientras que (3.4), como se dijo, es totalmente correlacionado y  $S_{\text{ent}} \neq 0$ .

Se sugiere entonces que, mientras mayor correlación, mayor impureza del estado trazado, por lo que una medida de lo impuro del estado trazado, es una medida de la correlación que existe entre los observables del subsistema 1 y los observables del subsistema 2. Existen varias magnitudes que caracterizan la impureza de un estado, por ejemplo  $\text{Tr}[\rho^2] < 1$  si  $\rho$  es impuro (también pueden ser útiles  $\text{Tr}[\rho^n]$ ;  $n > 1$ ). Si exigimos otras propiedades sobre estas magnitudes que caracterizan la impureza de  $\rho$ , como aditividad cuando  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , surgen dos tipos de magnitudes: La entropía (3.1) de von Neumann  $S$  (o de Shannon en teoría de información), y las entropías de Renyi:

$$R_\alpha[\rho] = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}(\rho^\alpha) . \quad (3.5)$$

Se cumple que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} R_\alpha[\rho] = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = S[\rho] ,$$

con lo que  $S[\rho]$  es un caso particular de las  $R_\alpha[\rho]$ , importante por su conexión con la termodinámica. Por tanto,  $S_{\text{ent}} = S[\rho_1]$  es una medida de la correlación cuántica (no local y no mediada por interacción) entre los observables que actúan sobre  $H_1$  y los observables que actúan en  $H_2$  (en la práctica posiblemente remotos de los de  $H_1$ ), cuando se tiene un estado puro global  $\Phi \in H$ .

Existe una diferencia importante entre la  $S$  de (3.1) calculada para un  $\rho$  cualquiera que representa un estado físico, y la  $S$  de un  $\rho_1$  que sabemos que se obtuvo de trazar una parte ( $H_2$ ) de un estado puro  $\Phi$  de  $H$ , (la  $S_{\text{ent}}$ ). En el primer caso es posible un

<sup>6</sup>Cuando decimos correlaciones, nos referimos a las correlaciones conectadas (que son cero si el estado se factoriza):  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$ .

análogo clásico, en el segundo caso no. La EE no tiene análogo clásico, o al menos, el sentido que se le atribuye (como medida del entrelazado), no tiene análogo clásico alguno.

### 3.1.1. La entropía geométrica.

La aplicación que nos interesa de la EE es cuando la división de  $H$  en  $H_1$  y  $H_2$  está asociada con una división del espacio físico, y cuando, el  $\Phi$  puro de  $H$  es un estado puro de un campo cuántico  $\phi$  (que abarca todo el espacio físico), en particular, estamos interesados en el estado de vacío  $|0\rangle$  de  $\phi$ . Por estar la división de  $H$  asociada a la división del espacio por un plano u otra superficie  $\Sigma$  (en general, una subvariedad de codimensión 2 tipo espacial<sup>7</sup>), se dice que la EE es una entropía geométrica. En lo que sigue, lo que entenderemos por EE es esta entropía geométrica. Como resultado de esta aplicación al continuo, la EE (geométrica) es divergente ultravioleta (UV) en ausencia de un regulador  $\epsilon$ , y tiene, en dimensión  $d$  del espacio-tiempo, una estructura bien conocida de divergencias:

$$S_{\text{ent}}[\Phi, \Sigma] = a_{d-2}(\Sigma)\epsilon^{-(d-2)} + a_{d-1}(\Sigma)\epsilon^{-(d-1)} + \dots + a_1(\Sigma)\epsilon^{-1} + a_0(\Sigma) \ln \epsilon + \text{parte finita} \quad (3.6)$$

El valor de los coeficientes  $a_i$  depende en general de característica integradas o globales de la superficie  $\Sigma$ . Podemos entender por qué solo depende de  $\Sigma$  y no de todo el semiespacio  $V$  que divide  $\Sigma$ , o  $\bar{V}$  (su complemento), atendiendo a que  $\text{Tr}_{H_1}\Phi$  y  $\text{Tr}_{H_2}\Phi$  tienen los mismos autovalores si  $H = H_1 \otimes H_2$  y  $\Phi(\text{puro}) \in H$  [19]. En el caso de la entropía geométrica,  $H_1$  y  $H_2$  están asociados con  $V$  y  $\bar{V}$  respectivamente,  $H$  con todo el espacio  $= V \cup \bar{V}$ , y  $\Phi$  un estado puro  $|0\rangle\langle 0|$ , por ejemplo, el vacío de un campo:

$$H_1 \sim V, H_2 \sim \bar{V}; S_{\text{ent}}^V = S[\text{Tr}_{\bar{V}}|0\rangle\langle 0|] = S[\text{Tr}_V|0\rangle\langle 0|] = S_{\text{ent}}^{\bar{V}}.$$

Como esta igualdad se cumple para cualesquiera  $V, \bar{V}$ , solo puede depender de lo que tienen en común  $V, \bar{V}$ : la superficie que los divide  $\Sigma$ , que llamamos también superficie de entrelazado. Esta propiedad distingue a la EE de otras entropías (que en general son extensivas con el volumen), y solo vale cuando el estado global es puro (lo que aquí incluimos en la propia definición de  $S_{\text{ent}}$ ).

Como en (3.6)  $\epsilon$  tiene unidades de distancia, el término divergente principal  $a_{d-2}(\Sigma)$  depende de  $\Sigma$  y tiene unidades de longitud a la potencia  $d-2$  ( $S_{\text{ent}}$  no tiene unidades, ver(3.1)), por lo que  $a_{d-2}(\Sigma)$  se conoce como el término de área. En general, si  $A[\Sigma]$  es el área de  $\Sigma$ ,  $a_{d-2}(\Sigma) = a_{d-2}(A[\Sigma])$ , y, en casos fácilmente identificables, es directamente proporcional al área de  $\Sigma$ ,  $a_{d-2}(\Sigma) \propto A[\Sigma]$ . Esta última propiedad de la EE es muy importante en relación con la interpretación (aun abierta) de la entropía de agujero negro (BH). La posibilidad de que la entropía de BH sea una EE de todos los campos a través del horizonte de eventos fue propuesta por primera vez en [20], motivada por

<sup>7</sup>Si la variedad espacio-tiempo  $M$  tiene dimensión  $d$ , una subvariedad de codimensión 2 es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $d-2$ .

este término de área.

## 3.2. Método de réplicas para calcular la EE

De los métodos que se conocen para calcular la EE<sup>8</sup>, utilizamos el de tiempo euclídeo/método de réplicas, propuesto en [22], que, aunque menos directo, es muy conveniente por llevar el cálculo a un punto donde lo que resta es aplicar métodos poderosos como el de heat-kernel<sup>9</sup>, con el cual se puede abordar un problema mucho más general que el que discutimos aquí. Por otro lado, el método de réplicas tiene asociado una interpretación geométrica que nos es útil al discutir el papel del campo gravitatorio  $g_{\mu\nu}$  en la EE, en particular, permite ver mejor la relación entre el término de área de la EE y la constante de Newton  $G$ , que discutimos en la sección 3.4 de este capítulo.

### 3.2.1. Método de réplicas en espacio euclídeo

Estamos interesados en la EE del estado de vacío  $|0\rangle$  de un campo cuántico  $\phi$ , cuando el espacio plano en el está definido  $\phi$  es dividido por una superficie de entrelazado  $\Sigma$ , también plana, que separa los volúmenes espaciales  $V$  y  $\bar{V}$ . Por ello, describimos el método de réplicas en este caso y para un campo escalar  $\phi$ . Comenzamos representando en espacio euclídeo el estado de vacío del campo  $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$  en términos de integrales funcionales (aquí  $\vec{x}$  es el vector espacial, y  $t$  el tiempo euclídeo). Sean  $|\alpha\rangle$  los autoestados de  $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)$ :  $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)|\alpha\rangle = \alpha(\vec{x})|\alpha\rangle$ . Con ello, la funcional de onda del estado de vacío  $|0\rangle$  se escribe

$$\Phi(\alpha) \equiv \langle\alpha|0\rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, -\infty)=0}^{\phi(\vec{x}, 0)=\alpha(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (3.7)$$

donde  $N$  es una constante de normalización y  $S_E$  la acción euclídea. Este estado de vacío se selecciona de la expresión en espacio de Minkowski ( $t_M$  el tiempo en Minkowski,  $\hbar = 1$ )

$$\langle\varphi', t'_M|\varphi, t_M\rangle = \langle\varphi'|e^{-iH(t'_M-t_M)}|\varphi\rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, t_M)=\varphi(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t'_M)=\varphi'(\vec{x})} D\phi e^{iS(\phi)}, \quad (3.8)$$

donde  $|\varphi, t_M\rangle$  es el autoestado de  $\hat{\phi}(\vec{x}, t_M)$  a tiempo  $t_M$ :  $\hat{\phi}(\vec{x}, t_M)|\varphi, t_M\rangle = \varphi(\vec{x})|\varphi, t_M\rangle$  y  $|\varphi, t_M\rangle = e^{iHt_M}|\varphi\rangle$ . En (3.8) introducimos  $1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$ , con  $|n\rangle$  los autoestados de  $H$  con autovalores  $E_n$ , y pasamos toda la expresión a tiempo euclideo  $t_M \rightarrow -it$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle\varphi'|n\rangle\langle n|\varphi\rangle e^{-(t'-t)E_n} = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, t)=\varphi(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t')=\varphi'(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}.$$

<sup>8</sup>En [21] se discuten varios métodos para calcular la EE y la equivalencia entre ellos.

<sup>9</sup>Preferimos llamar al método de heat-kernel por su nombre en inglés y no por su traducción al castellano: núcleo de calor.

Al tomar el límite  $t \rightarrow -\infty$ , de la suma solo queda el estado de mínima energía  $n = 0$ .

$$\langle \varphi' | 0 \rangle \langle 0 | \varphi \rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, -\infty) = \varphi(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t') = \varphi'(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}.$$

Si hacemos el campo  $\varphi(\vec{x}) = 0$  en  $t = -\infty$ , absorbemos  $\langle 0 | \varphi \rangle$  en  $N^{-1/2}$  y evaluamos  $t' = 0$ , en donde  $\varphi'(\vec{x}) = \alpha(\vec{x})$ , nos queda (3.7). La integral funcional en (3.7) sobre  $\phi(\vec{x}, t)$  es entonces en todo el semiespacio inferior de tiempo euclídeo  $t$  negativo. Con un procedimiento similar

$$\Phi^*(\alpha') \equiv \langle 0 | \alpha' \rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, 0) = \alpha'(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, \infty) = 0} D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (3.9)$$

De (3.7) y (3.9), tenemos la matriz densidad  $\rho$  del estado de vacío en la base  $|\alpha\rangle$

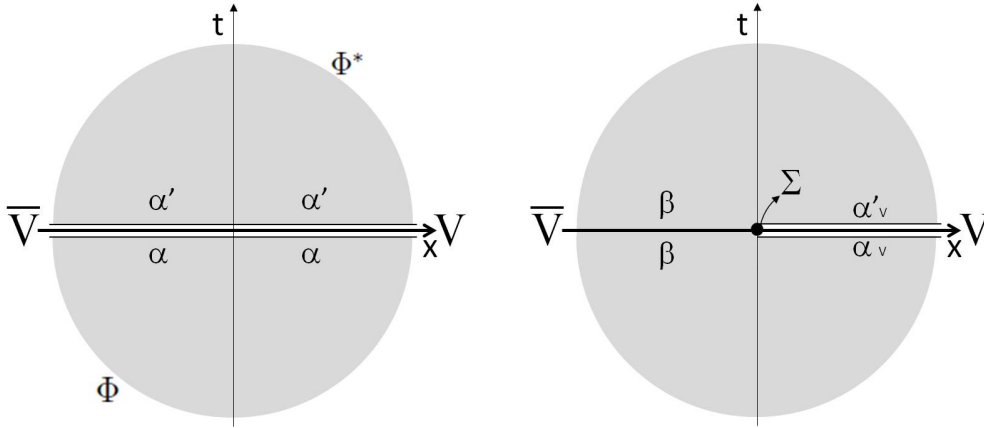
$$\rho(\alpha, \alpha') = \langle \alpha | 0 \rangle \langle 0 | \alpha' \rangle = \Phi(\alpha) \Phi^*(\alpha') = N^{-1} \int_{\phi(\vec{x}, 0^+) = \alpha'(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, 0^-) = \alpha(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (3.10)$$

Para calcular el estado trazado (en general impuro)  $\rho_V$ , que representa el estado que ve un observador si limita todos sus observables a tiempo  $t = 0$  a la región del espacio  $V$ , consideramos que  $\alpha = \alpha_V + \beta$  y  $\alpha' = \alpha'_V + \beta$ , con  $\beta$  con soporte en  $\bar{V}$  (el complemento de  $V$ ) y  $\alpha_V, \alpha'_V$  con soporte en  $V$ , e integramos por todas las posibles  $\beta(\vec{x}, 0)$  de  $\bar{V}$ .

$$\begin{aligned} \rho_V(\alpha_V, \alpha'_V) &= \text{Tr}_{\substack{\alpha \in \bar{V} \\ \alpha' \in \bar{V}}} \rho(\alpha, \alpha') = \int D\beta \Phi(\alpha_V + \beta) \Phi^*(\alpha'_V + \beta) \\ &= N^{-1} \int_{\phi(x > 0, 0^+) = \alpha'_V(\vec{x})}^{\phi(x > 0, 0^-) = \alpha_V(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La diferencia entre  $\rho$  y  $\rho_V$  es el subíndice  $V$  en las  $\alpha$  de los límites de integración, que aparece en (3.11) y no aparece en (3.10) y que en el argumento de  $\phi$ , en lugar de  $\vec{x}$ , pusimos  $x > 0$ . Estos cambios indican que la variedad  $(\vec{x}, t)$  por la que se hace la integral funcional que es igual a  $\rho(\alpha, \alpha')$  es distinta a la variedad que corresponde a  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$ . Quizás es mejor ver esta diferencia gráficamente en la figura 3.1.

La integral funcional que es igual a  $\rho(\alpha, \alpha')$  se realiza por toda la región sombreada de la fig.3.1 izquierda, que equivale a todo el volumen (espacio-temporal euclídeo), excepto el plano  $t = 0$ , donde toma los límites  $\alpha$  y  $\alpha'$ . La integral funcional que corresponde a  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$ , fig.3.1 derecha, se realiza por todo el volumen  $(\vec{x}, t)$ , excepto por el semiplano ( $t = 0, \vec{x} \in V$ ), donde toma los límites  $\alpha_V$  y  $\alpha'_V$ . Convenimos que  $x$  es la coordenada espacial normal a la superficie de entrelazado  $\Sigma$  que divide los volúmenes espaciales  $V$  y  $\bar{V}$ , y  $x > 0$ , que aparece en la notación de los límites de (3.11), son las  $\vec{x} \in V$ . En la fig.3.2 se representan solo las coordenadas  $(x, t)$ , las  $d - 2$  restantes se consideran normales al plano de la figura. Nótese que los  $d - 2$  ejes coordenados de las  $d - 2$  variables:  $\vec{x}$  menos la coordenada  $x$ , se encuentran sobre el plano  $\Sigma$  (parametrizan la superficie de entrelazado). Si identificamos  $\alpha'_V = \alpha_V$  y tomamos la integral funcional por  $\alpha'_V = \alpha_V$ , obtenemos  $\text{Tr} \rho_V$ . Esto equivale a tomar la integral funcional sin límites



**Figura 3.1:** Izquierda: variedad (región sombreada) por la que se hace la integral funcional que es igual a  $\rho(\alpha, \alpha') = \Phi(\alpha)\Phi^*(\alpha')$ . Según (3.7),  $\Phi(\alpha)$  es la integral funcional en toda la región de tiempo euclídeo  $t$  negativo (región sombreada inferior), con límite  $t \rightarrow 0^-$  igual a  $\alpha(\vec{x})$ , función que se extiende a lo largo de todo el espacio.  $\Phi^*(\alpha')$ , ver (3.9), la representamos con la región sombreada superior.  $\rho(\alpha, \alpha') = \Phi(\alpha)\Phi^*(\alpha')$  es una integral funcional en toda la región sombreada, lo que no incluye el plano  $t = 0$ , donde se fijan los límites  $\alpha$  y  $\alpha'$ . Derecha:  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$  (ver (3.11)) resulta de  $\rho(\alpha, \alpha')$  al identificar en  $\bar{V}$  los límites  $t \rightarrow \pm 0$ , hacerlos iguales a  $\beta$  y tomar integral funcional por  $\beta$ . Esto equivale a que se haga la integral funcional por toda la región sombreada con límites de integración solo en  $V$ . En ambas figuras,  $x$  es el eje coordenado normal a la superficie de entrelazado  $\Sigma$  y el resto de las coordenadas espaciales:  $\vec{x}$  menos la coordenada  $x$ , pueden imaginarse como normales al plano de la figura. La integral funcional de  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$  se hace por la variedad bidimensional (derecha), producto una variedad plana  $d - 2$  dimensional (normal al plano de la figura).

por todo el espacio  $(\vec{x}, t)$ , que no es más que la función de partición  $Z$  de la teoría sobre el factor de normalización<sup>10</sup>  $N$ . Nos preguntamos ahora por la integral funcional que es igual a  $\rho_V^2(\alpha_V, \alpha'_V)$ :

$$\rho_V^2(\alpha_V, \alpha'_V) = \int D\alpha'_V \rho(\alpha_V, \alpha'_V)\rho(\alpha'_V, \alpha''_V) \quad (3.12)$$

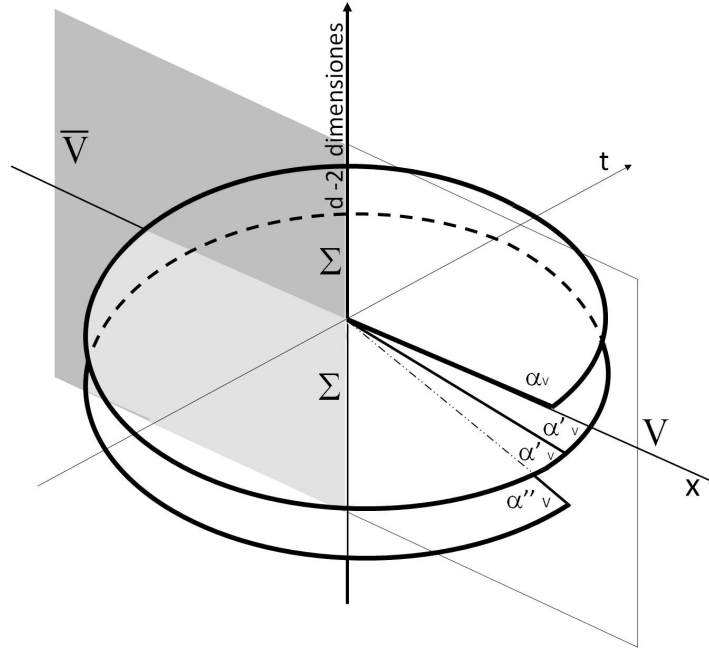
$$= N^{-2} \int_{\phi(x>0,0^+)=\alpha''_V(\vec{x})}^{\phi(x>0,0^-)=\alpha_V(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)} \quad (3.13)$$

La notación de los límites de integración en (3.13) no nos dice mucho sobre cómo debemos tomar esta integral, y puede confundirse, por ello, con la que es igual a  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$ . La integral (3.13) debe hacerse por una región  $(\vec{x}, t)$  un poco mas compleja que la representada en la fig.3.1 derecha, y que se sugiere en la forma de (3.12). Consiste en tomar dos copias de la variedad representada en la fig.3.1 derecha, una copia que representa a  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$ , con límites  $\alpha'_V, \alpha_V$ , y la otra a  $\rho_V(\alpha'_V, \alpha''_V)$ , con límites  $\alpha''_V, \alpha'_V$ , e identificar los bordes  $\alpha'$  de la primera y la segunda variedad. “Pegar” estas dos variedades por su borde  $\alpha'$  equivale a tomar la integral funcional por  $\alpha'$ , integral (3.12). Con esto, (3.13) debe realizarse por toda una superficie (tipo superficie de Riemann) que representamos en la figura 3.2 y que se construye de poner dos copias de la

<sup>10</sup>Si exigimos que  $\text{Tr}\rho_V = Z/N = 1$ , esto determina a  $N$  como la función de partición de la teoría sobre el espacio  $(\vec{x}, t)$ .



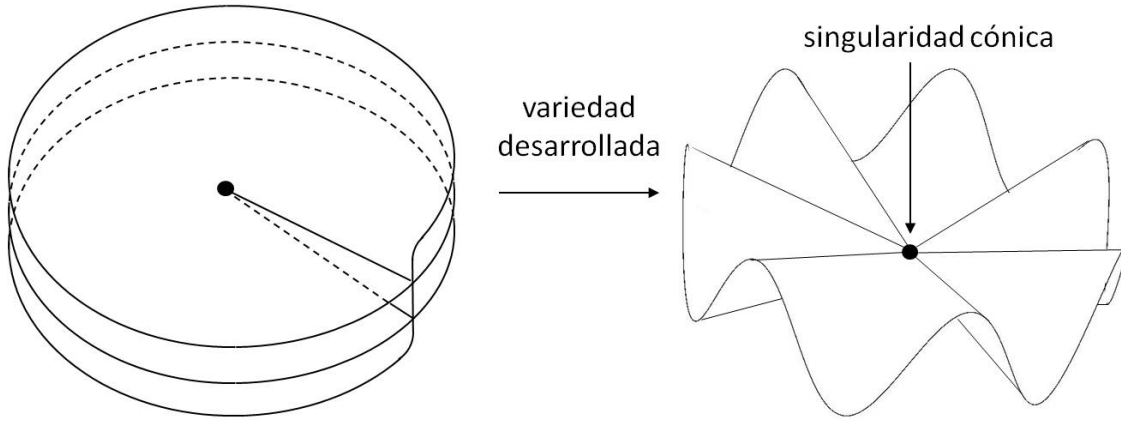
variedad de la fig.3.1 derecha, una encima de la otra, unidas por el borde  $\alpha'_V$ .



**Figura 3.2:** Representación del espacio  $(\vec{x}, t)$  por el que se hace la integral funcional que es igual a  $\rho_V^2(\alpha_V, \alpha'_V)$ , que se construye “pegando” por el borde  $\alpha'_V$  dos copias de la fig.3.1 derecha. Si se identifican los bordes  $\alpha(x) = \alpha''(x)$  (lo que equivale algebraicamente a hacer la integral funcional por  $\alpha(x) = \alpha''(x)$ ) tenemos una variedad sin bordes por la que, si se toma integral funcional, obtenemos  $\text{Tr}\rho_V^2$ .

La variedad del espacio euclídeo de  $d$  dimensiones por la que debe tomarse la integral funcional que nos da  $\rho_V^2(\alpha_V, \alpha'_V)$  es la variedad que llamamos  $C_2 \times M_{d-2}$ , una variedad producto que se compone de la representada en la fig.3.2 (sin el eje “ $d-2$  dimensiones”), llamémosle  $C_2$  (el subíndice 2 por componerse de 2 copias de la la fig.3.1 derecha), por una variedad plana  $d-2$  dimensional sin límites, que llamamos  $M_{d-2}$ . Las  $d-2$  dimensiones espaciales, que tienen sus ejes coordenados sobre el hiperplano  $\Sigma$  (superficie de entrelazado) y que parametrizan  $M_{d-2}$ , las agrupamos en el eje “ $d-2$  dimensiones”. Podemos identificar  $\Sigma$  y  $M_{d-2}$  entre sí.

Nótese que  $\text{Tr}\rho_V^2$  equivale a hacer la integral funcional por esta variedad dos veces replicada con los límites  $\alpha_V$  y  $\alpha'_V$  identificados. De esto, vemos que  $\text{Tr}\rho_V^2$  es proporcional a la función de partición  $Z(2)$  de la teoría sobre la variedad  $d$  dimensional 2-veces replicada igual  $C_2 \times M_{d-2}$ , con los bordes  $\alpha_V$  y  $\alpha'_V$  identificados. Siguiendo este argumento, la variedad por la que habría que hacer la integral funcional para obtener  $\text{Tr}\rho_V^3$ , sería  $C_3 \times M_{d-2}$ , igual a  $M_{d-2}$  producto  $C_3$ : una versión de la fig.3.2 con otra copia más debajo y con los bordes inicial y final identificados.  $C_3$  tiene más o menos el aspecto de la figura 3.3 (izquierda). Vistos estos casos, es inmediato que la integral funcional que es igual a  $\text{Tr}\rho_V^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , es la que se realiza por una variedad  $C_n$ , similar a la de la fig.3.3 izquierda pero  $n$ -veces replicada, producto  $M_{d-2}$ . De aquí se sigue que  $\text{Tr}\rho_V^n$  es proporcional a la función de partición  $Z(n)$  de la teoría sobre la variedad  $C_n \times M_{d-2}$ , similar a la de la fig. 3.3 izquierda. A partir de ahora siempre entendemos por  $C_n$  la variedad  $n$ -veces replicada con los bordes inicial y final identificados, o sea,



**Figura 3.3:** Izquierda: variedad  $C_3$  tres veces replicada. Derecha: Visualización aproximada de  $C_3$  desarrollada o extendida y singularidad cónica en el origen, único punto no regular de la variedad.

una variedad sin bordes como en la fig.3.3 izquierda, y no como en la fig.3.2 . Con esto

$$\text{Tr}\rho_V^n = \frac{Z(n)}{Z(1)^n}, \quad (3.14)$$

donde se introdujo  $Z(1)$ , la función de partición  $Z$  sobre la variedad sin réplica, para normalizar la traza de  $\rho_V$  a 1.

El método de réplicas para calcular la EE se basa en emplear una igualdad del tipo

$$\begin{aligned} S_{\text{ent}}[\rho] &= (-\partial_\alpha + 1) \ln \text{Tr}\rho^\alpha \Big|_{\alpha \rightarrow 1} = \left( -\frac{\text{Tr}(\rho^\alpha \ln \rho)}{\text{Tr}\rho^\alpha} + \ln \text{Tr}\rho^\alpha \right) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} \\ &= \left( \frac{\text{Tr}(\rho \ln \rho)}{\text{Tr}\rho} - \ln \text{Tr}\rho \right) = -\text{Tr} \left\{ \left( \frac{\rho}{\text{Tr}\rho} \right) \ln \left( \frac{\rho}{\text{Tr}\rho} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

con la cual, basta conocer  $\text{Tr}\rho^\alpha$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$  (o al menos para  $\alpha$  real cerca de 1), para obtener la EE ( $S_{\text{ent}}$ ) y se evita calcular  $\ln \rho$  directamente, lo que puede ser, en ciertos casos, muy difícil. En una situación general, solo es posible calcular  $\text{Tr}\rho^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que se realiza una extensión analítica de esta función de  $n \rightarrow \alpha$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  (en [23] se comenta sobre la unicidad de esta extensión). En nuestro caso, por las simplificaciones que impusimos sobre el dominio sobre el que se toma la traza (superficie de entrelazado plana) y el tipo de espacio-tiempo (plano), es posible conocer<sup>11</sup>  $\text{Tr}\rho^\alpha$  directamente, sin necesidad de la extensión analítica.

Notemos que al desarrollar o abrir la variedad  $n$ -veces replicada  $C_n$  (fig.3.3 izquierda), esta toma el aspecto aproximado que representamos en fig.3.3 derecha, donde se observa también que, el punto  $(x, t) = (0, 0)$ , es un punto singular de la variedad (visto desde la variedad  $C_n \times M_{d-2}$ , el punto  $(x, t) = (0, 0)$  de  $C_n$  es toda la superficie de entrelazado  $\Sigma$ ). Se dice que este punto tiene singularidad cónica pues, al tomar un radio  $r$  infinitesimal a partir de él, el círculo dibujado sobre esta variedad  $C_n$   $n$ -replicada

<sup>11</sup>Nótese que conociendo  $\text{Tr}\rho^\alpha$ , conocemos todas las entropías de Renyi (3.5).

tiene longitud  $l = (2\pi r) \cdot n$ , lo que no ocurre en ningún otro punto de la variedad. De hecho, la variedad extendida (fig.3.3 derecha) es un cono, lo que en lugar de tener un déficit (relativo a  $2\pi$ ) en el ángulo total que se mide a partir del punto singular (como ocurre con un cono normal), tiene un exceso de  $2\pi(n-1)$ . En el caso en que  $n=1$ , que corresponde a una sola copia, el ángulo de exceso es 0, la variedad de la fig.3.3 derecha se transforma en un plano y el punto singular desaparece. Es posible imaginar una extensión analítica  $C_n \rightarrow C_\alpha$  de la propia variedad (y no solo de la función  $\text{Tr}\rho_V^n = \frac{Z(n)}{Z(1)^n}$ ) de  $n \in \mathbb{N}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si pensamos que en la fig.3.3, el ángulo total que se mide a partir del punto singular es  $2\pi\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , en lugar de  $2\pi n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . En tal caso,

$$\text{Tr}\rho_V^\alpha = \frac{Z(\alpha)}{Z(1)^\alpha},$$

donde la integral funcional  $Z(\alpha)$  se toma por la variedad  $\alpha$ -replicada:  $\alpha = C_\alpha \times M_{d-2}$ , y  $C_\alpha$  tiene una singularidad cónica de ángulo total  $2\pi\alpha$ .

Si definimos la acción efectiva  $W(\alpha)$  de la teoría sobre la variedad  $\alpha$  por

$$Z(\alpha) = e^{-W(\alpha)}, \quad (3.16)$$

con  $Z(\alpha)$  la función de partición sobre  $\alpha$ , de (3.14) (con  $n \rightarrow \alpha$ ) y (3.15) obtenemos que

$$S_{\text{ent}}[\rho_V] = (\partial_\alpha - 1) W(\alpha)|_{\alpha \rightarrow 1}. \quad (3.17)$$

Por esta fórmula es que se comenta en la literatura relacionada que la EE es la respuesta (lineal) de la función de partición de la teoría a una singularidad cónica. Calculamos a continuación la EE para los campos escalar y fermiónico libres con ayuda de (3.14) y (3.17).

### 3.3. Cálculo de la EE en espacio plano para los campos escalar y fermiónico libres

#### 3.3.1. Método de heat-kernel

La integral funcional  $Z(\alpha)$  (donde  $\alpha$  nombra la variedad por la que debemos tomar esta integral) en el caso de acciones de la forma  $S_E = -\int d^d x \phi \Lambda \phi$  (forma general de la acción efectiva de un lazo de cualquier teoría), es gaussiana e igual a

$$Z(\alpha) = e^{-W(\alpha)} = \int_\alpha D\phi e^{-\int d^d x \phi \Lambda \phi} = (\det \Lambda)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

El  $\det \Lambda$  se calcula para el operador con condiciones de contorno definidas por  $\alpha$ . En el caso que estamos interesados, debemos calcular  $\det \Lambda$  (para  $\Lambda$  dado por la acción libre del escalar y el fermión) en la variedad  $\alpha = C_\alpha \times M_{d-2}$ , donde, como vimos,  $C_\alpha$  bidimensional, tiene una singularidad cónica en el origen y  $M_{d-2}$  ( $d-2$  dimensiones) es una variedad plana sin límites. Para fermiones, la integral  $Z(\alpha)$  da el  $\det \Lambda$  en el

numerador, por ser las variables de integración variables de Grassmann. Omitimos en lo que sigue, por comodidad, el  $\alpha$  en la notación y tomamos (3.18) como referencia. Se harán los cambios necesarios cuando discutamos el caso fermiónico.

El método de heat-kernel es una herramienta para calcular  $\ln \det \Lambda$ , y consiste en utilizar la igualdad

$$\ln Z = -\frac{1}{2} \ln \det \Lambda = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \Lambda = \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{\text{Tr} e^{-s\Lambda}}{s} ds, \quad (3.19)$$

donde se utilizó la fórmula general  $\ln \det \Lambda = \text{Tr} \ln \Lambda$  en la segunda igualdad. La última igualdad puede obtenerse de ( $\lambda_i > 0$ ):

$$\ln \lambda_i = - \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i s}}{s} ds + cte(\epsilon).$$

La cantidad  $cte(\epsilon)$ , en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , se hace infinito, pero tal infinito no depende de  $\lambda_i$ ; en ese sentido es una constante. Esto puede comprobarse derivando en ambos miembros respecto de  $\lambda_i$  y tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Se obtiene al derivar y tomar límite que

$$\lambda_i^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_i s} ds + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} cte(\epsilon),$$

de donde se ve que  $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} cte(\epsilon) = 0$  (ya que la integral converge a  $\lambda_i^{-1}$ ). Sean estos  $\lambda_i$  los autovalores de  $\Lambda$

$$- \text{Tr} \ln \Lambda = - \sum_i \ln \lambda_i = \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{\sum_i e^{-s\lambda_i}}{s} ds = \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{\text{Tr} e^{-s\Lambda}}{s} ds \equiv \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{D(s)}{s} ds, \quad (3.20)$$

lo que demuestra (3.19). La función  $D(s) \equiv \text{Tr} e^{-s\Lambda}$  se conoce como heat-kernel [24]. Se sigue de la siguiente definición

$$K(x, x', s) \equiv \langle x | e^{-s\Lambda} | x' \rangle, \quad (3.21)$$

que  $K(x, x', s)$  cumple

$$(\partial_s + \Lambda)K(x, x', s) = 0; \quad K(x, x', 0) = \delta(x - x'), \quad (3.22)$$

con las mismas condiciones de contorno que las impuestas al operador  $\Lambda$ . Cuando  $\Lambda = -\Delta$  y  $K$  escalar, se tiene la ecuación de difusión del calor. Es por ello que

$$D(t) \equiv \text{Tr} e^{-s\Lambda} = \int dx K(x, x, s) \quad (3.23)$$

recibe el nombre de heat-kernel (núcleo de calor, o núcleo de la ecuación de calor). Con la solución de (3.22), que se obtiene en general en términos de un desarrollo en potencias de  $s$ , se calcula  $\ln \det \Lambda$  de (3.19, 3.20) y (3.23). Por ejemplo, para un campo escalar libre  $\phi$  ( $\Lambda = -\Delta + m^2$ ) y una variedad plana de  $d$  dimensiones sin singularidad

cónica ni fronteras, la solución de (3.22) es

$$K(x, x', s) = (4\pi s)^{-d/2} \exp(-m^2 s - \frac{1}{4s}(x - x')^2)$$

y

$$D(s) = (4\pi s)^{-d/2} \exp(-m^2 s) \text{ vol} ,$$

con  $\text{vol}$ , el volumen (o la unidad de volumen) de la variedad:  $\text{vol} = \int d^d x$ .

### 3.3.2. Cálculo de la EE para el campo escalar libre

Cuando  $\text{Tr} \rho_V = 1$ , (lo que logramos escribiendo  $\text{Tr} \rho_V^\alpha = Z(\alpha)/Z(1)^\alpha$ , como en (3.14)), el límite  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{Tr} \rho_V^\alpha$  existe por separado y (3.15) toma la forma

$$S_{\text{ent}} = - \partial_\alpha \text{Tr} \rho_V^\alpha \Big|_{\alpha \rightarrow 1} = - \partial_\alpha \ln \frac{Z(\alpha)}{Z(1)^\alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 1} = - \partial_\alpha (\ln Z(\alpha) - \alpha \ln Z(1)) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} . \quad (3.24)$$

También, según vimos anteriormente,

$$\ln Z(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{D_\alpha(s)}{s} ds . \quad (3.25)$$

El subíndice  $\alpha$  en el heat-kernel  $D(s)$  recuerda que este debe ser calculado en la variedad  $\alpha = C_\alpha \times M_{d-2}$ . De (3.24) y (3.25)

$$S_{\text{ent}} = - \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \partial_\alpha (D_\alpha(s) - \alpha D_1(s)) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} . \quad (3.26)$$

Nos proponemos para el caso del campo escalar libre masivo  $\phi$  calcular  $D_\alpha(s) - \alpha D_1(s)$  para  $\Lambda = -\Delta + m^2$ : el operador en la acción de  $\phi$  ( $\Delta$  es el Laplaciano, o el operador de d'Alambert en espacio euclídeo). Podemos elegir coordenadas en  $\alpha = C_\alpha \times M_{d-2}$  donde  $\Lambda = -\Delta + m^2 = -(\Delta_{C_\alpha} + \Delta_{d-2}) + m^2$ , con  $\Delta_{C_\alpha} = \partial_t^2 + \partial_x^2$ , el Laplaciano en las coordenadas  $(x, t)$  que parametrizan  $C_\alpha$  ( $x$  es la coordenada espacial normal a la superficie de entrelazado, y  $t$  el tiempo euclídeo), y  $\Delta_{d-2}$  el Laplaciano en la variedad  $M_{d-2}$ . Los operadores  $\Delta_{C_\alpha}$  y  $\Delta_{d-2}$  conmutan, de aquí que

$$\begin{aligned} D_\alpha(s) &= \text{Tr} e^{-s\Lambda} = \text{Tr} e^{-s(-\Delta+m^2)} = e^{-m^2 s} \text{Tr} e^{s(\Delta_{C_\alpha} + \Delta_{d-2})} \\ &= e^{-m^2 s} \left( \text{Tr}_{C_\alpha} e^{s\Delta_{C_\alpha}} \right) \left( \text{Tr}_{M_{d-2}} e^{s\Delta_{d-2}} \right) = e^{-m^2 s} D_{C_\alpha}(s) D_{M_{d-2}}(s), \end{aligned} \quad (3.27)$$

con  $D_{C_\alpha}(s)$  y  $D_{M_{d-2}}(s)$  los heat-kernel en las variedades  $C_\alpha$  y  $M_{d-2}$  respectivamente. Esta factorización es una de las principales motivaciones para usar el método de heat-kernel. Sustituyendo (3.27) en (3.26) tenemos

$$S_{\text{ent}} = - \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} D_{M_{d-2}}(s) \partial_\alpha (D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s)) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} . \quad (3.28)$$

Sobre  $D_{M_{d-2}}(s)$  no actúa  $\partial_\alpha$  pues solo  $C_\alpha$  es la que aporta a  $\alpha = C_\alpha \times M_{d-2}$  la topología de réplica (fig.3.3) y la singularidad cónica. La notación  $D_{C_1}(s)$  se refiere al heat-kernel sobre la variedad  $C_{\alpha=1}$  ( que es igual a un plano ). Calculamos primero el heat-kernel en la variedad  $C_\alpha$ .

Como existe en  $C_\alpha$  simetría de rotación respecto del punto singular, que tomamos como origen, utilizamos coordenadas polares  $(r, \theta)$  en lugar de  $(x, t)$ , con las cuales, además, se pueden expresar las condiciones de contorno de una forma simple. El problema para  $D_{C_\alpha}(s)$  es:

$$D_{C_\alpha}(s) = \text{Tr}_{C_\alpha} e^{s\Delta_{C_\alpha}} = \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \int_0^\infty r dr K(r, \theta, r, \theta, s) \quad (3.29)$$

con

$$(\partial_s + \Delta_{C_\alpha}^r)K(r, \theta, r', \theta', s) = 0 ; \quad K(r, \theta, r', \theta', 0) = \frac{1}{r}\delta(r - r')\delta(\theta - \theta'), \quad (3.30)$$

que es equivalente (como se vió en (3.21-3.22)) a la propia definición de  $K(\vec{x}, \vec{x}', s)$

$$K(\vec{x}, \vec{x}', s) = \langle \vec{x} | e^{s\Delta_{C_\alpha}} | \vec{x}' \rangle, \quad \vec{x} = (r, \theta),$$

Lo más conveniente es diagonalizar el operador  $e^{s\Delta_{C_\alpha}}$ , que, expresado en la base  $\{|\vec{x} = r, \theta\rangle\}$  es igual a  $K(\vec{x}, \vec{x}', s)$  solución de (3.30), para sustituirlo en (3.29). El problema de autovalores para  $\Delta_{C_\alpha}$ , que incluye las condiciones de borde en  $C_\alpha$  es:

$$\begin{cases} \Delta_{C_\alpha} f(r, \theta) = (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2)f(r, \theta) = \kappa f(r, \theta) \\ f(0, \theta) < \infty ; f(r \rightarrow \infty, \theta) = 0 \\ f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi\alpha), \end{cases} \quad (3.31)$$

donde se introdujo la condición de  $2\pi\alpha$  periodicidad de la variedad  $C_\alpha$  y se exigió regularidad en el origen. La solución de este problema permite escribir (los detalles hasta (3.32) los separamos al Apéndice A):

$$K(r, \theta, r', \theta', s) = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \int_0^\infty \lambda d\lambda J_{k/\alpha}(\lambda r) J_{k/\alpha}(\lambda r') e^{-s\lambda^2} \cos[(\theta - \theta')k/\alpha] \quad (3.32)$$

donde  $d_0 = 1$ ,  $d_{k>0} = 2$  y  $J_\nu(x)$  las funciones de Bessel de primer tipo<sup>12</sup> de orden  $\nu$ . Sustituimos en (3.29) y hacemos la integral por  $\theta$

$$D_{C_\alpha}(s) = \int_0^\infty r dr \sum_{k=0}^{\infty} d_k \int_0^\infty \lambda d\lambda J_{k/\alpha}^2(\lambda r) e^{-s\lambda^2},$$

y la integral por  $\lambda$

$$D_{C_\alpha}(s) = \int_0^\infty r dr \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{e^{-\frac{r^2}{2s}} I_{k/\alpha}(\frac{r^2}{2s})}{2s}, \quad (3.33)$$

<sup>12</sup>Usamos la misma nomenclatura que en [25] para las funciones de Bessel.

con  $I_\nu(x)$  la función de Bessel modificada de primer tipo de orden  $\nu$ . Si intentamos hacer la integral por  $r$  quedaría  $D_{C_\alpha}(s) = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} d_k k$ , que es divergente. De (3.33) basta sustituir  $\alpha = 1$  para obtener  $D_{C_1}$ , que por lo mismo, es divergente. Estas divergencias se deben a que el volumen de la variedad  $C_\alpha$  es infinito. En el caso de  $C_\alpha$ , el volumen hasta un radio  $r$  desde el origen crece como  $\sim \alpha r^2$ , y en  $C_1$ , como  $\sim r^2$ , pero, al estar  $D_{C_1}(s)$  multiplicado por  $\alpha$ , las divergencias de  $D_{C_\alpha}(s)$  y  $\alpha D_{C_1}(s)$  son iguales. La indeterminación  $D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s)$  debe entonces resolverse de forma finita. Esto lo hacemos multiplicando el integrando en (3.33) por una función reguladora  $F(u, r)$ , (con  $\lim_{u \rightarrow 0} F = 1$ ), que elimina la divergencia en  $r \rightarrow \infty$  (que es común a  $D_{C_\alpha}(s)$  y  $\alpha D_{C_1}(s)$ ) y tomando  $u \rightarrow 0$  después de hacer la suma y la integral en (3.33). Si elegimos  $F = e^{-u \frac{r^2}{2s}}$  (en [8] se justifica la independencia en la elección de  $F$ ), la suma en  $k$  se hace una serie geométrica.

$$\begin{aligned} D_{C_\alpha}(s) &= \int_0^\infty r dr \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{e^{-\frac{r^2}{2s}(1+u)} I_{k/\alpha}(\frac{r^2}{2s})}{2s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u(u+2)}} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(1 + u + \sqrt{u(u+2)}\right)^{-\frac{k}{\alpha}} ; \quad (d_0 = 1, d_{k>0} = 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{u(u+2)}} \left(1 + 2 \left(\left[1 + u + \sqrt{u(u+2)}\right]^{1/\alpha} - 1\right)\right). \end{aligned}$$

Con esto ( $D_{C_1}(s) = D_{C_{\alpha=1}}(s)$ ), tomamos el límite  $u \rightarrow 0$  en la resta  $D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s)$ :

$$D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \Rightarrow \partial_\alpha (D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s))|_{\alpha=1} = -\frac{1}{6}, \quad (3.34)$$

que sustituimos en (3.28)

$$S_{\text{ent}} = \frac{1}{12} \int_{e^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} D_{M_{d-2}}(s). \quad (3.35)$$

Esta ecuación aparece en [1] y puede ser utilizada en un problema más general donde  $M_{d-2}$  no es necesariamente una variedad infinita (como basta asumir aquí, pues solo estamos interesados en el término de área de la EE), sino, por ejemplo, una variedad con fronteras. En [1],  $M_{d-2}$  es la sección transversal de una guía de onda  $d-1$  dimensional que limita a un campo escalar  $\phi$ , y se calcula la EE entre una mitad y la otra de la guía de onda. Cuando  $M_{d-2}$  tiene borde, los coeficientes del desarrollo en potencias de  $s$  del heat-kernel  $D_{M_{d-2}}(s)$  se identifican con características geométricas del borde de  $M_{d-2}$ , como el perímetro o la curvatura integrada. La superficie de entrelazado  $\Sigma$  que se tomó en ese problema de la guía de onda es una sección transversal de la guía, por lo que su área es el área o medida de  $M_{d-2}$ . En nuestro caso, tomar  $M_{d-2}$  infinita es tomar la sección transversal de la guía de onda como infinita, la superficie de entrelazado  $\Sigma$  que en el problema de la guía de onda es una sección transversal de la guía, en nuestro caso es un plano infinito. El término de área de la EE ( $a_{d-2}(\Sigma)$  en (3.6)) es un término local: su valor solo depende de las características locales (densidades)

de  $\Sigma$  y no de características globales como curvatura integrada, en el caso que  $\Sigma$  fuese curvada, o perímetro, en el caso en que  $\Sigma$  fuese acotada. Por ello, el término de área por unidad de área del problema de la guía de onda y del problema nuestro es mismo.

El problema (3.22) para  $\Lambda = -\Delta_{d-2}$  en la variedad plana sin fronteras  $M_{d-2}$  es inmediato:

$$K_{M_{d-2}}(x, x', s) = \frac{1}{(4\pi s)^{(d-2)/2}} e^{\frac{(x-x')^2}{4s}}$$

y

$$D_{M_{d-2}}(s) = \int d^{d-2}x K_{M_{d-2}}(x, x, s) = \frac{1}{(4\pi s)^{(d-2)/2}} A[M_{d-2}], \quad (3.36)$$

donde  $A[M_{d-2}]$  es el área o medida de la variedad  $M_{d-2}$ , igual al área de  $\Sigma$ . Si  $M_{d-2}$  tuviese fronteras,  $K_{M_{d-2}}(x, x', s)$  no tuviese esta solución exacta que ponemos, sino un desarrollo en potencias de  $s$  dependiente de las características de la frontera de  $M_{d-2}$ , en cuyo caso, el término divergente principal cuando  $s \rightarrow 0$ , sigue siendo el término de área que ponemos arriba. Finalmente, de (3.35) y (3.36), el término de área por la unidad de área  $A$  de la superficie de entrelazado  $\Sigma$ , de la EE para para el campo escalar masivo es

$$S_{\text{ent}} = \frac{1}{12} \int_{\epsilon^2}^{\infty} ds \frac{1}{s(4\pi s)^{(d-2)/2}} e^{-m^2 s} A. \quad (3.37)$$

### 3.3.3. Cálculo de la EE para el campo fermiónico libre

El campo fermiónico presenta en el cálculo de la EE dos diferencias importantes respecto del escalar. La primera es que la integral funcional no es igual (3.18), sino

$$Z_f = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}_r)\psi} = \det(\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}_r), \quad (3.38)$$

con  $Z_f$  la función de partición para el campo fermiónico y  $\mathbb{1}_r$  la matriz unidad  $r \times r$  que corresponde a un espinor de  $r$  componentes<sup>13</sup> ( $r$  par). Se utilizó la forma euclídea del operador de Dirac, que se obtiene del definido en espacio de Minkowski  $i\gamma_M^\mu \partial_\mu^M - m \mathbb{1}_r$  de la siguiente forma (las  $\gamma$  y coordenadas sin índice  $M$  son las euclídeas y las que tienen índice  $M$  las habituales de Minkowski). En la integral funcional para fermiones en el espacio Minkowski aparece en el exponente de  $e$ :

$$\begin{aligned} i \int d^d x_M \bar{\psi}(i\gamma_M^\mu \partial_\mu^M - m \mathbb{1}_r)\psi &= i \int dt_M d^{(d-1)} x_M \bar{\psi}(i\gamma_M^0 \partial_0^M - i\gamma_M^j \partial_j^M - m \mathbb{1}_r)\psi \\ &\xrightarrow[\substack{t_M \rightarrow -it \\ x_M \rightarrow x}]{\phantom{\longrightarrow}} i \int (-i) dt d^{(d-1)} x \bar{\psi}(i\gamma_M^0(i)\partial_0 - i\gamma_M^j \partial_j - m \mathbb{1}_r)\psi \\ &= - \int dt d^{(d-1)} x \bar{\psi}(\gamma_M^0 \partial_0 + i\gamma_M^j \partial_j + m \mathbb{1}_r)\psi \\ &= - \int d^d x \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}_r)\psi, \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Para espinores de Dirac en  $d$  dimensiones, la mínima representación es con  $r = 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ , donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  es la parte entera.



donde se suma por  $j$ 's repetidas,  $j = 1, \dots, d-1$ , y se introdujeron las matrices euclídeas de Dirac  $\gamma^\mu = (\gamma_M^0, i\gamma_M^j)$  que cumplen el álgebra  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}_r$ . La otra diferencia con el caso escalar es el uso de variables de Grassmann en la integral funcional, en particular, la traza de un operador queda expresada con variables de Grassmann como una suma por los elementos antidiagonales del operador (ver [21, 26, 27]). En lugar de (3.11) tenemos

$$\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V) = \text{Tr}_{\substack{\alpha \in \bar{V} \\ \alpha' \in \bar{V}}} \rho(\alpha, \alpha') = \int D\bar{\beta}D\beta \Phi(\alpha_V + \beta)\Phi^*(\alpha'_V - \beta) \quad (3.39)$$

$$= N^{-1} \int_{\substack{\psi(x>0,0^-)=\alpha_V(\vec{x}) \\ \psi(x>0,0^+)=-\alpha'_V(\vec{x})}} D\bar{\psi}D\psi e^{-S_E(\bar{\psi},\psi)} \quad (3.40)$$

$$= N^{-1} \int_{\substack{\psi(x>0,0^-)=-\alpha_V(\vec{x}) \\ \psi(x>0,0^+)=\alpha'_V(\vec{x})}} D\bar{\psi}D\psi e^{-S_E(\bar{\psi},\psi)}. \quad (3.41)$$

Veamos que (3.40) se obtiene haciendo el cambio  $\psi \rightarrow -\psi$  en la integral funcional que nos da  $\Phi^*(\alpha' = \alpha'_V + \beta)$ . Primero, en (3.40) eventualmente se realiza una integral funcional de los campos  $(\bar{\psi}, \psi)$  por el dominio  $(x < 0, t = 0) = \bar{V}$  (aquí  $x$  es la variable espacial normal a la superficie de entrelazado  $\Sigma$ , y  $\vec{x}$  el vector de todas las variables espaciales), que es el mismo dominio por el que se hace la integral por  $\beta$  en (3.39). Nótese que, en (3.39) está implícita en  $\Phi$  y  $\Phi^*$  dos integrales funcionales más, que, junto con la de  $\beta$  (con el cambio pertinente para el caso fermiónico) es igual a (3.40). Lo único que limita ver estas tres integrales funcionales (la de  $\beta$ , y las dos que dan  $\Phi$  y  $\Phi^*$ ) en (3.39) como una sola integral por todo  $(\vec{x}, t)$ , excepto por  $(x > 0, t = 0)$ , es que el campo de integración tiene límites  $t \rightarrow 0^+, 0^-$  en  $x < 0$  distintos, si uno es  $\beta$ , (3.39) nos dice que el otro es  $-\beta$  (las funciones  $\alpha_V$  y  $\alpha'_V$  tienen soporte en  $x > 0$  y no intervienen en este límite). Esto puede arreglarse si en la integral que nos da  $\Phi^*$ , similar a (3.9), hacemos el cambio  $(\bar{\psi}, \psi) \rightarrow (-\bar{\psi}, -\psi)$ , con lo cual

$$\Phi^*(\alpha) = \Phi^*(-\alpha),$$

y

$$\int D\bar{\beta}D\beta \Phi(\alpha_V + \beta)\Phi^*(\alpha'_V - \beta) = \int D\bar{\beta}D\beta \Phi(\alpha_V + \beta)\Phi^*(-\alpha'_V + \beta).$$

Ahora si es posible ver estas tres integrales funcionales (una por  $\beta$  y las que están implícitas en  $\Phi$  y  $\Phi^*$ ) como una sola integral por todo  $(\vec{x}, t)$  excepto por  $(x > 0, t = 0)$ , ya que el campo de integración tiene límites  $t \rightarrow 0^+, 0^-$  iguales en  $x < 0$ ; si uno es  $\beta$ , entonces el otro es  $\beta$  (como se dijo antes, las funciones  $\alpha_V$  y  $-\alpha'_V$  tienen soporte en  $x > 0$  y no intervienen en este límite). El cambio de variables en  $\Phi^*$  implica un cambio en la condición de contorno:  $\alpha'_V \rightarrow -\alpha'_V$ , que es lo que ponemos en (3.40). Si hubiésemos hecho el cambio de variables en la integral funcional que nos da  $\Phi$ , obtenemos (3.41). Esto nos dice que, en el caso fermiónico, la integral funcional que es igual a  $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$  es la que se realiza por una variedad como la de la fig. 3.1 derecha, pero con condiciones en los bordes  $(\alpha_V, -\alpha'_V)$ , o bien  $(-\alpha_V, \alpha'_V)$ . Ponemos en lo que sigue, en lugar de  $D\bar{\alpha}D\alpha$ , una sola variable de integración. Teniendo en cuenta (3.39 -

3.41), vemos que (para  $\alpha$  fija)

$$\begin{aligned}\rho_V^2(\alpha, \alpha) &= \int D\alpha' \rho_V(\alpha, \alpha') \rho_V(\alpha', \alpha) \\ &= N^{-2} \int D\alpha' \int_{v(x>0,0^+)=\alpha}^{v(x>0,0^-)=-\alpha'} Dv e^{-S_E(v)} \int_{u(x>0,0^+)=-\alpha'}^{u(x>0,0^-)=\alpha} Du e^{-S_E(u)} \\ &= N^{-2} \int_{w(x>0,0^+)=\alpha}^{w(x>0,0^-)=\alpha} Dw e^{-S_E(w)},\end{aligned}$$

donde la última integral se realiza por la variedad  $C_2 \times M_{d-2}$ , o sea, agrupa las tres integrales de arriba, una por  $v$ , que representa a  $\rho_V(\alpha, \alpha')$  y se realiza por una variedad como la de la fig. 3.1 derecha con bordes  $-\alpha'$  y  $\alpha$ , otra por  $u$ , que representan a  $\rho_V(\alpha', \alpha)$  y se realiza por una variedad como la de la fig. 3.1 derecha con bordes  $\alpha$  y  $-\alpha'$ , y una por  $\alpha'$ , que tiene soporte solo en la región de  $C_2 \times M_{d-2}$  donde se unen por los bordes  $-\alpha'$  las dos copias de la fig. 3.1 derecha, (que es la unión que está representada en la fig. 3.2 con  $\alpha'_V$ ). A diferencia de  $\rho_V(\alpha, \alpha)$ , los límites de la integral funcional de  $\rho_V^2(\alpha, \alpha)$  tienen igual signo. En general, los límites de la integral funcional igual a  $\rho_V^n(\alpha, \alpha)$  son  $\alpha$  y  $(-1)^n \alpha$ , debido a los cambios de signo que se van acumulando al unir las  $n$  variedades réplicas de la fig. 3.1 derecha .

$$\rho_V^n(\alpha, \alpha) = N^{-n} \int_{w(x>0,0^+)=\alpha}^{w(x>0,0^-)=(-1)^n \alpha} Dw e^{-S_E(w)},$$

donde la integral por  $w$  se hace por una variedad  $n$ -veces replicada con bordes  $\alpha$  y  $(-1)^n \alpha$ . Ahora, por lo mismo que en (3.39), si tomamos traza de  $\rho_V^n(\alpha, \alpha)$ , esta queda

$$\begin{aligned}\text{Tr} \rho_V^n(\alpha, \alpha) &= N^{-n} \int D\alpha \rho_V^n(\alpha, -\alpha) \\ &= N^{-n} \int D\alpha \int_{w(x>0,0^+)=\alpha}^{w(x>0,0^-)=-(-1)^n \alpha} Dw e^{-S_E(w)} \\ &= Z_f(n)/Z_f^n(1),\end{aligned}$$

con  $Z_f(n)$  la función de partición para fermiones en la variedad  $n$ -replicada con los bordes identificados:  $C_n \times M_{d-2}$ . De aquí vemos que, a diferencia del caso escalar, se tiene que los campos fermiónicos  $f$ , o variables de integración en la integral funcional que nos da  $Z_f(n)$ , tienen la condición de contorno (expresada en la coordenada angular  $\theta$  de  $C_n$ ):  $f(\theta) = (-1)^{n+1} f(\theta + 2\pi n)$ . El efecto total de los cambios de variables y condiciones de contorno en cada variedad de la fig. 3.1, y la unión entre ellas, es que, en la unión del último borde (traza final para obtener  $Z_f(n)$ ) hay un  $(-1)^{n+1}$  relativo entre los espinores de un borde y del otro borde [21]. Es posible también obtener este  $(-1)^{n+1}$  introduciendo un campo de *zweibein*<sup>14</sup> y una conexión espinorial en la variedad  $C_n$ , como se hace en [28].

<sup>14</sup>Un campo zweibein es el análogo bidimensional del campo de tétradas o vierbein que se utiliza en cuatro dimensiones para expresar los espinores en una variedad curvada. Literalmente, estas palabras del alemán se traducen como: zweibein = dos patas, vierbein = cuatro patas.

Para poder utilizar la mayor parte de los resultados del caso escalar, establecemos la siguiente relación entre  $Z_f$  y  $Z$ , las funciones de partición de los campos fermiónico y escalar respectivamente.

$$\begin{aligned}
\ln Z_f &= \ln [\det(-\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu + m^2 \mathbb{1}_r)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \det(-\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \mathbb{1}_r) \\
&= \frac{1}{2} \ln \det(-\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \mathbb{1}_r) = \frac{1}{2} \ln \det(\mathbb{1}_r [-\Delta + m^2]) \\
&= \frac{1}{2} \ln [\det(-\Delta + m^2)]^r = -r \left( -\frac{1}{2} \ln \det(-\Delta + m^2) \right) \\
&= -r \ln \tilde{Z}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

La primera igualdad resulta de que los operadores de Dirac  $-\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}_r$  y  $\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}_r$  tienen los mismos autovalores. Aún cuando no lo destacamos con la notación, es importante el hecho de que el operador Laplaciano  $\Delta$  que aparece arriba tiene condiciones de contorno distintas al caso escalar, específicamente, y consecuencia de la discusión anterior, sus autofunciones en la variedad  $\alpha$  ( $\alpha$ -replicada) tienen un signo  $(-1)^{\alpha+1}$  al dar una vuelta de  $2\pi\alpha$  en la variable angular  $\theta$  (la misma  $\theta$  que se usó en el caso escalar en la variedad  $C_\alpha$ ; recordamos que  $\alpha = C_\alpha \times M_{d-2}$ ). Se tiene entonces que  $\tilde{Z}$  es la función de partición escalar salvo esta condición de contorno distinta sobre  $\Delta$ . De (3.25) y la igualdad anterior entre  $Z_f$  y  $\tilde{Z}$  tenemos que

$$D_\alpha^f(s) = -r \tilde{D}_\alpha(s), \tag{3.43}$$

donde  $D_\alpha^f(s)$  es el heat-kernel para fermiones en la variedad  $\alpha$  y  $\tilde{D}_\alpha(s)$  el heat-kernel escalar con la condición de contorno angular de  $(-1)^{\alpha+1}$  mencionada. Para fermiones son igualmente válidas (3.26), (3.27) y (3.28), por lo que nos basta calcular  $\tilde{D}_{C_\alpha}(s)$ , el heat-kernel del Laplaciano  $\Delta_{C_\alpha}$  con las nuevas condiciones de contorno en la variedad  $C_\alpha$ . Este problema se resuelve análogo al escalar, cambiando en (3.31) la condición angular por  $f(r, \theta) = (-1)^{\alpha+1} f(r, \theta + 2\pi\alpha)$ . Con esto,  $K(\vec{x}, \vec{x}', s) = \langle \vec{x} | e^{s \Delta_{C_\alpha}} | \vec{x}' \rangle$ , ( $\vec{x} = (r, \theta)$ ) toma la forma:

$$\begin{aligned}
K(r, \theta, r', \theta', s) &= \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \lambda d\lambda J_{\nu_k}(\lambda r) J_{\nu_k}(\lambda r') e^{-s\lambda^2} e^{i(\theta-\theta')\bar{\nu}_k} \\
\text{con } \bar{\nu}_k &= \frac{2k - (\alpha + 1)}{2\alpha}, \quad y \quad \nu_k = \begin{cases} \bar{\nu}_k & k \geq 1 \\ -\bar{\nu}_k & k < 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

La solución de este problema de autovalores hasta la obtención de (3.44) la separamos al Apéndice A (como antes,  $J_\nu(x)$  es la función de Bessel de primer tipo de orden  $\nu$ ).

La traza de  $K$  nos da  $\tilde{D}_{C_\alpha}(s)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{C_\alpha}(s) &= \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \int_0^\infty r dr K(r, \theta, r, \theta, s) \\ &= \int_0^\infty r dr \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{r^2}{2s}} I_{\nu_k}\left(\frac{r^2}{2s}\right)}{2s},\end{aligned}\quad (3.45)$$

donde hicimos la integral por  $\theta$  y  $\lambda$  ( $I_\nu(x)$ , la función modificada de Bessel de primer tipo de orden  $\nu$ ). Al igual que en el caso escalar, la integral por  $r$  y la suma por  $k$  divergen, pero sabemos que  $\tilde{D}_{C_\alpha}(s) - \alpha\tilde{D}_{C_1}(s)$ , que es el término que aparece en (3.28) para calcular la EE, es una indeterminación con un resultado finito. Multiplicamos el integrando en (3.45) por la misma función reguladora  $F = e^{-u\frac{r^2}{2s}}$  y hacemos la integral por  $r$  y la suma en  $k$ .

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{C_\alpha}(s) &= \sum_{k=-\infty}^\infty \int_0^\infty r dr \frac{e^{-\frac{r^2}{2s}(1+u)} I_{\nu_k}\left(\frac{r^2}{2s}\right)}{2s} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u(u+2)}} \sum_{k=-\infty}^\infty q(u)^{-\nu_k}, \quad \text{con } q(u) = \left(1 + u + \sqrt{u(u+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u(u+2)}} \left( \sum_{k=-\infty}^0 q(u)^{\frac{2k-(\alpha+1)}{2\alpha}} + \sum_{k=1}^\infty q(u)^{-\frac{2k-(\alpha+1)}{2\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u(u+2)}} \left( \frac{q(u)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} + q(u)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}}{q(u)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right).\end{aligned}$$

En el límite  $u \rightarrow 0$ , tenemos que ( $\tilde{D}_{C_1}(s) = \tilde{D}_{C_{\alpha \rightarrow 1}}(s)$ ):

$$\tilde{D}_{C_\alpha}(s) - \alpha\tilde{D}_{C_1}(s) = \frac{1}{24} \left( \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{1}{2} (D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s)), \quad (3.46)$$

donde  $D_{C_\alpha}(s)$  es el heat-kernel del campo escalar en  $C_\alpha$  con las condiciones de contorno definidas en (3.28), ver (3.34). De (3.35 - 3.37), (3.43) y (3.46) tenemos

$$\begin{aligned}S_{\text{ent}}^f &= -\frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} D_{M_{d-2}}(s) \partial_\alpha \left( D_{C_\alpha}^f(s) - \alpha D_{C_1}^f(s) \right) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} D_{M_{d-2}}(s) \partial_\alpha (-r) \left( \tilde{D}_{C_\alpha}(s) - \alpha \tilde{D}_{C_1}(s) \right) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} D_{M_{d-2}}(s) \partial_\alpha \left( \frac{r}{2} \right) (D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s)) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} \\ &= \frac{r}{2} \left( -\frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} D_{M_{d-2}}(s) \partial_\alpha (D_{C_\alpha}(s) - \alpha D_{C_1}(s)) \Big|_{\alpha \rightarrow 1} \right) \\ &= \frac{r}{2} S_{\text{ent}}.\end{aligned}$$

con  $S_{\text{ent}}^f$  y  $S_{\text{ent}}$  el término de área de la EE para el campo fermiónico y escalar respec-

tivamente. La última igualdad, donde se identificó a  $S_{\text{ent}}$  dada por (3.28), refleja un resultado general que se aplica a campos de espín superior, que es que la EE tiene un factor multiplicativo que cuenta el número de grados de libertad en capa de masa, con peso 1/2 para fermiones y 1 para bosones. Por ejemplo, para el campo vectorial de gauge  $A_{\text{gauge}}^\mu$ , en  $d$  dimensiones, tenemos  $S_{\text{ent}}^{\text{gauge}} = (d-2)S_{\text{ent}}$ , y para el campo vectorial masivo  $A_m^\mu$ ,  $S_{\text{ent}}^{A_m^\mu} = (d-1)S_{\text{ent}}$ . Ponemos finalmente el término de área por unidad de área  $A$  de la EE para el campo fermiónico

$$S_{\text{ent}}^f = \frac{r}{2} S_{\text{ent}}, \quad (3.47)$$

con  $S_{\text{ent}}$  dada por (3.37).

### 3.4. Relación entre la entropía de entrelazado y la constante de Newton $G$

La primera relación entre la entropía de entrelazado y la constante de Newton podemos encontrarla en [20], donde se propuso que la entropía de agujero negro (BH), dada por la formula de Bekenstein-Hawking [29–32]

$$S_{BH} = \frac{1}{4} M_P^{d-2} A_{d-2} = \frac{A}{4G} \quad (3.48)$$

podía ser interpretada como una EE de todos los campos a través del horizonte de eventos del agujero negro. En [20] se calculó la EE en una geometría de BH y se obtuvo que esta no dependía del volumen, sino, a lo sumo (término divergente principal) del área del horizonte de eventos, después de lo cual, se sucedieron muchos trabajos que confirmaban o negaban esta idea [4, 22, 23, 28, 33–37]. Sobre la relación entre  $G$  y la EE, más allá de la interpretación de la entropía de BH, Susskind y Uglum [38] sugirieron que la divergencia UV de la EE, en particular, la divergencia UV principal (término de área) era proporcional a la divergencia de la corrección a la constante de Newton, donde esta corrección se define como el coeficiente del escalar de curvatura  $R$  en la acción efectiva del campo gravitatorio, como en (2.7). Esta idea fue demostrada en [4] y se expone en [3] de una forma más acabada como parte de un resultado más general. Presentamos en lo que sigue una versión mínima de la demostración de la relación entre la EE y  $G$  dada en [3], con la cual, aun cuando perdemos en generalidad, destacamos la esencia de la idea, que es simple. Comenzamos escribiendo la versión euclídea de (2.7)

$$\int D\phi e^{-S_E[\phi, g_{\mu\nu}]} \equiv Z(g_{\mu\nu}) \equiv e^{-W[g_{\mu\nu}]} = e^{-\int d^d x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{16\pi\Delta G} R + c_0 \Delta\Lambda + \mathcal{O}(R^2) \right)}. \quad (3.49)$$

Como se dijo en el Capítulo 2, al integrar uno de los campos de la teoría, en este caso  $\phi$ , lo que queda es una teoría efectiva para el resto de los campos. Si solo tenemos los campos  $\phi$  y  $g_{\mu\nu}$  (el campo gravitatorio que describimos como la métrica del espacio-tiempo) y  $S_E[\phi, g_{\mu\nu}]$  es la acción material de  $\phi$ , o sea, la parte de la acción de la teoría  $(\phi, g_{\mu\nu})$  que no contiene términos que solo involucran  $g_{\mu\nu}$ :  $S_E[\phi, g_{\mu\nu}]$  solo

tiene el término cinético de  $\phi$  junto con el de interacción con  $g_{\mu\nu}$  (de  $S_E[\phi, g_{\mu\nu}]$  no podemos obtener, por ejemplo, la ecuación de movimiento para  $g_{\mu\nu}$ ), al integrar por el campo  $\phi$  nos queda, por definición, una función de partición que depende de  $g_{\mu\nu}$ . Si  $S_g$  es la acción original o fundamental para  $g_{\mu\nu}$  (desconocida), entonces, al integrar el campo  $\phi$ , queda la teoría efectiva  $S_{eff} = S_g + W[g_{\mu\nu}]$ . En la última igualdad en (3.49), desarrollamos  $W[g_{\mu\nu}]$  en potencias de derivadas de  $g_{\mu\nu}$ , suponiendo suave este campo. Los coeficientes de este desarrollo están determinados por el campo integrado  $\phi$ , y corrigen a coeficientes análogos del desarrollo de  $S_g$  en potencias de derivadas de  $g_{\mu\nu}$ . En particular, la corrección que hace a  $G$  ( $(16\pi G)^{-1}$  es el coeficiente de  $R$  en el desarrollo de  $S_g$ ) la integración por  $\phi$  es lo que ponemos en (3.49) como  $\Delta G$ :

$$G^{-1} \xrightarrow{\text{integrar por } \phi} G^{-1} + \Delta G^{-1}.$$

La cantidad  $\Delta G^{-1}$  es, en general, infinita. Lo que propusieron Susskind y Uglum es que la divergencia de la corrección  $\Delta G^{-1}$  a la constante de Newton es proporcional a la divergencia del término de área de la EE. La constante de proporcionalidad resultó ser  $1/4$ , como en la entropía de BH (3.48). O sea, si  $S_{ent}$  es el término de área de la EE, que es UV divergente, se tiene que

$$S_{ent} = \frac{A}{4\Delta G}.$$

Este es el resultado que se obtuvo en [4] y [3], y es válido para cualquier dimensión del espacio-tiempo, a todo orden de perturbaciones y para cualquier campo. Sin embargo, no existe una demostración de que la relación anterior se aplique a las fluctuaciones cuánticas de  $g_{\mu\nu}$ .

Pasemos ahora a ver la EE. Hagamos el cambio de variable  $\alpha = 1 - \epsilon$  en la fórmula (3.17)

$$S_{ent} = (\partial_\alpha - 1)W(\alpha)|_{\alpha \rightarrow 1} = -(\partial_\epsilon + 1)W(\epsilon)|_{\epsilon \rightarrow 0}. \quad (3.50)$$

La variedad  $\alpha$ -replicada en la que se calcula  $W(\alpha) = -\ln Z(\alpha)$  tiene una singularidad cónica con ángulo de exceso  $2\pi(\alpha-1)$ , o, con el cambio de variable, ángulo de déficit  $2\pi\epsilon$ . El método de réplica nos da la interpretación geométrica de que la  $S_{ent}$  es la variación  $(-\partial_\epsilon + 1)$  respecto de  $\epsilon$  (el ángulo de déficit  $2\pi\epsilon$  sobre  $2\pi$ ), de la  $W(\epsilon) = -\ln Z(\epsilon)$  calculada en una variedad con ángulo de déficit  $2\pi\epsilon$ , donde solo tenemos que conocer  $W(\epsilon)$  en una vecindad de  $\epsilon = 0$ .

Podemos interpretar que  $Z(\epsilon) = e^{-W(\epsilon)}$  es la función de partición de la teoría  $\phi$  en una variedad con una métrica particular  $g_{\mu\nu}^\epsilon$ , aquella que es plana en todo punto excepto en la superficie de entrelazado  $\Sigma$  donde es singular, además de que, en esta métrica, un círculo de radio  $r$  normal a  $\Sigma$  tiene circunferencia  $2\pi(1 - \epsilon)$ .

Una expresión para una métrica  $g_{\mu\nu}^\epsilon$  que cumpla estas condiciones es

$$\begin{aligned} ds_\epsilon^2 &= dr^2 + r^2[1 - \epsilon\beta(r)]^2 d\theta^2 + \gamma_{ij}(r, y) dy^i dy^j. \\ \text{con } \beta(r) &= \Theta_+(r) = \lim_{l \rightarrow 0^+} \Theta(r - l) \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde  $\Theta$  es la función escalón, y  $(r, \theta)$  las coordenadas polares que se usaron anteriormente para parametrizar la variedad con singularidad cónica  $C_{\alpha=1-\epsilon}$ . Expresada en estas coordenadas, y con las propiedades dichas, una variedad que tenga la métrica  $g_{\mu\nu}^\epsilon$  es la variedad  $\alpha = C_{\alpha=1-\epsilon} \times M_{d-2}$ . Nótese que las variables  $y^i$  parametrizan  $\Sigma$ , que se localiza en  $(r, \theta) = (0, 0)$ , y que  $\gamma_{ij}$  es la métrica  $d - 2$  inducida a  $\Sigma$  por el espacio de  $d$  dimensiones. Con esto, podemos hacer la conexión importante que relaciona la EE con  $\Delta G$

$$Z(\epsilon) = Z(g_{\mu\nu}^\epsilon) = \int D\phi e^{-S_E[\phi, g_{\mu\nu}^\epsilon]}. \quad (3.52)$$

Se iguala la función de partición en una variedad con singularidad cónica (de ángulo de déficit  $2\pi\epsilon$ ) a la función de partición de una teoría que interactúa con el campo “gravitatorio”  $g_{\mu\nu}^\epsilon$ .

Si  $g_{\mu\nu}^\epsilon$  fuera suave y se pudiera desarrollar  $W(g_{\mu\nu}^\epsilon) = -\ln Z(g_{\mu\nu}^\epsilon)$  en potencias de derivadas de  $g_{\mu\nu}^\epsilon$ , tiene sentido preguntarse (con ayuda de (3.50) y (3.52)) qué tipo de contribución hace el término  $\sim R$  que contiene a  $\Delta G$  a la EE. Podemos suavizar la métrica singular  $g_{\mu\nu}^\epsilon$ , lo que equivale a regularizar la singularidad cónica de  $C_{\alpha=1-\epsilon}$ , si convertimos la función  $\beta$  en (3.51), en una versión suave (arbitraria) de la función escalón, con lo cual  $g_{\mu\nu}^\epsilon$  se convierte, por definición, en la métrica suave  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , y  $\tilde{g}$  su determinante. Sea también que  $g_{\mu\nu}$  es la métrica plana, o sea, (3.51) con  $\epsilon = 0$ , y  $g$  su determinante. Podemos entonces desarrollar  $W(\tilde{g}_{\mu\nu})$  en potencias de derivadas de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$

$$W(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \int d^d x \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) \quad ; \quad \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) = c_0 \Delta \Lambda - \frac{1}{16\pi \Delta G} R(\tilde{g}_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(R^2). \quad (3.53)$$

Sustituyendo en (3.50)

$$\begin{aligned} S_{\text{ent}} &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon} + 1 \right) \int d^d x \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int d^d x \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sqrt{\tilde{g}} \right) \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) + \int d^d x \sqrt{\tilde{g}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) + \int d^d x \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sqrt{\tilde{g}} = r(1 - \epsilon\beta)\sqrt{\gamma} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sqrt{\tilde{g}} = -r\beta\sqrt{\gamma}$$

y que, en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\beta(r) \rightarrow \Theta_+(r)$

$$\sqrt{\tilde{g}} \rightarrow r\sqrt{\gamma} = \sqrt{g} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sqrt{\tilde{g}} \rightarrow -r\sqrt{\gamma} = -\sqrt{g} \quad , \quad \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}) \rightarrow \mathcal{F}(g_{\mu\nu}) \quad ,$$

nos queda

$$S_{\text{ent}} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^d x \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}). \quad (3.54)$$

Con esta fórmula, nos preguntamos qué contribución a  $S_{\text{ent}}$  hace la parte  $-\frac{1}{16\pi \Delta G} R(\tilde{g}_{\mu\nu})$

de  $\mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu})$ .

$$S_{\text{ent}} = \frac{1}{16\pi\Delta G} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^d x \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \epsilon} R(\tilde{g}_{\mu\nu}) . \quad (3.55)$$

Como solo nos interesa la primera derivada evaluada en  $\epsilon = 0$ , basta desarrollar  $R(\tilde{g}_{\mu\nu})$  hasta primer orden en  $\epsilon$  alrededor del valor de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  con  $\epsilon = 0$ , o sea,  $g_{\mu\nu}$ . Tenemos en este caso que [3]

$$R(\tilde{g}_{\mu\nu}) = R(g_{\mu\nu}) + \epsilon \left[ \frac{4\beta'}{r} + 2\beta'' \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.56)$$

donde ' es derivación respecto de  $r$ . Como  $R(g_{\mu\nu})$  y  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  son cero bajo la derivada y el límite en  $\epsilon$ , sustituimos solo el segundo sumando en (3.55)

$$\begin{aligned} S_{\text{ent}} &= \frac{1}{16\pi\Delta G} \int d^d x \sqrt{g} \left[ \frac{4\beta'}{r} + 2\beta'' \right] \\ &= \frac{1}{16\pi\Delta G} \int_0^{2\pi} d\theta \int d^{d-2} y \sqrt{\gamma} \int_0^\infty dr r \left[ \frac{4\beta'}{r} + 2\beta'' \right] \\ &= \frac{A_{d-2}}{8\Delta G} \int_0^\infty dr r \left[ \frac{4\beta'}{r} + 2\beta'' \right] \\ &= \frac{A_{d-2}}{8\Delta G} \int_0^\infty dr [4\beta' - 2\beta'] = \frac{A_{d-2}}{4\Delta G} \int_0^\infty dr \beta' \xrightarrow[\beta'(r) \rightarrow \delta(r)]{\beta(r) \rightarrow \Theta_+(r)} \frac{A_{d-2}}{4\Delta G} , \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene

$$S_{\text{ent}} = \frac{A}{4\Delta G} . \quad (3.57)$$

Se sustituyó arriba  $\sqrt{g} = r\sqrt{\gamma}$  y se identificó  $\int d^{d-2} y \sqrt{\gamma} = A_{d-2}$  como el área de la superficie de entrelazado  $\Sigma$ . Además, desde el inicio se tomó el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , con lo cual, la integración por  $\theta$  es de 0 a  $2\pi(1 - \epsilon) \rightarrow 2\pi$ . En el penúltimo paso se hizo la integral por parte

$$\int_0^\infty dr r \beta'' = r\beta'|_0^\infty - \int_0^\infty dr \beta' \xrightarrow[\beta'(r) \rightarrow \delta(r)]{} r\delta(r)|_0^\infty - \int_0^\infty dr \beta' = - \int_0^\infty dr \beta' .$$

La ecuación (3.57) es la relación entre la EE y  $\Delta G$ , donde se hace igual el coeficiente del área del término de área de la EE de un campo  $\phi$ , a 1/4 la corrección  $\Delta G^{-1}$  que se hace a la constante de Newton al integrar el mismo campo  $\phi$ .

### 3.4.1. Aplicación a teorías masivas

La expresión (3.57) relaciona magnitudes infinitas, por lo que solo tiene sentido si se regulan por igual ambos miembros. Si no se conociera esta relación y se calculan  $\Delta G^{-1}$  y  $S_{\text{ent}}$  por separado con reguladores distintos, (3.57) no se cumple en general. Sin embargo, cuando tratamos con teorías con escala, en particular, para una teoría con una masa  $m$ , pueden existir términos en  $S_{\text{ent}}$  que son independientes del regulador. Esto es plausible por cuestiones dimensionales. Si tenemos en cuenta que al desarrollar (3.37) alrededor de  $\epsilon \sim 0$ , en el desarrollo se dan distintas combinaciones de  $m$  y  $\epsilon$  (que



tiene unidades de longitud o  $m^{-1}$ ) y cada una de estas combinaciones tiene unidades de  $\text{area}^{-1} = m^{d-2}$  (por no tener la EE unidades y estar el área  $A$  en el miembro derecho), entonces es posible encontrar un término que solo contenga  $m$ . No existe una demostración general de que  $S_{\text{ent}}$  contenga términos independientes de regulador. Sin embargo, (3.57) nos dice que si tales términos existen en  $S_{\text{ent}}$ , entonces existen en  $\Delta G^{-1}$  y son iguales, pues si se elige en (3.57) un regulador común  $\Lambda$ , con lo que resulta una igualdad finita, los términos en el desarrollo en potencias de  $\Lambda$  independientes de  $\Lambda$  son iguales, y, al cambiar en un miembro, digamos en  $S_{\text{ent}}$ ,  $\Lambda$  por otro regulador  $\lambda$ , se destruye la igualdad excepto que, si los términos de masa independientes de regulador antes eran iguales, después del cambio  $\Lambda \rightarrow \lambda$  en  $S_{\text{ent}}$  siguen siendo iguales, por ser independientes de regulador. En tal caso, (3.57) tiene sentido para teorías masivas como una igualdad entre estos términos de masa independiente de regulador. Lo que hacemos en el capítulo siguiente es comprobar si esto es cierto para los campos escalar y fermiónicos libres en varias dimensiones. O sea, si  $\Delta G_m^{-1}$  es la parte de  $\Delta G^{-1}$  que identificamos que tiene una dependencia con la masa  $m$  tal, que no cambia por una redefinición de los reguladores que estén involucrados, y  $S_{\text{ent}}^m$  la parte de  $S_{\text{ent}}/A$  que identificamos que tiene una dependencia con la masa  $m$  tal, que no cambia por una redefinición de los reguladores que estén involucrados, entonces

$$S_{\text{ent}}^m = \frac{1}{4} \Delta G_m^{-1} . \quad (3.58)$$

Los métodos para calcular los miembros en la igualdad anterior son muy distintos, para  $S_{\text{ent}}^m$  utilizamos (3.37) y para  $\Delta G_m^{-1}$  la fórmula de Adler (2.22).

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo identificamos los términos dependientes de la masa e independientes de regulador  $\Delta G_m^{-1}$  contenidos en  $\Delta G^{-1}$ , calculada esta última según la fórmula de Adler (2.22). Esto lo hacemos para los campos escalar y fermiónico libres masivos y para distintas dimensiones. Comparamos  $\Delta G_m^{-1}$  con los términos de masa independientes de regulador  $S_{\text{ent}}^m$  contenidos en  $S_{\text{ent}}/A$ , donde está última fue calculada en el Capítulo 3, expresiones (3.37, 3.47). El principal resultados de este trabajo es comprobar que la igualdad

$$S_{\text{ent}}^m = \frac{1}{4} \Delta G_m^{-1}, \quad (4.1)$$

es cierta en todos los casos que analizamos. Recordamos que, como se discutió al final del capítulo anterior, el ingrediente de que la teoría tenga masa  $m$  o alguna escala es indispensable para el sentido de (4.1). Es útil, desde un punto de vista físico, ver (4.1) no solo como una igualdad entre las correcciones independientes de regulador que hace un campo  $\phi$  a la EE y la constante de Newton, sino como una igualdad entre las expresiones específicas que aquí utilizamos para calcular ambos miembros. En particular, usamos la fórmula de Adler para  $\Delta G^{-1}$ , que, según nuestro conocimiento, no ha sido empleada previamente en el contexto de entropía de entrelazado. Por ello, sustituímos (3.37) y (2.22) en (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} S_{\text{ent}} &\equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{12} \int_{\epsilon^2}^{\infty} ds \frac{1}{s(4\pi s)^{(d-2)/2}} e^{-m^2 s} = \\ &= \langle P S_m[\phi, g] \rangle_E - \frac{1}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle_E. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir de ahora, para no sobrecargar la notación, entendemos que la igualdad anterior es solo entre los términos independientes de cualquier regulador involucrado en (4.2). De hecho, los tres términos en (4.2) presentan distintas divergencias en dependencia de la dimensión  $d$  del espacio (espacio-tiempo o espacio euclídeo), y se introducen distintos reguladores en cada uno de ellos en dependencia de la divergencia. La receta que aplicamos es identificar en los términos de (4.2), aquellas partes que sean independiente de cualquier regulador involucrado, en el sentido de que estas partes tienen una dependencia con  $m$  que no se modifica o no pueden absorberse por una redefinición de los reguladores. Llamamos términos finitos a estas partes independientes de regulador.

La igualdad (4.2) es una igualdad entre estos términos finitos.

Como dijimos, (4.1) escrita explícitamente como (4.2), cobra un nuevo significado. Podemos ver (4.2), más allá de su aplicación a ser una corrección a la constante de Newton, como una igualdad entre dos magnitudes en apariencia distintas definidas en espacio plano: la parte finita (independiente de regulador) del término de área de la EE en espacio plano, y (la parte finita de) una integral del correlador de la traza del tensor de energía impulso, corregida por el término  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$ . Tenemos que (4.2) es una igualdad en espacio plano, aun cuando esta fue establecida en el formalismo de espacio curvado a través del cálculo de la corrección a la constante de Newton  $\Delta G^{-1}$  y la relación de  $\Delta G^{-1}$  con la EE, como vimos en los capítulos anteriores.

Como anticipamos en la Introducción, el caso escalar presenta cierta ambigüedad debido al acoplamiento no minimal del campo  $\phi$  con la curvatura. En tal caso, como veremos en los distintos ejemplos, (4.2) es cierta si elegimos de todos los posibles acoples  $\xi$  del campo  $\phi$  con la curvatura  $R$ , el acople conforme

$$\xi_d = \frac{d-2}{4(d-1)}, \quad (4.3)$$

que depende como se indica de la dimensión del espacio-tiempo. Un punto que dejamos sin responder en este trabajo es precisamente el por qué físico de la elección de  $\xi = \xi_d$  para que se cumpla (4.2). Esta constante  $\xi$  aparece linealmente en el término  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  y está relacionada linealmente con la constante de la corrección o mejora que admite el tensor de energía impulso del campo escalar en espacio plano, con lo cual,  $\Theta$  depende de  $\xi$ , lo que implica que tanto el primero como el segundo sumando en el miembro derecho (MD) de (4.2) dependen de  $\xi$ . De hecho, como se verá, la integral del correlador de  $\Theta$  depende cuadráticamente de  $\xi$ , y  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  linealmente. Por otra parte, es curioso que en el trabajo original de Adler [2], se menciona que la parte  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  de su fórmula es distinta de cero solo si se consideran variaciones cuánticas de la métrica. Sin embargo, aunque aquí no consideramos variaciones cuánticas de la métrica, este término es totalmente necesario para que (4.2) se cumpla en el caso escalar, ya que, si no se considera, el término del correlador de los  $\Theta$  no iguala por si solo al miembro izquierdo (MI) en (4.2) para ninguna elección de la constante de acoplamiento no minimal  $\xi$ . Esto no sucede para el campo fermiónico, pues para este no es posible el acople no minimal con la curvatura, ni la mejora de su tensor de energía impulso.

## 4.1. Cálculo de (4.2) para el campo escalar

### 4.1.1. Tensor de energía impulso del campo escalar

Como  $\Theta$  (que aparece en (4.2)) es la traza del tensor de energía impulso  $T_{\mu\nu}$  en espacio plano, calculamos  $T_{\mu\nu}$  utilizando la definición de Noether

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.4)$$

Luego comparamos esta forma de calcular  $T_{\mu\nu}$  con la definición de  $T_{\mu\nu}$  en espacio curvado (definición (2.13)) con el objetivo de relacionar el acople no minimal  $\xi$  con la constante  $B$  de la mejora que admite (4.4) en el caso escalar. Para el campo escalar libre masivo en espacio plano

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (4.5)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.4) tenemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right).$$

Tomamos traza

$$\begin{aligned} T_\mu{}^\mu &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - d \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \frac{d}{2} m^2 \phi^2 + \left( 1 - \frac{d}{2} \right) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Para el campo escalar, es conocido que el  $T_{\mu\nu}$  de Noether admite una mejora<sup>1</sup>

$$T_{\mu\nu} \mapsto T_{\mu\nu} + B \partial^\alpha F_{[\alpha\mu]\nu},$$

donde el tensor  $B \partial^\alpha F_{[\alpha\mu]\nu}$  es conservado independientemente de las ecuaciones de movimiento (topológicamente). Una forma para  $F_{[\alpha\mu]\nu}$  es:

$$F_{[\alpha\mu]\nu} = g_{\alpha\nu} \phi \partial_\mu \phi - g_{\mu\nu} \phi \partial_\alpha \phi, \quad (4.6)$$

donde, como se observa, y como es necesario para que  $\partial^\alpha F_{[\alpha\mu]\nu}$  se conservado topológicamente, es antisimétrico en los índices  $\alpha\mu$ . Tenemos entonces, en lugar de  $T_{\mu\nu}$  al tensor mejorado  $\widehat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + B \partial^\alpha F_{[\alpha\mu]\nu}$ , con  $F_{[\alpha\mu]\nu}$  dado por (4.6). La traza de  $\widehat{T}_{\mu\nu}$  es

$$\begin{aligned} T = \widehat{T}_\mu{}^\mu &= T_\mu{}^\mu + B \partial^\alpha F_{\alpha\mu}{}^\mu \\ &= T_\mu{}^\mu + B \partial^\alpha (g_{\alpha\mu} \phi \partial^\mu \phi - d \phi \partial_\alpha \phi) \\ &= T_\mu{}^\mu + B (1 - d) \partial^\alpha (\phi \partial_\alpha \phi) \\ &= \frac{d}{2} m^2 \phi^2 + \left( 1 - \frac{d}{2} \right) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + B (1 - d) (\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + \phi \square \phi) \\ &= \left( \frac{d}{2} - B(1 - d) \right) m^2 \phi^2 + \left[ B(1 - d) + \left( 1 - \frac{d}{2} \right) \right] \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi, \quad (4.7) \end{aligned}$$

donde en el último paso se usaron las ecuaciones de movimiento  $(\square + m^2)\phi = 0$ .

La libertad o mejora empleada para el  $T_{\mu\nu}$  según la definición de Noether (4.4) en

<sup>1</sup>Esto que llamamos mejora es lo que se conoce en inglés como improvement, y es una operación posible en ciertos casos con el fin de transformar un tensor de energía impulso asimétrico en un tensor simétrico. En el caso escalar, este improvement o mejora es simplemente una libertad en la definición de  $T_{\mu\nu}$ , ya que el  $T_{\mu\nu}$  que resulta directamente de la definición de Noether es simétrico.

espacio plano, tiene su análogo en la definición más general de  $T_{\mu\nu}$  en espacio curvado (2.13):

$$T_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}[\phi, g_{\mu\nu}]) . \quad (4.8)$$

El paso de obtener  $\mathcal{L}$  covariante general a partir del  $\mathcal{L}$  covariante especial

$$\mathcal{L}[\phi, \eta_{\mu\nu}] \longmapsto \mathcal{L}[\phi, g_{\mu\nu}] ,$$

puede hacerse, para el caso del campo escalar, de forma no minimal: además de la interacción minimal con  $g_{\mu\nu}$  está permitido<sup>2</sup> un término de interacción de  $\phi$  con el escalar de curvatura  $R$

$$-\frac{1}{2}\xi R\phi^2 .$$

La libertad que representa  $\xi$  en este esquema es el análogo de la libertad en  $B$  de  $T_{\mu\nu}$  en la definición de Noether. De la definición (4.8) y la acción material para  $\phi$  con interacción no minimal para  $\phi$ :

$$S_m[\phi, g] = \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2) \quad (4.9)$$

con (;) la derivada covariante, resulta el tensor de energía impulso [39]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} + (2\xi - \frac{1}{2}) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \phi_{;\rho} \phi_{;\sigma} - 2\xi \phi_{;\mu\nu} \phi + \frac{2}{\xi} g_{\mu\nu} \phi \square \phi \\ & - \xi \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{2(d-1)}{d} \xi R g_{\mu\nu} \right] \phi^2 + 2 \left[ \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{1}{d}\right) \xi \right] m^2 g_{\mu\nu} \phi^2 , \end{aligned}$$

donde se utilizó la ecuación de movimiento  $(\square + m^2 + \xi R)\phi = 0$ . Si tomamos la traza y el límite plano de este tensor queda

$$T = T_{\mu}{}^{\mu} = \left( \frac{d}{2} + 2\xi(1-d) \right) m^2 \phi^2 + \left[ -2\xi(1-d) + \left(1 - \frac{d}{2}\right) \right] \partial^{\alpha} \phi \partial_{\alpha} \phi . \quad (4.10)$$

Si comparamos (4.7) con (4.10) tenemos la relación entre  $B$  y  $\xi$ :  $B = -2\xi$ . Notemos entonces que por cualquier definición que hagamos de  $T_{\mu\nu}$ , la traza  $T$  depende linealmente de  $\xi$ , y el correlador  $\langle T(x)T(0) \rangle$  cuadráticamente. Si exigimos que  $T \propto m^2$ , obtenemos que  $\xi = \xi_d$ , con  $\xi_d$  el llamado acople conforme, dado por (4.3). La razón para nombre de conforme es que, cuando  $\xi$  toma este valor y  $m = 0$ , se tiene que  $T = 0$ , condición necesaria para que la teoría sea invariante conforme<sup>3</sup>. Comprobamos, como muestran los ejemplos más adelante, que (4.2) es válida para el campo escalar solo si el valor de  $\xi$  es el valor conforme  $\xi_d$  (4.3). Como este es el caso, evaluamos en lo que sigue la traza  $T$  en (4.10) o (4.7), en este valor conforme  $\xi_d$ , con lo cual

$$T(x) = m^2 \phi^2(x) \quad \forall_d . \quad (4.11)$$

<sup>2</sup>De forma que siga siendo renormalizable la teoría para  $\phi$ .

<sup>3</sup>La invariancia conforme es la invariancia de una teoría ante cambios de escala local de la métrica  $g_{\mu\nu}(x) \mapsto \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$ , con  $\Omega(x) > 0$  arbitraria.

### 4.1.2. Término $\langle P S_m[\phi, g] \rangle$

En (2.11) comprobamos que  $P$  extrae de una acción que involucra escalares de curvatura, el coeficiente del escalar de curvatura  $R$ . La primera parte de la definición de  $P$  consiste en una derivada funcional evaluada en el punto arbitrario  $y = 0$ , que es el mismo  $y = 0$  en que aparece evaluado uno de los  $\Theta$  en el correlador en (4.2). De aquí no es difícil ver que, si el coeficiente de  $R$  en lugar de ser una constante (como en (2.11)), es el campo  $\phi^2(x)$ , al aplicar  $P$  sobre  $\int d^d x \sqrt{-g} \phi^2(x) R(x)$ , lo que resulta es el campo  $\phi^2(0)$  evaluado en  $x = 0$ . Tenemos entonces que

$$P S_m[\phi, g] = P \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2) = -\frac{\xi}{2} \phi^2(0),$$

y

$$\langle P S_m[\phi, \eta] \rangle = -\frac{\xi}{2} \langle \phi^2(0) \rangle. \quad (4.12)$$

Hicimos explícito en la acción que la derivada covariante de un campo escalar es la derivada normal, de forma que la acción de  $P$  sobre los primeros dos sumandos de la acción sean claramente cero. Si se considera un campo como el vectorial  $A_\mu$ , los términos de derivada covariante contienen un término  $\mathcal{O}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} \partial^\alpha g^{\mu\nu})$ , y la acción de  $P$  sobre estos no es necesariamente cero (recordemos que  $P$  puede verse como una segunda derivada funcional).

### 4.1.3. Expresión (4.2) para el campo escalar en $d$ dimensiones

Necesitamos evaluar  $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle_E$  para el campo escalar en  $d$  dimensiones. Según (2.20) (hacemos implícito el ordenamiento temporal)

$$\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = \langle T(x) T(0) \rangle - \langle T(x) \rangle \langle T(0) \rangle.$$

La traza  $T(x)$  para el campo escalar está dada (para la elección del acople conforme) por (4.11), con lo cual

$$\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = m^4 \langle \phi^2(x) \phi^2(0) \rangle - m^4 \langle \phi^2(x) \rangle \langle \phi^2(0) \rangle.$$

Utilizamos el teorema de Wick:

$$\begin{aligned} \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle &= \\ &= m^4 \overbrace{\langle \phi(x) \phi(x) \phi(0) \phi(0) \rangle} + m^4 \overbrace{\langle \phi(x) \phi(x) \phi(0) \phi(0) \rangle} - m^4 \langle \phi(x) \phi(x) \rangle \langle \phi(0) \phi(0) \rangle \\ &= 2 m^4 (\langle \phi(x) \phi(0) \rangle)^2 = 2 m^4 (i \Delta_F(x))^2 = 2 m^4 \left( i \int_{C_F} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i p^\mu x_\mu}}{p^2 - m^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Pasando a espacio euclídeo en  $p$  y  $x$ :

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, \dots) \longrightarrow x^\mu = (-ix^0, x^1, \dots) \\ p^\mu &= (p^0, p^1, \dots) \longrightarrow p^\mu = (+ip^0, p^1, \dots) \\ C_F &\longrightarrow \text{eje Im } p^0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$\Delta_F(x)$  se transforma en  $\Delta_{FE}(x)$

$$i\Delta_{FE}(x) = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i p_\mu x^\mu}}{p^2 + m^2} ,$$

donde ahora  $p$  y  $x$  son los módulos euclídeos de los vectores euclídeos  $p_\mu$  y  $x_\mu$ , y  $p_\mu x^\mu = p_0 x_0 + p_1 x_1 + \dots$ . Empleando la representación de Schwinger

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(p^2 + m^2)} , \quad (4.14)$$

en la integral de  $\Delta_{FE}(x)$ , esta nos queda

$$i\Delta_{FE}(x) = - \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-\tau(p^2 + m^2) - ip^\mu x_\mu} = - \int_0^\infty d\tau \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-m^2\tau - \frac{x^2}{4\tau}} .$$

De hecho, la integral anterior puede realizarse, y queda expresada en términos de la función de Bessel modificada de segundo tipo de orden  $\nu$ :  $K_\nu(x)$ .

$$i\Delta_{FE}(x) = - \int_0^\infty d\tau \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-m^2\tau - \frac{x^2}{4\tau}} = - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) .$$

Con esto, tenemos el correlador euclídeo  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E$  para el campo escalar libre masivo en  $d$  dimensiones

$$\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E = 2 m^4 \left( \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \right)^2 . \quad (4.15)$$

El otro término que necesitamos para evaluar el MD de (4.2), es (4.12). Tenemos que

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_E = i\Delta_{FE}(x) = - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle P S_m[\phi, \eta] \rangle_E &= -\frac{\xi_d}{2} \langle \phi^2(0) \rangle_E = -\frac{\xi_d}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \langle \phi(x)\phi(0) \rangle_E \\ &= \frac{\xi_d}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde ya sustituimos el acople conforme  $\xi_d$ . Este límite es divergente, por lo que  $\langle \phi(x)\phi(0) \rangle$  es una forma de regularizar  $\langle \phi^2(0) \rangle$ , y  $x$  el regulador.

De (4.15) y (4.16) tenemos que el MD de (4.2) es

$$\begin{aligned} \text{MD de (4.2)} &= \frac{\xi_d}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \\ &- \frac{2 m^4 S(d)}{4d(d-1)(d-2)} \int_0^\infty dx x^{(d+1)} \left( \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En (4.17) escribimos el diferencial de volumen como  $d^d x = S(d)x^{d-1}dx$ , con  $x$  el módulo euclídeo de  $x_\mu$  y  $S(d)$  el área o medida de la superficie de la esfera unidad sumergida en el espacio euclídeo de  $d$  dimensiones (la esfera como variedad tiene  $d-1$  dimensiones), por ejemplo  $S(3) = 4\pi$ . Una expresión para  $S(d)$  es

$$S(d) = \frac{d \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)},$$

con  $\Gamma$  la función Gamma de Euler. La función  $K_\nu(x)$  se comporta en  $x \sim 0$  como  $x^{-\nu}$ , por lo que todo el integrando (incluyendo el  $x^{(d+1)}$ ) se comporta en  $x \sim 0$  como  $x^{(5-d)}$ . De aquí se sigue que la integral en  $x$  es convergente en  $x = 0$  si  $d \leq 5$ , en cuyos casos no tenemos que preocuparnos por extraer la parte finita, ya que la integral es finita. La convergencia en  $x \rightarrow \infty$  siempre ocurre, pues  $K_{\frac{d-2}{2}}(mx)$  decrece exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$ . En general, cuando ocurren divergencias, los términos finitos los extraemos inspeccionando el desarrollo en potencias de los reguladores involucrados.

#### 4.1.4. Los términos finitos $S_{\text{ent}}^m$

En [1] se calcula (3.37) y se extraen de esa expresión los términos que son independientes del regulador  $\epsilon$ . Esto se hace derivando  $k = [(d+2)/2]$  veces ([.] parte entera) respecto de  $m^2$  la expresión para  $S_{\text{ent}}/A$  (3.37):

$$\begin{aligned} (-m^2)^k \frac{\partial^k}{\partial (m^2)^k} S_{\text{ent}}/A &= (-m^2)^k \frac{\partial^k}{\partial (m^2)^k} \frac{1}{12} \int_{\epsilon^2}^\infty ds \frac{1}{s(4\pi s)^{(d-2)/2}} e^{-m^2 s} = \\ &= \begin{cases} -\frac{(-1)^{(d-2)/2}}{6(4\pi)^{(d-2)/2} (d/2)!} m^{d-2} \ln(m\epsilon) & \text{para } d \text{ par} \\ \frac{(-1)^{(d-1)/2}}{12(2\pi)^{(d-3)/2} (d-2)!} m^{d-2} & \text{para } d \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aún cuando tenemos esta expresión para los términos finitos del MI de (4.2), es más claro trabajar directamente con el MI de (4.2) y analizar el desarrollo en potencias del regulador de esta expresión:  $\epsilon$ . La razón para esto es que, una redefinición del regulador  $\epsilon$  puede servir para absorber términos del MD de (4.2) (aun cuando  $\epsilon$  es un regulador del MI), lo que es importante en el análisis de identificar los términos que son realmente independientes de todo regulador, así este regulador sea del MI o del MD de (4.2). De (4.18) se observa un comportamiento general de la parte finita del término de área de la EE con la dimensión: en dimensiones pares siempre tenemos una potencia de  $m$  por un logaritmo de  $m$ , y en dimensión impar, el término finito es siempre una potencia de  $m$ .



## 4.2. Comprobación de (4.2) para el campo escalar en $d = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ dimensiones

En esta sección presentamos los desarrollos del MI y el MD de (4.2) en potencias de los reguladores involucrados e identificamos los términos finitos que no cambian al cambiar ninguno de los reguladores. Comprobamos que para el campo escalar, (4.2) es cierta para estos términos finitos. Convenimos en llamar al término  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$ , dado por (4.16):  $P_d$ , y a su parte finita,  $p_d$ . Al término dado por el segundo sumando de (4.17) y (4.2) lo llamamos  $\Theta_d$ , y a su parte finita:  $\theta_d$ . Por  $EE_d$  nos referimos al miembro izquierdo de (4.2), que es el término de área de la EE, a su parte finita la llamamos  $ee_d$ .

$$\begin{aligned} EE_d &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{12} \int_{\epsilon^2}^{\infty} ds \frac{1}{s(4\pi s)^{(d-2)/2}} e^{-m^2 s} \\ P_d &= \frac{\xi_d}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \\ \Theta_d &= -\frac{2 m^4 S(d)}{4d(d-1)(d-2)} \int_0^{\infty} dx x^{(d+1)} \left( \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \right)^2. \end{aligned}$$

### 4.2.1. Comprobación en $d = 3$

En  $d = 3$ , el desarrollo del MI en potencias de  $\epsilon$  alrededor de  $\epsilon = 0$  es:

$$EE_3 = \frac{1}{48\pi^{3/2}\epsilon} - \frac{m}{48\pi} + \mathcal{O}(\epsilon),$$

de donde identificamos la parte finita como

$$ee_3 = -\frac{m}{48\pi}. \quad (4.19)$$

El desarrollo del término  $P$  en potencias de  $x$  alrededor de  $x = 0$  es

$$P_3 = \frac{1}{64\pi x} - \frac{m}{64\pi} + \mathcal{O}(x)$$

de donde identificamos la parte finita

$$p_3 = -\frac{m}{64\pi}. \quad (4.20)$$

Para el término correlador, como mencionamos, la integral es convergente si  $d \leq 5$ , por lo que en este caso es finita e igual a

$$\begin{aligned} \Theta_3 = \theta_3 &= -\frac{2 m^4 S(3)}{4 \cdot 3(3-1)(3-2)} \int_0^{\infty} dx x^{(3+1)} \left( \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{3-2}{2}} K_{\frac{3-2}{2}}(mx) \right)^2 \\ &= -\frac{m}{192\pi}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

de (4.19, 4.20) y (4.21) tenemos que

$$-\frac{m}{48\pi} = ee_3 = p_3 + \theta_3 = -\frac{m}{64\pi} - \frac{m}{192\pi} .$$

con lo cual se cumple la igualdad (4.2).

### 4.2.2. Comprobación en $d = 4$

El caso  $d = 4$  es el primer caso no trivial donde se pone de manifiesto lo que queremos decir por términos finitos: términos que tienen una dependencia con la masa que no puede modificarse por un cambio de los reguladores. Los desarrollos de MI en potencias de  $\epsilon \sim 0$  y de  $P_4$  en potencias de  $x \sim 0$  son

$$EE_4 = \frac{1}{192\pi^2\epsilon^2} + \frac{m^2\{\gamma - 1\} + 2m^2 \ln(m\epsilon)}{192\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.22)$$

$$P_4 = \frac{1}{48\pi^2 x^2} - \frac{m^2\{1 - 2\gamma + 2 \ln 2\} - 2m^2 \ln(mx)}{192\pi^2} + \mathcal{O}(x) \quad (4.23)$$

$$\Theta_4 = -\frac{m^4}{576\pi^2} , \quad (4.24)$$

donde también ponemos el valor finito de la integral  $\Theta_4$ . Arriba,  $\gamma$  es el número de Euler  $\gamma = 0,577\dots$ . Notemos entonces que en (4.22), el término  $m^2\{\gamma - 1\}$  puede absorberse por  $2m^2 \ln(m\epsilon)$  si se redefine  $\epsilon$ . Lo mismo ocurre con el término  $m^2\{1 - 2\gamma + 2 \ln 2\}$ , que puede absorberse por el término logarítmico con una redefinición de  $x$ . De aquí concluimos que, lo que llamamos parte finita de (4.22) y (4.23), que son los términos finitos cuya dependencia en  $m$  no cambia al redefinir los reguladores, son

$$ee_4 = \frac{2m^2 \ln(m\epsilon)}{192\pi^2} \quad (4.25)$$

$$p_4 = \frac{2m^2 \ln(mx)}{192\pi^2} . \quad (4.26)$$

Ahora, al verificar la igualdad  $ee_4 = p_4 + \theta_4$ , con  $\theta_4$  la parte finita de  $\Theta_4$ , debemos tomar  $\theta_4 = 0$ . Esto, debido a que es incorrecto tomar como parte finita, según nuestra definición, a  $\theta_4 = \Theta_4 = -\frac{m^4}{576\pi^2}$ , pues este término puede absorberse en  $ee_4$  o  $p_4$  con una redefinición de los reguladores  $x$  y  $\epsilon$ . La igualdad (4.2) en  $d = 4$  entonces queda

$$\frac{2m^2 \ln(m\epsilon)}{192\pi^2} = ee_4 = p_4 = \frac{2m^2 \ln(mx)}{192\pi^2} .$$

Esta igualdad significa que el coeficiente de la dependencia  $m^2 \ln m$  no cambia en ningún miembro al redefinir o cambiar  $x$  o  $\epsilon$ . Es notable que en  $d = 4$  la igualdad se cumple sin el aporte del término del correlador de los  $\Theta$ , y solo debido al término  $P$  que surge del acople no minimal del campo escalar con la curvatura.

### 4.2.3. Comprobación en $d = 5$

En el caso  $d = 5$ , los reguladores  $x$  y  $\epsilon$  son los mismos que en los casos anteriores, y la integral de  $\Theta_5$ , convergente. Se identifican fácilmente las partes finitas en las expresiones:

$$EE_5 = \frac{1}{576\pi^3\epsilon^3} + \frac{m^2}{192\pi^{5/2}\epsilon} + \frac{m^3}{288\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.27)$$

$$P_5 = \frac{3}{256\pi^2x^3} - \frac{3m^2}{512\pi^2x} + \frac{m^3}{256\pi^2} + \mathcal{O}(x) \quad (4.28)$$

$$\Theta_5 = -\frac{m^3}{2304\pi^2} . \quad (4.29)$$

De aquí extraemos las partes finitas:

$$ee_5 = \frac{m^3}{288\pi^2} \quad (4.30)$$

$$p_5 = \frac{m^3}{256\pi^2} \quad (4.31)$$

$$\theta_5 = -\frac{m^3}{2304\pi^2} , \quad (4.32)$$

y se verifica que

$$\frac{m^3}{288\pi^2} = ee_5 = p_5 + \theta_5 = \frac{m^3}{256\pi^2} - \frac{m^3}{2304\pi^2} .$$

### 4.2.4. Comprobación en $d = 6$

En  $d = 6$ , como en toda dimensión par (ver (4.18)), aparece una dependencia logarítmica. La integral de  $\Theta_d$  es divergente a partir de  $d = 6$ , por lo que introducimos el regulador  $a$  en el límite inferior de la integral. Los reguladores  $x$  y  $\epsilon$  son los mismos que antes. Desarrollamos las expresiones en potencias de los reguladores alrededor de cero.

$$EE_6 = \frac{1}{1536\pi^3\epsilon^4} - \frac{m^2}{768\pi^3\epsilon^2} + \frac{m^4}{3072\pi^3}(3 - 2\gamma - 4\ln(m\epsilon)) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.33)$$

$$P_6 = \frac{1}{40\pi^3x^4} - \frac{m^2}{160\pi^3x^2} - \frac{m^4}{2560\pi^3}(4\gamma - 3 - 4\ln(4) + 4\ln(mx)) + \mathcal{O}(x) \quad (4.34)$$

$$\Theta_6 = \frac{m^4}{46080\pi^3}(18\gamma - 17 + 12\ln(ma)) + \mathcal{O}(a) . \quad (4.35)$$

Con el mismo análisis del caso  $d = 4$ , extraemos las partes finitas

$$ee_6 = -4\frac{m^4}{3072\pi^3}\ln(m\epsilon) \quad (4.36)$$

$$p_6 = -4\frac{m^4}{2560\pi^3}\ln(mx) \quad (4.37)$$

$$\theta_6 = 12\frac{m^4}{46080\pi^3}\ln(ma) , \quad (4.38)$$

con lo cual, se cumple la igualdad

$$-\frac{m^4}{768\pi^3} \ln(m\epsilon) = ee_6 = p_6 + \theta_6 = -\frac{m^4}{640\pi^3} \ln(mx) + \frac{m^4}{3840\pi^3} \ln(ma) .$$

En esta igualdad, es irrelevante que existan distintos reguladores. La igualdad significa igualdad entre los coeficientes de la dependencia funcional  $m^4 \ln m$ , y ningún cambio de los reguladores afecta esto.

#### 4.2.5. Comprobación en $d = 7$

En  $d = 7$ , desarrollamos en potencias de los mismos reguladores que en  $d = 6$ .

$$EE_7 = \frac{1}{3840\pi^{7/2}\epsilon^5} - \frac{m^2}{2304\pi^{7/2}\epsilon^3} + \frac{m^4}{1536\pi^{7/2}\epsilon} - \frac{m^5}{2880\pi^3} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.39)$$

$$P_7 = \frac{5}{256\pi^3 x^5} - \frac{5m^2}{1536\pi^3 x^3} + \frac{5m^4}{6144\pi^3 x} - \frac{m^4}{2304\pi^3} + \mathcal{O}(x) \quad (4.40)$$

$$\Theta_7 = -\frac{m^4}{11200\pi^3 a} + \frac{m^5}{11520\pi^3} + \mathcal{O}(a) . \quad (4.41)$$

Extraemos las partes finitas

$$ee_7 = -\frac{m^5}{2880\pi^3} \quad (4.42)$$

$$p_7 = -\frac{m^4}{2304\pi^3 x} \quad (4.43)$$

$$\theta_7 = \frac{m^5}{11520\pi^3} . \quad (4.44)$$

En  $d = 7$ , también se cumple la igualdad

$$-\frac{m^5}{2880\pi^3} = ee_7 = p_7 + \theta_7 = -\frac{m^4}{2304\pi^3} + \frac{m^5}{11520\pi^3} .$$

En todos los casos comprobados con  $d > 7$ , que aquí no presentamos, se verifica la igualdad (4.2). Veamos el caso fermiónico.

### 4.3. Cálculo de (4.2) para el campo fermiónico

#### 4.3.1. Tensor de energía impulso del campo fermiónico

Para el caso fermiónico, la definición de Noether para  $T_{\mu\nu}$  es

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi \overleftarrow{\partial}^\nu)} - \mathcal{L} g_{\mu\nu} \quad (4.45)$$

con

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{i}{2} \left( \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \quad (4.46)$$

sustituyendo (4.46) en (4.45) nos queda

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) - g_{\mu\nu} \left( \frac{i}{2} (\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \bar{\psi}\overleftarrow{\not{\partial}}\psi) - m\bar{\psi}\psi \right).$$

Tomando traza y usando las ecuaciones de movimiento  $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$  y  $\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0$  tenemos

$$T(x) = T_\mu{}^\mu(x) = m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad \forall_d. \quad (4.47)$$

De la definición en espacio curvo de  $T_{\mu\nu}$  obtenemos este mismo tensor (no hay mejora o ambigüedad como ocurre en el caso escalar). Esto está directamente relacionado con que no está permitido, por cuestiones dimensionales para que la teoría se renormalizable, un acople de  $\bar{\psi}\psi$  con algún término de curvatura. Del hecho de que no haya en la acción material para  $\psi$  un término de acople no minimal, se sigue que  $\langle P S_m[\psi, g] \rangle = 0$ . Aún cuando la conexión de la derivada covariante de  $\psi$  en la acción en espacio curvo tiene un término que puede identificarse de la forma  $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$ , este es solo lineal, pues la acción para  $\psi$  es lineal en las derivadas, y por tanto, es eliminado por  $P$  (que es una “segunda derivada”).

### 4.3.2. Expresión (4.2) para el campo fermiónico en $d$ dimensiones

Debemos calcular  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E$  para el campo fermiónico. En la definición de  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$  (2.20) sustituimos la traza  $T(x)$  dada por (4.47) y utilizamos el teorema de Wick (hacemos explícito el índice espinorial)

$$\begin{aligned} \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle &= m^2 \overbrace{\langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)\psi_\beta(0) \rangle} + m^2 \overbrace{\langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)\psi_\beta(0) \rangle} \\ &\quad - m^2 \langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) \rangle \langle \bar{\psi}_\beta(0)\psi_\beta(0) \rangle. \end{aligned}$$

El primer y el último sumando se cancelan y queda:

$$\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle = m^2 \langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(0) \rangle \langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0) \rangle.$$

Con la definición del propagador fermiónico:  $i S_{\alpha\beta}^F(x) = \langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0) \rangle$  y

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(0) \rangle = -\langle \psi_\beta(0)\bar{\psi}_\alpha(x) \rangle = -\langle \psi_\beta(-x)\bar{\psi}_\alpha(0) \rangle = i S_{\beta\alpha}^F(-x),$$

tenemos

$$\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle = m^2 S_{\alpha\beta}^F(x) S_{\beta\alpha}^F(-x) = m^2 \text{Tr}(S^F(x)S^F(-x)). \quad (4.48)$$

Pasemos la igualdad

$$S_{\alpha\beta}^F(x) = \int_{C_F} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 - m^2} (\not{p}_M + m\mathbb{1}_r)$$

a euclídeo en  $x_\mu$  y  $p_\mu$  (ver (4.13)). Para la parte  $\not{p}_M$  tenemos

$$\begin{aligned} \not{p}_M = \gamma_M^0 p_0 - \gamma_M^i p_i &\longrightarrow i\gamma_M^0 p_0 - \gamma_M^i p_i \\ & i(\gamma_M^0 p_0 + i\gamma_M^i p_i) \\ & i\gamma^\mu p_\mu , \end{aligned}$$

donde se definieron las matrices euclídeas de Dirac  $\gamma^\mu = (\gamma_M^0, i\gamma_M^i)$ , con  $\gamma_M^\mu$  las matrices de Dirac en espacio de Minkowski y  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Arriba se suma por  $i = 1, 2, 3, \dots$  y  $\mu = 0, 1, 2, \dots$  repetidas. Las  $\gamma^\mu$  cumplen el álgebra  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \mathbb{1}_r \delta_{\mu\nu}$ , con  $\mathbb{1}_r$  la matriz identidad  $r \times r$  correspondiente a la representación de un espinor con  $r$  componentes. Con esto nos queda

$$S^F(x) \longrightarrow S^{FE}(x) = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2} (\not{p} + im\mathbb{1}_r) ,$$

y

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(S^{FE}(x)S^{FE}(-x)) = \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{iq_\mu x_\mu}}{q^2 + m^2} \text{Tr}((\not{p} + im\mathbb{1}_r)(\not{q} + im\mathbb{1}_r)) \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{iq_\mu x_\mu}}{q^2 + m^2} \text{Tr}(\not{p}\not{q} - m^2\mathbb{1}_r) \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{iq_\mu x_\mu}}{q^2 + m^2} r (p_\mu q_\mu - m^2) \\ &= \partial_\mu \left( \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2} \right) \partial_\mu \left( \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{iq_\mu x_\mu}}{q^2 + m^2} \right) r - m^2 \left( \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2} \right)^2 r \\ &= \partial_\mu \left( \int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2}} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} \right) \partial_\mu \left( \int_0^\infty \frac{dv}{(4\pi v)^{d/2}} e^{-m^2 v - \frac{x^2}{4v}} \right) r \\ & \quad - m^2 \left( \int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2}} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} \right)^2 r \\ &= \left( \int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2}} \left( -\frac{x_\mu}{2u} \right) e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} \right) \left( \int_0^\infty \frac{dv}{(4\pi v)^{d/2}} \left( -\frac{x_\mu}{2v} \right) e^{-m^2 v - \frac{x^2}{4v}} \right) r \\ & \quad - m^2 \left( \int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2}} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} \right)^2 r \\ &= x^2 \left( \int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2} 2u} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} \right) r - m^2 \left( \int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2}} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} \right)^2 r . \end{aligned}$$

Las integrales de arriba pueden expresarse en términos de la función de Bessel modificada de segunda especie de orden  $\nu$ :  $K_\nu(x)$

$$\int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2}} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left( \frac{m}{x} \right)^{(d-2)/2} K_{\frac{d-2}{2}}(mx) \quad (4.49)$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{(4\pi u)^{d/2} 2u} e^{-m^2 u - \frac{x^2}{4u}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left( \frac{m}{x} \right)^{d/2} K_{\frac{d}{2}}(mx) . \quad (4.50)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.48) queda

$$\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E = r m^2 \left[ x^2 \frac{1}{(2\pi)^d} \left( \frac{m}{x} \right)^d K_{\frac{d}{2}}^2(mx) - m^2 \frac{1}{(2\pi)^d} \left( \frac{m}{x} \right)^{d-2} K_{\frac{d-2}{2}}^2(mx) \right]. \quad (4.51)$$

Notemos que el factor  $r$ , cuando se sustituye  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E$  en la integral (4.2), se simplifica con el  $r$  del MI de (4.2), que viene de  $S_{\text{ent}}^f = \frac{r}{2} S_{\text{ent}}$ , expresión (3.47). Por ello, en lo que sigue no ponemos este  $r$  (que se simplifica en en ambos miembros de (4.2)). La independencia de (4.2) del valor de  $r$  implica que esa igualdad se cumple para cualquier fermión masivo (en cualquier representación).

Para el campo fermiónico, utilizando (4.51) y (3.47), nos queda

$$\frac{1}{2} \text{MI de (4.2)} = EE_d^f = = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{12} \int_{\epsilon^2}^{\infty} ds \frac{1}{s(4\pi s)^{(d-2)/2}} e^{-m^2 s} \quad (4.52)$$

$$\text{MD de (4.2)} = \Theta_d^f = - \frac{1}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E, \quad (4.53)$$

con  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_E$  dado por (4.51). Nótese que, como vimos antes, para el caso fermiónico no hay término  $\langle P S_m[\psi, g] \rangle_E$ . Al igual que como hicimos en el caso escalar, comprobamos que las partes finitas de (4.52) y (4.53) son iguales. Llamamos a (4.52) y (4.53),  $EE_d^f$  y  $\Theta_d^f$  respectivamente. La parte finita de  $EE_d^f$  es  $ee_d^f$  y la parte finita de  $\Theta_d^f$  es  $\theta_d^f$ .

## 4.4. Comprobación de (4.2) para fermiones en $d = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ dimensiones

### 4.4.1. Comprobación en $d = 3$

En  $d = 3$ , la integral de  $\Theta_3^f$  es finita, y  $EE_3^f$  lo desarrollamos en potencias de  $\epsilon \sim 0$ .

$$\begin{aligned} EE_3^f &= \frac{1}{96\pi^{3/2}\epsilon} - \frac{m}{96\pi} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \Theta_3^f &= -\frac{m}{96\pi}. \end{aligned}$$

Este es un caso donde la igualdad (4.2) se comprueba fácilmente, ya que la parte finita de  $EE_3^f$  es  $ee_3^f = -m/(96\pi)$ .

### 4.4.2. Comprobación en $d = 4$

En  $d = 4$  la parte finita debe ser de la forma  $m^2 \ln(m\epsilon)$  (ver (4.18)). Desarrollamos  $EE_4^f$  en potencias de  $\epsilon \sim 0$ , y la integral de  $\Theta_4^f$ , que es divergente en  $d = 4$ , la regularizamos introduciendo el regulador  $a$  en el límite inferior ( $a \sim 0$ ), y desarrollamos

en potencias de  $a \sim 0$ .

$$EE_4^f = \frac{1}{384\pi^2\epsilon^2} + \frac{m^2(\gamma - 1) + 2m^2 \ln(m\epsilon)}{384\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.54)$$

$$\Theta_4^f = \frac{1}{768} \left( m^2 \left( \frac{1}{3} + 4\gamma - 2 \ln(4) \right) + 4m^2 \ln(ma) \right) + \mathcal{O}(a) . \quad (4.55)$$

Identificamos el término finito de  $EE_4^f$  como

$$ee_4^f = 2m^2 \ln(m\epsilon)/(384\pi^2) = \frac{1}{192}m^2 \ln(m\epsilon) ,$$

por ser este el único término que tiene una dependencia en  $m$  tal, que no puede ser cambiada por una redefinición del regulador  $\epsilon$ . Si aplicamos el mismo criterio a  $\Theta_4^f$ , obtenemos que su parte finita es

$$\theta_4^f = 4m^2 \ln(ma)/768 = \frac{1}{192}m^2 \ln(ma) .$$

De aquí vemos que la igualdad (4.2) se cumple en  $d = 4$

$$\frac{1}{192}m^2 \ln(m\epsilon) = ee_4^f = \theta_4^f = \frac{1}{192}m^2 \ln(ma) .$$

Nótese que aunque en un miembro está el regulador  $a$  y en el otro miembro  $\epsilon$ , estos reguladores no forman parte del sentido de la igualdad: la igualdad se establece entre la forma funcional con  $m$  que no varía al variar los reguladores. La dependencia funcional  $m^2 \ln m$  no cambia al cambiar  $a$  o  $\epsilon$ , lo que es necesario poner el regulador por cuestiones dimensionales. Los términos finitos logarítmicos siempre suceden en dimensiones pares (ver 4.18).

### 4.4.3. Comprobación en $d = 5$

En  $d = 5$  tenemos los desarrollos en potencias de  $a$  y  $\epsilon$  (los mismos reguladores que en el caso  $d = 4$ ).

$$EE_5^f = \frac{1}{1152\pi^{5/2}\epsilon^3} - \frac{m^2}{384\pi^{5/2}\epsilon} + \frac{m^3}{576\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.56)$$

$$\Theta_5^f = -\frac{m^2}{640\pi^2 a} + \frac{m^3}{576\pi^2} + \mathcal{O}(a) . \quad (4.57)$$

De aquí identificamos fácilmente los términos finitos y la igualdad entre ellos

$$\frac{m^3}{576\pi^2} = ee_5^f = \theta_5^f = \frac{m^3}{576\pi^2} .$$



#### 4.4.4. Comprobación en $d = 6$

$$EE_6^f = \frac{1}{3072\pi^3\epsilon^4} - \frac{m^2}{1536\pi^3\epsilon^2} + \frac{m^4}{6144\pi^3}(3 - 2\gamma - 4\ln(\epsilon m)) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.58)$$

$$\Theta_6^f = -\frac{m^2}{960\pi^3 a^2} - \frac{m^4}{18432\pi^3}(12\gamma - 7 - 6\ln(4) + 12\ln(ma)) + \mathcal{O}(a) . \quad (4.59)$$

De aquí, como mismo hicimos en  $d = 4$ , identificamos los términos finitos como:

$$ee_6^f = -4\frac{m^4 \ln(\epsilon m)}{6144\pi^3} = -\frac{m^4 \ln(\epsilon m)}{1536\pi^3}$$

$$\theta_6^f = -12\frac{m^4 \ln(ma)}{18432\pi^3} = -\frac{m^4 \ln(ma)}{1536\pi^3} ,$$

que como se ve, son iguales.

#### 4.4.5. Comprobación en $d = 7$

Presentamos por último el caso  $d = 7$ .

$$EE_7^f = \frac{1}{7680\pi^{7/2}\epsilon} - \frac{m^2}{4608\pi^{7/2}\epsilon^3} + \frac{m^4}{3072\pi^{7/2}\epsilon} - \frac{m^5}{5760\pi^3} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.60)$$

$$\Theta_7^f = -\frac{m^2}{2688\pi^3 a^3} + \frac{3m^4}{11200\pi^3 a} + \frac{7m^5}{40320\pi^3} - \frac{m^5}{5760\pi^3} + \mathcal{O}(a) . \quad (4.61)$$

De aquí identificamos fácilmente las partes finitas y vemos que son iguales.

### 4.5. La fórmula (4.2) en $d = 2$

En el caso  $d = 2$  obtenemos un resultado importante, la fórmula (4.2) reproduce la relación [8, 40, 41]:

$$S_{\text{ent}} = -\frac{\log(\epsilon m)}{6}\Delta c = -\frac{\log(\epsilon m)}{6} 3\pi \int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle , \quad (4.62)$$

que es bien conocida del estudio de teorías conformes en  $d = 2$  y que se establece con ideas que solo son válidas en  $d = 2$ , por ejemplo, la segunda igualdad es parte del teorema- $c$  de Zamolodchikov [41].

Comentemos<sup>4</sup> las ideas que conducen a (4.62) antes de pasar a probar que (4.62) es el límite  $d \rightarrow 2$  de (4.2).

El término divergente principal de la EE de un intervalo de longitud  $R$  con su complemento en la recta (en  $d = 2$  hay solo una dimensión espacial), tiene una dependencia no trivial con  $R$  [21]. Sin embargo, el comportamiento asintótico infrarrojo (IR)

<sup>4</sup>En esta última sección,  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$  es el correlador euclídeo.

y ultravioleta (UV) es general del tipo [10]:

$$\bar{S}_{\text{ent}}^{\text{IR}} = \frac{c_{\text{IR}}}{3} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + K \quad (4.63)$$

$$\bar{S}_{\text{ent}}^{\text{UV}} = \frac{c_{\text{UV}}}{3} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right), \quad (4.64)$$

donde  $\epsilon$  regula la divergencia  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $K$  una constante independiente de  $R$ , y  $c$  la carga central del álgebra conforme de Virasoro en  $d = 2$ . Esta carga central  $c$  es una magnitud adimensional que caracteriza a una teoría conforme en  $d = 2$ , siempre  $c \geq 0$ , y cuando  $c \leq 1$ ,  $c$  define completamente a la teoría, además de, a groso modo, contar el número total de grados de libertad en la misma (con distintos pesos para los campos escalar, fermiónico, vectorial, etc). Ponemos  $c_{\text{UV}}$  y  $c_{\text{IR}}$  pensando en una teoría con masa o con alguna escala asociada por interacción (como la masa del protón en QCD), que no es en general invariante conforme y no tiene álgebra conforme ni  $c$ , pero que, en el límite IR, donde los únicos grados de libertad que quedan son los de masa cero, o en el UV, donde ninguna masa es relevante, la teoría con escala se aproxima (en el sentido de que sus funciones de  $n$  puntos se hacen iguales en el límite), a teorías invariantes conforme con respectivas  $c_{\text{IR}}$  y  $c_{\text{UV}}$ . A juzgar por el valor asintótico UV (4.64) de  $\bar{S}_{\text{ent}}$ , esta está indeterminada en una constante aditiva  $\sim \log \epsilon$  debido a lo arbitrario del regulador  $\epsilon$ . Sin embargo, la resta de los valores asintóticos de  $\bar{S}_{\text{ent}}$  debe ser una constante independiente de  $\epsilon$ . Esto fija el comportamiento de la constante  $K$  (independiente de  $R$ ), a ser de la forma

$$K \sim \frac{\Delta c}{3} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \frac{c_{\text{UV}} - c_{\text{IR}}}{3} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

a fin de que

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{ent}}^{\text{UV}} - \bar{S}_{\text{ent}}^{\text{IR}} &= \frac{c_{\text{UV}}}{3} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) - \left(\frac{c_{\text{IR}}}{3} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + K\right) \\ &= \frac{\Delta c}{3} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) - K \\ &\sim \frac{\Delta c}{3} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) - \frac{\Delta c}{3} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = f(R) \quad \text{independiente de } \epsilon. \end{aligned}$$

Hemos puesto  $\log(\frac{1}{\epsilon})$  para mostrar la dependencia de  $K$  con  $\epsilon$ , pero es necesario multiplicar el  $\epsilon$  en el argumento del logaritmo por una magnitud con escala de masa. La única de este tipo que está disponible entre el IR y el UV en una teoría con una escala de masa  $m$  es la propia  $m$ , por tanto

$$K = \frac{\Delta c}{3} \log\left(\frac{1}{m\epsilon}\right). \quad (4.65)$$

Pudiera pensarse igualmente válido poner en  $K$ ,  $2m$  o  $3m$  en lugar de  $m$ , pero esto solo cambia  $K$  en una constante independiente de  $m$ , con lo cual, este argumento dimensional fija completamente la variación de  $K$  (y la dependencia de  $\bar{S}_{\text{ent}}^{\text{IR}}$ ) con  $m$ , a la forma (4.65). En [9] encontramos una discusión de cómo la EE se satura en el IR

al valor  $K$  (4.65) utilizando un argumento similar al de [41]. Si la teoría es trivial en el IR, lo que equivale a que solo existen grados de libertad masivos (que es el tipo de teoría en la que estamos interesados), entonces  $c_{\text{IR}} = 0$  y la EE se satura (no depende de  $R$ ), en el IR, al valor  $K = \frac{\Delta c}{3} \log(\frac{1}{m\epsilon})$ . Por tanto, cuando  $R \gg m$  (límite IR)  $\bar{S}_{\text{ent}} = \frac{\Delta c}{3} \log(\frac{1}{m\epsilon})$ .

La EE  $\bar{S}_{\text{ent}}$  se definió para el segmento  $R$  con su complemento, por ello, la superficie de entrelazado o frontera consiste en dos puntos (los extremos del segmento  $R$ ). En  $d = 2$ , (4.63) es además el término divergente principal de esta EE, a la vez que es un término de área local, lo que implica que su valor solo depende de los grados de libertad inmediatos a la frontera o superficie de entrelazado, que como dijimos, consiste en dos puntos: los extremos del intervalo  $R$ . De esto, por estar los extremos de  $R$  bien separados en el límite IR, puede decirse que los grados de libertad inmediatos a un extremo de  $R$  hacen una contribución a  $\bar{S}_{\text{ent}}$  independiente e igual a la que hace el otro extremo. Podemos asociar la mitad de la dependencia de  $\bar{S}_{\text{ent}}$  con  $m$  a un extremo del segmento  $R$ , y la otra mitad a el otro punto extremo. De aquí se sigue que la dependencia con la masa del término divergente principal de la EE de una semirrecta con su complemento, que llamamos  $S_{\text{ent}}$  para diferenciarla de la de un segmento  $R$  con su complemento  $\bar{S}_{\text{ent}}$ , y que tiene como superficie de entrelazado o frontera un solo punto, sea

$$S_{\text{ent}} = \bar{S}_{\text{ent}}^{\text{IR}}/2 = K/2,$$

o

$$S_{\text{ent}} = -\frac{\Delta c}{6} \log m\epsilon. \quad (4.66)$$

Hasta aquí la primera igualdad en (4.62). La otra parte que se conoce en la literatura (segunda igualdad en (4.62)), es una expresión para  $\Delta c$  en función del correlador de la traza  $\Theta$  del  $T_{\mu\nu}$  de la teoría, que se establece a partir del teorema- $c$  de Zamolodchikov [41] (Apéndice B). Este teorema- $c$  dice que en  $d = 2$  existe una función  $C(g_i(\mu))$  de las constantes de acoplamiento  $g_i(\mu)$  de una teoría cuántica (que depende de una escala de energía  $\mu$  que parametriza el grupo de renormalización) que es monótona a lo largo de una trayectoria  $\{g_i(\mu)\}$  generada por transformaciones del grupo de renormalización en el espacio de las  $g_i$ . Este teorema- $c$  implica, por ejemplo, que en el espacio de las  $g_i$  no pueden existir órbitas cerradas. Además, en los puntos críticos  $g_i^*$ , definidos por ser la teoría  $\{g_i^*\}$  invariante conforme (CFT), se tiene que la función  $C(g_i(\mu))$  es estacionaria respecto de las transformaciones del grupo de renormalización, e igual a la  $c$  de Virasoro del álgebra conforme correspondiente:  $C(g_i^*) = c$ . Según el teorema- $c$ , la expresión para la variación total de  $C(g_i(\mu))$  entre el UV y el IR, que coincide, por lo dicho, con la  $\Delta c = c_{\text{UV}} - c_{\text{IR}}$  del álgebra, es ( $d = 2$ ):

$$\Delta c = 3\pi \int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle. \quad (4.67)$$

Donde, al igual que en la fórmula de Adler,  $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$  es el correlador de la traza del tensor de energía impulso. La igualdad (4.67) la discutimos en el Apéndice B. De (4.66) y (4.67) obtenemos (4.62). Nos interesa de (4.62) la igualdad entre  $S_{\text{ent}}$  y el correlador

de los  $\Theta$ :

$$S_{\text{ent}} = -\frac{\log(\epsilon m)}{6} 3\pi \int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle, \quad (4.68)$$

y el paso de  $\Delta c$  lo tomamos como un recuso  $d = 2$  intermedio para establecerla. Recordamos que (4.68) es la dependencia con  $m$  del término divergente principal de la EE en  $d = 2$  de una semirrecta. A su vez, (4.68) es formalmente un término de área por unidad de área<sup>5</sup> (en  $d = 2$ , la superficie de entrelazado  $\Sigma$  es un punto).

Más que probar que (4.2) se cumple de por sí en  $d = 2$ , lo que también es cierto y es lo que hemos hecho en otras dimensiones para los campos libres escalar y fermiónico, queremos obtener el resultado (4.68) en general, con independencia del tipo de campo o interacción, o, lo que es lo mismo, sin evaluar la integral en (4.68).

La parte de nuestra formula (4.2)

$$\frac{(-1)}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \mathcal{T} \Theta(x)\Theta(0) \rangle, \quad (4.69)$$

está indefinida en  $d = 2$ . Esto se debe a que el operador  $P$  que se construyó para extraer el  $\frac{1}{16\pi G}$  (ver formula de  $P$ , (2.9)), tiene una indeterminación  $0/0$ . El cero del denominador resulta de la misma definición de  $P$ , y el del numerador de que, en  $d = 2$ ,  $\int d^2x \sqrt{g} R$  es un invariante topológico (igual a la característica de Euler), con lo que

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^2x \sqrt{g} R = 0.$$

No obstante, (4.69) puede tener sentido entendida como una prolongación analítica de los casos  $d \neq 2$  (en los que  $P$  está bien definido), a  $d$  continuo alrededor de  $d = 2$ . Lo que nos interesa es mantener la receta de extraer de (4.69) la dependencia con  $m$  que es independiente de cualquier regulador involucrado que evita las posibles divergencias. En  $d = 2$ , el regulador no será el de la integral en (4.69) (que se supone finita por definir un  $\Delta c$ , ver (4.67)) sino un  $\alpha$  que introducimos para la regularización dimensional de (4.69) alrededor de  $d = 2$ .

$$\frac{-1}{4d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle \longrightarrow \frac{-1}{4 \times 2(2-1)(\alpha)} \int d^{2+\alpha} x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha}.$$

De esta expresión regularizada, llamémosle  $I(\alpha, m)$ , queremos extraer la dependencia con  $m$  que es independiente del regulador  $\alpha$  (cuando  $\alpha \rightarrow 0$ ). Como

$$I(m, \alpha) = \frac{-1}{4 \times 2(2-1)(\alpha)} \int d^{2+\alpha} x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha} \propto \Delta G_{d=2+\alpha}^{-1} = M_{\text{Planck}}^\alpha$$

tiene unidades de masa a la potencia  $\alpha$ , y porque estamos interesados en teorías con

<sup>5</sup>En  $d = 2$ , debido a que la superficie de entrelazado  $\Sigma$  tiene dimensión 0, es un punto, es mejor hablar de término divergente principal de la  $S_{\text{ent}}$  que de término de área por unidad de área, aunque, formalmente, son lo mismo: el término  $\propto \log(Lm)$  en  $d = 2$  es a la vez el “término de área” y el término de área por unidad de área, ver (3.6).

masa  $m$ , necesariamente la integral de arriba involucra a la masa  $m$  y debe cumplirse

$$\frac{-1}{4 \times 2(2-1)(\alpha)} \int d^{2+\alpha}x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha} \propto m^\alpha.$$

Escribimos entonces

$$I(m, \alpha) = \frac{-1}{4 \times 2(2-1)} \frac{m^\alpha}{\alpha} \left( \int d^{2+\alpha}x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha} \right)_\circ, \quad (4.70)$$

donde el subíndice  $\circ$  indica que la integral entre paréntesis no tiene unidades (la única dimensión era la de  $m$  y fue extraída). De esta forma, la integral dentro de  $(\dots)_\circ$  es independiente de  $m$ , aun cuando el integrando sí depende de  $m$ . Si se quiere

$$\left( \int d^{2+\alpha}x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha} \right)_\circ = m^{-\alpha} \int d^{2+\alpha}x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha}.$$

Como se va a expandir en  $\alpha$ , conviene multiplicar (4.70) por una escala de longitud  $L$  arbitraria, cuyo único objetivo es escribir  $\log(Lm)$  en lugar de un incorrecto  $\log(m)$ . Desarrollamos (4.70) en potencias de  $\alpha$

$$\begin{aligned} I(m, \alpha)L^\alpha &= \frac{-1}{4 \times 2(2-1)} \frac{(Lm)^\alpha}{\alpha} \left( \int d^{2+\alpha}x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_{2+\alpha} \right)_\circ \\ &= -\frac{1}{8} \frac{1}{\alpha} (1 + \alpha \log(Lm) + \mathcal{O}(\alpha^2)) \left( \int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_2 + \mathcal{O}(\alpha) \right)_\circ. \end{aligned}$$

De aquí es inmediato que la única dependencia de  $I(\alpha, m)$  con  $m$  que es independiente de  $\alpha$  (y por tanto finita cuando  $\alpha \rightarrow 0$ ) es

$$I(m, 0) = -\frac{1}{8} \log(Lm) \int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_2,$$

donde se quitó el subíndice  $\circ$  pues, en  $d = 2$ , esta integral no tiene unidades. El otro posible término finito cuando  $\alpha \rightarrow 0$  sería el  $\propto \mathcal{O}(\alpha)/\alpha$ , que es irrelevante por no tener dependencia en  $m$ , o si se quiere, puede absorberse en el regulador  $\epsilon$  del MI de (4.2).

Para el campo escalar, no necesariamente libre, el término  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle_E$  de (4.2) es

$$\langle P S_m^{\xi_d}[\phi, g] \rangle_E = -\frac{\xi_d}{2} \langle \phi^2(0) \rangle_E \Big|_{d=2} = 0; \quad \xi_d = \frac{d-2}{4(d-1)}.$$

para el acople  $\xi_d$  conforme en  $d = 2$ , y para el campo de fermiónico, como se mencionó,  $\langle P S_m[\phi, \eta] \rangle_0 \equiv 0$ . En general, tenemos  $\langle P S_m[\phi, \eta] \rangle = 0$  si los campos que se consideran les esta prohibido un acople no minimal con  $R$  (ya sea por conteo de potencia, por simetría de gauge u otra simetría), o, en el caso específico de  $d = 2$ , si se consideran campos que tienen acople con  $R$ , pero que este acople es conforme, o campos con un acople similar al caso escalar tipo  $\gamma\phi R$ , que aparecen lineales en la interacción con  $R$ , pero que  $\langle \phi \rangle = 0$ . En el caso escalar que tratamos, supusimos siempre que  $\langle \phi \rangle = 0$  ( $\phi$

no es como el campo de Higgs), razón por la que este tipo de término no se consideró en la acción  $S_m[\phi, g]$ . En estos casos, según (4.2) en  $d = 2$ , la parte de  $S_{\text{ent}}$  función de  $m$  e independiente de regulador es  $4\pi$  por  $I(m, 0)$  :

$$S_{\text{ent}} = 4\pi I(m, 0) = -\frac{\log(Lm)}{6} 3\pi \int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_2, \quad (4.71)$$

que es exactamente la relación (4.62).

No tiene importancia que el  $\epsilon$  en (4.62) no sea el  $L$  en (4.71), lo que interesa es la dependencia en  $m$ , que sea de tipo logarítmica con igual coeficiente del logaritmo, y ningún cambio en  $L$  o  $\epsilon$  puede afectar esto.

Finalmente, tanto para el escalar como para el fermión<sup>6</sup> libre

$$\int d^2x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle_2 = \frac{1}{3\pi}.$$

Sustituyendo en (4.71), obtenemos la parte finita de  $S_{\text{ent}}$  dada por la expresión (4.18) evaluada en  $d = 2$ , con lo cual comprobamos, como en los demás casos, la igualdad (4.2) en  $d = 2$ .

---

<sup>6</sup>Evaluamos en este caso la representación del fermión  $r = 2$  (representación que es posible en  $d = 2$ ) solo para obtener el mismo resultado del caso escalar. Si evaluamos una  $r \neq 2$ , de todas formas se puede simplificar con el  $r$  que está en la  $S_{\text{ent}}^f$  del fermión.



# Capítulo 5

## Comentarios Finales

Hemos comprobado en este trabajo que la relación que proponemos (4.2), definida en espacio plano, y que vincula el término de área de la EE con correladores (de dos puntos) de la teoría cuántica de campos, es correcta para los campos escalar y fermiónicos libres en todas las dimensiones relevantes. Dicha igualdad fue obtenida por la relación que existe entre el término de área de la EE de un campo y la corrección a la constante de Newton que hace dicho campo, que fue sugerida por Susskind y Uglum [38] y comprobada por primera vez por Larsen y Wilczek [4]. En este trabajo, dicha relación se obtuvo interpretando que la función de partición de la teoría sobre una variedad con singularidad cónica (lo que resulta del método de réplicas para calcular la EE) es lo mismo que la función de partición de la teoría que interactúa con un campo métrico (gravitatorio) que simula la singularidad cónica. Para trabajar con dicho campo métrico, y obtener la relación deseada (igual en forma a la de la entropía de agujero negro), se suavizó o regularizó la singularidad cónica.

Se utilizó para la corrección  $\Delta G^{-1}$  de la constante de Newton una generalización para todas las dimensiones de la fórmula de Adler. Se identificaron, para darle sentido a la igualdad formal (infinita) entre el término de área de la EE y  $\Delta G^{-1}$ , aquellas partes finitas cuya dependencia en  $m$  no varía al redefinir los reguladores involucrados. Para lograr esto, el ingrediente de que las teorías tengan masa o alguna escala es totalmente necesario.

En el caso  $d = 2$ , nuestra fórmula recupera un resultados conocido, por lo que puede ser considerada como una generalización de esa igualdad de  $d = 2$  a todas las dimensiones.

Vimos además, que para el campo escalar, surge una ambigüedad en la igualdad que tiene su origen en lo arbitrario del acople del campo escalar con la curvatura, o lo arbitrario de la mejora del tensor de energía impulso. La igualdad (4.2), es cierta solo si se elige, de todos los acoples del campo escalar con la curvatura, el acople conforme. El por qué físico de esta elección es una cuestión que nos interesa responder en el futuro.

A este respecto, es curioso que la fórmula de Adler para calcular la corrección a la constante de Newton, no coincide con la de Birrel y Davies [39], o deberíamos decir que coinciden de una forma rara: coinciden si eliminamos de la fórmula de Adler el término  $\langle P S_m[\phi, g] \rangle$ . En tal caso, la igualdad (4.2) es cierta solo para la fórmula de Adler, y



no para la fórmula de Birrel y Davies para la corrección de la constante de Newton.

El trabajo tiene varias formas de continuarse. La primera, y en la que ya se obtuvo un resultado positivo en  $d = 4$ , es la comprobación de la igualdad propuesta (4.2) para el campo vectorial masivo. Este campo presenta cierta dificultad debido a, al igual que en el caso escalar, ambigüedades que resultan del acople con la curvatura y mejora del tensor de energía impulso. El campo vectorial puede tener, además del acople con  $R$ , acoples con  $R_{\mu\nu}$ .

Otro trabajo futuro que se sugiere es la verificación de la igualdad a teorías con interacción, ya sea perturbativamente, o con modelos solubles en algún límite. Por ejemplo, el campo escalar de  $N$  componentes con interacción  $\phi^4$  en el límite de  $N$  grande. La EE para el campo escalar con interacción  $\phi^3$  y  $\phi^4$  en  $d = 4$  hasta primer orden en teoría de perturbaciones fue calculada por Hertzberg en [42]. La igualdad propuesta también puede comprobarse para teorías con interacción utilizando la herramienta de correspondencia holográfica. Existe una fórmula holográfica (de Ryu y Takayanagi) que permite calcular la EE de ciertos modelos con interacción [43]. Quedaría investigar el correspondiente holográfico de los correladores del miembro derecho de la igualdad (4.2).

# Apéndice A

## Diagonalización de $\Delta$ en una variedad con singularidad cónica

### A.1. Campo escalar

El problema de digonalizar el operador  $\Delta_{C_\alpha}$  en una variedad bidimensional  $C_\alpha$  con singularidad cónica en el origen o ángulo total desde el origen igual a  $2\pi\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) es:

$$\begin{cases} \Delta_{C_\alpha} f(r, \theta) = (\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2) f(r, \theta) = \kappa f(r, \theta) \\ f(0, \theta) < \infty ; f(R, \theta) = 0 \\ f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi\alpha) , \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde expresamos el problema en coordenadas polares  $(r, \theta)$  y tomamos un radio  $R$  finito para luego hacer el límite  $R \rightarrow \infty$  en la solución. Se propone  $f(r, \theta) = e^{i\nu\theta} g(r)$  y queda el problema para  $g(r)$ :

$$\left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{\nu^2}{r^2} - \kappa \right) g(r) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Si no se restringe la función  $g(r)$ , (A.2) puede tener la solución

$$g(r) = C_1 J_\nu(\lambda r) + C_2 Y_\nu(\lambda r)$$

para  $0 < -\kappa = \lambda^2$ , con  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$  las funciones de Bessel<sup>1</sup> de primera y segunda especie, o la solución

$$g(r) = C_3 I_\nu(\lambda r) + C_4 K_\nu(\lambda r)$$

para  $0 < \kappa = \lambda^2$ , con  $I_\nu(x)$  y  $K_\nu(x)$  las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie y  $C_i$  constantes arbitrarias. Las funciones  $K_\nu(\lambda r)$  y  $Y_\nu(\lambda r)$  divergen en  $r \rightarrow 0$ , por lo que se excluyen, al igual que  $I_\nu(\lambda r)$ , que crece exponencialmente con  $r$  y no puede cumplir  $g(R) = 0$ . Solo queda la solución  $J_\nu(\lambda r)$  con autovalor  $\kappa = -\lambda^2$ , que se comporta en  $r \rightarrow 0$  como  $J_\nu(x) \sim x^\nu$ . Cuando  $\nu \in \mathbb{R}$ , las funciones  $J_\nu(\lambda r)$  y  $J_{-\nu}(\lambda r)$  son linealmente independientes.

---

<sup>1</sup>Seguimos para todas las funciones de Bessel los mismo nombres y notación que en [25]

Utilizamos los siguientes teoremas.

Teorema [44] (desarrollo Fourier-Bessel): El sistema  $\{J_\nu(\mu_{\nu,i}r)\}_{i=1,2,\dots}$ , con  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  y  $\mu_{\nu,i}$  el  $i$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_\nu(x)$  de primer tipo de orden  $\nu$ , es ortogonal y completo en  $L^2[(0,1), r dr]$  (las funciones  $f$  de cuadrado integrables en  $(0,1)$  con peso o medida  $r dr$ :  $\int_0^1 f^2(r)r dr < \infty$ ).

Teorema [45]: El sistema  $\{e^{i\omega_k\theta}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es ortogonal y completo en  $L^2[(0,2\pi)]$  si  $\omega_k = k + a$ ;  $a \in \mathbb{R}$ .

De estos teoremas se sigue que

$$\begin{aligned} \phi_{k,i} &= J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,i}r/R)e^{i\bar{\nu}_k\theta}; \nu_k = \begin{cases} \bar{\nu}_k & \text{para } k \text{ tales que } \bar{\nu}_k \geq -\frac{1}{2} \\ -\bar{\nu}_k & \text{para } k \text{ tales que } \bar{\nu}_k < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \text{con } \bar{\nu}_k &= k/\alpha + b, \quad i = 1, 2, \dots; \quad k \in \mathbb{Z}; \quad b \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

es una base para el espacio  $L^2[\Omega_R] = L^2[(0,R), r dr] \otimes L^2[(0,2\pi\alpha)]$ , que es el espacio de las funciones de cuadrado integrable en la variedad  $C_\alpha$  cortada a un radio  $R$  desde el origen en el punto singular. Las funciones de este sistema completo de  $L^2[\Omega_R]$  pueden ser, además, (eligiendo  $b$  y con ello el rango de valores de  $k$ ) autofunciones del problema (A.7).

La condición  $f(R, \theta) = 0$  impone a los autovalores  $\lambda$  los valores discretos  $\lambda_i^k = \mu_{k,i}/R$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , con  $\mu_{k,i}$  el cero  $i$ -ésimo de la función de Bessel de orden  $\nu_k$ :  $J_{\nu_k}(\mu_{k,i}) = 0$ .

De la condición de periodicidad en (A.7) tenemos :

$$e^{i\bar{\nu}\theta} = e^{i\bar{\nu}(\theta+2\pi\alpha)} \Rightarrow \bar{\nu}_k = k/\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En este caso  $b = 0$ . El sistema  $\{1, \cos(\theta k/\alpha), \sin(\theta k/\alpha)\}_{k \geq 0}$  (con  $k \geq 0$ ) es de por sí completo y ortogonal en  $L^2[(0,2\pi\alpha)]$  y, según la definición de  $\bar{\nu}_k$  en (A.3),  $\nu_k$  da los mismos ordenes para la función de Bessel así tomemos  $k$  o  $-k$ , (considerando a  $\alpha$  tan cercana a uno como se quiera). De aquí se sigue que, el sistema de autofunciones de  $\Delta$  con las condiciones de contorno impuestas (problema (A.7))

$$\begin{aligned} \phi_{k,i}^c &= \cos(\nu_k\theta)J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,i}r/R), \quad \phi_{k,i}^s = \sin(\nu_k\theta)J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,i}r/R), \\ \nu_k &= k/\alpha; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

forma un conjunto completo ortogonal de  $L^2[\Omega_R]$ . La condición  $f(r=0, \theta) < \infty$  queda satisfecha por (A.4).

Para expresar  $\Delta$  (o lo que nos interesa,  $e^{s\Delta}$ ) en la base (A.4), necesitamos normalizar la funciones introduciendo el factor  $N_{i,k}$

$$N_{i,k} \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \int_0^R r dr \phi_{k,i} \phi_{k,j} = \delta_{ij}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi\alpha} d\theta \int_0^R r dr \phi_{k,i} \phi_{k,j} &= \frac{2\pi\alpha}{d_k} \int_0^R r dr J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,i} r/R) J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,j} r/R) \\
&= \frac{2\pi\alpha}{d_k} \frac{R^2}{2} J_{\nu_k+1}^2(\mu_{\nu_k,i}) \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

con  $\frac{2\pi\alpha}{d_k} = \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \sin^2(\theta k/\alpha) = \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \cos^2(\theta k/\alpha) \Rightarrow d_{k>0} = 2, d_0 = 1$ , donde de usó además la relación de ortogonalidad entre  $J_\nu(\mu_{\nu,i} r/R)$  y  $J_\nu(\mu_{\nu,j} r/R)$  [45]. Con esto

$$N_{i,k} = \frac{d_k}{2\pi\alpha} \frac{2/R^2}{J_{\nu_k+1}^2(\mu_{\nu_k,i})}.$$

Nos queda entonces que el operador  $e^{s\Delta}$  toma la forma diagonal en sus autofunciones, (que representamos en la base de coordenadas  $(r, \theta)$ ):

$$\langle r, \theta | e^{s\Delta} | r', \theta' \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} N_{i,k} J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,i} r/R) J_{\nu_k}(\mu_{\nu_k,i} r'/R) e^{-s(\mu_{\nu_k,i})^2/R^2} \cos[(\theta - \theta')\nu_k]. \tag{A.6}$$

En el límite  $R \rightarrow \infty$  el índice  $i$  se vuelve continuo  $\mu_{k,i}/R \rightarrow \lambda$  y la relación de ortogonalidad en  $r$  se transforma en [45]

$$\int_0^{\infty} r dr J_\nu(\lambda r) J_\nu(\lambda' r) = \frac{1}{\lambda} \delta(\lambda - \lambda'),$$

de donde  $N_{i,k} \rightarrow N_k(\lambda) = \frac{d_k}{2\pi\alpha} \lambda$ . En este límite, (A.6) se convierte en

$$\begin{aligned}
K(r, \theta, r', \theta', s) &= \langle r, \theta | e^{s\Delta} | r', \theta' \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \int_0^{\infty} \lambda d\lambda J_{\nu_k}(\lambda r) J_{\nu_k}(\lambda r') e^{-s\lambda^2} \cos[(\theta - \theta')\nu_k],
\end{aligned}$$

con  $\nu_k = k/\alpha$ , que es la ecuación (3.32).

## A.2. Campo fermiónico

El problema para el campo fermiónico se redujo, con (3.42) y otras diferencias con el caso escalar comentadas en la sección 3.3.3, al problema de la diagonalización del Laplaciano  $\Delta$  con otras condiciones de contorno que en (A.7). En este caso la condición que cambia es la condición de periodicidad en  $\theta$ :

$$\begin{cases} \Delta_{C_\alpha} f(r, \theta) = (\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2) f(r, \theta) = \kappa f(r, \theta) \\ f(r \rightarrow 0, \theta) = \mathcal{O}(r^{-1/2}), f(R, \theta) = 0 \\ f(r, \theta) = (-1)^{\alpha+1} f(r, \theta + 2\pi\alpha), \end{cases} \tag{A.7}$$

Se permite además que  $f(r \rightarrow 0, \theta) = \mathcal{O}(r^{-1/2})$ , con lo cual se sigue considerando  $L^2[\Omega_R]$  y el sistema completo (A.3), pues funciones de este tipo hacen finita la acción del campo fermiónico, en cuanto a la convergencia en  $r = 0$  se refiere. Si en  $r \sim 0$ ,  $\psi \sim r^\nu$ , tenemos que  $S_E(\psi) \sim r^2 r^\nu \partial_r r^\nu = r^{2\nu+1}$ , que es convergente si  $\nu \geq -1/2$ . Nótese

que en el caso escalar tenemos el Laplaciano  $\Delta \sim \partial_r^2$  en lugar de  $\partial_r$ , y obtendríamos que los campos que hacen finito el término cinético en la acción para  $r \rightarrow 0$  son  $\mathcal{O}(1)$ , que es lo que pusimos como condición en  $r = 0$  en (A.7).

Lo que sigue entonces es exactamente igual que lo que hicimos arriba para el problema (A.7) salvo dos cambios. El primero es que

$$\bar{\nu}_k = \frac{k}{\alpha} - \frac{\alpha + 1}{2\alpha}, \quad (\text{A.8})$$

que es la solución de

$$e^{i\bar{\nu}(\theta+2\pi\alpha)} = (-1)^{\alpha+1} e^{i\bar{\nu}\theta} = e^{i\bar{\nu}\theta+i\pi(\alpha+1)}.$$

Con esto, la  $b$  en (A.3), es  $b = (\alpha + 1)/2\alpha$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Las  $k$  que cumplen la condición  $\bar{\nu}_k \geq -1/2$  son las  $k \geq 1$  (en  $k = 1$  se tiene  $\bar{\nu}_1 = -1/2$ ), por lo que tomamos los órdenes  $\nu_k$  de la función de Bessel  $J_{\nu_k}$  como  $\nu_k = \bar{\nu}_k$  para  $k \geq 1$  y  $\nu_k = -\bar{\nu}_k$  para  $k \leq 0$ . Nótese que esto lo hacemos para que el sistema sea completo (cumpla el teorema del desarrollo de Fourier-Bessel) y por la condición de contorno en  $r = 0$ , pero no es necesario si solo pensamos en la condición de ser autofunciones:  $J_{\nu}(\lambda r) e^{i\nu\theta}$  y  $J_{-\nu}(\lambda r) e^{i\nu\theta}$  son autofunciones de (A.2) con los mismos autovalores. Al considerar todas las  $k \in \mathbb{Z}$ , la suma en  $k$  al expresar el operador  $e^{s\Delta}$  debe realizarse desde  $-\infty$  a  $\infty$ . El segundo cambio es que conviene quedarnos con la base de autofunciones angulares  $\{e^{i\bar{\nu}_k\theta}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  cuando  $\bar{\nu}_k = \frac{k}{\alpha} - \frac{\alpha+1}{2\alpha}$ , ya que la norma de estas

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi\alpha} |f(\theta)|^2 d\theta$$

no depende de  $k$ , lo que si ocurre si tomamos  $\{1, \cos(\bar{\nu}_k\theta), \sin(\bar{\nu}_k\theta)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$\|\sin(\bar{\nu}_k\theta)\|^2 = \alpha\pi + \sin(2\pi\alpha)/4\bar{\nu}_k, \quad \|\cos(\bar{\nu}_k\theta)\|^2 = \alpha\pi - \sin(2\pi\alpha)/4\bar{\nu}_k, \quad \|e^{i\bar{\nu}_k\theta}\|^2 = 2\pi\alpha.$$

Solo si elegimos la base  $\{e^{i\nu_k\theta}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , el factor de normalización  $N_{i,k}$  no depende de  $k$  y obtenemos, al hacer la traza de  $e^{s\Delta}$ , una serie geométrica. Con esta elección, el  $d_k$  en  $N_{i,k}$  es  $d_k = 1$ , o, con  $R \rightarrow \infty$ ,  $N_k(\lambda) = N(\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi\alpha}$ . Podemos expresar  $K(r, \theta, r', \theta', s)$  directamente con las funciones complejas  $e^{i\bar{\nu}_k\theta}$ , pues estas desaparecen al tomar traza. Con estos cambios, queda

$$\begin{aligned} K(r, \theta, r', \theta', s) &= \langle r, \theta | e^{s\Delta} | r', \theta' \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda J_{\nu_k}(\lambda r) J_{\nu_k}(\lambda r') e^{-s\lambda^2} e^{i(\theta-\theta')\bar{\nu}_k}, \\ \bar{\nu}_k &= \frac{2k - (\alpha + 1)}{2\alpha} \\ \nu_k &= \begin{cases} \bar{\nu}_k & k \geq 1 \\ -\bar{\nu}_k & k < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

que es lo que ponemos en (3.44).

# Apéndice B

## Teorema- $c$ de Zamolodchikov

Una teoría clásica de campos que es invariante conforme en  $d = 2$  tiene un grupo infinito de simetrías locales, cuyos generadores,  $L_n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ , forman el álgebra (de Witt)

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} . \quad (\text{B.1})$$

Cuando se cuantiza dicha teoría en espacio plano, el álgebra de simetrías se modifica (por tratarse ahora con estados y operadores) de (B.1), al álgebra de Virasoro

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0} . \quad (\text{B.2})$$

La magnitud  $c$  (carga central del álgebra de Virasoro) es la característica más importante de una teoría cuántica de campos invariante conforme (CFT) en  $d = 2$ : permite clasificar a las CFT con más detalle que en otras dimensiones; cuenta aproximadamente el número de grados de libertad;  $c \geq 0$ , y cuando  $c < 1$ ,  $c$  define unívocamente la CFT; y  $c$  aparece en todas las funciones de dos puntos, en particular,

$$\langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle \propto c \times \text{índices} . \quad (\text{B.3})$$

En el contexto de materia condensada [8], es un hecho relevante que, para  $c \leq 1$ ,  $c$  parece clasificar totalmente las clases de universalidad, tomando los valores discretos:

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} , \quad \text{con } m = 3, 4, 5, \dots \infty .$$

Por ejemplo, la clase de universalidad del modelo de Ising corresponde a  $c = 1/2$ , la clase del campo escalar libre (modelo continuo) a  $c = 1$ , la clase del modelo de Potts de tres estados (generalización de modelo de Ising) a  $c = 4/5$ , etc. El estudio de la EE en una red cerca de un punto crítico (donde se tiene efectivamente simetría conforme) y la relación  $S_{\text{ent}} = \frac{c}{3} \log R/\epsilon$  permiten identificar la  $c$  y la clase de universalidad.

Sea una teoría en  $d = 2$  (no necesariamente CFT) renormalizable con constantes de acoplamiento  $\{g_i(t)\}$ , que dependen de una escala  $\mu = \mu_0 e^{-t}$  (se asume que en el espacio  $Q$  de las  $\{g_i\}$ , las transformaciones  $R_t : Q \rightarrow Q$  del grupo de renormalización están parametrizadas por un único parámetro  $t$  y generan la trayectoria  $\gamma = \{g_i(t)\}$ ).

En ciertos puntos  $\{g_i(t^*)\} = \{g_i^*\}$ , la teoría puede hacerse una CFT caracterizada por una  $c$ . Los valores  $\{g_i^*\}$  con los cuales la teoría tiene simetría conforme (es una CFT) son, por definición, puntos críticos (de la trayectoria  $\gamma = \{g_i(t)\}$ ).

Pensemos que, a lo largo de la trayectoria  $\gamma = \{g_i(t)\}$ , la teoría se encuentra varios puntos críticos con sus respectivas  $c$ , ¿existe alguna relación entre estas  $c$ ? La respuesta en  $d = 2$  a esta pregunta es el contenido del teorema- $c$  de Zamolodchikov [41].

## B.1. Enunciado del Teorema- $c$

**Teorema** (Zamolodchikov 1986): Existe una función  $C(g_i)$  de las constantes de acoplamiento  $g_i$  de una teoría cuántica de campos renormalizable en  $d = 2$ , que:

1. decrece monótonamente a lo largo de una trayectoria  $\gamma = \{g_i(t)\}$ , generada por transformaciones del grupo de renormalización.
2. la variación de  $C(g_i)$ ,  $\frac{dC}{dt} = -\beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} C$ , a lo largo de  $\gamma$ , es estacionaria en los puntos críticos  $\{g_i^*\}$ .
3. en los puntos críticos  $\{g_i^*\}$ ,  $C(g_i)$  es numéricamente igual a la  $c$  de Virasoro de la CFT correspondiente  $C(g_i^*) = c$ .

La demostración de este teorema está basada en simetrías comunes a toda teoría de campos (en particular, las espaciales implican la existencia y conservación del tensor de energía impulso  $\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$ ), y otras propiedades particulares de  $d = 2$  (ver (B.6)). Es más cómodo para la demostración trabajar en espacio euclídeo, con lo que la simetría de Lorentz se extiende analíticamente y toma la forma de una simetría de rotación en euclídeo. Normalmente, en  $d = 2$  y en espacio euclídeo, se utilizan variables complejas  $(z, \bar{z}) = (x_1 + ix_2, x_1 - ix_2)$ , que son el análogo euclídeo de las coordenadas nulas. A pesar de que es más elegante el lenguaje  $(z, \bar{z})$ , esto supone introducir toda una notación, por lo que se prefiere, para mayor claridad, trabajar directamente con las variables reales  $x_\mu$  del espacio euclídeo (para una demostración del teorema con variables  $(z, \bar{z})$  ver [40]).

## B.2. Demostración en espacio euclídeo

La forma general en espacio euclídeo de la función de dos puntos de  $T_{\mu\nu}(x)$  es:

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle &= g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \frac{h_1(x)}{x^{2d}} + x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta \frac{h_2(x)}{x^{2d+4}} + (x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu}) \frac{h_3(x)}{x^{2d+2}} \\
 &\quad + (x_\alpha x_\mu g_{\beta\nu} + x_\alpha x_\nu g_{\mu\beta} + x_\mu x_\beta g_{\alpha\nu} + x_\nu x_\beta g_{\mu\alpha}) \frac{h_4(x)}{x^{2d+2}} \\
 &\quad + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}) \frac{h_5(x)}{x^{2d}}.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

En el miembro derecho,  $x$  es el módulo (euclídeo) de  $x_\mu$  y  $h_i(x)$  escalares adimensionales ( $[T_{\mu\nu}] = d$ ). La forma de (B.4) viene de pedir que ambos miembros tengan las mismas simetrías: covariancia de rotación (lo que equivale a Lorentz en Minkowski), invariancia de traslación, simetría en  $(\mu\nu)$ ,  $(\alpha\beta)$  y  $(\mu\nu) \leftrightarrow (\alpha\beta)$ . Esta última simetría se tiene, en general, solo en espacio euclídeo, y equivale formalmente<sup>1</sup> a la “conmutación” de  $T_{\mu\nu}(0)$  y  $T_{\alpha\beta}(x)$

$$\langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle = \langle T_{\alpha\beta}(x)T_{\mu\nu}(0) \rangle = \langle T_{\alpha\beta}(0)T_{\mu\nu}(-x) \rangle = \langle T_{\alpha\beta}(0)T_{\mu\nu}(x) \rangle . \quad (\text{B.5})$$

En (B.5) se utilizó invariancia ante traslaciones (segunda igualdad) y de rotaciones, que permite solo potencias pares de  $x_\mu$  y  $x$  (tercera igualdad).

Además

$$\langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle^* = \langle T_{\alpha\beta}(x)T_{\mu\nu}(0) \rangle = \langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle,$$

con lo que las  $h_i$  son reales.

En  $d = 2$  se cumple que no todos los tensores coeficientes de las  $h_i$  son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} -2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \frac{2}{x^2}(x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu}) + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}) \\ - \frac{1}{x^2}(x_\alpha x_\mu g_{\beta\nu} + x_\alpha x_\nu g_{\mu\beta} + x_\mu x_\beta g_{\alpha\nu} + x_\nu x_\beta g_{\mu\alpha}) = 0 , \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

con lo cual podemos eliminar una de las  $h_i$  (esto no ocurre en dimensiones mayores).

Eliminamos  $h_4$  y sustituimos  $d = 2$  en (B.4)

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \frac{h_1(x)}{x^4} + x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta \frac{h_2(x)}{x^8} + (x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu}) \frac{h_3(x)}{x^6} \\ + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}) \frac{h_5(x)}{x^4} . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sea la descomposición  $T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2}\Theta$ , de  $T_{\mu\nu}$  en su parte de espín cero  $\frac{g_{\mu\nu}}{2}\Theta$  y su parte de espín 2 sin traza  $\hat{T}_{\mu\nu}$  ( $\Theta$  es la traza de  $T_{\mu\nu}$ )

$$T^\mu{}_\mu = \Theta.$$

Es útil extraer de (B.7) los correladores  $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$ ,  $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\Theta(x) \rangle = \langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$ , y  $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle$  (omitimos por comodidad la dependencia de  $h_i$  en  $x$ ).

1.  $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$

$$x^4 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle = 4h_1 + h_2 + 4h_3 + 4h_5 \equiv H . \quad (\text{B.8})$$

<sup>1</sup>Cuando hablamos de espacio euclídeo, hablamos de la extensión analítica de las funciones de dos o  $n$  puntos, o de otras funcionales, como la función de partición. No hay “extensión” analítica de objetos como operadores o estados.



2.  $\langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$

$$\begin{aligned} x^4 \langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle &= 2g_{\mu\nu}h_1 + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}h_2 + 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}h_3 + g_{\mu\nu}h_3 + 2g_{\mu\nu}h_5 \\ &= g_{\mu\nu}(2h_1 + h_3 + 2h_5) + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}(h_2 + 2h_3). \end{aligned}$$

Si tomamos traza ( $\hat{T}_\mu^\mu = 0$ )

$$0 = 2(2h_1 + h_3 + 2h_5) + (h_2 + 2h_3), \quad (\text{B.9})$$

con lo cual

$$x^4 \langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle = \left( \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \right) (h_2 + 2h_3) \equiv \left( \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \right) G. \quad (\text{B.10})$$

3.  $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle$

$$\begin{aligned} x^4 \langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle &= g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}h_1 + \frac{x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta}{x^2}h_2 + \frac{(x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu})}{x^2}h_3 \\ &\quad + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta})h_5. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Si tomamos traza

$$\begin{aligned} 0 &= 2g_{\mu\nu}h_1 + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}h_2 + 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}h_3 + g_{\mu\nu}h_3 + 2g_{\mu\nu}h_5 \\ &= g_{\mu\nu}(2h_1 + h_3 + 2h_5) + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}(h_2 + 2h_3), \end{aligned}$$

los paréntesis son cero por separado. Ponemos entonces (B.11) en función de  $h_2$  y  $h_5$ :

$$\begin{aligned} x^4 \langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle &= g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{4}h_2 - h_5 \right) + \frac{x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta}{x^2}h_2 - \frac{1}{2} \frac{(x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu})}{x^2}h_2 \\ &\quad + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta})h_5. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Tomamos la divergencia  $\partial^\beta \langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle = 0$  en (B.7)

$$\begin{aligned} 0 = \langle T_{\mu\nu}(0)\partial^\beta T_{\alpha\beta}(x) \rangle &= T_1(xh'_1 - 4h_1) + T_2(-3h_2 + xh'_2) + h_3(T_3 + 3T_1) \\ &\quad + (T_2 + T_1)(xh'_3 - 6h_3) + T_3(xh'_5 - 4h_5) \\ &= T_1(xh'_1 - 4h_1 - 3h_3 + xh'_3) \\ &\quad + T_2(-3h_2 + xh'_2 + xh'_3 - 6h_3) \\ &\quad + T_3(h_3 + xh'_5 - 4h_5), \end{aligned}$$

donde  $h'_i \equiv \frac{d}{dx}h_i(x)$  y  $T_1, T_2, T_3$ , los tensores linealmente independientes

$$T_1 = \frac{g_{\mu\nu}x_\alpha}{x^6}; \quad T_2 = \frac{x_\mu x_\nu x_\alpha}{x^8}; \quad T_3 = \frac{g_{\mu\alpha}x_\nu + g_{\nu\alpha}x_\mu}{x^6},$$

con lo que queda el sistema

$$\begin{aligned} xh'_1 - 4h_1 - 3h_3 + xh'_3 &= 0 \\ -3h_2 + xh'_2 + xh'_3 - 6h_3 &= 0 \\ h_3 + xh'_5 - 4h_5 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Con las definiciones de  $H$  y  $G$  (ver (B.8) y (B.10)), ponemos el sistema (B.13) en función de  $h_2, h_5, H$  y  $G$  ( $h_3 = G - h_2$  y  $4h_1 = H - G - 4h_5 - 3h_2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\dot{H} - \dot{h}_5 - \frac{1}{4}\dot{h}_2 - H + (G + 4h_5) &= 0 \\ \dot{G} + 3h_2 - 6G &= 0 \\ \dot{h}_5 + G - h_2 - 4h_5 &= 0. \end{aligned}$$

( $\dot{H} = x \frac{d}{dx} H$ , etc). De las dos últimas despejamos la combinación  $G + 4h_5 = \frac{1}{3}\dot{G} + \dot{h}_5$ , que sustituimos en el paréntesis de la primera:

$$-\left(\frac{1}{4}\dot{h}_2 - \frac{1}{4}\dot{H} + \frac{1}{3}\dot{G}\right) = H.$$

Si definimos

$$C = k \left( \frac{1}{4}h_2 - \frac{1}{4}H + \frac{1}{3}G \right) ; k > 0, \quad (\text{B.14})$$

se cumple que

$$\dot{C} = -kH. \quad (\text{B.15})$$

Como  $H = x^4 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$  (ver (B.8)), y

$$\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle \geq 0, \quad (\text{B.16})$$

se tiene que  $C$  es una función no creciente de  $x$ , o, lo que es equivalente, decrece ante cambios de escala.

La prueba de que (B.16) es cierta viene de una propiedad llamada, en espacio euclídeo, positividad de reflexión.

### B.2.1. Positividad de reflexión

La función de dos puntos<sup>2</sup>  $W(x, y) = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$  de un campo escalar (hermítico)  $\phi(x)$  en  $d$  dimensiones puede ser escrita (usando invariancia de Lorentz y traslación) como

$$W(x, y) = W(x - y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip(x-y)} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0), \quad (\text{B.17})$$

<sup>2</sup>En este apartado de Positividad de reflexión comenzamos trabajando en espacio de Minkowski,  $x$  y  $y$  son los vectores espacio-temporales en espacio e Minkowski.

con  $px = p^0 x^0 - \sum_{i=1}^{d-1} p^i x^i$ ,  $p^2 = (p^0)^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (p^i)^2$  y  $\theta$ , la función escalón. La distribución  $\rho(p^2)$  tiene soporte en  $p^2 \geq 0$ , por lo que, en la integral (B.17), solo se incluyen los momentos que pertenecen al cono de luz superior.

De la positividad del producto interno en el espacio de Hilbert de un vector ( $\mathcal{O} = \int d^d x f(x) \phi(x) |0\rangle$ ) consigo mismo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle 0 | \left( \int d^d x f(x) \phi(x) \right)^\dagger \left( \int d^d y f(y) \phi(y) \right) |0\rangle = \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W(x-y) \\ &= \int d^d p |\hat{f}(p)|^2 \theta(p^0) 2\pi \rho(p^2), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

extraemos la condición

$$\rho(p^2) \geq 0 \quad (\text{B.19})$$

para la distribución  $\rho(p^2)$ . Esto debido a que, en (B.18),  $f(x)$  es una función de prueba arbitraria ( $\hat{f}(p)$  es su transformada de Fourier). La función  $W(x)$  puede extenderse analíticamente  $x \rightarrow x - i\eta$

$$W(x - i\eta) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip(x-i\eta)} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) \quad (\text{B.20})$$

siempre que  $\eta \cdot p \geq 0$ , o, lo que es equivalente, siempre que  $\eta$  pertenezca al cono de luz superior (pues  $\rho(p^2)\theta(p^0)$  tiene soporte en el cono de luz superior). En particular, cuando  $\eta = (x_E^0, 0, 0, \dots)$  con  $(x_E^0 \geq 0)$ , y  $x = (0, x^1, x^2, \dots)$ , se tiene el correlador euclídeo  $W_E$  en tiempo euclídeo positivo.

$$W(-ix_E^0, x^1, x^2, \dots) = W_E(x_E) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-p^0 x_E^0 + ip^i x^i} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) \quad (\text{B.21})$$

con  $x_E = (x_E^0, x^1, x^2, \dots)$ . Analicemos la cantidad  $\int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W(x - \bar{y})$ , con  $\bar{y} = (-y^0, y^1, y^2, \dots)$ , el reflejado en tiempo euclídeo del vector euclídeo  $y$ .

$$\begin{aligned} &\int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W_E(x - \bar{y}) = \\ &= \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W_E(x^0 + y^0, x^1 - y^1, x^2 - y^2, \dots) \\ &= \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) \left( \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-p^0(x^0+y^0)+ip^i(x^i+y^i)} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) \right) \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) \hat{f}_L(p)^* \hat{f}_L(p), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

con

$$\hat{f}_L(p) = \int f(x) e^{-p^0 x^0 + ip^i x^i},$$

una transformada de Laplace en la variable  $x^0$ , y transformada de Fourier en las restantes (la variable  $p$  no pasa a euclídeo). Debido a esta transformada de Laplace, la última igualdad en (B.22) tiene sentido para  $f(x)$  con soporte en la región  $x^0 \geq 0$ .

Como  $\rho(p^2) \geq 0$ , de (B.22) se sigue que

$$\int d^d x d^d y f(x)^* f(\bar{y}) W_E(x - y) = \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W_E(x - \bar{y}) \geq 0 \quad (\text{B.23})$$

para  $f(x)$  con soporte en  $x^0 \geq 0$ . A diferencia de lo que ocurre en (B.18), la primera integral en (B.23) no involucra puntos coincidentes (por la restricción en el soporte de  $f(x)$ ), y podemos tomar  $f(x)$  como una delta centrada en  $x = (|x|/2, 0, 0, \dots)$ , con lo cual

$$0 \leq W_E(x - \bar{x})|_{x=(|x|/2, 0, 0, \dots)} = W_E(|x|/2 - (-|x|/2), 0, 0, \dots) = W_E(|x|, 0, 0, \dots) = W_E(x) .$$

En la última igualdad se utilizó la invariancia de traslación y rotación (Lorentz en Minkowski).

Por tanto

$$W_E(x) \geq 0$$

para cualquier correlador euclídeo de campos escalares, en particular, para (B.16).

De (B.15) y (B.16), escribimos finalmente

$$\dot{C} \leq 0 . \quad (\text{B.24})$$

### B.2.2. Aplicación de (B.24) al grupo de renormalización

Como  $C$  es una combinación (B.14) de funciones, definidas por correladores de  $T_{\mu\nu}$ , es un observable y debe cumplir la ecuación de Callan-Zymanzik

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} \right) C = 0. \quad (\text{B.25})$$

Aquí, el término de la masa está incluido en  $\beta_i \frac{\partial}{\partial g_i}$ , pues podemos escribir la masa de la teoría como otra constante de acoplamiento adimensional  $g$ , por el regulador  $\mu$  (que tiene unidades de masa). Como  $C = C(g_i, \mu, x)$  es adimensional, necesariamente depende de la combinación  $\mu x$ ,  $C(g_i, \mu, x) = C(g_i, \mu x)$ , con lo cual

$$\mu \frac{\partial C(\mu x)}{\partial \mu} = x \frac{\partial C(\mu x)}{\partial x} = \dot{C} . \quad (\text{B.26})$$

La última igualdad se justifica, pues  $\dot{C} = x \frac{dC}{dx}$  se definió (implícitamente) para un valor fijo de las  $g_i$ : las funciones de dos puntos y el resultado  $\dot{C} \leq 0$  se trabajaron con  $g_i$  evaluadas en un valor fijo arbitrario. De (B.25) y (B.26) tenemos

$$\frac{d}{dt} C(g_i) \equiv -\beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} C(g_i, x_{\text{fija}}) = x \frac{d}{dx} C(g_i^{\text{fija}}, x) = \dot{C} \leq 0 , \quad (\text{B.27})$$

con lo que se cumple el primer punto del teorema. La  $C(g_i)$  que escribimos arriba en  $\frac{d}{dt} C(g_i)$ , y a la que se refiere el teorema, es la  $C(g_i, x)$  para una  $x$  fija, si se quiere,  $C(g_i) = C(g_i, x = 1)$ . (B.27) tiene la interpretación de que las transformaciones

$R_t : Q \rightarrow Q$  del grupo de renormalización son “irreversibles”: la existencia de la función monótona  $C$  revela cierta estructura en  $Q$ , en particular, prohíbe que una trayectoria  $\gamma = \{g_i(t)\}$  sea cerrada. Como al renormalizar se pierden efectivamente grados de libertad, debe existir una función (tipo entropía) que dé cuenta de esta pérdida de información. Visto desde este punto de vista general, es de esperar que exista un análogo de este teorema en dimensiones mayores.

En un punto crítico  $\{g_i^*\}$ , la teoría es, por definición, una CFT y  $\Theta = 0$ , lo que implica que  $H = G = 0$  y  $\dot{C} = 0$ . Por (B.27), tenemos, en este caso, que  $C(g_i)$  es estacionaria respecto a las transformaciones  $R_t : Q \rightarrow Q$  del grupo de renormalización. Esto demuestra el segundo punto del teorema (el recíproco también es cierto en  $d = 2$ ). Como función de  $x$ , en el punto crítico

$$C(g_i^*, x) = \text{cte} = \frac{k}{4} h_2(g_i^*, x) = \frac{k}{4} h_2^*,$$

(pues  $H = G = 0$ , ver (B.14)). Atendiendo a (B.3) y (B.12), vemos que  $h_2^* \propto c$ . La constante  $k$  se puede elegir de forma que

$$C(g_i^*) = \frac{k}{4} h_2^* = c,$$

con lo que se cumple el punto 3 del teorema.

### B.2.3. Derivación de la expresión (4.67)

Regresemos a los resultados (B.14), (B.15), más allá de su aplicación al grupo de renormalización. Si la teoría  $\{g_i\}$  involucra un número finito de masas, en el límite  $x \rightarrow 0$ , la función de dos puntos  $\langle T_{\mu\nu}(x) T_{\alpha\beta}(0) \rangle$  debe ser igual a la de una CFT caracterizada por una  $c$ , digamos,  $c_{UV}$ . Lo mismo es de esperar que ocurra con  $x \rightarrow \infty$ : la teoría tiende a una CFT con una  $c = c_{IR}$ , en el sentido de que sus funciones de dos puntos son iguales en ese límite. Esto implica que las funciones  $h_2, h_5$  deben ser  $\propto c_{UV}$  ( $\propto c_{IR}$ ) en el límite  $x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), ( $H = G = 0$ , pues en estos límites la teoría se comporta como una CFT  $\Rightarrow \Theta = 0$ ) y  $C(x \rightarrow 0 \text{ ó } \infty) \rightarrow \frac{k}{4} h_2(x \rightarrow 0 \text{ ó } \infty)$ . De hecho, la definición de  $c_{IR}$  y  $c_{UV}$  viene de (es proporcional a) los límites de la función  $h_2$ , y la coincidencia de estas  $c$ 's con las  $c$  del álgebra correspondiente puede verse como un teorema.

En esta última parte (fuera de la aplicación de (B.24) al teorema) hablamos de los límites en  $x$  de la función  $C(\{g_i\}^{\text{fija}}, x)$ , y de que esta tiende (elegido un valor de  $k$ ) a  $c_{IR}$  y  $c_{UV}$  en los límites  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$  respectivamente. Sin embargo, es de esperar que, la teoría en  $x \rightarrow 0$  y  $\{g_i\}^{\text{fija}}$  se comporte igual<sup>3</sup> a la teoría para  $x$  fija y  $\{g_i\} \rightarrow \{g_i^*\}_{UV}$ , si es que tuviéramos forma de tomar este último límite, y lo mismo para el IR. Esto

<sup>3</sup>Esta igualdad es en el sentido de la coincidencia, por ejemplo, de sus funciones de dos puntos.

conecta la  $C = C(\{g_i\})$  de que se habla en el teorema, con la  $C = C(x) = C(\{g_i\}^{\text{fija}}, x)$  y sus límites en  $x$ , a la que nos referimos ahora.

Buscamos  $k$  imponiendo los límites  $C(x \rightarrow 0) = c_{UV}$  y  $C(x \rightarrow \infty) = c_{IR}$ , y conociendo, para el campo escalar,  $\Delta C = C(x \rightarrow 0) - C(x \rightarrow \infty)$  y  $\Delta c = c_{UV} - c_{IR} = 1 - 0 = 1$ .

$$\begin{aligned}\dot{C} = x \frac{dC}{dx} &= -k H = -k x^4 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle \\ \frac{dC}{dx} &= -k x^3 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle .\end{aligned}$$

Para el campo escalar

$$\begin{aligned}\Delta c = 1 = \Delta C &= -k \int_{-\infty}^0 dx x^3 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle \\ &= k \int_0^{\infty} dx x^3 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle = \frac{k}{2\pi} \underbrace{\int d^2x x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle}_{(3\pi)^{-1} \text{ para campo escalar}} \\ 1 &= k \frac{1}{6\pi^2} \\ k &= 6\pi^2 .\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{C} = x \frac{dC}{dx} = -6\pi^2 H = -6\pi^2 x^4 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle ,$$

o, lo que interesa para (4.67),

$$\Delta C = \Delta c = c_{UV} - c_{IR} = 6\pi^2 \int_0^{\infty} dx x^3 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle = 3\pi \int d^2x x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle . \quad (\text{B.28})$$



# Bibliografía

- [1] Hertzberg, M. P., Wilczek, F. Some Calculable Contributions to Entanglement Entropy. *Phys.Rev.Lett.*, **106** (050404), 2011. [arXiv:1007.0993]. [1](#), [30](#), [47](#)
- [2] Adler, S. L. Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory. *Reviews of Modern Physics*, **54** (3), 1982. [1](#), [5](#), [8](#), [9](#), [15](#), [42](#)
- [3] Cooperman, J. H., Luty, M. A. Renormalization of Entanglement Entropy and the Gravitational Effective Action, 2013. [arXiv:1302.1878v1 [hep-th]]. [1](#), [36](#), [37](#), [39](#)
- [4] Larsen, F., Wilczek, F. Renormalization of black hole entropy and of the gravitational coupling constant. *Nucl.Phys. B*, **458**, 249–266, 1996. [arXiv:hep-th/9506066]. [1](#), [36](#), [37](#), [63](#)
- [5] Casini, H., Huerta, M. On the RG running of the entanglement entropy of a circle. *Phys. Rev. D*, **85** (125016), 2012. [arXiv:1202.5650v2]. [2](#)
- [6] Klebanov, I. R., Kutasov, D., Murugan, A. Entanglement as a Probe of Confinement. *Nucl.Phys.B*, **796**, 274–293, 2008. [ arXiv:0709.2140v2 ]. [2](#)
- [7] Pakman, A., Parnachev, A. Topological Entanglement Entropy and Holography. *JHEP*, **0807** (0807:097), 2008. [ arXiv:0805.1891v2 ]. [2](#)
- [8] Calabrese, P., Cardy, J. L. Entanglement Entropy and Quantum Field Theory: A Non-Technical Introduction. En: International Journal of Quantum Information. 2005. [arXiv:quant-ph/0505193v1]. [2](#), [30](#), [56](#), [69](#)
- [9] Calabrese, P., Cardy, J. L. Entanglement Entropy and Quantum Field Theory. *JSTAT*, 2004. [arXiv:hep-th/0405152]. [2](#), [57](#)
- [10] Holzhey, C., Larsen, F., Wilczek, F. Geometric and Renormalized Entropy in Conformal Field Theory. *Nucl.Phys. B*, **424**, 443–467, 1994. [arXiv:hep-th/9403108v1]. [2](#), [57](#)
- [11] Zel'dovich, Y. B. . *Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma*, (883), 1967. [JETP Lett 6, 316]. [5](#)
- [12] Sakharov, A. . *Teor. Mat. Fiz.*, **23** (178), 1975. [Theor. Math. Phys. (USSR) 23, 435]. [5](#)



- [13] Weinberg, S. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 2000. [7](#)
- [14] Misner, C. W., S. Thorne, K., Wheeler, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company San Francisco, 1970. [10](#)
- [15] Abers, E. S., Lee, B. W. . *Phys. Rep.*, **9** (1), 1973. [14](#)
- [16] Aspect, A., et.all. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, **49** (25), 1804–1807, 1982. [18](#), [19](#)
- [17] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.*, **47**, 777–780, 1935. [18](#)
- [18] Bell, J. S. On the Einstein Podolski Rosen paradox. *Physics 1*, págs. 195–200, 1964. [19](#)
- [19] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Syndicate of the University of Cambridge, 2000. [20](#)
- [20] Sorkin, R. On the entropy of the vacuum outside a horizon. En: International Conference on General Relativity and Gravitation. 1983. [<http://www.perimeterinstitute.ca/personal/rsorkin/some.papers/31.padova.entropy.pdf>]. [20](#), [36](#)
- [21] H. Casini, M. Huerta. Entanglement entropy in free quantum field theory. *J. Phys. A*, **42** (504007), 2009. [arXiv:0905.2562v3]. [21](#), [32](#), [33](#), [56](#)
- [22] Callan, C., Wilczek, F. On geometric entropy. *Phys. Lett. B*, **333**, 55–61, 1994. [arXiv:hep-th/9401072v3]. [21](#), [36](#)
- [23] Solodukhin, S. Entanglement entropy of black holes. *Living Rev. Relativity*, **14**, 2011. [arXiv:1104.3712v1]. [25](#), [36](#)
- [24] Vassilevich, D. V. Heat kernel expansion: user's manual. *Phys. Rept.*, **388**, 279–360, 2003. [arXiv:hep-th/0306138v3]. [27](#)
- [25] URL [http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function). [29](#), [65](#)
- [26] Casini, H., Fosco, C. D., Huerta, M. Entanglement and alpha entropies for a massive Dirac field in two dimensions. *J. Stat. Mech.* 0507, (P07007), 2005. [arXiv:cond-mat/0505563v2]. [32](#)
- [27] Kleinert, H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymers Physics, and Financial Markets*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009. [32](#)
- [28] Kabat, D. Black Hole Entropy and Entropy of Entanglement. *Nucl. Phys. B*, **453**, 281–302, 1995. [arXiv:hep-th/9503016]. [33](#), [36](#)

- [29] Hawking, S. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199–220, 1975. [36](#)
- [30] Bekenstein, J. D. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D7*, págs. 2333–2346, 1973.
- [31] Hawking, S. Black Holes and Thermodynamics. *Phys. Rev. D13*, págs. 191–197, 1976.
- [32] Wald, R. M. The thermodynamics of black holes. *Living Rev. Rel.* **4**, 2001. [arXiv:gr-qc/9912119]. [36](#)
- [33] Solodukhin, S. N. The conical singularity and quantum corrections to entropy of black hole. *Phys.Rev. D51*, págs. 609–617, 1995. [arXiv:hep-th/9407001]. [36](#)
- [34] Fursaev, D. V. Black hole thermodynamics and renormalization. *Mod.Phys.Lett. A10*, págs. 649–656, 1995. [arXiv:hep-th/9408066].
- [35] Fursaev, D. V., Solodukhin, S. N. On one loop renormalization of black hole entropy. *Phys.Lett. B*, **365**, 51–55, 1996. [arXiv:hep-th/9412020].
- [36] Demers, J., Lafrance, R., Myers, R. C. Black hole entropy without brick walls. *Phys. Rev. D52*, 1995. [arXiv:gr-qc/9503003].
- [37] Fursaev, D. V., Miele, G. Cones, spins and heat kernels. *Nucl.Phys. B*, **484**, 697–723, 1997. [36](#)
- [38] Susskind, L., Uglum, J. Black hole entropy in canonical quantum gravity and superstring theory. *Phys.Rev.D50*, págs. 2700–2711, 1994. [arXiv:hep-th/9401070v3]. [36](#), [63](#)
- [39] Birrell, N. D., Davies, P. C. W. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press, 1982. [44](#), [63](#)
- [40] Cardy, J. L. Conformal Invariance and Statistical Mechanics. En: E. Brezin, J. Zinn-Justin (eds.) Les Houches, Session XLIX, 1988, Champs, Cordes et Phenomenes Critiques: Fields, Strings and Critical Phenomena, edited by, Elsevier Science Publishers BV A989. [56](#), [70](#)
- [41] Zamolodchikov, A. B. “Irreversibility” of the flux of the renormalization group in a 2d field theory. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **43**, 565, 1986. [56](#), [58](#), [70](#)
- [42] Hertzberg, M. P. Entanglement Entropy in Scalar Field theory. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46** (015402), 2013. [64](#)
- [43] Ryu, S., Takayanagi, T. Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT. *Phys. Rev. Lett.*, **96** (181602), 2006. [arXiv:hep-th/0603001]. [64](#)
- [44] Watson, G. N. Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, 1922. [66](#)
- [45] Completeness and basic properties of sets of special functions. Cambridge University Press, 1977. [66](#), [67](#)



# Agradecimientos

A mi director Horacio

A Mahe

A mi familia

A Ricardo y Cristina

