

TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**ENTROPÍA DE ENTRELAZADO EN TEORÍA CUÁNTICA DE  
CAMPOS EN (1+1) DIMENSIONES**

**Lic. Germán Malfatti**  
Maestrando

**Dra. Marina Huerta**  
Director

**Miembros del Jurado**

Dr. Diego Márques  
Dr. Diego Mazzitelli  
Dr. Roberto Trinchero

1 de Diciembre de 2014

Grupo de Partículas y Campos

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



# Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Entropía Cuántica y Operador Densidad</b>	<b>3</b>
2.1. Operador Densidad . . . . .	3
2.1.1. Estados puros y estados mixtos . . . . .	4
2.1.2. Operador Densidad reducido . . . . .	4
2.1.3. Purificación de Estados . . . . .	5
2.2. Entropía de von Neumann . . . . .	5
2.3. Extensión a la Teoría Cuántica de Campos . . . . .	6
<b>3. Cálculo de entropía para un campo escalar en la red</b>	<b>9</b>
3.1. Propiedades del campo escalar . . . . .	9
3.2. Normalización del Operador Densidad . . . . .	10
3.3. Entropía en términos del operador densidad . . . . .	10
3.4. Relación de la entropía con los correladores de los campos . . . . .	11
3.5. Especialización para un Hamiltoniano cuadrático . . . . .	14
3.6. Cálculo numérico en (1+1) dimensiones . . . . .	16
<b>4. Cálculo de entropía para un campo fermiónico en la red</b>	<b>21</b>
4.1. Propiedades del campo fermiónico . . . . .	21
4.2. Normalización del Operador Densidad . . . . .	22
4.3. Entropía en términos del operador densidad . . . . .	22
4.4. Relación de la entropía con los correladores de los campos . . . . .	23
4.5. Cálculo de correladores para un espacio infinito . . . . .	24
4.6. Resultados en (1+1) dimensiones . . . . .	26
<b>5. Sistema de fermiones en escalera</b>	<b>29</b>
5.1. Hamiltoniano de fermiones en escalera y su traducción a la teoría de campos . . . . .	29
5.2. Cálculo de la entropía asociada a la cadena A y Hamiltoniano Modular . . . . .	31
5.3. Extensión a Teorías Generalizadas de Campos Libres . . . . .	36
<b>6. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A. Integral de la entropía para el sistema de fermiones en escalera</b>	<b>41</b>

Bibliografía

45

# Resumen

En el presente trabajo se desarrolla el concepto de entropía de entrelazamiento (*entanglement*) en teorías cuánticas de campos en (1+1) dimensiones. Se realiza el cálculo explícito y detallado de la forma de la misma para campos libres escalares y fermiónicos, ambos en (1+1) dimensiones empleando métodos numéricos. Luego, para un sistema de dos especies de fermiones en escalera, se estudia la entropía asociada a una especie, obteniendo divergencias volumétricas en lugar de logarítmicas como en el caso geométrico de entropía de regiones espaciales. Se analiza el límite del continuo y también su concordancia con los límites de pequeños y grandes espaciamientos de red para la teoría discreta. Finalmente, se extiende el estudio a teorías generalizadas de campos libres (*Generalized Free Fields*), permitiendo entender mejor las razones de la dependencia volumétrica mencionada.



# Abstract

In the present work we study the concept of entanglement entropy in quantum field theories in (1+1) dimensions. We show the explicit calculation of this quantity for free scalar and fermionic fields, both in (1+1) dimensions using numerical methods. Then, for a two species ladder fermion system, we study the entropy associated to one species, resulting in volumetric divergencies instead of logarithmic ones as in the case of geometric entropy for spatial regions. We study the continuum limit and also its correspondence with the small and large lattice spacing limits in the discrete theory. Finally, for a better understanding of the volumetric dependencies pointed above, we extend the study to the case of generalized free fields theories.





# Capítulo 1

## Introducción

Si se tiene un sistema cuántico formado por dos subsistemas  $V$  y  $-V$ , y el sistema total no se puede escribir como producto directo de los dos subsistemas, se dice que el sistema total presenta entrelazamiento o *entanglement*. En estas condiciones, un cambio en cualquiera de los dos subsistemas afectará al otro.

Si bien este tipo de sistemas es conocido hace varias décadas en el marco de la teoría de la información cuántica, su estudio cobró importancia en otras áreas de la física últimamente debido a ciertas aplicaciones. Entre las áreas de interés actuales, se pueden citar la física de agujeros negros [1] y el principio holográfico [2], la teoría cuántica de la información [3], y el esclarecimiento de algunos aspectos de las teorías cuánticas de campos [4][5]. Por otro lado, en los sistemas de materia condensada, se estudian las propiedades del vacío en sistemas de baja dimensionalidad, en términos de los exponentes críticos, lo cual tiene una relación directa con los cálculos de entropía geométrica[6][7].

Si bien hay muchos trabajos al respecto, este tema aún tiene grandes interrogantes abiertos respecto de teorías de campos interactuantes, y la relación de la entropía con la información accesible de un sistema.

En el capítulo 2 daremos las definiciones correspondientes a entropía clásica y cuántica y su definición a través del operador densidad. En el capítulo 3 mostraremos el desarrollo explícito de la entropía para un campo escalar en una red discreta, su relación con los correladores del sistema para el estado de vacío, y la forma de realizar un cálculo numérico de la misma en red unidimensional. En el capítulo 4 realizaremos el mismo desarrollo para un campo fermiónico, pero detallando el cálculo analítico de los correladores para un sistema infinito. En el capítulo 5 para un sistema de cadenas de fermiones en escalera calcularemos la entropía de una de las dos cadenas con herramientas de teoría de campos, viendo que se obtiene un resultado que tiene dependencia volumétrica en lugar de superficial. Siguiendo a esto analizaremos la interpretación del Hamiltoniano Modular y el operador densidad en el límite de bajos momentos e interpretaremos el resultado definiendo un sistema a una temperatura efectiva. Compararemos este resultado con los resultados obtenidos para los límites de pequeños y grandes espaciamientos para la teoría del discreto. Finalmente analizaremos una extensión del cálculo para teorías generalizadas de campos libres (GFF: *Generalized Free Fields* en inglés), analizando la dependencia de la entropía con el volumen del sistema cuando se traza sobre grados de libertad internos.



## Capítulo 2

# Entropía Cuántica y Operador Densidad

En mecánica estadística clásica, se define la entropía de un sistema como:

$$S = -k_B \ln(\Omega), \quad (2.1)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann, y  $\Omega$  se define como el número de microestados accesibles del sistema. La definición de la cantidad de estados accesibles, depende de una discretización del espacio de fases del sistema, que es en principio arbitraria para los sistemas continuos.

En mecánica cuántica, es natural extender esta definición de entropía, dado que los estados accesibles de un sistema están unívocamente determinados por un operador densidad, que define completamente al estado. A continuación describiremos ciertas propiedades de este operador, que nos permitirán extender la definición de entropía al caso continuo.

### 2.1. Operador Densidad

En mecánica cuántica, el estado de un sistema está representado por un vector  $|\psi\rangle$  en un espacio de Hilbert  $H$ . En el caso más general, si se tiene un ensamble de estados cuánticos, no es posible representar al sistema como un único vector del espacio  $H$ . En este caso, a cada estado  $|\psi_i\rangle$  del ensamble se le asigna una probabilidad clásica  $W_i$ , y el sistema queda representado por el operador densidad, definido como:

$$\rho = \sum_i W_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.2)$$

Al ser  $W_i$  la probabilidad clásica de encontrar al sistema en un dado estado  $|\psi_i\rangle$ , se verifica que:

$$\text{tr}(\rho) = \sum_i W_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i W_i = 1. \quad (2.3)$$

El valor de expectación de un operador  $A$  se calcula haciendo el producto de los valores de expectación en cada estado, multiplicado por la probabilidad de cada estado, luego:

$$\langle A \rangle = \sum_i W_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_i W_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \text{tr}(A\rho). \quad (2.4)$$

El operador densidad así definido, es hermítico, definido positivo, y de traza unidad. Estas propiedades son independientes de la base del espacio  $H$  elegida, y permiten ver que los autovalores de este operador, están comprendidos entre 0 y 1.

Por otro lado, al ser sus autovalores positivos, existe una transformación unitaria que diagonaliza al operador densidad, de manera que:

$$\rho_D = U^\dagger \rho U. \quad (2.5)$$

### 2.1.1. Estados puros y estados mixtos

Si el ensamble de estados tiene un único estado, el operador densidad se escribe simplemente como el proyector sobre ese estado:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi|, \quad (2.6)$$

en este caso, se dice que el estado del sistema corresponde a un *estado puro*. Si el sistema está en un estado puro, se cumple que  $\rho^2 = \rho$ . Por esto último, y por (2.5), resulta que existe una base del espacio  $H$  donde  $\rho$  se escribe como en (2.6), y  $|\psi\rangle$  es un elemento de esa base.

En contraparte, un estado mixto es el cual tiene más de un estado en el ensamble, por lo cual todas sus probabilidades  $W_i$  son menores a la unidad. De esto se desprende que

$$\text{tr}(\rho^2) = \sum_i W_i^2 < 1. \quad (2.7)$$

Por lo cual, para que un operador densidad describa un estado puro, es necesario y suficiente que:

$$\text{tr}(\rho^2) = 1. \quad (2.8)$$

De estas definiciones, se ve que siempre es posible representar a un estado cuántico, por un operador densidad, sea para estados puros o estados mixtos. En cualquiera de los dos casos se mantienen las propiedades de hermiticidad y autovalores positivos del operador, y los valores medios de cualquier operador del sistema se calculan utilizando (2.4).

### 2.1.2. Operador Densidad reducido

Consideremos ahora, un sistema compuesto por subsistemas con espacios de Hilbert completos para cada uno de éstos. En el caso de dos subsistemas A y B, un elemento del espacio se puede escribir de la manera:

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle; \quad |\psi\rangle \in H_A \otimes H_B. \quad (2.9)$$

Si  $\dim(H_A) = n$  y  $\dim(H_B) = m$ , el operador densidad tiene  $(n \times m)^2$  elementos. Para este tipo de sistemas, el operador densidad definido como (2.2), tiene información sobre los dos subsistemas, y los coeficientes  $W_i$  corresponderán a probabilidades sobre el espacio  $H = H_A \otimes H_B$ .

Sin embargo, si no se conoce la información sobre uno de los dos subsistemas, se puede realizar una traza sobre los grados de libertad del subespacio (por ejemplo de  $H_B$ , obteniendo un operador densidad que contenga información del resto del sistema). Se define entonces el *operador densidad reducido sobre el sistema A*, de la forma:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n \times m} W_i \langle \varphi_{B_j} | \psi \rangle \langle \psi | \varphi_{B_j} \rangle, \quad (2.10)$$

de lo cual se ve que  $\rho_A$  es el resultado de proyectar los elementos de la diagonal del operador  $\rho$ , sobre todos los elementos de la base de  $H_B$ .

Este concepto se puede generalizar fácilmente para casos donde el espacio  $H$  se pueda descomponer en un producto tensorial de un número arbitrario de subespacios.

### 2.1.3. Purificación de Estados

De manera inversa a la reducción de un operador densidad, se puede *purificar* un estado definido por un operador densidad, definiendo otro en un espacio extendido. Supongamos que tenemos un operador que actúa sobre un espacio  $H_A$ , con  $\dim(H_A) = n$  y autoestados  $|\varphi_i\rangle$ :

$$\rho_A = \sum_{i=1}^n W_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|. \quad (2.11)$$

Construimos entonces un espacio  $H_B$ , con  $\dim(H_A) = \dim(H_B)$ , y una base ortonormal de autoestados  $\{|\varphi'_i\rangle\}$ . Definimos entonces el *estado purificado*:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{W_i} |\varphi_i\rangle \otimes |\varphi'_i\rangle; \in H_A \otimes H_B, \quad (2.12)$$

$$\rho' = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.13)$$

Es fácil ver que el operador densidad así definido, representa un estado puro en el espacio  $H_A \otimes H_B$ . Por otro lado, trazando sobre  $H_B$  resulta:

$$\begin{aligned} Tr_B(\rho') &= Tr_B\left(\sum_{i,j} \sqrt{W_i W_j} |\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle \langle \varphi'_j| \otimes \langle \varphi'_j|\right) \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ij} \sqrt{W_i W_j} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j| = \rho. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es decir que, a partir de cualquier estado representado por un operador densidad, se puede definir un operador densidad en un espacio más grande, que represente un estado puro, cuya traza sea el operador densidad original. Cabe destacar que para hacer esta construcción, lo único que se necesita es construir un espacio adicional  $H_B$ , con una base ortonormal que se pueda construir por biyección con los elementos de la base del espacio original  $H_A$ .

Por otro lado, si partimos de un operador densidad que represente un estado puro, en un espacio de Hilbert separable en dos subespacios  $H_A$  y  $H_B$ , se comprueba la igualdad:

$$\text{tr}\{[(\text{tr}_B(\rho))^n]\} = \rho_A^n = \text{tr}\{[(\text{tr}_A(\rho))^n]\} = \rho_B^n \quad \forall n. \quad (2.15)$$

Por lo tanto, los operadores densidad reducidos sobre cada espacio, tendrán el mismo espectro.

## 2.2. Entropía de von Neumann

Como se adelantó al principio del capítulo, la forma de definir la entropía en sistemas cuánticos es análoga a la forma de la mecánica estadística. En esta última, se define la entropía de un sistema como:

$$S = -k_B \sum_i W_i \ln(W_i), \quad (2.16)$$

donde  $W_i$  es la probabilidad del sistema de estar en un microestado determinado y  $K_B$  es la constante de Boltzmann. La cantidad de estados accesibles se define dividiendo el volumen del espacio de fases, por un volumen elemental de una “celda unidad” definida arbitrariamente.

Como vimos antes, en mecánica cuántica, la probabilidad de que el sistema esté en un estado determinado está definida por los coeficientes del operador densidad. Por lo tanto, la analogía es inmediata, y la entropía en el caso cuántico queda definida como:

$$S(\rho) = -k_B \sum_i W_i \ln(W_i) = -\text{tr}(\rho \ln \rho), \quad (2.17)$$

con  $W_i$  los autovalores del operador densidad, los cuales se interpretan como la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado puro  $|\psi_i\rangle$ . La expresión de la entropía en términos del operador densidad, es conocida como Entropía de Von Neumann.

De (2.17) se ve que la entropía es nula únicamente cuando existe un  $W_i = 1$ , es decir, cuando el sistema corresponde a un estado puro. De ahora en más consideraremos  $K_B = 1$ .

### 2.3. Extensión a la Teoría Cuántica de Campos

Hasta ahora hemos visto la definición de entropía de entrelazado referida a sistemas de mecánica cuántica. La extensión a una teoría cuántica de campos, es natural a partir del operador densidad asociado al estado que consideremos. Resulta útil sin embargo, como se verá en el capítulo siguiente, interpretar este último caso como el límite del primero. Por ejemplo, un campo escalar libre puede verse como el límite del continuo de una colección de osciladores “nombrados” con índices espaciales discretos.

En particular, si el estado definido es el vacío y estamos interesados en la entropía de una región  $V$  del espacio, definimos la matriz densidad reducida asociada a  $V$  como:

$$\rho_V = \text{tr}_{-V} |0\rangle\langle 0|, \quad (2.18)$$

en donde se traza sobre los grados de libertad del complemento de  $V$  ( $-V$ ). Sin embargo, incluso en el estado de vacío, esto implica tener que trabajar con cantidades divergentes. Esto se debe a que uno realiza una traza sobre infinitos grados de libertad, en distancias tan cortas como se quiera. Inclusive la entropía dentro de la región  $V$  resulta divergente debido a las fluctuaciones del estado de vacío en la frontera de  $V$ , teniendo que utilizar para los cálculos un cutoff ultravioleta.

Para realizar un análisis más detallado de estos conceptos, veamos la expansión general de la entropía. En cualquier teoría de campos para  $d$  dimensiones espaciales, deberíamos tener que:

$$S(V) = g_{d-1}[\partial V] \epsilon^{-(d-1)} + \dots + g_1[\partial V] \epsilon^{-1} + g_0[\partial V] \ln(\epsilon) + S_0(V), \quad (2.19)$$

donde  $S_0(V)$  es una contribución finita,  $\epsilon$  es un cutoff ultravioleta, y las  $g_i$  son funciones locales y extensivas en la frontera  $\partial V$ . Es interesante remarcar que el principal término divergente  $g_{d-1}[\partial V]$  es proporcional a la potencia  $(d-1)$  del tamaño de  $V$ , lo que es conocido como la ley de áreas.

Una interpretación interesante de por qué la serie se corta en esta potencia es la siguiente: si el estado inicial de  $V + V_-$  es un estado puro, entonces  $\rho_V = \rho_{-V}$  y  $S_V = S_{-V}$ . Por lo tanto, la entropía no podrá depender del volumen de la región, si no que deberá depender a lo sumo de cantidades compartidas por las dos regiones, como ser el área. Un análisis más detallado de este fenómeno puede verse en [8].

Como se dijo anteriormente, los términos divergentes de la expansión provienen de fluctuaciones de alta energía de vacío en la frontera de  $V$ . Sin embargo, los coeficientes  $g_i$  para  $i > 0$  que acompañan a éstos términos no representan cantidades físicas, ya que dependen de la regularización utilizada. Estos coeficientes son locales y tienen un carácter geométrico muy fuerte: dependen de parámetros que caracterizan la geometría de la frontera de  $V$ . El coeficiente  $g_0$  por otro lado, es un coeficiente universal que no depende de la regularización.

De los primeros resultados que se conocen para la entropía de entrelazado, uno muy interesante corresponde a una teoría conforme en un segmento en (1+1) dimensiones [1], donde la entropía para el segmento tiene la forma:

$$S(L) = cte + c(0)\ln\left(\frac{L}{\epsilon}\right) \quad (2.20)$$

Una particularidad de trabajar en (1+1) dimensiones, es que se anula el término de área, y es relativamente sencillo extraer información del término logarítmico. La importancia del coeficiente logarítmico en (1+1) dimensiones es que da lugar a un teorema C entrópico análogo al teorema C de Zamolochikov [9] [10]. El análisis de esta función y del teorema escapa a los propósitos de este trabajo, pero es importante remarcar que el valor de  $c(0)$  en el punto conforme es un tercio de la carga central de Virasoro, cantidad que caracteriza a la teoría de la que se parte.

Para campos masivos, existen trabajos realizados que permiten obtener esta cantidad en términos de la entropía para  $t$  grande, con  $t = L m$  [4]. El límite de la entropía es:

$$S(t = \infty) = cte - c(0) \ln(m\epsilon), \quad (2.21)$$

el cual también chequearemos en nuestro análisis numérico.





## Capítulo 3

# Cálculo de entropía para un campo escalar en la red

A continuación calcularemos la entropía geométrica para una región acotada del espacio, para el estado de vacío de un campo escalar. Se establecerá una relación de la entropía con los correladores del campo en el estado de vacío. Luego se explicará brevemente la forma de discretizar el Hamiltoniano para este campo, y se mostrarán los resultados obtenidos de un análisis numérico en (1+1) dimensiones.

### 3.1. Propiedades del campo escalar

Supongamos que tenemos un campo escalar a tiempo fijo, en un espacio discretizado, que pensemos infinito, y queremos calcular la entropía dentro de una región acotada de volumen  $V$ . Entonces las coordenadas y los momentos conjugados de los campos, obedecerán las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\phi_i, \pi_j] = i\delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j] = [\pi_i, \pi_j] = 0. \quad (3.1)$$

Definamos ahora de manera genérica los correladores de los campos dentro de la región  $V$ :

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = X_{ij} \quad \langle \pi_i \pi_j \rangle = P_{ij}. \quad (3.2)$$

$$\langle \phi_i \pi_j \rangle = \langle \pi_j \phi_i \rangle = \frac{i}{2} \delta_{ij}. \quad (3.3)$$

Las matrices  $X$  y  $P$  son reales, hermiticas y definidas positivas. La positividad de  $\langle (\phi_l + i\lambda_{lk}\pi_k)(\phi_m - i\lambda_{ms}\pi_s) \rangle$  para constantes arbitrarias  $\lambda_{lk}$  implica que:

$$X.P \geq \frac{1}{4}. \quad (3.4)$$

Asumiremos que todos los demás correladores son obtenidos de éstos, mediante el teorema de Wick:

$$\langle \mathcal{O} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_{2k}} \rangle = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\sigma} \langle \mathcal{O} f_{i_{\sigma(1)}} f_{i_{\sigma(2)}} \rangle \dots \langle \mathcal{O} f_{i_{\sigma(2k-1)}} f_{i_{\sigma(2k)}} \rangle, \quad (3.5)$$

donde la suma es sobre todos los índices de permutaciones  $\sigma$ , los  $f_i$  pueden ser cualquiera de las variables de campos o momentos, y  $\mathcal{O}$  es un orden preescrito. Este orden puede ser, por ejemplo,

escribir todas las variables de campo a la izquierda y las de momentos a la derecha. Si esta ecuación es válida para un orden dado, se cumple automáticamente para cualquier otro orden.

Si el campo cumple el teorema de Wick, de los trabajos de [11], se sabe que se puede escribir un operador densidad para el estado de vacío dentro de  $V$ , de la forma:

$$\rho_V = K e^{-\mathcal{H}} = K e^{-\sum_l \epsilon_l a_l^\dagger a_l}, \quad (3.6)$$

con  $K$  una constante de normalización.

### 3.2. Normalización del Operador Densidad

Calculemos ahora la constante de normalización  $K$ , de manera que la traza de  $\rho_V$  sea la unidad.

$$\text{tr}(\rho_V) = K \sum_n \prod_l \langle n | e^{-\epsilon_l a_l^\dagger a_l} | n \rangle, \quad (3.7)$$

donde la suma sobre  $n$  denota a todos los posibles números de partículas y momentos de la base del espacio de Fock. Para cualquier número de ocupación de partículas en un estado de energía  $\epsilon_n$ , resulta:

$$\langle n | e^{-\epsilon_l a_l^\dagger a_l} | n \rangle = e^{-\epsilon_l n_l}, \quad (3.8)$$

donde para hacer la notación más simple, denotamos por  $n_l$  al número de partículas con energía  $\epsilon_l$ . La ecuación (3.7) queda:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho_V) &= K \sum_n \prod_l e^{-\epsilon_l n_l} = K \sum_n \prod_l (e^{-\epsilon_l})^{n_l} \\ &= K \sum_{n_0, n_1, n_2, \dots} (e^{-\epsilon_0})^{n_0} (e^{-\epsilon_1})^{n_1} (e^{-\epsilon_2})^{n_2} \dots (e^{-\epsilon_l})^{n_l} \\ &= K \prod_l \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_l}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

lo cual, pidiendo la normalización igual a la unidad, resulta

$$K = \prod_l (1 - e^{-\epsilon_l}). \quad (3.10)$$

### 3.3. Entropía en términos del operador densidad

Obtenida la constante de normalización del operador densidad, nos interesa calcular la entropía de la manera definida por la ecuación (2.17).

$$\begin{aligned}
S &= - \sum_n \langle n | K e^{-\sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i} \ln \left( K e^{-\sum_j \epsilon_j a_j^\dagger a_j} \right) | n \rangle \\
&= - \sum_n \langle n | \underbrace{K e^{-\sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i}}_{\rho_V} \ln(K) | n \rangle + \sum_n \langle n | K e^{-\sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i} \sum_j \epsilon_j a_j^\dagger a_j | n \rangle \\
&= - \ln(K) + K \sum_n \langle n | \prod_i e^{\epsilon_i a_i^\dagger a_i} \sum_j \epsilon_j a_j^\dagger a_j | n \rangle \\
&= - \ln(K) + K \sum_j \sum_{n_j, n_i} n_j \epsilon_j \prod_i (e^{-\epsilon_i n_i}) \\
&= - \ln(K) + K \sum_j \sum_{n_j, n_i} n_j \epsilon_j e^{-\epsilon_j n_j} \prod_{i \neq j} (e^{-\epsilon_i n_i}). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Ahora bien, para la parte de la sumatoria sobre  $n_j$  hacemos el cambio de variables:

$$\begin{aligned}
q = e^{-\epsilon_j} \Rightarrow \epsilon_j &= - \ln(q) \Rightarrow \\
\sum_{n_j} n_j \epsilon_j e^{-\epsilon_j n_j} &= - \sum_{n_j} n_j \ln(q) q^{n_j} = -q \frac{\ln(q)}{(q-1)^2} \Rightarrow \\
\sum_{n_j} n_j \epsilon_j e^{-\epsilon_j n_j} &= \frac{e^{-\epsilon_j} \epsilon_j}{(e^{-\epsilon_j} - 1)^2}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Reescribiendo la entropía:

$$S = - \ln(K) + K \sum_j \frac{e^{-\epsilon_j} \epsilon_j}{(e^{-\epsilon_j} - 1)^2} \sum_{n_i} \prod_{i \neq j} (e^{-\epsilon_i n_i}). \tag{3.13}$$

Reemplazando la constante  $K$  por el valor hallado en (3.10):

$$\begin{aligned}
S &= \ln \left( \prod_l (1 - e^{-\epsilon_l}) \right) + \prod_k (1 - e^{-\epsilon_k}) \sum_j \frac{e^{-\epsilon_j} \epsilon_j}{(e^{-\epsilon_j} - 1)^2} \sum_{n_i} \prod_{i \neq j} (e^{-\epsilon_i n_i}) \\
&= \ln \left( \prod_l (1 - e^{-\epsilon_l}) \right) + \prod_k (1 - e^{-\epsilon_k}) \sum_j \frac{e^{-\epsilon_j} \epsilon_j}{(e^{-\epsilon_j} - 1)^2} \prod_{i \neq j} \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_i}} \\
&= \ln \left( \prod_l (1 - e^{-\epsilon_l}) \right) + \sum_j \frac{(1 - e^{-\epsilon_j}) e^{-\epsilon_j} \epsilon_j}{(e^{-\epsilon_j} - 1)^2}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Con lo cual, reordenando y poniendo el mismo subíndice a las dos sumas resulta:

$$S = \sum_l \left( - \ln(1 - e^{-\epsilon_l}) + \frac{e^{-\epsilon_l}}{1 - e^{-\epsilon_l}} \right). \tag{3.15}$$

### 3.4. Relación de la entropía con los correladores de los campos

Veamos ahora la forma de relacionar la expresión (3.15) con los correladores de los campos, idea que fue introducida por primera vez por Peschel [11].

Supongamos que los campos se pueden escribir en términos de los operadores de creación y destrucción del operador densidad, con unos coeficientes a determinar, de la forma:

$$\phi_i = \sum_j \alpha_{ij}^* a_j^\dagger + \alpha_{ij} a_j \quad (3.16)$$

$$\pi_i = \sum_j -i\beta_{ij}^* a_j^\dagger + i\beta_{ij} a_j. \quad (3.17)$$

Aplicando las relaciones de conmutación (3.1) y  $[a_i, a_j^\dagger] = i\delta_{ij}$ , se obtiene la relación

$$\alpha^* \beta^T + \alpha \beta^\dagger = -1. \quad (3.18)$$

Como  $\langle \phi_i \pi_j \rangle = (i/2)\delta_{ij}$ , podemos escribir ésto en términos del operador densidad, para obtener información sobre los coeficientes de los campos.

$$\begin{aligned} \langle \phi_i \pi_j \rangle &= \text{tr}(\rho_V \phi_i \pi_j) \\ &= \text{tr} \left[ K e^{-\sum_l a_l^\dagger a_l \epsilon_l} \left( -i\alpha_{ik}^* \beta_{jm}^* a_k^\dagger a_m^\dagger + i\alpha_{ik}^* \beta_{jm} a_k^\dagger a_m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\alpha_{ik} \beta_{jm}^* a_n a_m^\dagger + i\alpha_{ik} \beta_{jm} + a_k a_m \right) \right]. \end{aligned}$$

Los términos que tienen dos operadores de creación o dos operadores de destrucción no van a contribuir en la traza, luego, usando las relaciones de conmutación, la expresión resulta:

$$\text{tr}(\rho_V \phi_i \pi_j) = \text{tr} \left[ K e^{-\sum_l a_l^\dagger a_l \epsilon_l} \left( i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} a_k^\dagger a_k - i\alpha_{ik} \beta_{jk}^* (1 + a_k^\dagger a_k) \right) \right]. \quad (3.19)$$

El cálculo para el primer término de esta ecuación resulta:

$$\begin{aligned} \sum_n \langle n | K e^{-\sum_l a_l^\dagger a_l \epsilon_l} i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} a_k^\dagger a_k | n \rangle &= \\ &= \sum_{n_l, n_k} K \prod_l e^{\epsilon_l n_l} i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} n_k = \\ &= K \sum_{n_k = n_l} e^{\epsilon_k n_k} n_k i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} \sum_{n_l \neq n_k} \prod_{l \neq k} e^{\epsilon_l n_l} = \\ &= K \frac{e^{-\epsilon_k}}{(e^{-\epsilon_k} - 1)^2} i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} \prod_{l \neq k} \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_l}} = \\ &= \prod_t (1 - e^{-\epsilon_t}) \frac{e^{-\epsilon_k}}{(e^{-\epsilon_k} - 1)^2} i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} \prod_{l \neq k} \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_l}} = \\ &= i\alpha_{ik}^* \beta_{jk} \frac{1}{e^{\epsilon_k} - 1} = i\alpha_{ik}^* n_{kk} \beta_{jk} = i\alpha_{ik}^* n_{kk} \beta_{kj}^T, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $n$  es la matriz diagonal de los valores de expectación del número de ocupación:

$$n_{kk} = \langle a_k^\dagger a_k \rangle = \frac{1}{e^{\epsilon_k} - 1}. \quad (3.21)$$

Utilizando los mismos recursos para el segundo término de la ecuación (3.19), se llega al resultado:

$$i\alpha_{ik} n_{kk} \beta_{kj}^T - i\alpha_{ik} (n_{kk} + 1) \beta_{kj}^\dagger = \frac{i}{2} \delta_{ij}, \quad (3.22)$$

que en notación matricial es:

$$\alpha^* n \beta^T - \alpha (n + 1) \beta^\dagger = \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Realizando el mismo procedimiento para los otros correladores en términos de  $\rho_V$ , se llega al sistema de ecuaciones:

$$\alpha^* n \beta^T - \alpha (n+1) \beta^\dagger = \frac{1}{2}, \quad (3.24)$$

$$\alpha^* n \alpha^T + \alpha (n+1) \alpha^\dagger = X, \quad (3.25)$$

$$\beta^* n \beta^T + \beta (n+1) \beta^\dagger = P. \quad (3.26)$$

Es útil ver que estas ecuaciones se cumplen proponiendo a las matrices  $\alpha = \alpha_1 U$  y  $\beta = \beta_1 U$ , con  $U$  unitaria y diagonal, y  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  matrices reales. De éste modo, podemos redefinir los operadores de creación y destrucción  $a_i$  y  $a_i^\dagger$  de manera de absorber las fases de la matriz  $U$ . Entonces las ecuaciones se reducen a ecuaciones de matrices reales, obteniendo las relaciones:

$$\alpha = -\frac{1}{2} (\beta^T)^{-1}, \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{4} \alpha (2n+1)^2 \alpha^{-1} = XP. \quad (3.28)$$

De este modo se ve que la matriz  $\alpha$  es la que hace semejante a la matriz  $4XP$  y la matriz  $(2n+1)^2$ . Por lo tanto resulta:

$$(2n+1) = 2\alpha^{-1} \sqrt{XP} \alpha, \quad (3.29)$$

llamando  $C = \sqrt{XP}$  y  $\nu_k$  a sus autovalores, la ecuación en estos términos queda:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(e^{\epsilon_k} - 1)} + 1 &= 2\nu_k, \\ \frac{1}{2} \frac{e^{\epsilon_k} + 1}{\epsilon_k - 1} &= \nu_k, \\ \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\epsilon_k}{2}\right) &= \nu_k, \\ \epsilon_k &= 2 \operatorname{arccoth}(2\nu_k), \\ \epsilon_k &= \ln\left(\frac{\nu_k + \frac{1}{2}}{\nu_k - \frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esta última ecuación en particular, da la relación entre el espectro de la matriz densidad, y el espectro de la matriz  $XP$ . El paso siguiente es utilizar esa relación, para encontrar la definición de la entropía en términos de los autovalores positivos  $\nu_k$ . Reemplazando la última ecuación en la entropía calculada en (3.15):

$$\begin{aligned}
S &= \sum_l \left[ -\log \left( 1 - \frac{\nu_l - 1/2}{\nu_l + 1/2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \log \left( \frac{\nu_l + 1/2}{\nu_l - 1/2} \right) \left( \frac{\nu_l - 1/2}{\nu_l + 1/2} \right) \frac{1}{1 - \frac{\nu_l - 1/2}{\nu_l + 1/2}} \right] = \\
&= \sum_l \left[ \log(\nu_l + 1/2) + (\nu_l - 1/2) \log(\nu_l + 1/2) - \right. \\
&\quad \left. - (\nu_l - 1/2) \log(\nu_l - 1/2) \right] = \\
S &= \sum_l [(\nu_l + 1/2) \log(\nu_l + 1/2) - (\nu_l - 1/2) \log(\nu_l - 1/2)]. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Es inmediato por la forma de la función, que al volver a la escritura en términos de la matriz  $\sqrt{XP}$ , reponiendo las matrices  $\alpha$ , la forma sigue siendo la misma y resulta:

$$S = \text{tr} [(C + 1/2) \log(C + 1/2) - (C - 1/2) \log(C - 1/2)]. \tag{3.32}$$

### 3.5. Especialización para un Hamiltoniano cuadrático

Como se dijo anteriormente, el objetivo de este capítulo es calcular la entropía para un segmento de un campo escalar en (1+1) dimensiones. Resulta de utilidad entonces, entender la relación entre los coeficientes de un Hamiltoniano cuadrático en los campos y la entropía. A continuación se muestra la relación entre los coeficientes que acompañan a los campos en un Hamiltoniano cuadrático general, y su relación con la entropía calculada anteriormente.

Supongamos un Hamiltoniano de la forma:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \pi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \phi_i K_{ij} \phi_j, \tag{3.33}$$

con  $\pi_i = \dot{\phi}_i$ . Queremos obtener los correladores para el estado de vacío, por lo cual primero deberemos diagonalizar el Hamiltoniano. De la hermiticidad del Hamiltoniano, proponiendo una matriz de diagonalización para los coeficientes  $K_{ij}$ , podemos escribir:

$$K_{ij} = \sum_l A_{il}^{-1} D_{ll} A_{lj}, \tag{3.34}$$

$$A_{il}^{-1} = A_{li}. \tag{3.35}$$

Entonces el Hamiltoniano queda escrito como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \pi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^N \phi_i A_{li} D_{ll} A_{lj} \phi_j. \tag{3.36}$$

Ahora bien, definiendo nuevos campos  $\tilde{\phi}_l = \sum_j A_{lj} \phi_j$  resulta  $\tilde{\pi}_l = \dot{\tilde{\phi}}_l$  y se cumplen las relaciones de conmutación canónicas para los nuevos campos y momentos. El Hamiltoniano en las nuevas variables queda diagonalizado, de la forma:

$$H = \frac{1}{2} \sum_l \tilde{\pi}_l^2 + \frac{1}{2} \sum_l D_{ll} \tilde{\phi}_l^2. \quad (3.37)$$

Este Hamiltoniano tiene la forma conocida del de un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, por lo tanto, definiendo los operadores de creación y destrucción

$$a_l^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_l}{2}} \left( \tilde{\phi}_l - \frac{i}{\omega_l} \tilde{\pi}_l \right) \quad (3.38)$$

$$a_l = \sqrt{\frac{\omega_l}{2}} \left( \tilde{\phi}_l + \frac{i}{\omega_l} \tilde{\pi}_l \right), \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

con  $\omega_l = \sqrt{D_{ll}}$ , y cumpliéndose las relaciones de conmutación conocidas para éstos operadores, el Hamiltoniano queda:

$$H = \sum_l \sqrt{D_{ll}} \left( a_l^\dagger a_l + 1/2 \right). \quad (3.41)$$

Por lo cual, podemos definir el espacio de Fock usual donde actúen los operadores de creación y destrucción de la misma manera que se conoce para el oscilador armónico[13]. Escribiendo entonces los campos originales en términos de estos operadores, tenemos que:

$$\phi_i = \sum_l A_{il}^{-1} \tilde{\phi}_l = \sum_l A_{il}^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega_l}} \left( a_l^\dagger + a_l \right) \right]. \quad (3.42)$$

El correlador de los campos en el vacío es entonces:

$$\begin{aligned} \langle \phi_i \phi_j \rangle &= \langle 0 | \sum_{l,k} A_{il}^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega_l}} \left( a_l^\dagger + a_l \right) \right] A_{jk}^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega_k}} \left( a_k^\dagger + a_k \right) \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \sum_{l,k} \frac{A_{il}^{-1} A_{jk}^{-1}}{2\sqrt{\omega_l \omega_k}} \underbrace{\left( a_l^\dagger + a_l \right) \left( a_k^\dagger + a_k \right)}_{\delta_{lk}} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_l A_{il}^{-1} \omega_l^{-1} A_{jl}^{-1}, \end{aligned}$$

donde, utilizando que  $\omega_l^{-1} = D_{ll}^{-\frac{1}{2}}$  resulta:

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_l A_{il}^{-1} D_{ll}^{-\frac{1}{2}} A_{jl}^{-1} = \frac{1}{2} \left( K^{-\frac{1}{2}} \right)_{ij}. \quad (3.43)$$

Procediendo del mismo modo para el correlador de los momentos, y juntando los dos resultados, tenemos entonces que los correladores en el vacío en términos de la matriz de coeficientes  $K$  del Hamiltoniano están dados por:

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \langle \phi_i \phi_j \rangle = \frac{1}{2} \left( K^{-\frac{1}{2}} \right)_{ij}, \\ P_{ij} &= \langle \pi_i \pi_j \rangle = \frac{1}{2} \left( K^{\frac{1}{2}} \right)_{ij}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Un punto interesante sobre este resultado, es que la entropía depende únicamente de los correladores de los campos dentro de la región  $V$ . En particular, para el caso del Hamiltoniano analizado, la entropía va a depender únicamente de los coeficientes de la matriz  $K_{ij}$  que mezclen campos en el interior de  $V$ . Lo que no resulta a priori evidente, de la definición de entropía como traza de grados de libertad de la matriz densidad.

El resultado (3.44) es de gran utilidad al momento de realizar cálculos numéricos de la entropía de entrelazado, como se mostrará en la siguiente sección.

### 3.6. Cálculo numérico en (1+1) dimensiones

A continuación mostraremos la forma de realizar el cálculo de la entropía explicado en la sección anterior, para un espacio discretizado de (1+1) dimensiones. Para un campo escalar se tiene que el Hamiltoniano en (1+1) dimensiones es:

$$H = \int dx \left[ (\pi(x,t))^2 + (\partial_x \phi(x,t))^2 + m^2 (\phi(x,t))^2 \right]. \quad (3.45)$$

Discretizando el espacio y tomando derivadas a un punto, podemos escribir:

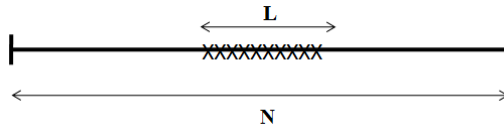
$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^N \pi_i^2 + \sum_{i=1}^N [(\phi_{i+1} - \phi_i)(\phi_{i+1} - \phi_i) + m^2 \phi_i^2], \\ H &= \sum_{i=1}^N \pi_i^2 + \sum_{i=1}^N [\phi_i^2 - 2\phi_i \phi_{i+1} + \phi_{i+1}^2 + m^2 \phi_i^2]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Esta ecuación se puede llevar a la de la forma (3.33), si definimos la matriz tridiagonal:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -1, \quad \text{si } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1, \\ K_{ii} &= 2 + m^2, \quad \text{si } 1 < i < N, \\ K_{11} &= K_{NN} = 1 + m^2, \\ K_{ij} &= 0, \quad \text{en todo otro caso.} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Esta matriz así definida resulta invertible y diagonalizable, por lo cual se pueden obtener los correladores utilizando la ecuación (3.44), y la entropía se calcula luego utilizando (3.31).

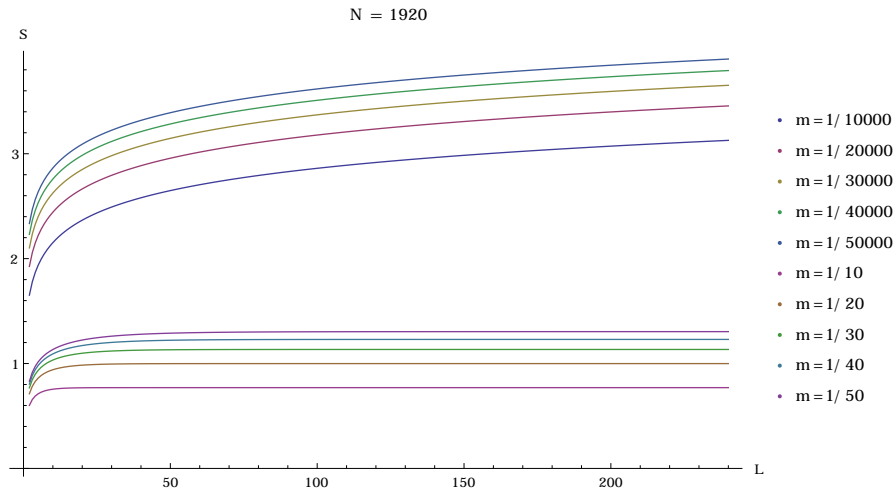
Definiendo un tamaño total  $N$  tendiendo a infinito, y un tamaño de subsegmento  $L$  como muestra la figura 3.1, se puede proceder a hacer el cálculo de los correladores y la entropía.



**Figura 3.1:** Esquema del espacio utilizado para el cálculo numérico.



A continuación se muestran las curvas de entropía obtenidas, en función del tamaño del segmento. Cabe destacar que en este análisis numérico, la distancia mínima entre dos sitios consecutivos de la red es igual a la unidad, y se utilizan cantidades adimensionales.

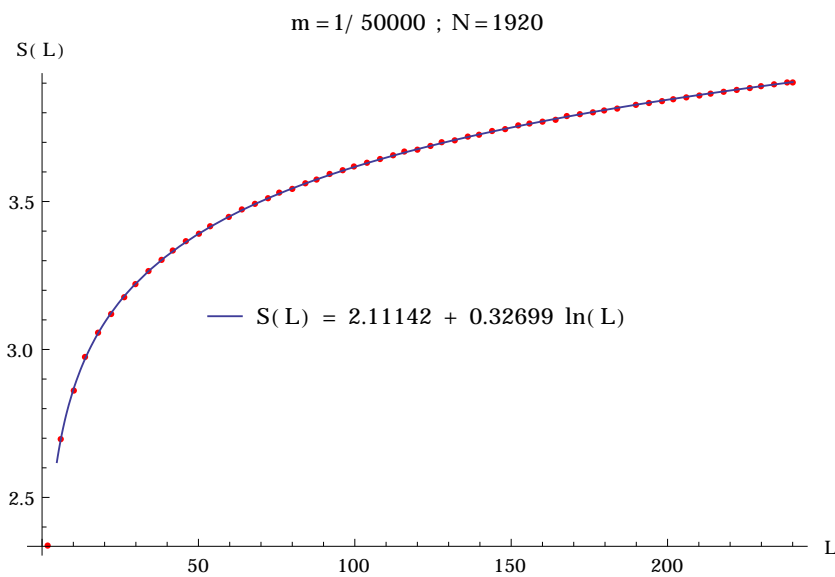


**Figura 3.2:** Resultados numéricos de  $S(L)$  para distintas masas.

De la figura 3.2 se ve que el comportamiento para masas grandes satura mucho más rápido que para masas chicas. Es interesante ver el comportamiento logarítmico de la entropía, lo cual concuerda con la ecuación 2.20 que por comodidad repetiremos a continuación, utilizando  $\epsilon = 1$ :

$$S(L) = cte + c(0) \ln(L). \quad (3.48)$$

Tomando el valor más chico de masa utilizado (mejor aproximación a campo sin masa), se puede hacer el ajuste del comportamiento de la entropía en función del tamaño del segmento:



**Figura 3.3:** Ajuste de  $S(L)$  para un valor de  $m = 1/50000$ .

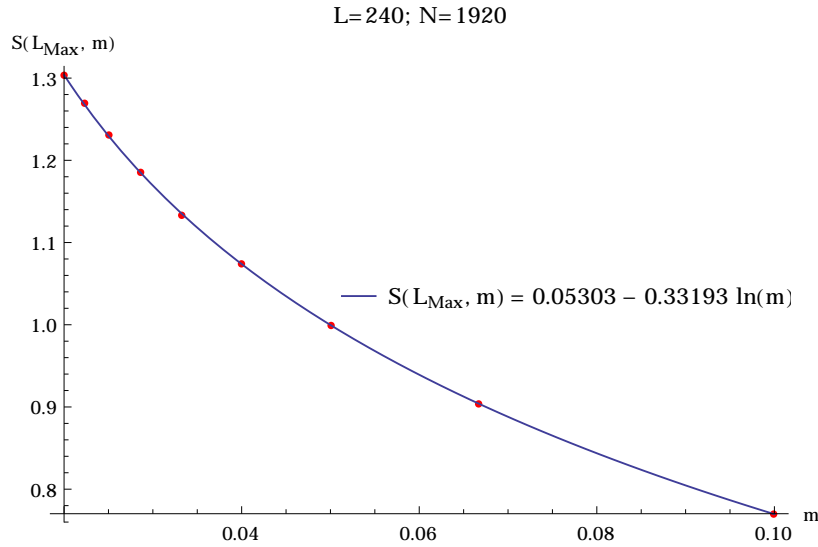
El valor obtenido para el ajuste es:

$$S(L, m \rightarrow 0) = 2,11142 + 0,32699 \ln(L), \quad (3.49)$$

Por otro lado, la ecuación 2.21 con  $\epsilon = 1$ , indica la dependencia de la entropía para grandes  $t = Lm$ :

$$S(L_{max}, m) = cte - c(0) \ln(m). \quad (3.50)$$

Realizando un ajuste de  $S(L = 240)$  en función de las masas más grandes:



**Figura 3.4:** Ajuste de  $S(L_{max}, m)$  en función de las masas.

obtenemos la función:

$$S(L_{max}, m) = 0,05303 - 0,33193 \ln(m). \quad (3.51)$$

De las ecuaciones (3.49) y (3.51) se ve que en los dos casos se obtiene un valor  $c(0) \simeq 1/3$  dentro de un 2% de error. Distintos cálculos realizados muestran que a medida que se disminuye el valor de la masa, el ajuste se aproxima más al valor  $c(0) = 1/3$ .

Para consistencia del análisis numérico, es interesante preguntarse si el tamaño total del segmento utilizado reproduce correctamente la calidad de “tamaño infinito” del sistema. Sin embargo, existe una relación directamente proporcional entre el tamaño total del segmento y el menor valor de masa posible. Esto provoca que para segmentos mas grandes, se tengan que tomar masas más pequeñas, y el tiempo de cómputo crezca exponencialmente.

Es por esto que se realizó una variación únicamente del 10% de los parámetros utilizados, obteniendo una desviación del orden del milésimo en el coeficiente  $c(0)$ .

Como se adelantó en la sección 2.3, el coeficiente  $c(0)$  define el tipo de teoría utilizada. De [4] se sabe que para un campo escalar, el valor es  $c(0) = C_V/3$ , donde  $C_V = 1$  es la carga central de Virasoro de la teoría analizada.

La expansión para  $t = Lm$  pequeños de dicho trabajo indica que:

$$c(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\ln(t)} + \mathcal{O}(\ln^{-2}(t)). \quad (3.52)$$

---

Lo que indica que para campos masivos, el coeficiente  $c(0) \leq 1/3$ , en concordancia con los resultados obtenidos.



## Capítulo 4

# Cálculo de entropía para un campo fermiónico en la red

En esta sección realizaremos el mismo cálculo de la sección anterior, pero para un campo de fermiones de espín 1/2 en lugar de un campo escalar. Es decir, se mostrará la relación de la entropía asociada a una región espacial con los correladores de los campos y luego se calculará la entropía de un segmento en (1+1) dimensiones. Sin embargo, el cálculo de los correladores a partir de la discretización se realizará de una manera alternativa a la de la sección anterior, ya que se mostrará el cálculo analítico para sistema de longitud infinita, a diferencia de los correladores obtenidos numéricamente para el campo escalar.

### 4.1. Propiedades del campo fermiónico

Para un espacio discretizado, a tiempos fijos e iguales, los operadores de creación y destrucción del campo fermiónico obedecen las relaciones de conmutación  $\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ . Los correladores de dos puntos son:

$$\langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle = C_{ij} \quad \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle = \delta_{ij} - C_{ji} \quad (4.1)$$

$$\langle \psi_i \psi_j \rangle = \langle \psi_i^\dagger \psi_j^\dagger \rangle = 0 \quad (4.2)$$

También asumiremos que vale el teorema de Wick, es decir que todos los correladores no nulos de  $n$  puntos se pueden obtener a partir de los correladores de dos puntos escritos anteriormente. El operador densidad de una región  $V$ , en términos de los operadores de creación y destrucción se puede escribir como:

$$\rho_V = K e^{-\mathcal{H}} = K e^{-\sum_V H_{ij} \psi_i^\dagger \psi_j}, \quad (4.3)$$

con  $K$  una constante de normalización.

Si realizamos una transformación de Bogoliubov para diagonalizar el exponente,  $d_l = U_{lm} \psi_m$ , con  $U$  unitario y  $U H U^\dagger = \epsilon_i$ , siendo  $\epsilon_i$  los autovalores de  $H$ , se obtiene:

$$\rho_V = K e^{-\mathcal{H}} = K e^{-\sum_i \epsilon_i d_l^\dagger d_l}, \quad (4.4)$$

con  $K$  una constante de normalización.

## 4.2. Normalización del Operador Densidad

Al igual que en la sección anterior, la constante de normalización del operador densidad se obtiene de pedir que el mismo tenga traza igual a la unidad.

$$\text{tr}(\rho_V) = K \sum_n \prod_l \langle n | e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} | n \rangle, \quad (4.5)$$

donde los números de ocupación  $n$  en este caso pueden tomar sólo los valores cero o uno debido a que son fermiones. Por esto resulta que:

$$\sum_n \langle n | e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} | n \rangle = \sum_n e^{-\epsilon_l n_l} = (1 + e^{-\epsilon_l}), \quad (4.6)$$

por lo cual obtener la constante de normalización es inmediato, obteniendo

$$K = \prod_l \frac{1}{(1 + e^{-\epsilon_l})}, \quad (4.7)$$

y el operador densidad queda escrito como:

$$\rho_V = \prod_l \frac{e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l}}{(1 + e^{-\epsilon_l})}. \quad (4.8)$$

Una vez obtenida la escritura del operador densidad, podemos proceder como en el capítulo anterior, para encontrar la entropía.

## 4.3. Entropía en términos del operador densidad

Utilizando la ecuación (2.17), veamos cómo queda escrita la entropía en términos de los autovalores del hamiltoniano modular:

$$\begin{aligned} S &= - \sum_n \langle n | K e^{-\sum_l \epsilon_l d_l^\dagger d_l} \ln \left( K e^{-\sum_k \epsilon_k d_k^\dagger d_k} \right) | n \rangle \\ &= - \sum_n \langle n | \underbrace{K e^{-\sum_l \epsilon_l d_l^\dagger d_l}}_{\rho_V} \ln(K) | n \rangle + \sum_n \langle n | K e^{-\sum_l \epsilon_l d_l^\dagger d_l} \sum_k \epsilon_k d_k^\dagger d_k | n \rangle \\ &= - \ln(K) + K \sum_n \langle n | \prod_l e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} \sum_k \epsilon_k d_k^\dagger d_k | n \rangle \\ &= - \ln(K) + K \sum_{n_l, n_k} \prod_l e^{-\epsilon_l n_l} \sum_k \epsilon_k n_k \\ &= - \ln(K) + K \sum_{n_k} \sum_k \epsilon_k n_k e^{-\epsilon_k n_k} \sum_{n_l} \prod_{l \neq k} e^{-\epsilon_l n_l}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Realizando las sumas en  $n_l$  y  $n_k$ , sabiendo solamente pueden tomar los valores cero y uno, resulta:

$$S = - \ln(K) + K \sum_k \epsilon_k e^{-\epsilon_k} \sum_{n_l} \prod_{l \neq k} (1 + e^{-\epsilon_l}). \quad (4.10)$$

Utilizando el resultado (4.7) para el valor de  $K$ :

$$\begin{aligned} S &= -\ln \left[ \prod_l \frac{1}{(1 + e^{-\epsilon_l})} \right] + \prod_j \frac{1}{(1 + e^{-\epsilon_j})} \sum_k \epsilon_k e^{-\epsilon_k} \sum_{n_l} \prod_{l \neq k} (1 + e^{-\epsilon_l}) \\ &= \ln \left[ \prod_l (1 + e^{-\epsilon_l}) \right] + \sum_k \frac{\epsilon_k e^{-\epsilon_k}}{(1 + e^{-\epsilon_k})}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Finalmente, sacando la productoria fuera del logaritmo como sumatoria, resulta:

$$S = \sum_l \left[ \ln (1 + e^{-\epsilon_l}) + \frac{\epsilon_l e^{-\epsilon_l}}{1 + e^{\epsilon_l}} \right]. \quad (4.12)$$

Nuevamente, obtenemos una relación entre la entropía y los autovalores del Hamiltoniano Modular. Por lo tanto si podemos encontrar la relación entre éstos autovalores y los de la matriz de correladores, el problema queda resuelto.

## 4.4. Relación de la entropía con los correladores de los campos

Para relacionar la entropía con los correladores, usamos la propiedad (2.4) del operador densidad al igual que en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle &= \text{tr} \left( K \prod_l e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} \psi_i \psi_j^\dagger \right) \\ &= K \sum_n \langle n | \prod_l e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} (\delta_{ij} - \psi_j^\dagger \psi_i) | n \rangle \\ &= \underbrace{K \sum_n \langle n | \prod_l e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} \delta_{ij} | n \rangle}_{\delta_{ij}} - \sum_{n,k,h} \langle n | K \prod_l e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} d_k^\dagger U_{kj} U_{ih}^\dagger d_h | n \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

El último término tiene un producto  $d_k^\dagger d_h$  que actuando sobre los estados de ocupación, solo da distinto de cero cuando  $k = h$ , luego:

$$\begin{aligned} \langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle &= \delta_{ij} - \sum_{n,k} \langle n | K \prod_l e^{-\epsilon_l d_l^\dagger d_l} d_k^\dagger U_{kj} U_{ik}^\dagger d_k | n \rangle \\ &= \delta_{ij} - \sum_{n_k, n_l, k} K \prod_l e^{-\epsilon_l n_l} U_{kj} U_{ik}^\dagger n_k \\ &= \delta_{ij} - \sum_{k, n_k} K e^{-\epsilon_k n_k} \sum_{n_l \neq n_k} \prod_{l \neq k} e^{-\epsilon_l n_l} U_{ik}^\dagger U_{kj}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Utilizando nuevamente que los números de ocupación pueden valer sólomente cero o uno, y reponiendo la escritura de la constante de normalización:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle &= \delta_{ij} \prod_h \frac{1}{1 + e^{-\epsilon_h}} \sum_k \left[ e^{-\epsilon_k} \prod_{l \neq k} (1 + e^{-\epsilon_l}) U_{ik}^\dagger U_{kj} \right] \\
&= \delta_{ij} - \sum_k \frac{e^{-\epsilon_k}}{1 + e^{-\epsilon_k}} U_{ik}^\dagger U_{kj} \\
&= \sum_k U_{ik}^\dagger \left( 1 - \frac{e^{-\epsilon_k}}{1 + e^{-\epsilon_k}} \right) U_{kj} \\
&= C_{ij} = \sum_k U_{ik}^\dagger \frac{1}{e^{-\epsilon_k} + 1} U_{kj}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Esta última ecuación implica que la relación entre los autovalores  $\nu_l$  de  $C$  y los autovalores  $\epsilon_l$  del Hamiltoniano Modular es:

$$\begin{aligned}
\nu_l &= \frac{1}{e^{-\epsilon_l} + 1} \\
e^{-\epsilon_l} &= \frac{1 - \nu_l}{\nu_l} \\
\epsilon_l &= -\ln \left( \frac{1 - \nu_l}{\nu_l} \right),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

o en notación matricial,

$$H = -\ln(C^{-1} - 1) \tag{4.17}$$

Utilizando estas últimas relaciones en el resultado (4.12) para la entropía, se llega a la entropía en términos de los  $\nu_l$ :

$$S = -\sum_l [\nu_l \ln(\nu_l) + (1 - \nu_l) \ln(1 - \nu_l)], \tag{4.18}$$

que en términos de la matriz  $C$  queda:

$$S(V) = -\text{tr} [C \ln(C) + (1 - C) \ln(1 - C)]. \tag{4.19}$$

Donde se entiende que la matriz de correladores corresponde a los correladores definidos dentro del volumen  $V$ , los cuales calcularemos en la sección siguiente.

## 4.5. Cálculo de correladores para un espacio infinito

Para una teoría de campos para la cual se conoce la acción, se sabe que los correladores de dos puntos se pueden obtener mediante el propagador de Feynman, que es la inversa del operador que acompaña la parte cuadrática en los campos en dicha acción. Supongamos entonces que partimos de la acción en (1+1) dimensiones para un campo de Dirac:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{\Psi}(x, t) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x, t). \tag{4.20}$$

Como vimos anteriormente, el límite que estamos tomando es de tiempos iguales, con un espacio discreto. Por lo tanto, nos interesa discretizar la variable espacial, y dejar la variable temporal en el continuo. Si pensamos un espacio discreto de tamaño infinito y separación  $a$  entre sitios, la acción discretizada queda:



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ i\bar{\Psi}_n(t)\gamma^0\partial_t\Psi_n(t) + \frac{i}{2a}\bar{\Psi}_n(t)\gamma^1\Psi_{n+a}(t) - \frac{i}{2a}\bar{\Psi}_{n+a}(t)\gamma^1\Psi_n(t) - m^2\bar{\Psi}_n(t)\Psi_n(t) \right], \quad (4.21)$$

donde el factor  $(1/2a)$  aparece por tomar derivadas a izquierda y derecha, lo cual no es necesario para la derivada temporal, ya que vuelve a absorberse al no discretizar y evaluar en tiempos iguales. Tomando el espaciamiento  $a = 1$ , definimos el operador:

$$A(t)_{ij} = i\gamma^0\partial_t\delta_{(i,j)} + \frac{i}{2}\gamma^1\delta_{(i,j-1)} - \frac{i}{2}\gamma^1\delta_{(i,j+1)} - m^2\delta_{(i,j)}, \quad (4.22)$$

de manera que la acción quede escrita de la forma

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_{\{i,j\}=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_i(t) A(t)_{ij} \Psi_j(t), \quad (4.23)$$

por lo cual, la inversa de  $A$  es el propagador de Feynman  $D_F$  y cumple la relación

$$A(t)_{ij} \cdot D_F(t-t')_{jk} = \delta(t-t')\delta_{(i,k)}. \quad (4.24)$$

Ahora bien, para encontrar  $D_F$  conviene escribirlo en su desarrollo en serie de Fourier. Debido a que el tiempo no está discretizado, la integral en su variable conjugada  $p_0$  seguirá teniendo los límites infinitos del continuo. Sin embargo, el momento conjugado a la variable espacial está discretizado de modo que  $p_n = n2\pi/L$ . Si tomamos  $L = Na$ , entonces  $n_{min} = -N/2$  y  $n_{max} = N/2$ . Debido a que los momentos tienen un  $L$  en el denominador, si el tamaño del sistema tiende a infinito se puede pasar a una integral en  $p_1$  en lugar de una sumatoria, con límites  $p_{min} = -(N/2)(2\pi/L) = -\pi/a$  y  $p_{max} = \pi/a$ . Escribiendo entonces del desarrollo en Fourier resulta:

$$D_F(t-t')_{jk} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\pi}^{\pi} dp_1 e^{-ip_0(t-t')} e^{ip_1(j-k)} \tilde{D}_F(p_0, p_1). \quad (4.25)$$

Entonces, actuando con el operador  $A$ ,

$$\begin{aligned} A(t)_{ij} \cdot D_F(t-t')_{jk} &= \delta(t-t')\delta_{(i,k)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\pi}^{\pi} dp_1 e^{-ip_0(t-t')} e^{ip_1(i-k)} (\gamma^0 p_0 - \gamma^1 \sin(p_1) - m^2) \tilde{D}_F(p_0, p_1). \end{aligned} \quad (4.26)$$

por lo cual el propagador en el espacio de momentos es:

$$\tilde{D}_F(p_0, p_1) = \frac{1}{\gamma^0 p_0 - \gamma^1 \sin(p_1) - m^2} = \frac{\gamma^0 p_0 - \gamma^1 \sin(p_1) + m^2}{p_0^2 - \sin^2(p_1) - m^2}, \quad (4.27)$$

y el propagador completo:

$$D_F(t-t')_{jk} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\pi}^{\pi} dp_1 \left( \frac{\gamma^0 p_0 - \gamma^1 \sin(p_1) + m^2}{p_0^2 - \sin^2(p_1) - m^2} \right) e^{-ip_0(t-t')} e^{ip_1(j-k)}. \quad (4.28)$$

Llegado este punto es necesario aclarar que esta forma de discretización tiene un problema. Debido a los ceros de la función seno, la integral en  $p_0$  tiene un polo extra además del polo físico de la capa de masa. Por esto aparece lo que se conoce como duplicación de especies (species doubling en inglés), que es equivalente a que se contaran dos especies de fermiones en lugar de una [15]. Otras formas de discretización evitan este problema, pero resultan más extensas. Sin embargo, sabiendo el problema que genera esta forma de discretización, es posible evitarlo dividiendo el resultado final de la entropía por dos, aprovechando la simplicidad del método.

Haciendo entonces por residuos la integral en  $p_0$ , evaluando en  $t = t'$  tenemos que:

$$D_{F_{ij}} = \frac{i}{2} \delta_{(i,j)} \gamma^0 + i \int_{-\pi}^{\pi} dp \frac{m^2 - \gamma^1 \sin(p)}{4\pi \sqrt{\sin^2(p) + m^2}} e^{ip(i-j)}. \quad (4.29)$$

donde se nombraron los índices como  $i, j$  en lugar de  $j, k$  y se cambió  $p_1$  por  $p$ .

Como se mencionó al principio del capítulo, el propagador de Feynman es proporcional a las funciones de correlación de dos puntos, pero a las que involucran  $\bar{\Psi}$  en lugar de  $\Psi^\dagger$ . Para pasar a la escritura de los correladores que necesitamos es conveniente utilizar las relaciones:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i \bar{\Psi}_j \rangle &= -i D_{F_{ij}} \\ \langle \Psi_i \Psi_j^\dagger \rangle &= \langle \Psi_i \bar{\Psi}_j \gamma^0 \rangle = -i D_{F_{ij}} \gamma^0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con lo cual llegamos a:

$$\langle \Psi_i \Psi_j^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \delta_{(i,j)} + \int_{-\pi}^{\pi} dp \frac{m^2 \gamma^0 - \gamma^1 \gamma^0 \sin(p)}{4\pi \sqrt{\sin^2(p) + m^2}} e^{ip(i-j)}. \quad (4.31)$$

Para escribirlo de manera matricial es conveniente tomar las matrices gamma de manera que  $\gamma^0 = \sigma_1$  y  $\gamma^1 = i\sigma_2$  con  $\sigma_i$  las matrices de Pauli. Por el momento tomaremos  $m = 0$  de manera que la integral en  $p$  resulte sencilla de calcular y la matriz quede escrita de la manera:

$$\langle \Psi_i \Psi_j^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{i(-1 + \cos[(j-i)\pi])}{2\pi(j-i)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{i(-1 + \cos[(j-i)\pi])}{2\pi(j-i)} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

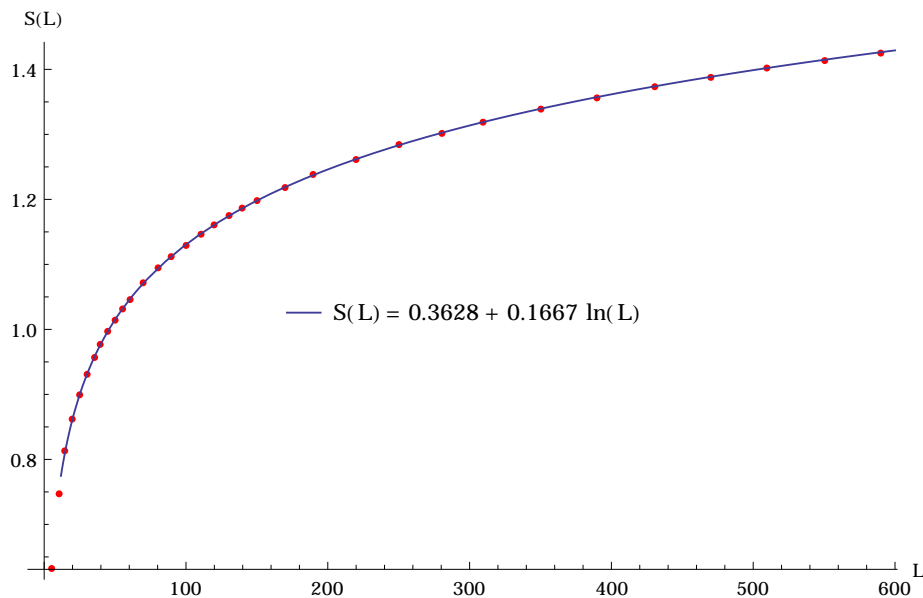
que vale lo mismo en las dos proyecciones de quiralidad. Quedándonos con una de estas proyecciones, la matriz de correladores queda entonces:

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{i(-1 + \cos[(j-i)\pi])}{2\pi(j-i)}. \quad (4.33)$$

## 4.6. Resultados en (1+1) dimensiones

Utilizando el resultado de la sección anterior, es posible calcular la entropía de entanglement en un sistema de fermiones en (1+1) dimensiones. La configuración del sistema se puede entender nuevamente con la figura 3.1. Es necesario destacar una diferencia respecto del procedimiento realizado para el caso del campo escalar en la sección 3.6. En esa sección calculamos los correladores para un espacio finito, pero mucho más grande que el tamaño del segmento sobre el cual trazar los grados de libertad espaciales. En este caso, los correladores que utilizaremos son los correladores analíticos de un espacio infinito, y utilizaremos un tamaño de segmento finito. De esta manera, el resultado que se obtenga para la entropía será exacto para cualquier tamaño finito de segmento analizado, en el límite actual de masa nula.

Utilizando los correladores (4.33) y la expresión de la entropía en términos de  $C$  (4.19), se puede calcular la entropía para distintos tamaños de segmento. Para realizar esto, fijamos el espaciamiento  $a = 1$ , y calculamos la entropía para 34 tamaños de segmentos distintos comprendidos entre 5 y 590. Vale decir que en este caso no es necesario utilizar un cutoff infrarrojo como en la sección anterior, ya que la teoría de fermiones está bien definida para masa cero y no presenta este tipo de divergencias.



**Figura 4.1:** Resultados analíticos de  $S(L)$  para un sistema de fermiones no masivos.

El resultado del ajuste de la entropía con el tamaño de segmento resulta:

$$S(L) = 0,3268 + 0,1667 \ln(L), \quad (4.34)$$

lo cual da un valor para  $c(0) \simeq 1/6$ . Cabe notar que el resultado obtenido mejora en un orden de magnitud el resultado obtenido para bosones en (4.34), lo cual se debe a la diferencia de métodos utilizados para el cálculo de correladores. De este coeficiente se lee que la carga central de Virasoro resulta ser  $C_V = 1/2$ , lo cual es correcto al tratarse de una teoría de fermiones.

Hasta acá hemos visto cómo calcular la entropía de entanglement para regiones espaciales. Sin embargo, surge la pregunta de cuál sería el resultado si en lugar se trazara sobre grados de libertad espaciales, se trazara sobre otro tipo de grados de libertad. Un ejemplo interesante a tener en cuenta es el de sistemas de fermiones en escalera, que trataremos en la sección siguiente.



## Capítulo 5

# Sistema de fermiones en escalera

En los capítulos anteriores verificamos que la entropía de entrelazamiento asociada a un segmento para una teoría conforme, escalares y fermiones en  $(1 + 1)$  dimensiones, tiene una dependencia logarítmica con el tamaño del sistema. La matriz densidad reducida en los casos anteriores resulta de trazar sobre los grados de libertad que viven en el complemento de la región considerada. En este capítulo, motivados por el trabajo [14], en donde los autores estudian la entropía que resulta de la matriz densidad reducida a una cadena de fermiones en un sistema formado por dos cadenas, nos preguntamos si en general este tipo de entropías tienen las mismas propiedades que la entropía geométrica. Para éso, consideramos la teoría de un fermión de Dirac masivo y calculamos la matriz densidad reducida asociada a una de las componentes. La entropía resultante no presenta la "ley de área" característica del caso geométrico sino que tiene una dependencia volumétrica. Analizamos también el Hamiltoniano modular o entrópico, que en particular para el sector de excitaciones de baja energía admite una identificación del estado como el de un estado térmico de fermiones no masivos. En un marco más general, consideramos también, el caso de la entropía resultante de una matriz densidad asociada a una teoría de campos generalizada, en que los correladores son una combinación de correladores de teorías libres con ciertas probabilidades. Nuevamente, la entropía resultante es divergente con el volumen, violando la ley de áreas de la entropía geométrica.

### 5.1. Hamiltoniano de fermiones en escalera y su traducción a la teoría de campos

Consideremos el Hamiltoniano de un sistema de fermiones en escalera, de cadenas  $A$  y  $B$  con una amplitud de transición entre cadenas, del mismo modo que se define en [14]:

$$\begin{aligned} H = & -t \sum_j i \left( C_{A,j+1}^\dagger C_{A,j} - C_{A,j}^\dagger C_{A,j+1} - C_{B,j+1}^\dagger C_{B,j} + C_{B,j}^\dagger C_{B,j+1} \right) - \\ & - t_\perp \sum_j \left( C_{A,j}^\dagger C_{B,j} + C_{B,j}^\dagger C_{A,j} \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $C_{A,j}$  y  $C_{B,j}$  son los operadores fermiónicos en cada cadena en el sitio  $j$ ,  $t$  es la amplitud de salto entre sitios de cada cadena, y  $t_\perp$  es la amplitud de salto entre las dos cadenas, para el mismo sitio  $j$ .

Transformando fourier, este hamiltoniano se puede escribir como:

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \mathcal{H}(k), \quad (5.2)$$

donde nuevamente tomamos el espaciado entre sitios  $a = 1$ . El integrando de esa ecuación es:

$$\mathcal{H}(k) = 2t \sin(k) \left[ C_A^\dagger(k) C_A(k) - C_B^\dagger(k) C_B(k) \right] - t_\perp \left[ C_A^\dagger(k) C_B(k) + C_B^\dagger(k) C_A(k) \right]. \quad (5.3)$$

El Hamiltoniano anterior puede ser diagonalizado introduciendo nuevas variables conocidas en la literatura como ligantes (l) y antiligantes (a) que se definen como

$$c_A(k) = pc_a(k) - qc_l(k), \quad (5.4)$$

$$c_B(k) = qc_a(k) + pc_l(k), \quad (5.5)$$

en donde  $p$  y  $q$  están dados por

$$p = \frac{u(k)}{\sqrt{1+u^2(k)}}, \quad (5.6)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{1+u^2(k)}}, \quad (5.7)$$

y  $u(k)$  es

$$u(k) = 2\frac{t}{t_\perp} \sin k + \sqrt{\left(2\frac{t}{t_\perp} \sin k\right)^2 + 1}. \quad (5.8)$$

El Hamiltoniano queda entonces de la forma

$$H(k) = \sqrt{(2t \sin k)^2 + t_\perp^2} \left( c_l^\dagger c_l - c_a^\dagger c_a \right). \quad (5.9)$$

De la relación de dispersión  $\sqrt{(2t \sin k)^2 + t_\perp^2}$  puede verse que la energía se minimiza para  $k = 0, \pi$ , en donde el espectro tiene un gap proporcional a  $t_\perp$ . El coeficiente de tuneo  $t_\perp$  que mezcla especies del sistema original introduce en el Hamiltoniano diagonalizado un gap de masa idéntico para las especies ligantes y antiligantes  $m \sim t_\perp$ . El estado de medio llenado corresponde a los estados ligados completos y antiligados vacío.

Este sistema corresponde en el límite del continuo, asumiendo proximidad a los puntos de Fermi con  $k \sim 0, \pi$ , a un par de fermiones de Dirac (ligante y antiligante), espinores de dos componentes, contruidos a partir de los fermiones “derechos” e “izquierdos” en cada cadena. Cada espinor combina componentes derecha e izquierda de distintas cadenas de modo que se reproduce correctamente el término de tuneo. Más precisamente,

$$H = \sum_{a=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ i v \Psi_a^\dagger(x) \sigma_3 \partial_x \Psi_a(x) + m v^2 \Psi_a^\dagger(x) \sigma_1 \Psi_a(x) \right], \quad (5.10)$$

en donde

$$\Psi_1(k) = \begin{pmatrix} R_A(k) \\ L_B(k) \end{pmatrix}, \quad \Psi_2(k) = \begin{pmatrix} R_B(k) \\ L_A(k) \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Cabe destacar que este pasaje de la escritura de el sistema original en términos de un Hamiltoniano de Dirac, desarrollando alrededor de los puntos de Fermi, es un método conocido en sistemas unidimensionales, como se puede ver, por ejemplo, en [16][17]. Habiendo pasado a esta escritura, podemos utilizar el formalismo de la Teoría de Campos para calcular la entropía de una de las dos cadenas.

## 5.2. Cálculo de la entropía asociada a la cadena A y Hamiltoniano Modular

De acuerdo a la sección anterior, vemos que la entropía asociada a la cadena A, resulta de considerar únicamente una de las componentes del fermión de Dirac. Motivados por este problema particular, resulta interesante estudiar en general qué sucede si consideramos la entropía que resulta de reducir la matriz densidad a una de las componentes de un espinor, que en el ejemplo desarrollado anteriormente equivale a calcular la entropía de una las cadenas. En el desarrollo que sigue, si bien estamos pensando en un problema general, mantendremos la notación del ejemplo desarrollado, para hacer más simple el análisis y comparación con los resultados de [14]. Sabemos que la matriz densidad reducida, puede calcularse a partir de los correladores [11]. En el caso de entropías geométricas, ésto corresponde a considerar correladores restringidos a la región, y en este caso, a considerar la función de correlación:

$$\left\langle C_A^\dagger(k)C_A(k) \right\rangle = \left\langle R_A^\dagger(k)R_A(k) \right\rangle. \quad (5.12)$$

Es decir, consideraremos el espinor  $\Psi_1$ , y proyectaremos sobre la componente right. Para esto conviene ver que (5.12) se escribe como:

$$\left\langle R_A^\dagger(k)R_A(k) \right\rangle = \left\langle P_R^\dagger\Psi_1^\dagger(k)\Psi_1(k)P_R \right\rangle, \quad (5.13)$$

con  $P_R = (1 - \gamma^5)/2$  el proyector sobre quiralidad right. Llegado este punto, la elección de matrices gamma se puede hacer de la manera más conveniente para simplificar el cálculo, ya que los correladores no pueden depender de la representación utilizada. Los correladores para un campo de Dirac en (1+1), a tiempos iguales son:

$$C(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(2\pi)} \frac{(\sqrt{p^2 + m^2}\gamma^0 + p\gamma^1 + m)}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \gamma^0 e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}, \quad (5.14)$$

donde a partir de ahora utilizaremos  $p$  en lugar de  $k$  por comodidad, y mantenemos la constante adimensional  $v$  del Hamiltoniano (5.10). En el espacio de momentos se lee:

$$\langle \Psi^\dagger(p)\Psi(p) \rangle = \frac{(\sqrt{p^2v^2 + m^2}\gamma^0\gamma^0 + pv\gamma^1\gamma^0 + m\gamma^0)}{2\sqrt{p^2v^2 + m^2}}. \quad (5.15)$$

Tomando  $\gamma^0 = \sigma_1$ ,  $\gamma^1 = i\sigma_2$ , y  $\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1$ , el correlador proyectado (5.13) en forma matricial resulta:

$$C(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{pv}{2\sqrt{p^2v^2 + m^2}} & 0 \\ 0 & 0. \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Ahora bien, para calcular la entropía recordemos la ecuación (4.19) que utilizamos cuando calculamos la entropía geométrica para fermiones libres:

$$S(V) = -\text{tr} [C \ln(C) + (1 - C) \ln(1 - C)].$$

En este caso, en espacio de momentos, la entropía se escribe como  $S = \sum_p S(p)$ , ya que las contribuciones de distintos momentos quedan desacopladas. Podemos entonces calcular la entropía asociada a cada momento dado, lo cual queda

$$S_A(p) = -\text{tr} [C(p) \ln(C(p)) + (1 - C(p)) \ln(1 - C(p))], \quad (5.17)$$

$$S_A(p) = -\sum_i [\lambda_i \ln(\lambda_i) + (1 - \lambda_i) \ln(1 - \lambda_i)], \quad (5.18)$$

donde  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz de correladores. De (5.16) vemos que uno de los dos autovalores es cero, por lo que resulta:

$$S_A(p) = -\left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} - pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} - pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) - \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} + pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} + pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right). \quad (5.19)$$

Para obtener entonces la entropía total, resta sumar sobre todos los momentos posibles. Sin embargo ésto se debe hacer con cuidado, teniendo en cuenta que la suma sobre todos los momentos implica sumar sobre todos los  $p_n$  con  $p_n = 2\pi n/L$ , resulta:

$$S_A = \sum_{n=-N/2}^{N/2} S_A(p_n). \quad (5.20)$$

Donde  $Na = L$  con  $a$  el espaciado. El límite de tamaño infinito implica tender  $N$  a infinito. Por lo tanto, la suma sería:

$$S_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2} S_A(p_n). \quad (5.21)$$

Ahora bien, recordando la definición de la integral:

$$\int_{\pi/a}^{\pi/a} dp S_A(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2} S_A(p_n) \Delta p, \quad (5.22)$$

con  $\Delta p = 2\pi/L$  y  $L \gg a$ . Entonces, si pasamos  $\Delta p$  del otro lado, y tomamos el límite del continuo  $a$  tendiendo a cero se ve que (5.20) resulta:

$$S_A = \Delta p \int_{-\infty}^{\infty} dp S(p) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp S_A(p). \quad (5.23)$$

Dicha integral tiene primitiva, pero el cálculo es un poco extenso, el detalle del mismo se puede ver en el apéndice A. Multiplicando la ecuación anterior por  $2\pi$  que viene de utilizar los correladores en el espacio de momentos, y realizando la integral se obtiene:

$$S_A = L \int_{-\infty}^{\infty} S_A(p) dp = \frac{\pi L m}{v}. \quad (5.24)$$

De este resultado surge el siguiente análisis: por empezar la dependencia con el volumen del sistema  $L$  indica que la entropía calculada no es una entropía de entanglement en el sentido geométrico. Si así lo fuera, como se vió en la sección 2.3, al estar trabajando en (1+1) dimensiones la dependencia con  $L$  debería ser logarítmica.

Por otro lado, la forma de la entropía obtenida, es muy parecida a la entropía térmica de un sistema de fermiones no masivos, para una teoría conforme [18], la cual es:



$$S_T = \frac{\pi c}{3v} TL, \quad (5.25)$$

donde  $c$  es la carga central de Virasoro y  $v$  es la velocidad de los modos.

Comparando ésto con nuestro resultado, cabe preguntarse si la matriz densidad reducida de la cadena  $A$  corresponde a un sistema con estas características. La forma de la matriz densidad para un sistema térmico es:

$$\rho_T = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad (5.26)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema,  $\beta$  es la inversa de la temperatura, y  $Z$  es la función de partición del sistema. Si estuviéramos en el caso de que nuestro sistema fuera un sistema térmico de fermiones libres, el Hamiltoniano Modular que aparece en la matriz densidad debería corresponder al Hamiltoniano del sistema, multiplicado por el coeficiente  $\beta$ . Para calcularlo usamos la ecuación (4.17) definida en el capítulo de fermiones, lo cual nos lleva a:

$$\mathcal{H} = \ln \left[ -1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}}} \right]. \quad (5.27)$$

En principio este Hamiltoniano no corresponde al de un sistema de fermiones libres, pero si desarrollamos para bajos momentos a primer orden y reponemos la integral en  $p$  junto con los operadores de creación y destrucción, se obtiene:

$$\mathcal{H} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{2vp}{t_\perp} [R^\dagger(p)R(p) - L^\dagger(p)L(p)], \quad (5.28)$$

donde se recuperó la escritura de  $t_\perp = m$ . Se ve entonces que el resultado obtenido es idéntico al cual se llega en [14], pero obtenido desde el formalismo de la teoría de campos. Si identificamos como una temperatura efectiva a  $T_{eff} = t_\perp/2$ , podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = \beta_{eff} \int \frac{dp}{2\pi} vp R_A^\dagger(p)R_A(p) = \beta_{eff} H_A \quad (5.29)$$

con  $\beta_{eff} = 1/T_{eff}$ . De ésto vemos que el Hamiltoniano Modular, se puede escribir como un coeficiente  $\beta_{eff}$  por el Hamiltoniano de un sistema de fermiones no masivos, con velocidad de grupo  $v$ . Se puede concluir entonces que en la aproximación de bajos momentos, el subsistema de la cadena  $A$  se comporta como un sistema térmico de fermiones no masivos.

Cabe entonces preguntarse si se puede aislar la contribución de la parte conforme, del resultado de la entropía (5.24). Nos podemos preguntar también, si el límite del continuo que estamos utilizando se corresponde al sistema original en el sentido de reproducir los valores de entropía para algún rango de los parámetros y analizar los distintos límites de espaciamiento para ver si en alguno de ellos domina la contribución de momentos bajos. Escribamos para ésto la componente no nula del correlador (5.16) en su componente discreta, recuperando el espaciado  $a$ :

$$C = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)} + \sin(apv)}{2\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)}}, \quad (5.30)$$

utilizando esto, la entropía para un momento dado queda:

$$\begin{aligned}
S(p) = & - \left( 1 - \frac{\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)} + \sin(apv)}{2\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)}} \right) \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)} + \sin(apv)}{2\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)}} \right) \\
& - \left( \frac{\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)} + \sin(apv)}{2\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)} + \sin(apv)}{2\sqrt{a^2 m^2 + \sin^2(apv)}} \right).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Para calcular la entropía total hay que integrar en  $p$  como se hizo anteriormente. Esta integral no tiene solución analítica, pero es útil realizarla numéricamente en ciertos límites. En principio, podemos hacer el cambio de variables  $P \rightarrow pva$  y  $M \rightarrow ma$  para simplificar la escritura. Haciendo ésto, y poniendo el factor  $L$  delante como hicimos en el caso del continuo, la integral queda:

$$\begin{aligned}
S = \frac{L}{va} \int_{-\pi}^{\pi} dP \left\{ - \left( 1 - \frac{\sqrt{M^2 + \sin^2(P)} + \sin(P)}{2\sqrt{M^2 + \sin^2(P)}} \right) \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{M^2 + \sin^2(P)} + \sin(P)}{2\sqrt{M^2 + \sin^2(P)}} \right) \right. \\
\left. - \left( \frac{\sqrt{M^2 + \sin^2(P)} + \sin(P)}{2\sqrt{M^2 + \sin^2(P)}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{M^2 + \sin^2(P)} + \sin(P)}{2\sqrt{M^2 + \sin^2(P)}} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Ahora bien, ir al límite del continuo, significa tomar el límite de  $ma \rightarrow 0$ . Con el cambio de variables realizado, esto significa tomar el límite de  $M$  muy chico en la integral, y después recuperar el cambio de variables. Si se realiza la integral numéricamente, se ve que el resultado es:

$$S(M = 1/100) = \frac{L}{va} 0,0625167 \simeq 2\pi M \frac{L}{va}, \tag{5.33}$$

lo cual, recuperando el cambio de variables  $M \rightarrow ma$  y dividiendo por dos por el fermion doubling, queda:

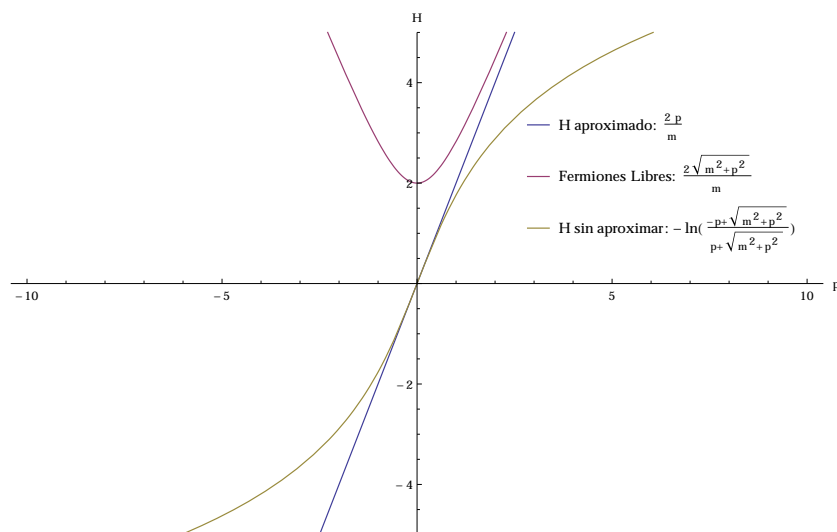
$$S(m = 1, a = 1/100) \simeq \frac{\pi L m}{v}. \tag{5.34}$$

La aproximación en la última ecuación resulta cada vez más exacta a medida que se tiende al punto  $ma \rightarrow 0$ , por lo cual se ve que se recupera la contribución del continuo para espaciamento pequeño. Por lo tanto, en este límite no se aísla la contribución de bajos momentos de la entropía. Para entender esto, es útil comparar las relaciones de dispersión del continuo de los distintos Hamiltonianos:

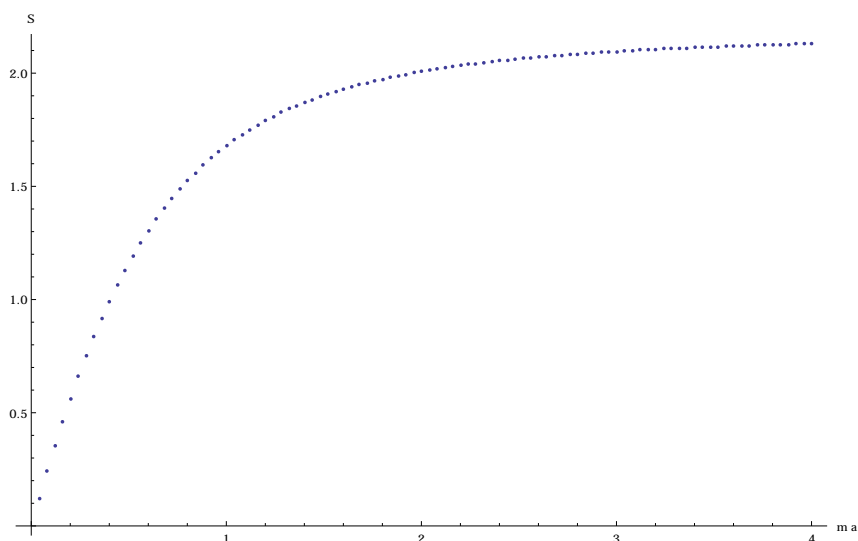
Como se puede ver en la figura, la aproximación de bajos momentos del Hamiltoniano Modular, se va a infinito muy rápido, al igual que la teoría libre. Por lo tanto si nos quedáramos en esta aproximación, la contribución a la entropía de altos momentos se vería suprimida por el factor  $e^{-p/m}$  del operador densidad, y se debería recuperar el resultado de la entropía para teorías conformes. Sin embargo, el Hamiltoniano modular sin aproximaciones tiene contribuciones a momentos grandes sin que el factor del operador densidad tienda a cero. Es por ésto que la entropía en el límite del continuo adquiere también contribuciones de momentos grandes, es decir bajas longitudes de onda que corresponden a ver detalles microscópicos del sistema.

El límite opuesto corresponde a tomar grandes valores de  $ma$ . Realizando numéricamente la integral (5.32) para distintos valores de  $M$  como se muestra en la figura 5.2, se puede ver que la entropía satura para valores grandes:

Si recuperamos el cambio de variables hecho, de la misma manera que en 5.33, pero para masas grandes resulta:



**Figura 5.1:** Comparación de relaciones del Hamiltoniano Modular aproximado para bajos momentos, una teoría libre, y el Hamiltoniano Modular sin aproximar. Las tres relaciones se graficaron para  $m=1$ .



**Figura 5.2:** Entropía para distintos valores de  $ma$ , fijando  $m=1$ .

$$S(ma \gg 1) \simeq 2 \frac{L}{va}, \quad (5.35)$$

de donde se ve que para valores grandes de espaciamiento, la entropía se hace independiente de la masa. Por lo tanto en el límite del discreto con grande espaciamiento, la entropía tampoco corresponde a la que se obtendría de considerar longitudes de onda grandes únicamente.

Esto quiere decir que la contribución de bajos momentos del Hamiltoniano Modular (5.29), no se aísla en ninguno de los dos límites de espaciamiento de la teoría original. Si así fuera, el resultado de la entropía para alguno de los dos límites debería corresponderse con el de la teoría conforme (5.25).

### 5.3. Extensión a Teorías Generalizadas de Campos Libres

En la sección anterior vimos como un sistema de fermiones en escalera se puede mapear a una teoría de campos de dos fermiones con la misma masa. La entropía asociada a una de las dos cadenas resultó una entropía volumétrica.

Para ver si la dependencia es extendible, es útil entonces considerar teorías generalizadas de campos libres [18]. La idea básica es que uno puede definir una teoría de campos definiendo todos sus correladores sin necesidad, y a veces sin posibilidad, de definir un Hamiltoniano de partida. Cabe entonces preguntarse qué tipo de entropía se obtiene de considerar este tipo de teorías. Por simplicidad, consideremos una teoría cuyos correladores corresponden a la contribución de los correladores de dos fermiones de masas distintas, con probabilidades  $q$  y  $(1 - q)$ :

$$C(p) = q \frac{(\sqrt{p^2 + m_1^2} \gamma^0 \gamma^0 + p \gamma^1 \gamma^0 + m_1)}{2\sqrt{p^2 + m_1^2}} + (1 - q) \frac{(\sqrt{p^2 + (m_1 + \Delta)^2} \gamma^0 \gamma^0 + p \gamma^1 \gamma^0 + (m_1 + \Delta))}{2\sqrt{p^2 + (m_1 + \Delta)^2}}, \quad (5.36)$$

donde  $\Delta = m_2 - m_1$ , y  $q$  va de cero a uno, por normalización. Cabe aclarar que si bien este correlador es la suma de dos correladores fermiónicos de masas distintas, esto no corresponde al correlador proveniente de la suma de dos Hamiltonianos de teorías libres con distintas masas. Inclusive, si uno partiera de este correlador y calculara el Hamiltoniano Modular, llegaría a un resultado que nada tiene que ver con un Hamiltoniano de teorías libres.

A partir de este correlador definido, podemos calcularle los autovalores y consiguientemente la entropía, utilizando la ecuación (5.18). El resultado tanto de los correladores como de la entropía resulta en este caso bastante extenso, por lo cual se realizó con un programa de cálculo. Sin embargo, la forma funcional de la entropía para un momento dado resulta de la manera siguiente:

$$S(p) = -2f(m_1, q, p, \Delta) \ln \left[ f(m_1, q, p, \Delta) \right] - 2 \left[ 1 - f(m_1, q, p, \Delta) \right] \ln \left[ 1 - f(m_1, q, p, \Delta) \right]. \quad (5.37)$$

Donde  $f(m_1, q, p, \Delta)$  es una función que depende de las variables entre paréntesis. La integral de la entropía no converge para cualquier valor de  $\Delta$ . Sin embargo, para analizar la estructura divergente es conveniente pensar en un valor de  $\Delta$  cercano a cero. En ese límite el primer término de la ecuación (5.37) tiende a cero más lento que el segundo, por lo cual es el término divergente principal.

Sin embargo el desarrollo en serie del primer término tampoco converge al realizar la integral en momentos. Es útil entonces realizar la aproximación siguiente: como el término dentro del logaritmo es un término adimensional, podemos pensar en un desarrollo orden a orden de la función  $f$  tanto dentro del argumento del logaritmo como en la parte que lo multiplica, es decir:

$$f(x) \ln(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} f^n(x) \ln \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f^n(x) \right], \quad (5.38)$$

donde  $f^n(x)$  indica el desarrollo de  $f$  a orden  $n$ , lo cual funciona relativamente bien a bajos órdenes si se desarrolla alrededor de cero. Haciendo esto, se tiene que el valor de la entropía aproximada para un momento fijo es:

$$S_D(p) = \frac{\Delta^2 p^2 (q - 1) q \log \left( -\frac{\Delta^2 p^2 (q - 1) q}{4(m_1^2 + p^2)^2} \right)}{2(m_1^2 + p^2)^2}, \quad (5.39)$$

Donde el subíndice  $D$  indica que se está trabajando con el término divergente principal únicamente.

Ahora bien, para obtener la entropía total, se debe integrar en  $p$  como realizamos en el capítulo anterior. Como vimos en la sección anterior, si tenemos un volumen finito la integral adquiere un factor  $L$ , lo cual resulta:

$$\begin{aligned}
 S_D &= L \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\Delta^2 p^2 (q-1) q \ln \left[ -\frac{\Delta^2 p^2 (q-1) q}{4(m_1^2 + p^2)^2} \right]}{2(m_1^2 + p^2)^2} \\
 &= L \frac{\pi \Delta^2 (q-1) q \left\{ -2 \ln \left( \frac{m_1}{\Delta^2} \right) + \ln [(q-1)q] - \ln(64) \right\}}{4m_1}.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Dadas las aproximaciones hechas, es conveniente analizar la consistencia del resultado con lo que sabemos que se tiene que cumplir de la entropía en los casos límite. Si analizamos el caso de  $q$  tendiendo a cero o a uno, se ve que el límite da cero. Esto está bien, ya que en ese caso nos estaríamos quedando con un solo correlador completo en todo el espacio, lo que daría entropía nula. Lo mismo se cumple para el caso de  $\Delta$  tendiendo a cero. Es decir que el término principal divergente cumple las propiedades de anularse cuando la entropía total debe anularse.

Por otro lado, vemos que al haber integrado sobre todos los momentos, la dependencia vuelve a ser volumétrica. Esto permite concluir que al trazar sobre grados de libertad internos en lugar de geométricos, esta dependencia aparecerá siempre. Esto se debe a que los correladores, y por consiguiente el Hamiltoniano Modular están definidos en todo el espacio, a diferencia de los primeros capítulos donde la traza sobre grados de libertad geométricos se traducía en restringir los correladores a una región.



## Capítulo 6

# Conclusiones

El desarrollo hecho en los capítulos 3 y 4 muestra que hay una relación directa entre la entropía de una región  $V$  de los campos escalar y fermiónico, y los autovalores del operador densidad definido en términos del Hamiltoniano Modular, los cuales se pueden obtener a partir de los autovalores de las funciones de correlación de dos puntos.

Se comprobó que cuando se traza sobre grados de libertad de un subsegmento de tamaño  $L$  para campos libres, la entropía diverge logarítmicamente con la longitud mencionada. Estas comprobaciones se hicieron numéricamente para el caso del campo escalar y el campo fermiónico.

En el capítulo 5, motivados por el problema de un sistema de fermiones en escalera, estudiamos la entropía que resultó de trazar sobre grados de libertad internos en lugar de trazar sobre regiones espaciales. Se calculó explícitamente la entropía asociada a trazar sobre una de las dos cadenas de fermiones, obteniendo una dependencia volumétrica en lugar de superficial. Se mostró también que en el límite de bajos momentos, el operador densidad correspondiente a la traza mencionada corresponde al de una teoría conforme no masiva a temperatura finita. Sin embargo, se mostró que los dos límites discretos, de pequeños y de grandes espaciamientos de la red, dan contribuciones a la entropía que no aíslan el resultado de la teoría conforme. Analizando esto último en términos de las longitudes de onda, se mostró que la entropía en los dos límites adquiere contribuciones de los modos de bajas longitudes de onda. El límite del continuo que estudiamos corresponde al sistema original cuando  $ma \rightarrow 0$ , siendo  $a$  el espaciado de la red, y la masa proporcional a la amplitud de tunneling del sistema original.

Por último, se realizó una pequeña generalización para teorías libres de campos generalizados. Este cálculo mostró que cuando se traza sobre grados de libertad internos, la entropía se puede descomponer en entropías definidas para cada momento, independientes de cualquier longitud característica del sistema. Esto permite concluir que el término universal que tiene dependencia logarítmica con la longitud característica del sistema, es propio de la traza sobre grados de libertad geométricos, y no extensivo a la traza sobre grados de libertad internos. La explicación de este fenómeno se debe a que al quedar la entropía diagonalizada en el espacio de momentos, la suma sobre los mismos arroja una divergencia volumétrica en lugar de superficial. Se concluye entonces que cuando la entropía quede diagonalizada de esta manera, se mantendrá la divergencia volumétrica. Por otro lado, se abre un nuevo interrogante respecto de si esta diagonalización en momentos, y la consecuente divergencia volumétrica, se mantendrá siempre que se realice una traza sobre grados de libertad internos.





## Apéndice A

# Integral de la entropía para el sistema de fermiones en escalera

Queremos ver como realizar la integral de la ecuación (5.24) :

$$S_A = L \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[ - \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} - pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} - pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) - \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} + pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{m^2 + p^2 v^2} + pv}{2\sqrt{m^2 + p^2 v^2}} \right) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Para esto, nos concentraremos en el segundo término del integrando, ya que el primero da exactamente lo mismo realizando el cambio de variables de  $p$  a  $-p$ . Para el segundo término entonces, realizando el cambio de variables  $x = pv/m$ , y reescribiendo de otra manera el término que multiplica al logaritmo, tenemos la siguiente integral:

$$S_A = -\frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Separando los argumentos del logaritmo, y los multiplicativos, identificamos cuatro integrales:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \sqrt{1+x^2} + x \right) \right] \\ I_2 &= \frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 2\sqrt{1+x^2} \right) \right] \\ I_3 &= -\frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \ln \left( \sqrt{1+x^2} + x \right) \right] \\ I_4 &= \frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \ln \left( 2\sqrt{1+x^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Si en  $I_1$  se hace la sustitución  $\text{ArcSinh}(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ , se ve que la integral se anula por ser una función impar. También por paridad se ve que se anula  $I_4$ . Aplicando propiedades de logaritmo a  $I_2$  y realizando la integral logarítmica se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{1+x^2}) \right] \\
&= \frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2} \ln(2) + \frac{Lm}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \\
&= \frac{Lm}{v} \left[ \frac{\ln(2)}{2} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \text{ArcTan}(x) + \frac{x}{4} \ln(1+x^2) \right] \Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty},
\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde la barra vertical indica la resta usual entre los límites de integración. Para  $I_3$  hacemos primero el siguiente cambio de variables:  $\sqrt{1+x^2} = y$ , entonces  $(x/\sqrt{1+x^2})dx = dy$ . Como la nueva variable tiene dominio desde cero a infinito, hay que multiplicar por dos la integral para mantener la región de integración sin cambios. Escribiendo en estas variables resulta:

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{Lm}{v} \int_0^{\infty} dy \left[ \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \right] = I_3 = -\frac{Lm}{v} \int_0^{\infty} dy \text{ArcCosh}(y) \\
&= -\frac{Lm}{v} \left[ -\sqrt{-1+y} \sqrt{1+y} + y \text{ArcCosh}(y) \right] \Bigg|_{y=0}^{y=\infty}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Recuperando el cambio de variables de  $y$  a  $x$ :

$$I_3 = -\frac{Lm}{v} \left[ -\sqrt{-1+\sqrt{1+x^2}} \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} \text{ArcCosh}(\sqrt{1+x^2}) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\infty}, \tag{A.6}$$

reescribiendo  $\text{ArcCosh}(\sqrt{1+x^2}) = \ln(\sqrt{1+x^2} + |x|)$  y comprimiendo el término con las raíces

$$I_3 = -\frac{Lm}{v} \left[ -x + \sqrt{1+x^2} \ln(\sqrt{1+x^2} + |x|) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\infty}. \tag{A.7}$$

Ahora como la variable aparece siempre al cuadrado, podemos dividir por dos y extender el límite inferior hasta menos infinito, sacando el valor absoluto del argumento del logaritmo, resultando:

$$I_3 = -\frac{Lm}{v} \left[ -x + \sqrt{1+x^2} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) \right] \Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty}. \tag{A.8}$$

Finalmente, sumando  $I_2$  e  $I_3$ , vemos cómo reacomodar los términos para que el límite resulte evidente

$$\begin{aligned}
I_2 + I_3 &= \frac{Lm}{v} \left[ \ln(2)x - x + \text{ArcTan}(x) + \frac{x}{2} \ln(1+x^2) \right] \\
&\quad - \frac{m}{v} \left[ -x + \sqrt{1+x^2} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) \right] \Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} \\
&= \frac{Lm}{v} \left[ \ln(2)x + \text{ArcTan}(x) + x \ln(\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) \right] \Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Viendo que el límite del último término cuando  $x \gg 1$  va como:

$$\lim_{x \gg 1} \left[ \sqrt{1+x^2} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) \right] = x \ln(2x) = \ln(2)x + x \ln(x), \tag{A.10}$$

se ve que se cancelan los términos con lineales y logarítmicos en la integral, y sólo contribuye el término del arcotangente. En resumen, la integral queda:

---

$$I_2 + I_3 = \frac{Lm}{2v} \text{ArcTan}(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \frac{Lm\pi}{2v}. \quad (\text{A.11})$$

Para calcular la integral total, hay que sumarle a esto la contribución del primer término de (A.1). Como se dijo anteriormente, el procedimiento es el mismo, solo que hay que cambiar  $p$  por  $-p$ . Como se integra en todo el espacio, ese cambio no tiene efecto en el signo del resultado final, el cual termina siendo el valor obtenido en (A.11). El resultado final de (A.1) es entonces el doble del valor calculado para el segundo término, es decir

$$S_A = \frac{Lm}{v}. \quad (\text{A.12})$$



# Bibliografía

- [1] C. G. Callan, Jr. and F. Wilczek, “On geometric entropy,” *Phys. Lett. B* **333**, 55 (1994) [arXiv:hep-th/9401072]. [1](#), [7](#)
- [2] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001]. [1](#)
- [3] S. Ryu and T. Takayanagi, M. A. Nielsen and I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information,” Cambridge Univ.Press., Cambridge (2000). [1](#)
- [4] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” *J. Phys. A* **42**, 504007 (2009) [arXiv:hep-th/0905.2562]. [1](#), [7](#), [18](#)
- [5] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” *J. Stat. Mech.* **0406**, P06002 (2004) [arXiv:hep-th/0405152]. [1](#)
- [6] Por ejemplo T. J. Osborne, M. A. Nielsen, *Phys. Rev. A* **66**, 032110 (2002) [arXiv:quant-ph/0202162]; A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazio, *Nature* **416**, 608 (2002) [arXiv:quant-ph/0202029]; J. I. Latorre, E. Rico, G. Vidal, *Quant. Inf. Comput.* **4**, 48 (2004) [arXiv:quant-ph/0304098]; J. I. Latorre, C. A. Lutken, E. Rico and G. Vidal, *Phys. Rev. A* **71**, 034301 (2005) [arXiv:quant-ph/0404120]; M. B. Plenio, J. Eisert, J. Dreissig and M. Cramer, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 060503 (2005) [arXiv:quant-ph/0405142]; M. Cramer, J. Eisert, M. B. Plenio and J. Dreissig, *Phys. Rev. A* **73**, 012309 (2006) [arXiv:quant-ph/0505092]. [1](#)
- [7] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh and V. Vedral, “Entanglement in many-body systems,” *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008) [arXiv:quant-ph/0703044]. [1](#)
- [8] M. Srednicki, “Entropy and area,” *Phys. Rev. Lett.* **71**, 666 (1993) [arXiv:hep-th/9303048]. [6](#)
- [9] A. B. Zamolodchikov, *JETP Lett.* **43**, 730 (1986). [7](#)
- [10] H. Casini and M. Huerta, “A Finite entanglement entropy and the c-theorem,” *Phys. Lett. B* **600**, 142 (2004) [arXiv:hep-th/0405111]. [7](#)
- [11] I. Peschel, “Calculation of reduced density matrices from correlation functions,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **205**, 205 (2003) [arXiv:cond-mat/0212631]. [10](#), [11](#), [31](#)
- [12] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement and alpha entropies for a massive scalar field in two dimensions,” *J. Stat. Mech.* **0512**, P12012 (2005) [arXiv:cond-mat/0511014].
- [13] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” Cambridge Univ.Press., Cambridge (2000). [15](#)
- [14] X. Chen and E. Fradkin, “Quantum Entanglement and Thermal Reduced Density Matrices in Fermion and Spin Systems on Ladders,” *J. Stat. Mech.* **2013**, P08013 (2013) [arXiv:1305.6538 [cond-mat.str-el]]. [29](#), [31](#), [33](#)

- 
- [15] J. Smit, “Introduction to quantum fields on a lattice: A robust mate,” Cambridge Lect. Notes Phys. **15**, 1 (2002). [26](#)
- [16] A. M. Tsvelik, “Quantum field theory in condensed matter physics,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 332 p [30](#)
- [17] A. Jaefari and E. Fradkin, “Pair-Density-Wave Superconducting Order in Two-Leg Ladders,” J. Ref. Phys. Rev **2012**,B 85 035104 (2012) [arXiv:1111.6320 [cond-mat.str-el]]. [30](#)
- [18] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal field theory,” New York, USA: Springer (1997) 890 p [32](#), [36](#)