

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**TEORÍAS MODIFICADAS DE GRAVEDAD
TELEPARALELA EN EL ESQUEMA DE BORN-INFELD**

N. Vattuone
Maestrando

Dr. F. Fiorini
Director

Miembros del Jurado
Dr. L. Da Rold (Instituto Balseiro)
Dr. J. Fernández (Instituto Balseiro)
Dr. D. Mazzitelli (Instituto Balseiro)

22 de Diciembre de 2015

Grupo de Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	iv
1. Introducción	1
2. El Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General	4
2.1. Geometría en el Espacio de Weitzenböck	4
2.2. La Acción Teleparalela	10
3. Teorías de gravedad modificada	13
3.1. Problemática en la Relatividad General	13
3.2. Singularidades del Espacio-Tiempo	15
3.3. Modificación mediante teorías $f(R)$ y $f(\mathbb{T})$	17
3.4. Gravedad à la Born-Infeld	18
3.5. Esquema determinantal	19
4. Teoría Determinantal TT en 1+1 Dimensiones	22
4.1. Teorías en dimensiones inferiores	22
4.2. La Acción Determinantal TT en $D=1+1$	25
4.3. Régimen de bajas energías	30
4.3.1. Ecuaciones para el dilatón y el boostón	32
4.3.2. Solución estática	34
4.4. Regularización de la Cosmología	37
5. Teoría Determinantal ST en D Dimensiones	40
5.1. Modificación de la Relatividad General mediante el esquema determi- nantal	40
5.1.1. Límite de bajas energías	45
5.2. Obtención de soluciones	47
5.3. Soluciones con simetría esférica	53
5.3.1. En las teorías $f(\mathbb{T})$	54

5.3.2. En la teoría determinantal	57
5.4. La Cosmología	59
6. Conclusiones	62
Bibliografía	64
Agradecimientos	67

Resumen

En este trabajo se estudiaron dos tipos de teorías de gravedad modificada -en el contexto teleparalelo- con el objetivo de regularizar las singularidades a las que lleva inevitablemente la Relatividad General. Estas teorías se construyen sobre la base del esquema determinantal de Born-Infeld utilizado para regularizar el electromagnetismo. En trabajos anteriores [1], se aplica dicho esquema en el marco de las teorías teleparalelas de la gravedad, obteniéndose resultados positivos para regularizar la cosmología.

En la primera parte del trabajo, se estudió un modelo de gravedad teleparalela en $1+1$ dimensiones, al cual se denominó teoría TT. A partir de esto, se propuso un método para el cálculo de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción determinantal. Una vez obtenidas, se analizó el régimen de bajas energías y se observó que la traza de las ecuaciones da lugar a la gravedad de Jackiw-Teitelboim [2]. Además, se estudió el modelo cosmológico al que lleva la acción de Born-Infeld, el cual resulta ser regularizado para ciertos parámetros de la teoría, al reemplazar la singularidad inicial del Big Bang por una etapa inflacionaria de extensión infinita hacia el pasado, tal como ocurre en $3+1$ dimensiones.

En segundo lugar, se estudió la modificación determinantal de la Relatividad General en $D > 2$ dimensiones. Utilizando el método mencionado, se calcularon las ecuaciones de movimiento de la teoría, lo cual es un aporte original de este trabajo y un punto de partida esencial para el estudio de nuevas soluciones. A partir de ellas, se pudieron probar una serie de proposiciones que permiten saber bajo qué condiciones se recuperan las soluciones de la Relatividad General y bajo cuáles se espera que haya modificación. En este marco, se muestra explícitamente cuales son las tétradas que dan lugar a Schwarzschild y cómo se puede generar una constante cosmológica mediante un boost adecuado. Finalmente, se corroboraron los resultados de [1], en los que se observa cómo el esquema de Born-Infeld regulariza la cosmología.

Palabras clave:

Capítulo 1

Introducción

“Hay geometría en el canturreo de las cuerdas. Hay música en el espacio que separa las esferas”

— Pitágoras

Espacio y tiempo son dos conceptos fundamentales en nuestra forma de construir la realidad. Todo lo que ocurre, ocurre en cierto lugar y en un dado momento. Todas nuestras nociones sobre el mundo físico se cimentan sobre ellos. Por mucho tiempo -y espacio-, los consideramos entes absolutos e inalterables. Como un fondo, en el que todo acontece pero sin cambiar nada. Hace cien años Einstein presentaba la Relatividad General (RG) y con ello modificaba para siempre estas nociones. Su teoría establece que espacio y tiempo son parte de una misma cosa, el espacio-tiempo, y su estructura está íntimamente ligada a la presencia de materia y energía. Y lo que conocemos como gravedad es sólo una manifestación de la geometría curva del espacio-tiempo. Desde entonces, la Relatividad nos ha permitido conocer sobre la evolución y el origen del Universo.

Son muchos los logros que esta nueva visión del espacio y el tiempo ha tenido en la explicación de datos experimentales. Afortunadamente para el curioso, existen aún problemas sin resolver. Algunos son de índole fenomenológico, como la naturaleza de la materia oscura y la energía oscura. Otros, de índole teórico como el de la dificultad de cuantizar la gravedad. Existe además un grave problema conceptual: la existencia de singularidades. Las singularidades atentan contra nuestras nociones de espacio y tiempo ya que representan un “lugar” donde el espacio-tiempo acaba bruscamente. Esto significa que un intrépido viajero que se lanzase hacia una singularidad llegaría en un tiempo finito a un borde del espacio-tiempo y allí terminaría inminentemente su existencia.

Hay dos tipos de singularidades que aparecen casi inevitablemente en la Relatividad General. Una transcurre en el pasado de nuestro universo, al comienzo de la expansión actual, la cual puede ser interpretada como el origen del Universo. La otra se halla es-

condida, en el interior de los agujeros negros. La inevitabilidad de estas singularidades, fue demostrada por Hawking y Penrose en sus famosos Teoremas de singularidades [3].

La propuesta de este trabajo es estudiar una modificación a la Relatividad General con el fin de subsanar las singularidades. Los intentos por modificar directamente la Relatividad General, basados en teorías cuya estructura reposa en espacios (pseudo) Riemannianos, se encuentran con dificultades que se comentarán en el capítulo 3. Por lo tanto, decidimos estudiar una teoría que se contruye en el marco de la gravedad teleparalela.

En el capítulo 2, comenzamos nuestro trabajo describiendo el enfoque geométrico que caracteriza a la gravedad teleparalela. Observaremos en qué sentido este enfoque es equivalente a la Relatividad General y que diferencias tiene. Este capítulo es una introducción a la geometría de Weitzenböck, que pretende ser autocontenida e independiente del resto del trabajo para el lector ya versado en teleparalelismo.

En el capítulo 3, retomamos el estudio de los distintos problemas que aparecen en la Relatividad General. En particular, hacemos una descripción más precisa de lo que significa una singularidad espaciotemporal. Una vez convencidos de la importancia de estudiar teorías modificadas, procedemos a analizar distintas formas de hacerlo. Allí describimos el esquema determinantal de Born-Infeld, el cual hemos decidido utilizar en el resto del trabajo. El mismo ha demostrado ser capaz de regularizar espaciotiempos cosmológicos que en la teoría de Einstein son paradigmáticamente singulares. En este caso, la singularidad inicial es reemplazada por una etapa inflacionaria natural de duración infinita que asegura la completitud geodésica del espacio-tiempo [1]. Surge entonces la pregunta: ¿Es este mismo esquema capaz de regularizar la solución de agujero negro provista por la métrica de Schwarzschild en su contraparte relativista?

Como primer paso, en aras de simplificar el problema, decidimos abordarlo en dimensiones inferiores a 4. Las soluciones tipo agujero negro en la gravedad Einsteniana tridimensional han sido exhaustivamente analizadas en la literatura, destacando el agujero negro BTZ [4]. En dimensión $D = 2$ diversas soluciones han sido estudiadas en el contexto de la gravedad de Jackiw-Teitelboim [5]. Estudiar modelos en dimensiones inferiores ha resultado útil en casi todas las ramas de la física, pues supone una gran simplificación del problema, manteniendo en muchos casos, aspectos importantes de su contraparte en más dimensiones. Por estas razones, en el capítulo 4 se estudia una acción gravitatoria de tipo Born Infeld en 1+1 dimensiones a la que denominamos TT. Dado que la Relatividad General no posee un equivalente en dos dimensiones, la teoría se construye en forma puramente teleparalela, teniendo a la *díada* como único agente dinámico. El primer aporte original de este trabajo, consiste en brindar un método práctico para obtener las ecuaciones de movimiento de una teoría determinantal. Luego, calculamos las ecuaciones de movimiento en el límite de bajas energías y analizamos la forma general de sus soluciones. Se verá que esta teoría presenta interesantes

propiedades que nos permiten relacionarla de manera bastante directa con la teoría en dimensiones mayores.

Si bien las ecuaciones en el caso general resultan difíciles de abordar, éstas se simplifican notablemente en el caso de un modelo cosmológico. En tal situación, es posible resolverlas. La solución a la que llegamos para la cosmología se revela exactamente igual a la de la teoría determinantal en dimensión $D=4$. Es decir, que para valores adecuados de los parámetros de la teoría, la singularidad es regularizada.

Finalmente, con las herramientas adquiridas, en el capítulo 5 nos lanzamos a estudiar la modificación determinantal de la Relatividad General. Como primer paso, calculamos las ecuaciones de movimiento de la teoría. Luego, damos una serie de proposiciones muy útiles a la hora de buscar soluciones. Como mencionamos, las singularidades más relevantes en la Relatividad General, corresponden a las que aparecen en el interior de un agujero negro y en la cosmología. Como veremos en ese capítulo, la cosmología logra ser regularizada en este marco. Sin embargo, no hemos podido aún encontrar una solución regular de agujero negro. Aún así, realizamos un análisis relativamente exhaustivo de los casos en los que se recupera el espacio-tiempo de Schwarzschild y vemos qué tipo de modificaciones esperamos que produzca el esquema determinantal en este espacio-tiempo. Por último, se reobtuvieron los resultados de [1] a partir de las ecuaciones de movimiento completas.

Capítulo 2

El Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General

“The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.”

— Hermann Minkowski, 1908

En este capítulo se dará una breve descripción de los elementos esenciales que hacen a la formulación teleparalela de la gravedad. En la sección 2.1 se hará énfasis en los conceptos geométricos que caracterizan a un espacio con paralelismo absoluto. Se enuncian además un conjunto de propiedades que caracterizan al *vielbein* - que constituye el campo dinámico en una teoría con paralelismo absoluto en D dimensiones- y a la conexión de Weitzenböck. En la sección 2.2 se describe cómo se puede construir en el contexto teleparalelo una teoría equivalente a la Relatividad General (ETRG). Allí se muestran la acción y las ecuaciones escritas en términos de la torsión.

2.1. Geometría en el Espacio de Weitzenböck

Como es sabido, la Relatividad General describe el espacio-tiempo como una variedad pseudo Riemanniana \mathcal{M} con una métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$. La geometría es modificada por el contenido de materia y energía, y su relación viene dada por las ecuaciones de Einstein. A su vez, una partícula de prueba libremente gravitante se moverá por una geodésica de este espacio-tiempo.

Para definir una noción de paralelismo sobre una variedad, se debe dotar a esta

de una *conexión afín*, notada usualmente como $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$. En RG, la conexión utilizada es la de Levi-Civita, que es la única conexión simétrica en sus índices covariantes que es *métrica*. Esto significa, que la derivada covariante de la métrica es cero. Asociada a una conexión, hay dos tensores que de alguna manera "miden" los efectos no euclídeos sobre la variedad. Estos son el tensor de torsión, que mide la no conmutatividad de desplazamientos y el tensor de curvatura que mide la no conmutatividad de la derivada covariante. La conexión de Levi-Civita es simétrica y eso implica que su torsión es nula. La presencia de materia en esta teoría está directamente relacionada con la curvatura del espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein. Es en la curvatura, entonces, donde se materializa el contenido dinámico de la teoría.

Es posible, sin embargo, hacer una descripción alternativa de la gravedad Einsteiniana mediante el denominado Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (ETRG) [6]. La noción de teleparalelismo fue desarrollada por el mismo Einstein, en un intento por unificar la gravedad y el electromagnetismo en una única teoría geométrica. En esta versión de la gravedad, el ente dinámico no es la métrica sino el *vierbein* o *tétrada* (como se lo denomina en $D=4$), el cual consiste en un conjunto de cuatro campos vectoriales que definen una noción de paralelismo absoluto en el espacio-tiempo. Las curvas integrales de estos campos constituyen una suerte de "grilla" cuyas líneas definen la manera de transportar paralelamente un vector. Un espacio con estas características se denomina Espacio de Weitzenböck, el cual, al poseer una noción absoluta de paralelismo, posee curvatura nula. En este espacio, la gravedad se manifiesta a través de la torsión, que actúa como una "fuerza" que produce que la trayectoria de una partícula se desvíe de las curvas autoparalelas. A continuación, describiremos este espacio matemáticamente.

Para describir la geometría subyacente en Teleparalelismo, consideremos una variedad diferencial de Hausdorff M , n -dimensional, paracompacta y C^{∞} . En cada punto $p \in M$, existe un entorno U donde definiremos coordenadas locales dadas por $x = \{x^{\mu}\}$, y la respectiva base coordenada, que en p luce como $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_{\mu}\} = \{(\partial/\partial x^{\mu})\}_p$, donde $\mu = 0, \dots, n-1$. En el mismo punto la base dual es $\mathbf{E}^* = \{\mathbf{E}^{\mu}\} = \{(dx^{\mu})_p\}$, y por lo tanto vale que $E^{\mu}(E_{\nu}) = \delta_{\nu}^{\mu}$. Un *vielbein* consiste en un conjunto de n campos vectoriales suaves $\{e_a(p)\}_{a=0, \dots, n-1}$ y linealmente independientes en cada punto p de la variedad. Esto significa que $\{e_a(p)\}$ constituye una base del espacio tangente T_p . Pero un conocido resultado del álgebra lineal, nos dice que dada una base en un espacio vectorial, existe un único producto interno que convierte a esos vectores en una base ortonormal. De aquí, que es posible construir un tensor métrico g imponiendo la condición de que el *vielbein* sea una base ortonormal en todo punto del espacio. Es decir, que cumplan que su producto escalar respecto de la métrica g sea igual a las componentes del tensor de Minkowski, esto es

$$g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad (2.1)$$

donde hemos expresado cada vector del *vielbein* en término de la base coordenada usual $e_a = e_a^\mu E_\mu$.

Por conformar una base, se tiene que la matriz e_a^μ posee inversa, utilizaremos los símbolos e_μ^a para indicar las componentes de la misma:

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b. \quad (2.2)$$

La segunda de estas relaciones implica que las cantidades e_μ^a no son más que las componentes de las 1-formas que constituyen la base dual $\mathbf{e}^* = \{\mathbf{e}^a(p)\}$ en T_p^*M : $\langle \mathbf{e}^a, \mathbf{e}_b \rangle = \delta_b^a$. Es decir,

$$\mathbf{e}^a = e_\mu^a \mathbf{E}^\mu. \quad (2.3)$$

Por medio de la ec. 2.2 podemos invertir las relaciones anteriores:

$$\mathbf{E}_\mu = e_\mu^a \mathbf{e}_a \quad \mathbf{E}^\mu = e_a^\mu \mathbf{e}^a. \quad (2.4)$$

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Las ecs. 2.1 y 2.5 muestran el papel jugado por las cantidades e_a^μ : ellas ofician de nexo entre la variedad cuya geometría es expresada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y el espacio *plano* tangente T_pM donde está definida la métrica de Minkowski $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Para ello los símbolos e_a^μ portan dos tipos de índices: mientras los índices latinos $a, b, c, \dots = 0, 1, \dots, D - 1$ se refieren al espacio tangente T_pM , los índices griegos $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \dots, n - 1$ hacen referencia a coordenadas en la variedad M . Es decir, los índices latinos conllevan un carácter tensorial lorentziano, pues transforman ante transformaciones de Lorentz en el espacio tangente, mientras que los índices griegos se relacionan con los cambios generales de coordenadas en la variedad M . Las componentes de las tétradas pueden ser vistas como herramientas para convertir índices griegos en índices latinos y viceversa. Por ejemplo, según la ec. 2.4, un vector cualquiera $\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{E}_\mu$ es reescrito como $\mathbf{V} = V^a \mathbf{e}_a$, siendo sus componentes lorentzianas

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (2.6)$$

Esta relación puede verse gráficamente en la figura 2.1. Podemos recorrer el camino inverso por medio de la ec. 2.2, para obtener

$$V^\mu = e_a^\mu V^a. \quad (2.7)$$

También vale el resultado análogo para índice covariantes, y a partir de estos resultados,

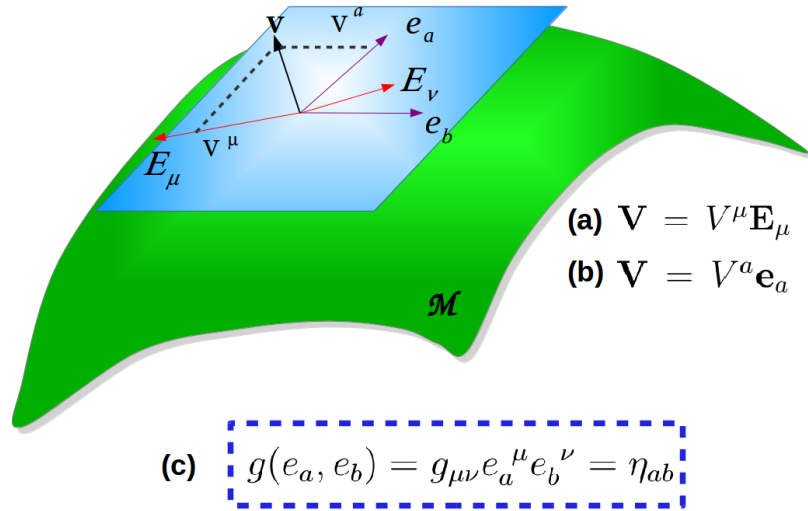


Figura 2.1: La tetrada define una base en el espacio tangente a un punto p de la variedad \mathcal{M} . Todo vector V puede escribirse en término de sus componente en la base canónica V^μ (a) o en sus componentes en la tetrada V^a (b). La ecuación (c) da la relación entre la tetrada y la métrica que define la ortonormalidad de la base $\{e^a\}$.

no es difícil probar que el *vielbein* se puede utilizar para subir y bajar índices:

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}. \quad (2.8)$$

En particular, se puede bajar y subir índices del propio vielbein:

$$e_\mu^a = g_{\mu\nu} \eta^{ab} e_b^\nu. \quad (2.9)$$

Por supuesto, el producto escalar entre vectores no depende de la base, pudiéndose expresar tanto como contracción de índices griegos o latinos:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = \eta_{ab} V^a W^b = V_\mu W^\mu = V_a W^a \quad (2.10)$$

La regla para transformar índices lorentzianos en índices espacio-temporales (y viceversa) se aplica análogamente a cualquier tensor de rango superior. En este sentido podríamos decir que las ecs. 2.1 y 2.5 conectan las componentes lorentzianas y espacio-temporales de un mismo objeto geométrico.

Como ya hemos mencionado, en Relatividad General se utiliza la conexión (derivada covariante) de Levi-Civita, que en una base coordenada se expresa mediante los símbolos de Christoffel,

$${}^{(LC)}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.11)$$

Esta conexión se caracteriza por su compatibilidad con la métrica (la derivada covariante de la métrica es nula) y su torsión nula (simetría de los índices covariantes). Por otra parte, las geodésicas se caracterizan por ser curvas autoparalelas de esta conexión.

Con ayuda del campo de tétradas queremos definir una noción distinta de paralelismo (es decir, una conexión distinta), donde un campo \mathbf{V} sea autoparalelo si sus componentes lorentzianas V^a son constantes. Para que esto suceda, se define la derivada covariante de un vector en el espacio de Weitzenböck como:

$${}^{(W)}\nabla_\nu V^\lambda = \partial_\nu V^\lambda + e_a^\lambda \partial_\nu e_\mu^a V^\mu = e_a^\mu \partial_\nu V^a \quad (2.12)$$

La conexión afín asociada a esta derivada covariante está dada por:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e_a^\lambda \partial_\nu e_\mu^a = -e_\mu^a \partial_\nu e_a^\lambda. \quad (2.13)$$

Es fácil ver a partir de la definición, que las tétradas poseen derivada covariante nula (sus curvas integrales son siempre autoparalelas):

$${}^{(W)}\nabla_\nu e_a^\mu = \partial_\nu e_a^\mu + e_b^\mu \partial_\nu e_\lambda^b e_a^\lambda = 0 \quad (2.14)$$

Como hemos mencionado, una forma de visualizar la paralelización que induce la tétrada sobre la variedad es pensar en que da lugar a una "grilla", tal como se muestra en la figura 2.2. Esta grilla se construye con las curvas autoparalelas, es decir, con aquellas curvas que en cada punto de la variedad tienen como vector tangente a uno de los vectores del *vierbein*.

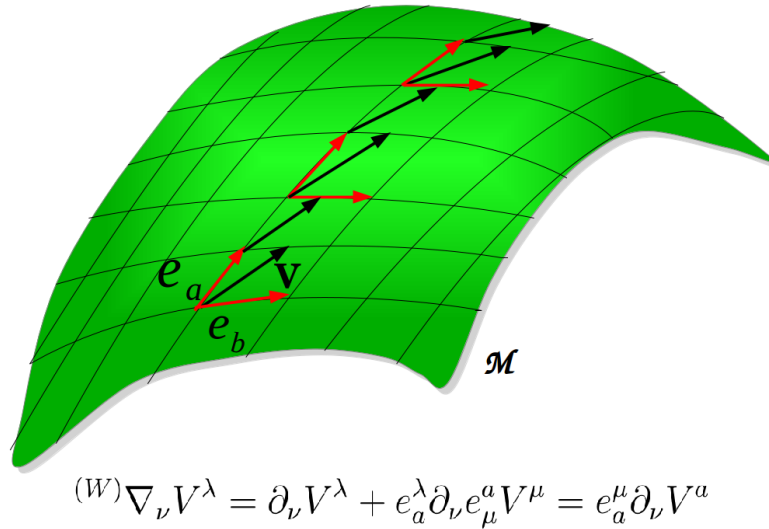


Figura 2.2: Paralelización de la variedad \mathcal{M} inducida por la tétrada $\{e_a\}$. Las curvas autoparalelas graficadas se caracterizan por tener a la tétrada como vector tangente. Se dice que el vector V es transportado paralelamente si sus componentes en la tétrada se mantienen constantes.

Para cualquier conexión, se define el tensor de torsión como:

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}. \quad (2.15)$$

En el caso del espacio de Weitzenböck, tenemos que:

$${}^{(W)}T^{\lambda}_{\mu\nu} = e_a^{\lambda} \partial_{[\nu} e_{\mu]}^a, \quad (2.16)$$

donde los corchetes indican la antisimetrización de esos índices. La torsión de Weitzenböck, además de comportarse como tensor ante cambio general de coordenadas en la variedad, es invariante ante transformaciones (globales) del grupo de Lorentz en el plano tangente. Como se mencionó anteriormente, el tensor de curvatura asociado a la conexión de Weitzenböck es nulo, pues los vectores no sufren cambios al ser transportados paralelamente a lo largo de una curva cerrada

$${}^{(W)}R^{\mu\lambda\rho\sigma} = 0 \quad (2.17)$$

En este sentido, el espacio de Weitzenböck \mathbb{W} es un espacio tan plano como el de Minkowski, puesto que su curvatura es nula. Sin embargo, este espacio está caracterizado por un tensor de torsión no nulo, que será la cantidad que dará cuenta del campo gravitatorio. Por otro lado, el espacio de Riemann \mathbb{R} de la relatividad general, es un espacio con curvatura no nula y sin torsión, ya que la conexión de Levi-Civita es simétrica en los índices covariantes. La ecuación de las geodésicas, obtenida a partir de buscar trayectorias que maximicen el parámetro afín de la curva, toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + {}^{(W)}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} U^{\nu} U^{\rho} = -K^{\mu}_{\nu\rho} U^{\nu} U^{\rho}, \quad (2.18)$$

donde $K^{\mu}_{\nu\rho}$ son las componentes del tensor de contorsión, que da la diferencia entre la conexión de Weitzenböck y la de Levi-civita:

$$K^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{(LC)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - {}^{(W)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}^{\lambda}{}_{\mu} - T^{\lambda}_{\mu\nu}) \quad (2.19)$$

Por lo tanto, en este espacio la gravedad aparece como una fuerza dada por la parte simétrica del tensor de contorsión que provoca que las curvas autoparalelas no se correspondan con las geodésicas.

Por último, cabe hacer el siguiente comentario. En la formulación clásica de la Relatividad General la variedad que representa el espacio-tiempo debe ser pseudo-Riemanniana, es decir, que es posible definir una métrica Lorentziana de forma suave en todo punto de la misma. En la formulación teleparalela, la variedad debe ser *paralelizable*, es decir debe ser posible definir al vielbein de manera continua en todo la variedad sin que se anule ninguno de los vectores que forman la base. Esta condición es

claramente más restrictiva. Sin ir más lejos, una variedad tan sencilla como la esfera S^2 no es paralelizable. Sin embargo, hay algunos motivos físicos para considerar razonable esta condición. En [7] y [8] Geroch demuestra que para que sea posible definir campos espinoriales en todo punto, es necesario que el espaciotiempo sea paralelizable. Esto es por lo tanto, un requisito para poder definir campos fermiónicos en la variedad. Por otro lado, si el espacio-tiempo es globalmente hiperbólico (es decir, admite una superficie de Cauchy), entonces su topología es $R \times \Sigma$, donde Σ es una variedad tridimensional con signatura espacial. Pero hay un teorema que prueba que las variedades tridimensionales son paralelizables [9]. Además, el producto de variedades paralelizables es paralelizable. En conclusión, los espaciotiempos globalmente hiperbólicos son paralelizables.

2.2. La Acción Teleparalela

En la sección anterior describimos un nuevo tipo de geometría en la cual el ente dinámico es el vielbein $e^a(x)$. En esta sección veremos brevemente que es posible construir una acción a partir de la tétrada que resulta equivalente a la de Hilbert-Einstein. Es importante destacar que en principio una teoría teleparalela posee 16 grados de libertad (las componentes de la tétrada) mientras que una teoría de la métrica posee 10 grados de libertad debido a la simetría de $g_{\mu\nu}$. Por lo tanto, si se pretende construir una teoría teleparalela que describa la Relatividad General, la misma debe poseer una estructura tal que los seis grados de libertad adicionales estén asociados a simetrías internas de la misma.

¿A qué se debe esta libertad adicional? La expresión 2.1 que relaciona a la métrica y a la tétrada es invariante local de Lorentz. Esto significa que si modificamos la tétrada mediante una transformación local de Lorentz

$$e'_a(x) = \Lambda^b_a(x)e_b(x) \quad (2.20)$$

y dado que, por definición, las transformaciones de Lorentz dejan invariante el producto interno de vectores en el espacio de Minkowski, vale que

$$g_{\mu\nu}e'^{\mu}_a e'^{\nu}_b = \eta_{ab}. \quad (2.21)$$

Por ende, siendo que la Relatividad General es una teoría para la métrica y cualquier conjunto de tétradas que estén vinculadas mediante transformaciones locales de Lorentz dan lugar a la misma métrica, concluimos que todas estas tétradas deben ser equivalentes en la teoría teleparalela. De aquí, que los seis grados de libertad adicionales están relacionados con las seis dimensiones del grupo de Lorentz.

Existen distintas formas de encarar este problema. Una de ellas, consiste en reescribir el escalar de curvatura R en términos de la tétrada, utilizando la relación que hay

entre la conexión de Levi-civita y la conexión de Weitzenböck 2.19. Este es el enfoque tomado en [10], en donde se llega al siguiente resultado:

$$|e|R = -|e|\left(\frac{1}{4}T^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\lambda\mu\nu}T_{\mu\lambda\nu} - T_{\nu}{}^{\mu\nu}T_{\theta\mu}{}^{\theta}\right) + 2\partial_{\mu}\left(|e|T_{\theta}{}^{\theta\mu}\right) \quad (2.22)$$

donde $|e| = \sqrt{|g|}$ es el determinante de $e^a{}_{\lambda}$. Si definimos el tensor $S_{\rho}{}^{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

$$S_{\rho}{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(T^{\mu\nu}{}_{\rho} - T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T_{\rho}{}^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\delta^{\mu}{}_{\rho}T^{\theta\nu}{}_{\theta} - \delta^{\nu}{}_{\rho}T^{\theta\mu}{}_{\theta}) \quad (2.23)$$

y el escalar de Weitzenböck $\mathbb{T} = S_{\rho}{}^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^{\rho}$, podemos reescribir la ecuación 2.22 como:

$$|e|R = |e|\mathbb{T} + 2\partial_{\mu}(|e|T_{\nu}{}^{\nu\mu}). \quad (2.24)$$

Por lo tanto, si tomamos como lagrangiano $\mathcal{L}_T = \frac{1}{16\pi G}|e|\mathbb{T}$, el cual está construido sólo a partir de la torsión y difiere del lagrangiano de Hilbert-Einstein sólo en una derivada total, obtenemos una teoría con estructura teleparalela que debe dar lugar a ecuaciones equivalentes a las de la Relatividad General.

¿Cómo puede verse la invariancia local de Lorentz de esta teoría? En un enfoque más formal, puede construirse un lagrangiano general a partir del acoplamiento de las componentes irreducibles de la torsión frente al grupo de Lorentz [6]. Pidiéndole al lagrangiano que sólo se modifique mediante la suma de una derivada total al realizar una transformación local de Lorentz, se pueden elegir las constantes de acoplamiento de forma que esto ocurra. Mediante este método, se llega al mismo lagrangiano $\mathcal{L}_T = \frac{1}{16\pi G}|e|\mathbb{T}$ y se prueba de forma directa la invariancia de la teoría ante transformaciones locales de Lorentz.

Otro enfoque utilizado por Y. M. Cho [11] permite obtener esta teoría como una teoría de gauge, en la que el grupo de simetrías corresponde al subgrupo de traslaciones del grupo de Poincaré.

A partir de la relación 2.24, podemos ver de manera directa un conocido hecho de la RG. El escalar de curvatura contiene derivadas segundas de la métrica, y por lo tanto, uno esperaría que las ecuaciones que obtendría variando la acción de Hilbert respecto de las componentes de la métrica, sean de cuarto orden. Sin embargo, las ecuaciones de Einstein son de segundo orden. La explicación es sencilla: los términos que contienen derivadas segundas pueden reagruparse formando una derivada total. Por esta razón, el lagrangiano equivalente que uno obtiene posee solo derivadas primeras, dando lugar a ecuaciones de segundo orden. Las ecuaciones que se obtienen son [6]:

$$\frac{1}{|e|}\partial_{\mu}(|e|S_a^{\mu\lambda}) - S_{\rho}{}^{\mu\lambda}T_{\mu a}^{\rho} + \frac{1}{4}e_a^{\lambda}\mathbb{T} = 4\pi G\mathbf{T}_a{}^{\lambda} \quad (2.25)$$

Comparando estas con las ecuaciones de Einstein, tenemos que

$$\frac{1}{|e|}\partial_\mu(|e|S_a^{\mu\lambda}) - S_\rho^{\mu\lambda}T_{\mu a}^\rho + \frac{1}{4}e_a^\lambda\mathbb{T} = \frac{1}{2}G_a^\lambda, \quad (2.26)$$

donde G_a^λ es el tensor de Einstein.

Capítulo 3

Teorías de gravedad modificada

“This theory leads to two remarkable predictions about the universe: first, that the final fate of massive stars is to collapse behind an event horizon to form a black hole which will contain a singularity; and secondly, that there is a singularity in our past which constitutes, in some sense, a beginning to the universe.”

— S. Hawking and G. Ellis, 1973

En la primera sección de este capítulo describiremos de forma somera cuáles son algunas de las dificultades con las que se enfrenta la Relatividad General. Con esto nos referimos a situaciones experimentales y teóricas a las cuales no ha logrado dar una respuesta del todo satisfactoria. En la sección 3.2 hacemos hincapié en el problema de las singularidades, las distintas formas de definir las y en qué situaciones aparecen. En la siguiente sección, describimos un esquema usual de modificación de RG mediante teorías $f(R)$ y $f(\mathbb{T})$ y cuáles son los problemas que en ellas surgen. En las secciones 3.4 y 3.5 se describen la teoría de Born-Infeld y el esquema determinantal para modificar la RG.

3.1. Problemática en la Relatividad General

Hace cien años nacía la Relatividad General. No había en ese momento fuertes motivos empíricos que demandaran una nueva teoría sobre la gravedad. Tan sólo un pequeño corrimiento en la precesión de la órbita de mercurio que no podía ser explicado por la gravedad newtoniana. Pero Einstein sabía que había una incompatibilidad entre la teoría de Newton, en la que la gravedad actuaba de modo instantáneo, y el principio de causalidad de la Relatividad Especial. Diez años de trabajo le llevó a Einstein hallar la asombrosa respuesta. La gravedad es una manifestación de la geometría no euclídeana

del espacio-tiempo.

Desde entonces, la Relatividad General lleva 100 años de corroboraciones empíricas [12], habiendo sido capaz de predecir efectos medibles nunca antes imaginados. Entre estos efectos están la deflexión de la luz, la dilatación temporal, el corrimiento al rojo de la luz proveniente de galaxias distantes, la expansión del universo, las ondas gravitatorias, el colapso gravitatorio de una estrella, el fondo cósmico de microondas y la lista continúa. Sin embargo, hoy en día, existen problemas a los que la Relatividad General aún no ha podido dar una respuesta.

Uno de los problemas más relevantes en este sentido es el de la cuantización de la gravedad [13]. Toda la física de partículas fundamentales y de las interacciones electromagnéticas, fuerte y débil es entendida actualmente en términos de campos cuánticos. La teoría de Einstein sin embargo, resulta ser *no-renormalizable*. Esto significa que el desarrollo perturbativo que se utiliza para dar sentido a los campos cuánticos no puede utilizarse en RG pues da lugar a divergencias que no se pueden remover. Desde el punto de vista conceptual, surge además la siguiente pregunta. Los campos cuánticos están definidos sobre un background específico, que es el espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, la gravedad, es la estructura misma del espacio-tiempo, por lo tanto, ¿qué significa cuantizar el espacio-tiempo?

En cierto sentido, la búsqueda de una gravedad cuántica se halla en un estado similar al que estaba en sus comienzos la búsqueda de una gravedad relativista. Al día de hoy, no tenemos ningún tipo de evidencia experimental que nos de información sobre cómo debería ser la gravedad a energías suficientemente altas como para tener en cuenta los efectos cuánticos. Pero al igual que Einstein contamos con argumentos teóricos para buscar una nueva teoría de la gravedad.

Una primera pista sobre la cuantización de la gravedad viene del estudio de teorías cuánticas de campos en espacios curvos. Esta teoría nos permite estudiar el efecto que produce la gravedad de Einstein sobre los campos cuánticos. Visto de otra forma, describe el comportamiento de un campo cuántico cuando el background en que aparece no es Minkowski, sino un espacio tiempo curvo arbitrario. A su vez, el campo cuántico da lugar a un tensor de energía-impulso con valor de expectación distinto de cero y puede utilizarse como fuente del campo gravitatorio, en lo que se conoce como ecuación de reacción. En este contexto, Hawking estudió la interacción de un agujero negro con un campo cuántico. Así llegó a su conocido resultado: los agujeros negros emiten partículas en forma de radiación de Hawking, perdiendo así su energía hasta evaporarse por completo. De este resultado, surge una paradoja, pues la información de lo que “cayó” en el agujero negro desaparece al evaporarse este. En conclusión, este resultado entra en contradicción con la evolución unitaria de la mecánica cuántica.

Otro argumento para buscar una gravedad cuántica es el de la búsqueda de una Teoría Unificada. Por ejemplo, la electricidad y el magnetismo eran antiguamente entes

separados, mientras que hoy sabemos que son solo dos caras del campo electromagnético. Las interacciones electromagnéticas y nuclear débil también se encuentran unificadas en el Modelo Estándar, donde corresponden a los campos de gauge del grupo de simetría $SU(2) \times U(1)$. El Modelo Estándar completo, es decir, incorporando la fuerza fuerte, se entiende como una teoría de gauge del grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Todo esto alienta a la especulación de poder encontrar una teoría en la que las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza sean sólo distintas partes de lo mismo.

Otros problemas abiertos en cuanto a la gravedad son la materia y la energía oscura. La primera es necesaria para explicar la diferencia entre la distribución de masa que observamos (a través de la radiación electromagnética) y la masa necesaria para explicar los efectos gravitatorios que medimos. Por otro lado, la energía oscura sería la responsable de la expansión acelerada del universo en esta época, incorporando de alguna manera una constante cosmológica a la teoría. Por el momento, estas formas de materia y energía han sido sólo hipotetizadas para explicar la fenomenología astrofísica y cosmológica, pero no han podido ser medidas. Con lo cual, cabe preguntarse si no pueden ser también un efecto que se incorpore con una teoría modificada de la gravedad.

Por último, hemos dejado el problema de las singularidades, que resultan de principal interés para este trabajo y por eso describiremos en la siguiente sección.

3.2. Singularidades del Espacio-Tiempo

Gran parte del éxito de la relatividad general reside en el estudio de dos tipos de soluciones: el espacio-tiempo esféricamente simétrico y la cosmología. A pesar de esto, estas soluciones tan importantes poseen un comportamiento peculiar. Por ejemplo, la métrica de Schwarzschild presenta un horizonte de eventos, una superficie esférica cuyo interior se encuentra desconectado causalmente del resto del Universo. Es decir, que si una estrella colapsa gravitatoriamente, de forma tal de alcanzar una densidad crítica, se forma un *agujero negro*, del cual ni la luz puede escapar. Lo que es aún más extraño, es que una vez atravesado el horizonte, el destino inevitable del desafortunado observador es caer al centro de la esfera, donde es borrado de la existencia. ¿Qué queremos decir con esto? Todas las curvas causales dentro del horizonte, convergen en un tiempo propio finito al origen de coordenadas. Pero este punto, donde la métrica no está definida y hay divergencia del escalar $R_{abcd}R^{abcd}$, no forma parte de la variedad. De hecho, mediante la extensión analítica de Kruskal es posible ver que la región $r = 0$ forma un borde de tipo-espacio de la variedad [14]. Por lo tanto, las trayectorias que llegan a esa región no pueden ser extendidas más allá en el espacio-tiempo y allí terminan su existencia.

La cosmología tampoco está exenta de este problema, ya que para un universo en expansión (tal como en el que vivimos) predice que debe existir un tiempo finito hacia

el pasado en el cual el factor de escala se anula y por lo tanto toda la materia del universo se concentra en un único punto de densidad infinita: la singularidad inicial del Big Bang. La pregunta ¿qué hay antes del Big Bang?, no tiene sentido en este contexto, pues nuevamente no hay trayectorias temporales que puedan extenderse hacia el pasado más allá de la singularidad.

Es difícil dar una definición general de qué es una singularidad. En otras áreas de la física, una singularidad está generalmente asociada a la divergencia de alguna magnitud en algún lugar del espacio-tiempo, como por ejemplo, el campo electromagnético de una carga puntual. Sin embargo, aquí es el espacio-tiempo mismo el que presenta un comportamiento indefinido. Algunos criterios para la identificación de singularidades son:

- Que haya divergencia de la curvatura. Esto debe analizarse de una manera que sea independiente de la elección de coordenadas, ya que los cambios de coordenadas alteran la forma en que se observa la singularidad. Una forma de hacerlo es a través de los invariantes R , $R^{ab}R_{ab}$, $R^{abcd}R_{abcd}$ y otros escalares polinomiales en el tensor de curvatura y sus derivadas.
- La presencia de “agujeros” en el espacio-tiempo, debido a la remoción de las singularidades. La manera de detectar estos agujeros es mediante la existencia de geodésicas incompletas, es decir, que no pueden extenderse para valores arbitrarios de su parámetro afín.

El primer criterio, si bien es suficiente para decir que hay una singularidad, deja afuera otros tipo de singularidades. Por ejemplo, hay casos donde todos los escalares son idénticamente cero, pero el tensor de curvatura es de todas formas singular. Hay singularidades en espacios que son totalmente planos ($R^{abcd} = 0$), como ocurre en la singularidad cónica.

El segundo criterio, requiere de una hipótesis adicional para ser condición suficiente de singularidad. Si sobre un espacio-tiempo cualquiera removiéramos artificialmente algún punto arbitrario de la variedad, entonces eso produciría incompletitud geodésica. Para librarnos de esta arbitrariedad, se pide que el espacio-tiempo sea inextensible. Nuevamente, esta definición no es lo suficientemente abarcativa, pues el espacio podría ser geodésicamente completo y aún así existir trayectorias que terminan abruptamente en un tiempo finito. A pesar de esto, es claro que algo patológico ocurre con el espacio en caso de haber incompletitud geodésica y por ello, éste fue el criterio utilizado en los teoremas de singularidades estudiados por Hawking y Penrose a fines de los años sesenta.

Más allá de la existencia teórica de estas singularidades, las cuales aparecían en principio bajo fuertes hipótesis, ya sea simetría esférica u homegeneidad e isotropía del

espacio, quedaba la duda de si al relajar estas hipótesis las mismas seguirían apareciendo. Los teoremas de singularidades, demostrados por Penrose y Hawking, muestran que la Relatividad General implica la existencia de singularidades en una cantidad amplia de casos [15]. En particular, demostraron que en un universo en expansión y valiéndose la Relatividad General, necesariamente las geodésicas temporales son incompletas hacia el pasado. Es decir, el universo tuvo un comienzo en una singularidad. Por lo tanto, el carácter singular de la Relatividad General es inevitable.

Desde el punto de vista físico, parece poco aceptable que la realidad sea singular y pareciera ser que la RG no puede aplicarse a todas las escalas. Esto es consistente con la idea de que a altas energías y pequeñas escalas, los efectos cuánticos deberían predominar y por lo tanto la teoría clásica de la gravedad no puede ser aplicable. Como al día de hoy una cuantización satisfactoria de la gravedad no se ha podido llevar a cabo, este es un problema abierto. Por otro lado, queda también la posibilidad de, en un marco clásico, modificar la teoría de Einstein y construir un modelo de la gravedad a altas energías que se reduzca a la gravedad de Einstein a bajas energías y que resulte en espacios-tiempo no singulares. A continuación describiremos distintos intentos que se han realizado en vista a este objetivo, y haremos especial hincapié en el método determinantal que fue el elegido para este trabajo.

3.3. Modificación mediante teorías $f(R)$ y $f(\mathbb{T})$

Como ya hemos dicho, la acción de Hilbert-Einstein que da lugar a las ecuaciones de la Relatividad General es:

$$S = \int R \sqrt{|g_{\mu\nu}|} d^4x. \quad (3.1)$$

Una forma genérica de modificar las ecuaciones de una teoría de este tipo, es reemplazar el escalar R por una función $f(R)$ que se reduzca a la teoría original a bajas energías:

$$f(R) \sim R + O(R^2) \quad (3.2)$$

es decir, que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Este tipo de modificaciones presenta dos problemas importantes:

- Para todas aquellas soluciones en las que $R = 0$ (es decir, aquellas en las que el tensor de energía impulso tiene traza nula) la teoría es incapaz de realizar una modificación. Esto se debe a que en este tipo de teorías, las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen en el caso $R = 0$ son resueltas por la solución de la teoría clásica. La métrica de Schwarzschild y la cosmología en un universo dominado por la radiación corresponden a este caso por tener el tensor de

energía-impulso traza nula. Estas teorías resultan entonces inútiles para regularizar ejemplos paradigmáticos.

- Como hemos visto, el escalar R posee derivadas segundas de la métrica. En la acción de Hilbert-Einstein, estos términos se pueden agrupar en un término de superficie, de manera tal que no contribuyen a las ecuaciones. De esta forma, las ecuaciones que se obtienen finalmente son de segundo orden. Al modificar la teoría, se pierde esta propiedad y las ecuaciones que se obtienen son de cuarto orden. Esto agrega grados de libertad al problema, ya que es necesario dar condiciones iniciales sobre las derivadas superiores de la métrica. Estas teorías de orden superior, conducen a inestabilidades propias de la incorrecta formulación del problema de valores iniciales [16], [17].

Estos problemas se solucionan en el contexto del Equivalente Teleparalelo. En ese caso, el escalar \mathbb{T} contiene hasta derivadas primeras de la métrica y por lo tanto las ecuaciones que se obtienen al reemplazar \mathbb{T} por una $f(\mathbb{T})$ serán de segundo orden. Como además $\mathbb{T} \neq R$, estas teorías dejan abierta la posibilidad de deformar soluciones de RG que conlleven $R = 0$. Este es el camino utilizado en [18],[19], el cual dio lugar a una regularización de la cosmología. La función $f(\mathbb{T})$ elegida en tal caso, estaba inspirada en el esquema de Born-Infeld, el cual describiremos a continuación.

3.4. Gravedad à la Born-Infeld

Los intentos de lidiar con singularidades presentes en teorías físicas no son primicias de la gravedad. El electromagnetismo de Maxwell presenta también soluciones singulares. Uno de los problemas que esto acarrea, es la divergencia de la autoenergía de una carga puntual. Esto impide asociar la masa del electrón a su energía electromagnética sin pasar por la elección de una distribución de carga no puntual para el mismo. Para salvar este problema, en los años 30, Born e Infeld desarrollaron una nueva teoría del electromagnetismo [20],[21],[22].

La idea de esta teoría es la introducción de una nueva escala λ que imponga una cota superior al campo. Esto fue sugerido por el cambio realizado por la relatividad especial en el lagrangiano clásico de una partícula libre:

$$L_{cl} = \frac{1}{2}mv^2 \mapsto L_{rel} = mc^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right], \quad (3.3)$$

mediante el cual se obtiene como cota superior a la velocidad de la luz. En general, para una teoría dada por un lagrangiano \mathcal{L} , la receta de Born-Infeld consiste en reemplazarlo por:

$$\mathcal{L}_{BI} = \lambda \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathcal{L}}{\lambda} \right)} \right]. \quad (3.4)$$

Es fácil ver que en el límite de $\lambda \rightarrow +\infty$ se recupera el lagrangiano original. Esta receta aplicada para el electromagnetismo consiguió el objetivo buscado por Born e Infeld: El campo eléctrico para una carga puntual está acotado, incluso en el origen, y la energía de autointeracción es finita. Relacionando esta energía con la que tiene un electrón en reposo, hallaron que:

$$E = m_e c^2 = 1,2361 \frac{e^2}{r_e}, \quad (3.5)$$

de donde se obtiene un radio para electrón $r_e = \sqrt{\frac{e}{\lambda_{EM}}} = 2,28,10^{-13} cm$. Pareciera entonces razonable, siguiendo líneas similares, aplicar este esquema para la gravedad.

Si realizamos una modificación a la Born-Infeld directamente a la Relatividad General, obtendríamos una teoría tipo $f(R)$ con todas las consecuencias inquietantes descritas en los párrafos anteriores. Por esta razón, resulta más razonable realizar modificaciones directamente al ETRG. En este caso, lo que obtenemos es una teoría $f(\mathbb{T})$ dada por:

$$f(\mathbb{T}) = \lambda \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2\mathbb{T}}{\lambda}} \right] \quad (3.6)$$

Por último, cabe mencionar que la electrodinámica de Born-Infeld ha cobrado nuevo interés en los últimos años debido a su conexión con la teoría de cuerdas. Esta conexión reside en el hecho de que la acción de BI es la encargada de regir el comportamiento del campo electromagnético en las D-branas [23].

3.5. Esquema determinantal

El enfoque de Born-Infeld descrito puede encuadrarse en un marco más general que es al que se refiere el título de esta sección. Por su propia naturaleza, un lagrangiano relativista debe ser una densidad escalar de peso 1. En una variedad D -dimensional orientable, \tilde{L} está representado por una n -forma diferencial que asume localmente la forma

$$\tilde{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial^j \phi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D \quad (3.7)$$

en donde se asumió que la densidad \mathcal{L} depende de ciertos campos ϕ y de sus derivadas hasta orden j . Esto se debe a que estas cantidades transforman ante el cambio de coordenadas mediante el jacobiano, como lo hace un elemento de volumen. La construcción

de esta densidad se logra con un procedimiento canónico; simplemente deben tomarse combinaciones lineales de raíces cuadradas de determinantes (en módulo) de tensores de segundo orden, esto es, podemos decir que

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \sum_k \alpha_k \sqrt{\det |L_{\mu\nu}^{(k)}|} \quad (3.8)$$

Como próximo paso en la construcción, podríamos descomponer cada uno de los tensores $L_{\mu\nu}^{(k)}$ en uno conteniendo sólo los campos ϕ y en otros conteniendo productos de orden superior en derivadas $\partial\phi$, a saber

$$L_{\mu\nu} = \lambda_1 g_{\mu\nu} + \lambda_2 F_{\mu\nu}^{(2)}(\phi, \partial\phi) + \dots + \lambda_j F_{\mu\nu}^{(j)}(\phi, \dots, \partial^j\phi), \quad (3.9)$$

en donde $\{\lambda_i\}$ son constantes de acoplamiento arbitrarias.

En principio no existe una prescripción general para el número de términos que uno tendría que considerar en 3.9. Sin embargo, si se está interesado en teorías descritas por ecuaciones de campo de segundo orden, deberemos interrumpir la suma en $F_{\mu\nu}^{(2)}$. Esta condición adicionalmente restringe la cantidad de sumandos a un máximo de tres. La expresión que nos queda en ese caso es

$$\mathcal{L} = \alpha_1 \sqrt{|g_{\mu\nu}|} + \alpha_2 \sqrt{|g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu}|} + \alpha_3 \sqrt{|F_{\mu\nu}|}, \quad (3.10)$$

habiendo absorbido las constantes λ_i en los α_i y definiendo $\frac{2}{\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Hasta aquí hemos descrito cómo construir una teoría tipo determinantal a partir de un tensor de rango dos. A continuación, veamos cómo utilizar este esquema para modificar una dada teoría conocida. Para ello, tomaremos como parámetro a λ y pediremos que en el límite $\lambda \rightarrow \infty$ el lagrangiano determinantal tienda a $L\sqrt{|g|}$, donde L es el lagrangiano de la teoría conocida. Para que esto ocurra, debemos pedir que satisfagan $\alpha_1 = -\alpha_2$ y $\alpha_3 = 0$. Nos queda entonces una sola constante y podemos reescribir el lagrangiano como:

$$\mathcal{L}_{BI} = \lambda \left[\sqrt{|g_{\mu\nu} + 2\lambda^{-1} F_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \right] \quad (3.11)$$

Esencialmente, este es el esquema propuesto por Born e Infeld. El límite de baja energía se obtiene al considerar la expansión de un determinante en términos de trazas. Para eso podemos factorizar $\sqrt{|g_{\mu\nu}|}$, y abreviando $\mathbb{F} = F_{\mu}^{\nu}$, el desarrollo del polinomio característico en D -dimensiones enseña que

$$\det(\mathbb{I} - \epsilon\mathbb{F}) = 1 + p_1\epsilon + p_2\epsilon^2 + \dots + p_{D-1}\epsilon^{D-1} + p_D\epsilon^D, \quad (3.12)$$

en donde

$$\begin{aligned} p_1 &= s_1 \\ p_2 &= -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1) \\ &\dots \dots \\ p_D &= -\frac{1}{D}(s_D + p_1 s_{D-1} + \dots + p_{D-1} s_1) \quad s_i = Tr(\mathbb{F}^i) \end{aligned}$$

En nuestro caso $\epsilon = -2\lambda^{-1}$ así que a primer orden la expansión 3.9 es

$$\sqrt{|\mathbb{I} - 2\lambda^{-1}\mathbb{F}|} = 1 + \lambda^{-1}Tr(\mathbb{F}) + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \quad (3.13)$$

De aquí, podemos ver cómo es el lagrangiano de Born-Infeld a primer orden en λ^{-1} :

$$\mathcal{L}_{BI} \simeq Tr(\mathbb{F})\sqrt{|g|} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, para modificar una teoría con una dada densidad lagrangiana \mathcal{L} , debemos encontrar un tensor de segundo rango cuya traza sea \mathcal{L} . Esto siempre puede hacerse de forma trivial, eligiendo $F_{\mu\nu} = \mathcal{L} g_{\mu\nu} D^{-1}$, donde D es la dimensión del espacio-tiempo, llevando entonces a una densidad del tipo 3.4.

Si uno intenta usar este esquema para corregir la Relatividad General, llegaría a la condición $Tr(\mathbb{F}) = R$, lo cual no puede ocurrir para ningún tensor de segundo rango construido con derivadas primeras de la métrica (pues R contiene derivadas segundas). Es necesario utilizar entonces la descripción teleparalela. La condición que se debe satisfacer entonces es que $Tr(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$. Por inspección directa [1], podemos escribir un candidato de la forma:

$$F_{\mu\nu} = \alpha S_{\mu}^{\lambda\rho} T_{\nu\lambda\rho} + \beta S_{\lambda\mu}^{\rho} T_{\nu\rho}^{\lambda} + \gamma g_{\mu\nu} \mathbb{T}, \quad (3.15)$$

donde α, β, γ son constantes adimensionales tales que $\alpha + \beta + D\gamma = 1$, asegurando entonces que $Tr(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$. Obsérvese que en principio a este tensor puede sumársele cualquier tensor de traza nula (como por ejemplo, un tensor antisimétrico) y seguirá dando lugar a la misma teoría en bajas energías.

Capítulo 4

Teoría Determinantal TT en 1+1 Dimensiones

“Arribo, ahora, al inefable centro de mi relato, empieza aquí, mi desesperación de escritor. Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten; ¿cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca?”

— Jorge Luis Borges, *El Aleph*

En este capítulo se detalla el primer conjunto de resultados obtenidos, basados en la propuesta de una teoría de gravedad teleparalela en 1+1 dimensiones. En la sección 4.1 se resumen las características principales que poseen las teorías gravitatorias en dimensiones inferiores. En la sección 4.2 se propone una teoría determinantal que resulta no trivial en 1+1 dimensiones y se da un método para calcular las ecuaciones dinámicas de este tipo de teorías. A continuación, en la sección 4.3 caracterizamos esta teoría en el límite de bajas energías y analizamos la forma general de una solución. Por último, en la sección 4.4 mostramos que esta teoría determinantal en 1+1 dimensiones permite regularizar la cosmología.

4.1. Teorías en dimensiones inferiores

Estudiar modelos en dimensiones inferiores ha sido de enorme uso en prácticamente todas las ramas de la física. En la mecánica cuántica, los potenciales unidimensionales nos dan el ejemplo más sencillo de cuantización de la energía y efecto túnel. En la mecánica estadística, el modelo de Ising bidimensional es un sistema que se puede resolver analíticamente y presenta una transición de fase. Modelos como estos son importantes porque ayudan a generar nuevas ideas y a desarrollar nuevas formas de

entender su contraparte en más dimensiones. Mas aún, proveen un contexto en el que ciertas propiedades físicas pueden ser fácilmente demostradas, evitándose las complejidades matemáticas que aparecen en cuatro dimensiones. Por esta razón, se espera que estudiar teorías modificadas de la gravedad en dos y tres dimensiones permita entender propiedades fundamentales de las mismas.

La Relatividad General presenta ciertas propiedades insatisfactorias al reducirse el número de dimensiones. Para empezar, en tres dimensiones el espacio-tiempo resulta completamente plano en vacío. La forma de ver esto, es notar que el tensor de curvatura contiene sólo seis componentes independientes, al igual que el tensor de Ricci. De hecho, el tensor de curvatura puede escribirse puramente en términos del tensor de Ricci como [24]

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \quad (4.1)$$

Como las ecuaciones en vacío implican que $R_{\mu\nu} = 0$, no existen grados de libertad propagantes en ausencia de materia. En presencia de constante cosmológica Λ , se obtiene un espacio de curvatura constante, donde el tensor de Riemann está dado por:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \Lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \quad (4.2)$$

Aún sin haber constante cosmológica, en cuyo caso el espacio resulta plano, la presencia de materia puede producir efectos *globales* no triviales. Por ejemplo, una masa puntual dá lugar a una singularidad cónica. Esto se debe a que las hipersuperficies espaciales, deben ser planas en todos lados salvo en el punto en que se halla la masa puntual, y el cono es la única superficie con esta propiedad. Un caso de gran importancia en tres dimensiones, es el agujero negro BTZ [4]. El mismo aparece como solución a las ecuaciones de Einstein en un espacio con constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$) y representa el espacio-tiempo tridimensional de una masa puntual cargada y en rotación.

En dos dimensiones, la situación es aún más drástica. El tensor de curvatura posee sólo una componente independiente y puede escribirse [24] como:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \quad (4.3)$$

De aquí, se obtiene que $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, con lo cual el tensor de Einstein resulta ser idénticamente nulo:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (4.4)$$

El hecho de que las Ecuaciones de Einstein carecen de significado en dos dimensiones, puede notarse también a nivel de la acción. Pues en dos dimensiones, el término $S = \int d^2x \sqrt{-g}R$ resulta ser la característica de Euler, que es un invariante topológico y

por ende independiente de la métrica. A nivel del equivalente teleparalelo, esto es más notorio, pues el escalar de Weitzenböck \mathbb{T} resulta idénticamente nulo. En conclusión, las teorías hasta aquí tratadas resultan inaplicables en dos dimensiones.

En [5], se ha estudiado la gravedad de Jackiw-Teitelboim, cuya ecuación de movimiento está dada por

$$R - \Lambda = \frac{k}{2} \mathbf{T}^\mu_\mu, \quad (4.5)$$

con k una constante de acoplamiento a determinar. El autor muestra que aún con esta condición sencilla, los resultados que se obtienen son no triviales. En particular, al considerar una fuente puntual, se obtiene una solución de agujero negro, un espacio-tiempo que posee un horizonte de eventos y una temperatura de Hawking proporcional a la fuente. Este es un ejemplo de modelo bidimensional que podría ser utilizado para entender procesos que involucren agujeros negros reales. El problema de esta teoría, es que si se quiere obtenerla a partir de un proceso variacional, esto no puede hacerse sólo a partir de la métrica, si no que se requiere la incorporación de un campo adicional.

Originalmente, el objetivo de este trabajo de Tesis fue estudiar teorías de gravedad modificada con estructura teleparalela en dos y tres dimensiones. A pesar que la motivación original quedó absorbida en el contexto más amplio de la gravedad determinantal en D dimensiones espacio-temporales (que discutiremos con detalle en el próximo capítulo), explicaremos en los párrafos siguientes los resultados obtenidos en dimensiones inferiores. En particular, se hará énfasis en el esquema determinantal, por ser el único de los considerados capaz de modificar las soluciones de vacío.

Para el caso de tres dimensiones, la teoría debe reducirse al ETRG en bajas energías. En cambio, para dos dimensiones, dado que se anula el escalar \mathbb{T} y no existe una acción de bajas energías a la cual deba reducirse, se planteará un tipo distinto de teoría determinantal. En ambos casos, será de principal interés estudiar la existencia de soluciones de agujeros negros y cómo son modificadas estas soluciones en el esquema determinantal. Se espera que en dos dimensiones sea más sencillo hallar esta solución y se plantea la posibilidad de que se suavice la singularidad característica del agujero negro. Como caso introductorio, se estudió la regularización de la cosmología en dos dimensiones, obteniéndose una solución geodésicamente completa como la obtenida en cuatro dimensiones mediante el esquema determinantal de Born-Infeld [25]. En lo que sigue, nos restringiremos entonces a presentar un esquema determinantal para la gravedad bidimensional, y a estudiar algunas de sus soluciones, en particular, la correspondiente a la cosmología regular.

4.2. La Acción Determinantal TT en D=1+1

Para llevar a cabo el esquema determinantal en 1+1 dimensiones en el contexto del teleparalelismo, debemos construir un tensor genérico de segundo rango a partir de la torsión. En cuatro dimensiones, este tensor era construido a partir de contracciones entre los tensores T y S (ver ecuación 3.15). Esto permitía asegurar que en el límite de $\lambda \rightarrow \infty$ se recuperara el ETRG. Dado que esto no es posible en dos dimensiones, pues $\mathbb{T} = 0$, el modelo propuesto en este trabajo consistió en un tensor construido a partir de distintas contracciones de la torsión consigo misma. Por este motivo llamamos TT a esta teoría. El tensor en cuestión es:

$$F_{\mu\nu} = AT_{\mu\sigma\rho}T_{\nu}^{\sigma\rho} + BT_{\sigma\mu\rho}T_{\nu}^{\sigma\rho} + Cg_{\mu\nu}\mathcal{T}, \quad (4.6)$$

con A , B y C constantes adimensionales arbitrarias, y $\mathcal{T} = T^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu}$. La forma de este tensor proviene simplemente de haber reemplazado S por T en la expresión 3.15. Por simplicidad en la escritura posterior, definimos:

$$A_{\mu\nu} := T_{\mu\sigma\rho}T_{\nu}^{\sigma\rho}, \quad (4.7)$$

$$B_{\mu\nu} := T_{\sigma\mu\rho}T_{\nu}^{\sigma\rho}. \quad (4.8)$$

$$C_{\mu\nu} := g_{\mu\nu}\mathcal{T} \quad (4.9)$$

La acción determinantal que obtenemos a partir de este tensor resulta ser:

$$S = \lambda \int d^2x \left[\sqrt{|g_{\mu\nu} + 2\lambda^{-1}F_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \right] = \lambda \int d^2x \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \left[\sqrt{|\mathbb{I} + 2\lambda^{-1}\mathbb{F}|} - 1 \right]. \quad (4.10)$$

Por motivos de claridad, recordaremos el desarrollo del determinante dado en 3.12, el cual resulta significativamente más sencillo en dos dimensiones. Obtenemos así

$$|\mathbb{I} - 2\lambda^{-1}\mathbb{F}| = 1 + 2\lambda^{-1}Tr(\mathbb{F}) + 2\lambda^{-2} [Tr(\mathbb{F})^2 - Tr(\mathbb{F}^2)]. \quad (4.11)$$

El primer objetivo planteado en este trabajo fue el de la obtención explícita de las ecuaciones de movimiento asociadas a esta acción. Inicialmente, partimos de este desarrollo del determinante, queriendo aprovechar su relativa simplicidad en 1+1 dimensiones. Esto implicaba obtener la variación de cada uno de los términos involucrados. Veamos explícitamente cómo son estos términos:

$$Tr(\mathbb{F}) = (A + B + 2C)\mathcal{T} \quad (4.12)$$

$$Tr(\mathbb{F}^2) = F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\mu = A^2 A_\mu{}^\nu A_\nu{}^\mu + B^2 B_\mu{}^\nu B_\nu{}^\mu + 2AB A_\mu{}^\nu B_\nu{}^\mu + 2C(A+B+C)\mathcal{T}^2. \quad (4.13)$$

Puede verse que este segundo término no es tan fácil de manejar. Si bien, luego de tediosos cálculos, las ecuaciones completas correspondientes a esta acción pudieron obtenerse, las mismas resultaron ser demasiado extensas y difíciles de abordar. Además, no parecieran poseer una forma natural de ser extendidas a más dimensiones. Por esta razón, se buscó un método alternativo para hallar las ecuaciones.

El método alternativo encontrado para calcular las ecuaciones posee varias ventajas con respecto al anterior. En primer lugar, no utiliza explícitamente el número de dimensiones y por lo tanto su estructura es válida para cualquier dimensión (sin embargo, a lo largo de este capítulo, llamaremos *díada* a e_λ^α debido a que $D = 2$). Luego, los cálculos involucrados resultan significativamente más cortos y sencillos. Por último, permite de forma automática una escritura más compacta de las ecuaciones.

La idea es sencillamente derivar directamente el determinante, utilizando su desarrollo en cofactores. Para ello, recordemos que podemos elegir alguna fila (o columna), digamos la i , y expresar el determinante como:

$$\det(A) = \sum_k A_{ik} A(i|k). \quad (4.14)$$

En esta expresión, $A(i|k)$ denota el determinante de la matriz que se obtiene al remover la fila i y la columna k a la matriz A , multiplicada por $(-1)^{i+k}$. Si el determinante es distinto de cero, las componentes de la matriz inversa A^{-1} pueden escribirse en término de los cofactores:

$$A^{-1ji} = \frac{A(i|j)}{\det(A)} \quad (4.15)$$

Es claro que como $A(i|k)$ se obtiene removiendo la fila i debe ser independiente de la componente A_{ij} , para cualquier j . Es decir, $\frac{\partial A(i|k)}{\partial A_{ij}} = 0$. Por lo tanto, resulta que la derivada del determinante respecto de una de las componentes de la matriz es:

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} = A(i|j). \quad (4.16)$$

Mediante la ecuación 4.15 llegamos a que

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} = A^{-1ji} \det(A). \quad (4.17)$$

Esta relación nos permitirá derivar las ecuaciones de movimiento de la teoría determinantal. Por cuestión de simplicidad, definimos al tensor U como:

$$U_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

con lo cual, el lagrangiano queda escrito de la forma:

$$\mathcal{L} = \lambda \left[\sqrt{|U|} - \sqrt{|g|} \right]. \quad (4.19)$$

Para calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange, debemos ver cómo es la variación del lagrangiano ante una variación en el campo dinámico δe_λ^a . Sabemos que podemos expresar esta variación como

$$\delta \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} + \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right) \right] \delta e_\lambda^a \quad (4.20)$$

Ahora bien, la variación del primer término del lagrangiano puede ser escrita según

$$\delta \sqrt{|U|} = \frac{1}{2\sqrt{|U|}} \delta |U| = \frac{1}{2\sqrt{|U|}} \frac{\partial |U|}{\partial U_{\mu\nu}} \delta U_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

en donde simplemente hemos utilizado la regla de la cadena. Pero la derivada del determinante ha sido calculada en 4.17. Así, tenemos que

$$\delta \sqrt{|U|} = \frac{1}{2} \sqrt{|U|} U^{-1\nu\mu} \delta U_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

Por su parte, la variación de $U_{\mu\nu}$ es:

$$\delta U_{\mu\nu} = \left[\frac{\partial U_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} + \partial_\gamma \left(\frac{\partial U_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right) \right] \delta e_\lambda^a \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial U_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a}. \quad (4.24)$$

Además, es fácil ver que:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} = \delta_{(\mu}^\lambda e_{\nu)}^a. \quad (4.25)$$

Repitiendo el procedimiento para el segundo término, podemos llegar a que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} = \frac{\lambda \sqrt{|U|}}{2} \left[(U^{-1})^{(\lambda}{}_{a)} + \frac{2}{\lambda} (U^{-1})^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} \right] - \lambda e_\lambda^a |e|, \quad (4.26)$$

en donde $|e| = \sqrt{|g|}$ es el determinante de la matriz conformada por las componentes de la díada. Como la métrica no depende de las derivadas de la díada (ver ec. 2.5), es claro que

$$\frac{\partial U_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)}, \quad (4.27)$$

y de aquí podemos escribir la parte que nos falta de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = \sqrt{|U|} \left[(U^{-1})^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} \right]. \quad (4.28)$$

Las ecuaciones 4.26 y 4.28 nos dan una forma genérica de calcular las ecuaciones de movimiento de una teoría determinantal en términos únicamente de la variación del tensor $F_{\mu\nu}$ y de la inversa del tensor $U_{\mu\nu}$, y en forma independiente de la dimensión D del espacio-tiempo. Cabe destacar que en el caso en el que las componentes de $F_{\mu\nu}$ sean pequeñas con respecto a λ podemos calcular esta inversa mediante la serie geométrica. Esto es

$$(U^{-1})^{\nu\mu} = \left((g + \frac{2}{\lambda} F)^{-1} \right)^{\nu\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda} \right)^n (F^n)^{\nu\mu}, \quad (4.29)$$

en donde $(F^n)^{\nu\mu} = F^\nu_{\sigma_1} F^{\sigma_1}_{\sigma_2} \dots F^{\sigma_{n-1}}_{\sigma_n} F^{\sigma_n}_{\mu}$ y $(F^0)^{\nu\mu} = g^{\nu\mu}$. Este resultado será útil más adelante.

Para obtener explícitamente las ecuaciones, debemos calcular las derivadas de $F^{\mu\nu}$. Recordemos que en el caso TT, hemos escrito $F^{\mu\nu} = AA_{\mu\nu} + BB_{\mu\nu} + Cg_{\mu\nu}\mathcal{T}$. Comencemos analizando el tensor $A_{\mu\nu}$ definido en la ecuación 4.7, el cual puede ser escrito de la siguiente manera:

$$A_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha} g^{\rho\beta} e^b_\mu e^c_\nu T_{b\sigma\rho} T_{c\alpha\beta}. \quad (4.30)$$

Los primeros cuatro factores corresponden a productos de componentes de la métrica y de la díada, y por lo tanto son independientes de las derivadas de la misma. En cambio, las componentes mixtas de la torsión son de la forma

$$T_{b\sigma\rho} = \eta_{ab} \partial_{[\rho} e^a_{\sigma]}, \quad (4.31)$$

con lo cual dependen únicamente de las derivadas. De esta forma, para calcular $\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial e^a_\lambda}$ y $\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)}$ sólo tenemos que tener en cuenta el término correspondiente.

Obtengamos en primer lugar la derivada de e^c_μ con respecto a e^a_λ . Para ello, conviene utilizar la relación de dualidad $e^c_\mu e^a_\mu = \delta^c_a$ y derivar a ambos lados de esta expresión. Despejando, uno llega a que

$$\frac{\partial e^c_\mu}{\partial e^a_\lambda} = -e^c_\mu e^a_\lambda. \quad (4.32)$$

A partir de esto, podemos también calcular la derivada de la inversa de la métrica:

$$\frac{\partial g^{\sigma\alpha}}{\partial e^a_\lambda} = -g^{\lambda(\sigma} e^{\alpha)}. \quad (4.33)$$

Utilizando la regla del producto con los cuatro factores y reuniendo los términos, se

puede llegar de manera directa a

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial e^a_\lambda} = -2T_{(\mu}{}^{\lambda\rho}T_{\nu)a\rho} + \delta^\lambda_{(\mu}A_{\nu)}. \quad (4.34)$$

Ahora calculemos $\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)}$, para lo cual nos alcanza con ver que

$$\frac{\partial T^c_{\mu\sigma}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = \frac{\partial(\partial_{[\sigma}e^c_{\mu]})}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = \delta_a^c \delta_\mu^{[\lambda} \delta_\sigma^{\gamma]}. \quad (4.35)$$

De aquí, aplicando la regla del producto una vez, es inmediato que

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = 2e^c_{(\nu}T_{\mu)}{}^{\lambda\gamma}\eta_{ac} \quad (4.36)$$

Procedemos ahora análogamente con el tensor $B_{\mu\nu}$ definido en 4.8. Podemos escribirlo como

$$B_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha}T_{b\mu\sigma}T^b_{\nu\alpha}, \quad (4.37)$$

de forma tal que el primer factor no contiene derivadas de la díada y los otros dependen sólo de ellas. De aquí, se puede obtener fácilmente que:

$$\frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial e^a_\lambda} = -T_{b(\mu}{}^{\lambda}T^b_{\nu)a} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = \delta_{(\mu}^{[\lambda}T_{\nu)}{}^{\gamma]} \quad (4.39)$$

Finalmente, para obtener las derivadas del último término en 4.6, debemos conocer cómo son las derivadas del escalar \mathcal{T} . Podemos reducir este cálculo notando que $\mathcal{T} = g^{\sigma\rho}B_{\sigma\rho}$, y por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial e^a_\lambda} = \frac{\partial(g^{\sigma\rho}B_{\sigma\rho})}{\partial e^a_\lambda} = g^{\sigma\rho} \frac{\partial B_{\sigma\rho}}{\partial e^a_\lambda} + \frac{\partial g^{\sigma\rho}}{\partial e^a_\lambda} B_{\sigma\rho} \quad (4.40)$$

Usando las ecuaciones 4.33 y 4.38 se llega a que

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial e^a_\lambda} = -4B^\lambda_a, \quad (4.41)$$

y esto implica que

$$\frac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial e^a_\lambda} = \frac{\partial(g_{\mu\nu}\mathcal{T})}{\partial e^a_\lambda} = -4B^\lambda_a g_{\mu\nu} + \eta_{ac} \delta_{(\mu}^\lambda e^c_{\nu)} \mathcal{T}. \quad (4.42)$$

Análogamente, procedemos con la otra derivada y llegamos a que

$$\frac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = 4g_{\mu\nu}T_a{}^{\lambda\gamma}. \quad (4.43)$$

Concluyendo, hemos obtenido todo lo necesario para escribir explícitamente las ecuaciones completas de esta teoría, que adquieren la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda\sqrt{|U|}}{2}[(U^{-1})^{(\lambda)}{}_a + \frac{2}{\lambda}(U^{-1})^{\nu\mu}[A(-2T_{(\mu}{}^{\lambda\rho}T_{\nu)\rho} + \delta^\lambda_{(\mu}A_{\nu)}) + B(-T_{b(\mu}{}^\lambda T_{\nu)a}^b) \\ & + C(-4g_{\mu\nu}B^\lambda{}_a + \eta_{ac}\delta^\lambda_{(\mu}e^c{}_{\nu)})\mathcal{T}]] - \lambda|e|e^\lambda{}_a - \partial_\gamma[\sqrt{|U|}(U^{-1})^{\nu\mu}(2Ae^c{}_{(\nu}T_{\mu)}{}^{\lambda\gamma}\eta_{ca} \\ & + B\delta^\lambda_{(\mu}T_{\nu)}{}^{\gamma]} + 4Cg_{\mu\nu}T_a{}^{\lambda\gamma}] = -\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial e^\lambda{}_a} \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.3. Régimen de bajas energías

Una primera pregunta a responder es ¿Qué teoría se obtiene en el límite $\lambda \rightarrow \infty$? Recordemos que utilizando el desarrollo de Taylor, se obtiene que al orden más bajo:

$$S_0 = \kappa \int d^2x |e| Tr(\mathbb{F}) = \kappa \int d^2x |e| \mathcal{T} \quad (4.45)$$

donde κ es una constante que se elige para que el acoplamiento con la materia sea el correcto. En este límite, la acción es mucho más sencilla y podemos calcular fácilmente las ecuaciones completas de movimiento. Para ello, estudiemos la variación total de la acción, incluyendo la parte asociada a la materia S_M , esto es

$$\delta S = 0 \implies \delta S_0 = -\delta S_M \quad (4.46)$$

$$\delta S_0 = \kappa \int (|e|\delta\mathcal{T} + \mathcal{T}\delta|e|) d^2x.$$

La variación de $|e|$ es fácil de calcular:

$$\delta|e| = \frac{\partial|e|}{\partial e^\lambda{}_a} \delta e^\lambda{}_a = |e| e^\lambda{}_a \delta e^\lambda{}_a \implies \delta S_0 = \kappa \int |e| (\delta\mathcal{T} + e^\lambda{}_a \mathcal{T} \delta e^\lambda{}_a) d^2x \quad (4.47)$$

La variación de \mathcal{T} puede escribirse como:

$$\delta\mathcal{T} = \left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial e^\lambda{}_a} - \frac{1}{|e|} \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial e^\lambda{}_{\lambda,\mu}} |e| \right) \right] \delta e^\lambda{}_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial e^\lambda{}_{\lambda,\mu}} |e| \delta e^\lambda{}_a \right), \quad (4.48)$$

donde el último término de esta ecuación es un término de superficie y por lo tanto no contribuye a las ecuaciones de movimiento. La ecuación variacional que obtenemos es entonces:

$$\kappa \left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial e^\lambda{}_a} - \frac{1}{|e|} \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial e^\lambda{}_{\lambda,\mu}} |e| \right) + \mathcal{T} e^\lambda{}_a \right] |e| \delta e^\lambda{}_a = -\delta\mathcal{L}_M \quad (4.49)$$

Calculemos ahora la variación del Lagrangiano asociado a la materia:

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} \delta e_\lambda^a. \quad (4.50)$$

Usando la definición del tensor de energía impulso

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{|e|} \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (4.51)$$

y que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} = \eta_{ab} \delta_{(\mu}^\lambda e_{\nu)}, \quad (4.52)$$

llegamos a que

$$\delta\mathcal{L}_M = -2\mathbf{T}^{\lambda\nu} e_\nu^b \eta_{ab} |e| \delta e_\lambda^a. \quad (4.53)$$

Para escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange completas, sólo necesitamos las derivadas del escalar \mathcal{T} , que fueron calculadas en la sección anterior y están dadas por las ecuaciones 4.41 y 4.43. Presentamos aquí las ecuaciones completas:

$$\left[\frac{1}{4} \mathcal{T} e_a^\lambda - B_a^\lambda + \frac{1}{|e|} \partial_\mu (T_a^{\mu\lambda} |e|) \right] = \frac{1}{2\kappa} \mathbf{T}^{\lambda\nu} e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (4.54)$$

Estas ecuaciones poseen una curiosa propiedad. Si se toma $\kappa = \frac{1}{8\pi G}$, las mismas pueden obtenerse a partir de las ecuaciones del ETRG (5.2) en n dimensiones mediante el cambio $S^{\lambda\mu\nu} \rightarrow T^{\lambda\mu\nu}$. Esto significaría que aquellas soluciones de la Relatividad General que cumplan $T^{\lambda\mu\nu} = S^{\lambda\mu\nu}$, deberían ser soluciones también de esta nueva teoría.

Al comienzo de este capítulo, mencionamos que una de las teorías gravitatorias en dos dimensiones más estudiada es la teoría de Jackiw-Teitelboim, que en ausencia de constante cosmológica viene dada por la ecuación

$$R = -\kappa^{-1} \mathbf{T}, \quad (4.55)$$

donde R es el escalar de curvatura, \mathbf{T} la traza del tensor de energía impulso y κ se escoge de tal manera que esta ecuación se corresponde con la traza de las ecuaciones de Einstein en dimensiones mayores. El problema de esta teoría es que no puede obtenerse a partir de una acción que dependa sólo de la métrica y sus derivadas, sino que es necesario incorporar un campo escalar (el dilatón) acoplado a ella. A continuación, veremos que la ecuación de Jackiw-Teitelboim se obtiene de tomar la traza de las ecuaciones de movimiento 4.54. Tomar traza de la ecuación 4.54 implica contraerlas tensorialmente con e_λ^a . Utilizamos que la traza de la tetrada nos da la dimensión del espacio tiempo $e_\lambda^a e_a^\lambda = D = 2$ y que $B_\lambda^\lambda = \mathcal{T}$, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} \mathcal{T} - \mathcal{T} + \frac{1}{|e|} e_\lambda^a \partial_\mu (|e| T_a^{\mu\lambda}) = \frac{1}{2\kappa} \mathbf{T}. \quad (4.56)$$

Para incorporar e_λ^a dentro de la operación de derivación, usamos la regla del producto y tenemos que

$$-\frac{1}{2}\mathcal{T} + \frac{1}{|e|}\partial_\mu(|e|T_\lambda^{\mu\lambda}) - T_a^{\mu\lambda}\partial_\mu e_\lambda^a = \frac{1}{2\kappa}\mathbf{T}. \quad (4.57)$$

Como $T_a^{\mu\lambda}$ es antisimétrico respecto de sus dos últimos índices, podemos antisimetrizar el factor derecho del producto $T_a^{\mu\lambda}\partial_\mu e_\lambda^a$, lo cual nos da como resultado $-\mathcal{T}/2$ y cancela el primer término de la ecuación. Finalmente, utilizaremos que en dos dimensiones el escalar R es una derivada total, y puede escribirse en términos de la torsión:

$$|e|R = -2\partial_\mu(|e|T_\nu^{\mu\nu}), \quad (4.58)$$

donde el término de la derecha es justamente el mismo que sobrevive en nuestra ecuación. Esta última ecuación es consecuencia de la relación 2.22 y del hecho de que en dos dimensiones espacio-temporales, el tensor $S^{\lambda\mu\nu}$ es idénticamente nulo. Haciendo esta identificación, obtenemos el resultado buscado

$$R = -\kappa^{-1}\mathbf{T}. \quad (4.59)$$

Cabe remarcar el siguiente hecho. La teoría que estamos tratando, por construcción, no es invariante local de Lorentz. Sin embargo, la traza de las ecuaciones involucra solo al escalar R , que depende de la tétrada solo a través de la métrica, con lo cual es invariante de Lorentz. Por lo tanto, si uno considera solamente la traza de las ecuaciones, obtiene una teoría para la métrica. Otro hecho notable es que, a diferencia de lo que ocurre en la Relatividad General, las ecuaciones no resultan simétricas respecto de sus índices. Por su parte, el tensor de energía-impulso de un campo sin spin es simétrico. En este caso, es claro que una solución de las ecuaciones de movimiento introducirá un vínculo relativo a la anulación de la parte antisimétrica del miembro izquierdo en 4.54. Este vínculo es

$$\partial_\mu(|e|(T_a^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}_a)) = 0, \quad (4.60)$$

que como vemos, tiene el aspecto de una ecuación de conservación. En la siguiente sección daremos una interpretación sencilla de estas últimas dos ecuaciones.

4.3.1. Ecuaciones para el dilatón y el boostón

¿Cuál es la forma más general de escribir una tétrada? Afortunadamente, en dos dimensiones esta pregunta tiene una respuesta sencilla, ya que valen las siguientes afirmaciones:

1. Toda variedad Riemanniana (o pseudo-riemanniana) bidimensional es localmente conformemente al plano. Eso significa que existe un sistema local de coordenadas

en donde la métrica puede escribirse como $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\eta_{\mu\nu}$, donde ϕ es llamado dilatón. El elemento de línea es entonces $ds^2 = e^{2\phi(x,t)}(-dt^2 + dx^2)$. La tétrada más sencilla que da lugar a esta métrica es $e_\lambda^a = e^\phi\delta_\lambda^a$.

2. El grupo de Lorentz en $D = 2$ es unidimensional, ya que la única transformación posible es un boost en el eje x . Eso quiere decir que cualquier tétrada que de lugar a la métrica conforme, debe poder escribirse como un boost local de $e_\lambda^a = e^\phi\delta_\lambda^a$.

En conclusión, en el sistema de coordenadas adecuado, podemos escribir la tétrada en toda su generalidad como:

$$e_\lambda^a = e^{\phi(x,t)} \begin{pmatrix} \cosh(\theta(x,t)) & \sinh(\theta(x,t)) \\ \sinh(\theta(x,t)) & \cosh(\theta(x,t)) \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

donde por analogía llamaremos *boostón* a $\theta(x,t)$. Con esta fijación de gauge, vemos manifiestamente los dos grados de libertad que posee esta teoría en dos dimensiones. Más aún, podemos ver la forma explícita de las ecuaciones 4.54

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-4\phi}[(\partial_x\theta)^2 + (\partial_t\theta)^2 - 2\partial_t\partial_x\theta + 2\partial_x^2\phi - (\partial_x\phi)^2 - (\partial_t\phi)^2] &= \frac{1}{2\kappa}T^{00} \\ e^{-4\phi}[\partial_x^2\theta - \partial_x\theta\partial_t\theta + \partial_x\phi\partial_t\phi - \partial_x\partial_t\phi] &= \frac{1}{2\kappa}T^{01} \\ e^{-4\phi}[\partial_t^2\theta - \partial_x\theta\partial_t\theta + \partial_x\phi\partial_t\phi - \partial_x\partial_t\phi] &= \frac{1}{2\kappa}T^{10} \\ \frac{1}{2}e^{-4\phi}[(\partial_x\theta)^2 + (\partial_t\theta)^2 - 2\partial_t\partial_x\theta + 2\partial_t^2\phi - (\partial_x\phi)^2 - (\partial_t\phi)^2] &= \frac{1}{2\kappa}T^{11}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

Como vimos, la traza de estas ecuaciones viene dada por 4.59 y en el gauge elegido presenta el siguiente aspecto:

$$-2e^{-2\phi}\square\phi = \frac{1}{2\kappa}\mathbf{T}, \quad (4.63)$$

donde $\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ es el D'Alembertiano. Esta ecuación es conocida como ecuación de Liouville y ha sido ampliamente estudiada [26]. Aquí queda explicitado además que la ecuación de la traza involucra sólo a la métrica (a través del dilatón) y resulta invariante local de Lorentz (es decir, independiente del boostón). Por otro lado, si pensamos en un tensor de energía impulso simétrico, esta condición impone la ecuación 4.60, que en este gauge se ve así:

$$e^{-4\phi}\square\theta = \frac{1}{2k}(T^{01} - T^{10}) = 0. \quad (4.64)$$

Esta ecuación nos indica que si incluyéramos una parte antisimétrica al tensor de energía momento, normalmente asociada al spin, esta parte funcionaría como fuente del boostón.

4.3.2. Solución estática

En esta sección estudiaremos el análogo a espacio-tiempos con simetría esférica pero en 1+1 dimensiones. Esto se corresponde con soluciones estáticas y que posean simetría de inversión $x \rightarrow -x$. Para describir este espacio-tiempo, podemos pensar en una masa puntual en reposo en el origen, es decir, cuyo tensor de energía impulso es de la forma $T^\mu_\nu = \text{diag}(a\delta(x), 0)$, donde a representa el acoplamiento de la partícula al campo gravitatorio y δ es la función delta de Dirac. Cabe destacar que la ecuación 4.63 nos indica que en vacío el escalar de curvatura es cero, y como vimos, en dos dimensiones, esto implica que el tensor de curvatura se anula. Por lo tanto, en vacío el espacio es plano. De esta forma, la solución puede diferir del espacio de Minkowski sólo en sus propiedades globales. Esta solución ya ha sido estudiada en [5], y lo que puede verse es que la presencia de la fuente puntual puede introducir modificaciones en la topología del espacio tiempo, y de esta manera producir un efecto global que lo distinga de Minkowski.

Para hallar explícitamente la solución, veamos cómo quedan las ecuaciones 4.62 si imponemos que ϕ y θ dependan sólo de x . Tras algunas manipulaciones llegamos a

$$\begin{aligned}\phi'^2 &= \theta'^2 \\ \theta'' &= 0 \\ e^{-4\phi}\phi'' &= a\delta(x).\end{aligned}\tag{4.65}$$

Aquí podemos ver que tenemos una ecuación para el boostón y una para el dilatón asociadas a sus fuentes, y además una ecuación que los vincula. De esta manera, vemos que esta teoría es más restrictiva que la de Jackiw, pues se debe hallar un boost específico vinculado al valor de ϕ para poder satisfacer todas las ecuaciones de la teoría. La solución general a estas ecuaciones es:

$$\phi = a|x| + b\tag{4.66}$$

$$\theta_\pm = \pm ax + c,\tag{4.67}$$

donde la constante b puede ser absorbida mediante un cambio de coordenadas y la constante c corresponde a un boost global que se mantiene como simetría de la teoría. La métrica que obtenemos es entonces:

$$ds^2 = e^{2a|x|}(-dt^2 + dx^2)\tag{4.68}$$

Obsérvese que en el caso en que $a < 0$, esta métrica se anula en el límite de $x \rightarrow \pm\infty$.

Para ver esto más claramente, realizamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$x' = Sg(x) \left[\frac{e^{a|x|}}{a} - \frac{1}{a} \right] \quad (4.69)$$

Tras este cambio, la métrica adopta la siguiente forma:

$$ds^2 = -(a|x'| + 1)^2 dt^2 + dx'^2 \quad (4.70)$$

Aquí podemos ver claramente que si $a < 0$ entonces en $|x'| = -1/a$ la métrica se vuelve singular. A continuación analizaremos el significado de esto. Antes mencionamos que en vacío la métrica debía ser plana. Para ver esto, realizamos un nuevo cambio de variables. Este cambio de variables no puede ser global debido a la aparición de la función módulo $|x|$. Por lo tanto, usaremos una carta para $x < 0$ y otra para $x > 0$. Para cada caso la transformación viene dada por:

$$X = -\frac{e^{a|x|}}{a} \text{Cosh}(at) \quad (4.71)$$

$$T = \frac{e^{a|x|}}{a} \text{Sinh}(at), \quad (4.72)$$

de donde puede verse que la coordenadas satisfacen las ecuación $X^2 - T^2 = \frac{e^{2a|x|}}{a^2}$ y $X > 0$. En estas coordenadas la métrica es:

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2. \quad (4.73)$$

La línea de mundo de la partícula está dada por $x = 0$ y se ve que forma una hipérbola en el plano (X, T) . Ahora bien, uno de los principios de la relatividad es que el espacio-tiempo debe ser inextendible. Pero en este caso, nos encontramos con que las coordenadas (x, t) cubren sólo una región del espacio de Minkowski. Por lo tanto, debemos considerar la máxima extensión posible. En la figura 4.1, vemos la región dibujada.

Las semirectas $T = X$ y $T = -X$ son curvas nulas que se corresponden con $x = \infty$ y representan el borde de la carta original. El resto del espacio aparece al realizar la máxima extensión posible de la carta (X, T) . La hipérbola de la figura representa la línea de mundo de la masa puntual. Recordemos que tenemos una copia de este espacio para la región $x < 0$. Estas dos regiones se “pegan” a través de la línea de mundo de la partícula. Con lo cual, hay una región que queda “encerrada” entre las semirrectas tipo luz de un hemi-espacio y el otro. De esta manera, vemos que este espacio contiene un horizonte de eventos. El diagrama de Penrose de este espacio-tiempo se muestra en la figura 4.2.

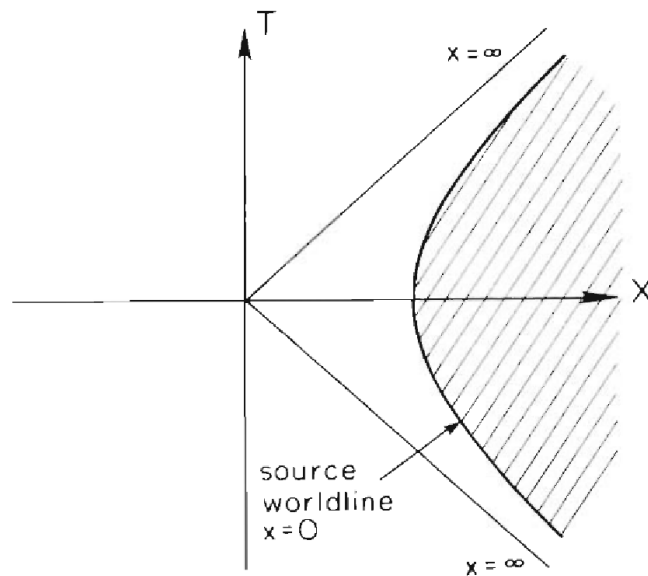


Figura 4.1: Gráfico de la región cubierta por la carta $x > 0$. La línea de mundo de la partícula ($x = 0$) es representada por una hipérbola. Las rectas $X = \pm T$ son líneas nulas que se corresponden con el límite de $x \rightarrow \infty$. El resto del espacio es añadido por extensión del original. La carta $x < 0$ describe otra porción de Minkowski idéntica a ésta y ambas son pegadas a lo largo de la trayectoria de la partícula.

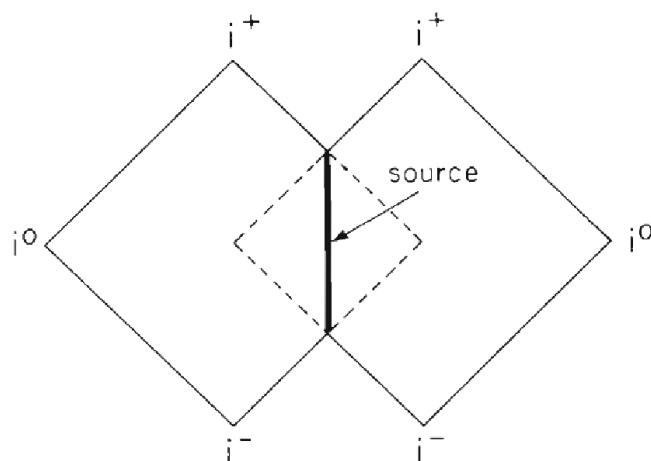


Figura 4.2: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo estudiado en el caso $a < 0$. i^+ e i^- representan el infinito futuro y el pasado respectivamente. i^0 representa el infinito espacial. Las líneas punteadas se corresponden con las rectas nulas $X = \pm T$

4.4. Regularización de la Cosmología

En la cosmología, uno presupone que el espacio es isótropo y homogéneo. Esto simplifica significativamente las ecuaciones de movimiento, pues al ser tan simétrico este espacio, su forma es bastante restringida. De hecho, en dos dimensiones se tiene que $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2$, donde $a(t)$ es el denominado factor de escala. Esta simplificación nos permite estudiar las ecuaciones determinantes completas 4.44 sin necesidad de pasar al límite de bajas energías. Para ello, proponemos un ansatz de la forma

$$e_{\lambda}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

El tensor de energía-impulso que consideraremos es el de un fluido perfecto en el sistema comóvil $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p)$. Si además consideramos que la ecuación de estado es de la forma $p = \omega\rho$, la ley de conservación proveniente de la conservación automática del tensor energía-momento nos dice que:

$$\dot{\rho} + (1 + \omega)\rho \frac{\dot{a}}{a} = 0 \implies \rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-(1+\omega)}. \quad (4.75)$$

Aún en la situación de alta simetría en consideración, las ecuaciones no son manejables en el caso general. Sin embargo, es posible analizar distintas regiones en el espacio de parámetros A , B y C (recordemos que $(A + B + 2C) = -\frac{1}{8\pi G}$) en las que las ecuaciones adopten formas más sencillas. A continuación analizamos dos casos que resultaron de particular interés:

I) Caso $A = 0$.

Las ecuación de movimiento $0 - 0$, es decir, aquella que se obtiene de 4.44 al tomar los índices $a = 0, \lambda = 0$, adopta la sencilla forma

$$H^2 = 8\pi G\rho, \quad (4.76)$$

mientras que al tomar $a = 1, \lambda = 1$ obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(p + \rho). \quad (4.77)$$

Debido a la diagonalidad del ansatz 4.74, estas son las únicas ecuaciones no triviales. De hecho 4.77 puede ser obtenida de 4.76 vía derivando temporalmente y combinando este resultado con la ec. de conservación 4.75.

Estas ecuaciones nos son familiares; en efecto, 4.76 corresponde a la ecuación de Friedmann de la Relatividad General, pero para una sola dimensión espacial. El sistema 4.76- 4.77 es también al que se arriba luego de considerar el límite de bajas energías. Por lo tanto, nuestra teoría dimensionalmente reducida recupera la ecuación de Friedmann

característica de la RG en dimensión $D = 4$. La solución a estas ecuaciones resulta ser:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{1+\omega}}. \quad (4.78)$$

Vemos que esta solución exacta posee las patologías típicas de las cosmologías de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) características de la relatividad Einsteiniana, puesto que existe una singularidad inevitable en $t = 0$.

Por el contrario, el ejemplo siguiente ilustra la aptitud de la teoría determinantal en lo concerniente a la regularización de las singularidades de la RG.

Caso II) $B + 2C = 0$

En este caso la ecuación $0 = 0$ resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4AH^2}{\lambda}}} - 1 = \frac{A16\pi G}{\lambda} \rho \quad (4.79)$$

Si consideramos $A > 0$, esta ecuación es la misma a la que se arriba en [27] mediante la implementación del esquema de Born-Infeld en cuatro dimensiones. Veamos que la misma efectivamente regulariza la singularidad inicial de la cosmología y la reemplaza por una etapa inflacionaria de carácter geométrico. Para eso, redefinamos a la constante A según $\frac{\lambda}{A}$ y llamemos $k = \frac{16\pi G}{\lambda}$. Se sigue que

$$\frac{4}{\lambda} H^2 = \frac{(k\rho + 1)^2 - 1}{(k\rho + 1)^2}. \quad (4.80)$$

Reescribiendo todo en término de la densidad, se puede integrar la ecuación y se llega a la solución exacta, aunque implícita:

$$\frac{\sqrt{(k\rho + 1)^2 - 1}}{k\rho} - \ln(k\rho + 1 + \sqrt{(k\rho + 1)^2 - 1}) = (1 + \omega) \sqrt{\frac{\lambda}{4}} t. \quad (4.81)$$

Analicemos el comportamiento asintótico para la densidad. Para densidades grandes, la ecuación 4.81 se reduce a

$$- \ln(2k\rho) = (1 + \omega) \sqrt{\frac{\lambda}{4}} t, \quad (4.82)$$

en donde puede observarse que es condición necesaria que $t \rightarrow -\infty$. Más aún, utilizando la relación 4.75, podemos despejar el factor de escala en este límite. De esta forma, tenemos

$$\frac{a}{a_o} = \left(\frac{32\pi G}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1+\omega}} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{4}} t}. \quad (4.83)$$

Además, en este límite, el parámetro de Hubble resulta constante e independiente de ω , pues $H = \sqrt{\frac{\lambda}{4}}$.

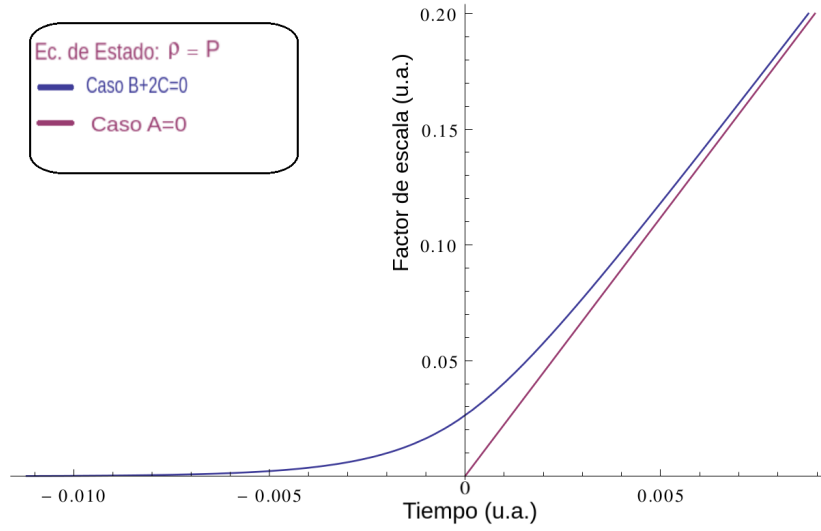


Figura 4.3: Factor de escala para los distintos casos de la teoría en un universo dominado por radiación. Se observa que en el caso $A=0$, el factor de escala se anula, mientras que en el caso $B+2C=0$ aparece una etapa inflacionaria de duración infinita hacia el pasado.

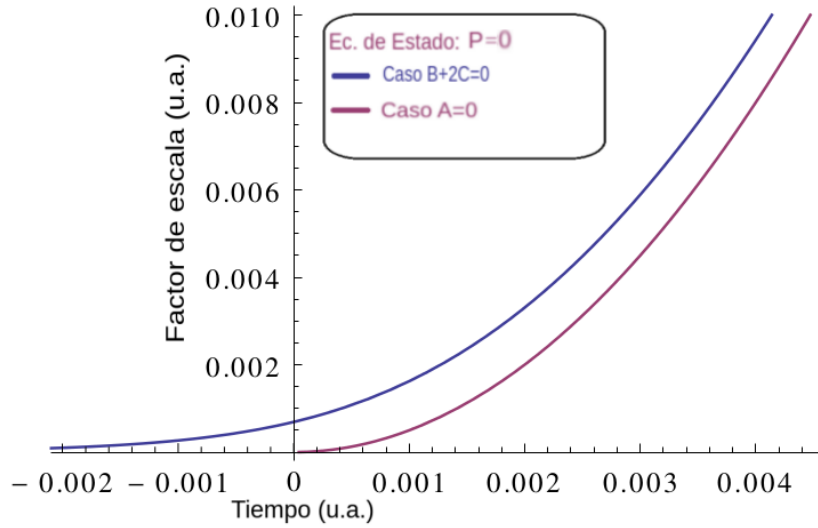


Figura 4.4: Factor de escala para los distintos casos de la teoría en un universo dominado por materia. Se observa que en el caso $A=0$, el factor de escala se anula, mientras que en el caso $B+2C=0$ aparece una etapa inflacionaria de duración infinita hacia el pasado.

Lo que observamos es que en esta teoría el factor de escala no se anula nunca y por lo tanto desaparece la singularidad inicial del "Big Bang". En cambio, el factor de escala crece exponencialmente desde $t \rightarrow -\infty$, dando lugar a una etapa inflacionaria del universo temprano, independientemente del tipo de fluido que predomine. Además, puede también probarse que para $t \rightarrow \infty$ se recuperan las soluciones de la teoría a bajas energías ($\lambda \rightarrow \infty$). En las figuras 4.3 y 4.4, se grafica el factor de escala en ambos casos estudiados, para un fluido constituido de polvo ($\omega = 0$) y un fluido de radiación ($\omega = 1$).

Capítulo 5

Teoría Determinantal ST en D Dimensiones

“ Una igualdad yo encontraré: $OP+PQ$ es igual a ST . ”

— Teorema de Thales, Les Luthiers

Este es el capítulo final de la tesis, en donde presentamos los resultados que se obtuvieron en el estudio de la modificación de la Relatividad General en el esquema determinantal. En la sección 5.1 se obtienen las ecuaciones de movimiento de esta teoría en D dimensiones, y se verifica que se reducen adecuadamente a las ecuaciones del ETRG en el límite de bajas energías. En la siguiente sección se enuncian una serie de proposiciones que nos permiten entender cómo obtener ciertas soluciones a estas ecuaciones y de qué manera aparece la modificación introducida. A continuación, en la sección 5.3 discutimos la presencia de espacio-tiempos en vacío con simetría esférica dentro de esta teoría y cómo se puede reobtener la métrica de Schwarzschild. Finalmente, en la sección 5.4 se estudia la cosmología y cómo esta es regularizada en el esquema determinantal.

5.1. Modificación de la Relatividad General mediante el esquema determinantal

En el capítulo anterior hemos desarrollado un procedimiento para obtener las ecuaciones de movimiento de una dada teoría determinantal. En particular, vimos que estas ecuaciones pueden escribirse en términos únicamente de las derivadas del tensor $F_{\mu\nu}$ que caracteriza a la teoría. Luego, estudiamos cómo eran estas derivadas en el caso de la teoría TT. La idea de esta sección es utilizar los resultados obtenidos para calcular las ecuaciones de movimiento de una modificación determinantal que contiene a la Relatividad General en su límite de baja energía. A esta teoría la llamaremos "ST",

recordando que el lagrangiano del ETRG viene dado por el escalar de Weitzenböck $\mathbb{T} = S^b_{\alpha\beta} T_b^{\alpha\beta}$, donde S está definido como:

$$S^b_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (T^b_{\alpha\beta} - T_{[\alpha,\beta]^b}) - \frac{1}{2} e^b_{[\alpha} T^{\sigma}_{\sigma\beta]}. \quad (5.1)$$

Hemos elegido intencionalmente escribirlo con su primer índice latino y sus otros dos índices covariantes griegos. Resulta que al igual que pasaba con la torsión dada en la ecuación 4.31, con esta elección de índices se obtiene el mayor desacoplamiento de la dependencia en e^a_λ y en $\partial_\gamma e^a_\lambda$. Como hemos visto, esto simplifica significativamente los cálculos.

Recordemos lo visto en los capítulos anteriores. El lagrangiano de una teoría determinantal adopta la forma

$$\mathcal{L} = \lambda \left[\sqrt{|U|} - \sqrt{|g|} \right], \quad (5.2)$$

en donde U está definido por

$$U_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

y $F_{\mu\nu}$ es el tensor que caracteriza a la teoría determinantal. Es nuestra intención ahora considerar una deformación ultravioleta de la Relatividad general, con lo cual debemos asegurar el correcto límite de baja energía provisto por el ETRG. Esto implica que la traza de $F_{\mu\nu}$ debe ser el invariante de Weitzenböck \mathbb{T} . Una inspección directa nos lleva a considerar la siguiente elección para $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \alpha F_{\mu\nu}^{(1)} + \beta F_{\mu\nu}^{(2)} + \gamma F_{\mu\nu}^{(3)} \\ F_{\mu\nu}^{(1)} &= S_\mu^{\lambda\rho} T_{\nu\lambda\rho} \\ F_{\mu\nu}^{(2)} &= S_{\lambda\mu}{}^\rho T^\lambda_{\nu\rho} \\ F_{\mu\nu}^{(3)} &= g_{\mu\nu} \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

el cual, a menos de la adición de un tensor antisimétrico arbitrario, conduce a la traza correcta.

Resulta útil recordar que en el capítulo anterior (ver ecs. 4.26 y 4.28), utilizando el desarrollo del determinante en cofactores, pudimos calcular la variación del lagrangiano de forma sucinta. Allí vimos que los ingredientes para calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange adquieren el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a_\lambda} &= \lambda \frac{\sqrt{|U|}}{2} \left[(U^{-1})^{(\lambda}{}_{a)} + \frac{2}{\lambda} (U^{-1})^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e^a_\lambda} \right] - \lambda e^\lambda_a |e|, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma e^a_\lambda)} &= \sqrt{|U|} \left[(U^{-1})^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e^a_\lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para obtener la forma explícita de las ecuaciones, debemos calcular las derivadas

del tensor $F_{\mu\nu}$ involucradas en estas ecuaciones. Veamos ahora que este tensor puede ser reescrito de modo de evitar rehacer los cálculos del capítulo anterior. Para ello, construimos un tensor D (no confundir con D , la dimensión del espacio-tiempo), de seis índices que nos permita pasar del tensor T al tensor S . Este tensor se define como sigue

$$D^b_{\alpha\beta c}{}^{\sigma\rho} = \frac{1}{4} (\delta_c^b \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - e^{\rho b} e_{c[\alpha} \delta_{\beta]}^\sigma) - \frac{1}{2} e_{[\alpha}^b \delta_{\beta]}^\rho e_c^\sigma, \quad (5.6)$$

lo cual nos permite, de manera directa, escribir el tensor S como

$$S^b_{\alpha\beta} = D^b_{\alpha\beta c}{}^{\sigma\rho} T^c_{\sigma\rho}. \quad (5.7)$$

La ventaja de utilizar esta expresión es que, como vimos antes, las componentes $T^c_{\sigma\rho}$ de la torsión dependen sólo de las derivadas de la tetrada. Con lo cual podemos definir un nuevo tensor Q que sea el que se obtiene al derivar $S^b_{\alpha\beta}$ respecto de la tetrada:

$$Q^\lambda{}^b{}_{a\alpha\beta} := \frac{\partial S^b_{\alpha\beta}}{\partial e_\lambda^a} = \frac{\partial (D^b_{\alpha\beta c}{}^{\sigma\rho})}{\partial e_\lambda^a} T^c_{\sigma\rho} \quad (5.8)$$

Explícitamente, el tensor Q tiene el siguiente aspecto:

$$Q^\lambda{}^b{}_{a\alpha\beta} = \frac{1}{4} (T_{[\alpha,\beta]a} e^{\lambda b} - \delta_{[\alpha}^\lambda T_{a\beta]}^b) - \frac{1}{2} (\delta_a^b \delta_{[\alpha}^\lambda T_{\sigma\beta]}^\sigma - e_{[\alpha}^b T_{a\beta]}^\lambda) \quad (5.9)$$

De alguna manera, veremos que los tensores Q y D son los que definen con qué tipo de teoría determinantal estoy trabajando, ya que las ecuaciones pueden escribirse en término de ellos. Por ejemplo, si tomamos $D^b_{\alpha\beta c}{}^{\sigma\rho} = \delta_c^b \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho$, obtenemos que $Q = 0$ y la teoría que se obtiene es la del capítulo anterior. Por lo tanto el esquema en consideración corresponde a un caso más general de teoría determinantal, que en principio podría construirse con la contracción de la torsión y cualquier tensor S lineal en la torsión que pueda escribirse de la forma 5.7, para algún D dado.

Veamos ahora cómo calcular las derivadas de $F_{\mu\nu}$. Para ello, comencemos analizando $F^{(1)}$, que podemos escribirlo como

$$F_{\mu\nu}^{(1)} = S^b_{\alpha\beta} e_{\mu b} T_\nu^{\alpha\beta} \quad (5.10)$$

De esta manera, podemos aplicar la regla del producto y tenemos que

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial e_\lambda^a} = \frac{\partial S^b_{\alpha\beta}}{\partial e_\lambda^a} e_{\mu b} T_\nu^{\alpha\beta} + S_{b\alpha\beta} \frac{\partial (e_\mu^b T_\nu^{\alpha\beta})}{\partial e_\lambda^a} = Q^\lambda{}_{a\mu\alpha\beta} T_\nu^{\alpha\beta} + S_{b\alpha\beta} \frac{\partial (e_\mu^b T_\nu^{\alpha\beta})}{\partial e_\lambda^a}. \quad (5.11)$$

El segundo término del miembro derecho puede calcularse fácilmente utilizando la ec.

4.35 del capítulo anterior. No es difícil concluir que

$$S_{b\alpha\beta} \frac{\partial (e_\mu^b T_\nu^{\alpha\beta})}{\partial e_\lambda^a} = -2S_{\mu\rho(a} T_\nu^{\rho\lambda)} + \delta_\mu^\lambda F_{a\nu}^{(1)} + \delta_\nu^\lambda F_{\mu a}^{(1)}. \quad (5.12)$$

Dado que el tensor D es independiente de las derivadas de la tétrada, el cálculo de $\frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)}$ es también equivalente al realizado en el capítulo anterior. Tenemos entonces

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \frac{\partial (D_{\mu\sigma\rho c}^{\alpha\beta} T_\nu^{\sigma\rho} T_{\alpha\beta}^c)}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = D_{\mu}^{\sigma\rho c} e_\nu^d \frac{\partial (T_{d\sigma\rho} T_{\alpha\beta}^c)}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)}, \quad (5.13)$$

en donde la derivada del factor en paréntesis en el miembro derecho puede descomponerse mediante la regla del producto en dos términos de la forma

$$\frac{\partial T_{\mu\sigma}^c}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \frac{\partial (\partial_{[\sigma} e_{\mu]}^c)}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \delta_a^c \delta_\mu^{[\lambda} \delta_\sigma^{\gamma]}, \quad (5.14)$$

con lo cual se sigue que

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = 2S_\mu^{\lambda\gamma} e_{\nu a} + D_\mu^{\sigma\rho a} [\lambda\gamma] T_{\nu\sigma\rho}. \quad (5.15)$$

El cálculo de los demás términos necesarios para obtener las ecuaciones de movimiento se realiza procediendo de manera análoga. Si bien no son complicados, sí son bastante tediosos y, para no aburrir más al lector, presentamos directamente los resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(2)}}{\partial e_\lambda^a} &= Q_{a\beta\mu\alpha}^\lambda T_\nu^{\beta\alpha} - S_{\beta\mu}^{(\lambda} T_{\nu a)}^{\beta)} \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(2)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} &= D_{\beta\mu\alpha a}^{[\lambda\gamma]} T_\nu^{\beta\alpha} + S_{a\mu}^{[\gamma} \delta_\nu^{\lambda]} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(3)}}{\partial e_\lambda^a} &= \delta_{(\mu}^\lambda e_{\nu a)} \mathbb{T} - 4g_{\mu\nu} F_a^{(2)\lambda} \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(3)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} &= 4g_{\mu\nu} S_a^{\lambda\gamma} \end{aligned} \quad (5.17)$$

A partir de ellos, estamos finalmente en condiciones de escribir las ecuaciones de movimiento completas para la teoría determinantal ST:

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{\sqrt{|U|}}{2} \left[\left((U^{-1})^{(\lambda)}_{\ a} + \frac{2}{\lambda} (U^{-1})^{\nu\mu} \left(\alpha (-2S_{\mu\rho(a} T_{\nu}^{\rho\lambda)} + \delta_{\mu}^{\lambda} F_{a\nu}^{(1)} + \delta_{\nu}^{\lambda} F_{\mu a}^{(1)} + Q^{\lambda}_{\ a\mu\alpha\beta} T_{\nu}^{\alpha\beta}) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \beta (Q^{\lambda}_{\ a\beta\mu\alpha} T_{\nu}^{\beta\ \alpha} - S_{\beta\mu}^{(\lambda} T_{\nu a}^{\beta)}) + \gamma (\delta_{(\mu}^{\lambda} e_{a\nu)} \mathbb{T} - 4g_{\mu\nu} F^{(2)\lambda}_{\ a}) \right) \right] - \lambda e^{\lambda}_a |e| - \partial_{\gamma} \left(\sqrt{|U|} (U^{-1})^{\nu\mu} \right. \\
& \quad \left. \left[\alpha (2S_{\mu}^{\lambda\gamma} e_{\nu a} + D_{\mu}^{\sigma\rho}{}_{\ a}^{[\lambda\gamma]} T_{\nu\sigma\rho}) + \beta (D_{\beta\mu\alpha a}^{[\lambda\gamma]} T_{\nu}^{\beta\ \alpha} + S_{a\mu}^{[\gamma} \delta_{\nu}^{\lambda]}) + \gamma (4g_{\mu\nu} S_a^{\lambda\gamma}) \right] \right) = -\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e^a_{\lambda}}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

5.1.1. Límite de bajas energías

Las ecuaciones 5.18 obtenidas en la sección anterior, y que constituyen un aporte original de este trabajo, representan un importante avance en el estudio de la teoría determinantal ya que son el punto de partida para la búsqueda de nuevas soluciones. Si bien las hemos podido escribir de un modo relativamente compacto, está claro que son ecuaciones significativamente más complicadas que las de una teoría $f(\mathbb{T})$ (ver ecs. 5.34 en la próxima sección). Lo primero que verificaremos, es que se reducen correctamente al ETRG en el límite en que el parámetro de Born-Infeld λ tiende a infinito. Por supuesto, la acción gravitacional determinantal de tipo ST fue diseñada específicamente para contener a la teoría de Einstein en su régimen de campo débil (ver comentarios al final del capítulo 3.4, en los párrafos siguientes a la ec. 3.14). Sin embargo, es muy instructivo ver cómo emerge la teoría de Einstein a nivel de las ecuaciones de movimiento.

En primer lugar, utilizamos el desarrollo del determinante en término de las trazas (ver ec. 3.12):

$$\sqrt{|U|} = \sqrt{|g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda}F_{\mu\nu}|} \simeq \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda}\mathbb{T}} \simeq \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \left(1 + \frac{\mathbb{T}}{\lambda}\right) \quad (5.19)$$

Para aproximar las ecuaciones, necesitamos también calcular la inversa de U , que a primer orden en λ^{-1} es $(U^{-1}) \simeq g^{\mu\nu} - \frac{2}{\lambda}F^{\mu\nu}$. El producto de estos dos términos, despreciando el término que va como λ^{-2} es:

$$\sqrt{|U|} (U^{-1}) \simeq \sqrt{|g|} \left(1 + \frac{\mathbb{T}}{\lambda}\right) \left(g^{\nu\mu} - \frac{2}{\lambda}F^{\nu\mu}\right) \simeq g^{\nu\mu} + \frac{1}{\lambda}(g^{\nu\mu}\mathbb{T} - 2F^{\nu\mu}), \quad (5.20)$$

con lo cual, el primer término de las ecuaciones de Euler queda expresado según

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} \simeq \sqrt{|g|} \left[g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} + e_a^\lambda \mathbb{T} - F_{(a}^{(\lambda)} \right]. \quad (5.21)$$

A continuación, debemos calcular $g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a}$ y para ello debemos ver qué ocurre con cada $F^{(i)}$. Analicemos primero el $F^{(1)}$. Según la ecuación 5.12 vale que

$$\begin{aligned} g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial e_\lambda^a} &= g^{\nu\mu} \left(Q^\lambda_{a\mu\alpha\beta} T_\nu^{\alpha\beta} - 2S_{\mu\rho(a} T_\nu^{\rho\lambda)} + \delta_\mu^\lambda F_{a\nu}^{(1)} + \delta_\nu^\lambda F_{\mu a}^{(1)} \right) \\ &= Q^\lambda_{a\mu\alpha\beta} T_\mu^{\alpha\beta} - 2F_{(a}^{(2)\lambda)} + F_{(a}^{(1)\lambda)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Aquí nos resulta conveniente utilizar la siguiente identidad, cuya demostración es directa:

$$Q^\lambda_{a\mu\alpha\beta} T^{\mu\alpha\beta} = -2F^{(2)\lambda}{}_{[a}. \quad (5.23)$$

Combinando este término con la parte simétrica que tenemos en la ecuación 5.22 ob-

tenemos que:

$$g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial e_\lambda^a} = -4F^{(2)\lambda}_a + F^{(1)\lambda}_a. \quad (5.24)$$

Los otros dos términos se calculan análogamente, arribando a

$$g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(2)}}{\partial e_\lambda^a} = -4F^{(2)\lambda}_a + F^{(2)\lambda}_a, \quad (5.25a)$$

$$g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(3)}}{\partial e_\lambda^a} = -4DF^{(2)\lambda}_a + F^{(3)\lambda}_a. \quad (5.25b)$$

Recordando que $F = \alpha F^{(1)} + \beta F^{(2)} + \gamma F^{(3)}$ y que hemos escogido normalizar los acoplamientos de modo que $\alpha + \beta + D\gamma = 1$, concluimos que

$$g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} = -4F^{(2)\lambda}_a + F^{(1)\lambda}_a. \quad (5.26)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación 5.21, obtenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} \simeq -4\sqrt{|g|} \left[F^{(2)\lambda}_a - \frac{1}{4} e_a^\lambda \mathbb{T} \right] \quad (5.27)$$

Proseguimos con el otro término de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que a primer orden queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \simeq \sqrt{|g|} \left[g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right]. \quad (5.28)$$

Nuevamente debemos analizar por separado cada parte del tensor F . Para el $F^{(1)}$, tenemos que calcular:

$$g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = 2S_a^{\lambda\gamma} + D_\mu^{\sigma\rho} [^{\lambda\gamma}] T_{\mu\sigma\rho}. \quad (5.29)$$

El segundo término del miembro derecho se obtiene de la siguiente propiedad del tensor D :

$$D_\mu^{\sigma\rho} [^{\lambda\gamma}] T_{\sigma\rho}^\mu = 2S_a^{\lambda\gamma} \quad (5.30)$$

El cálculo para $F^{(2)}$ y $F^{(3)}$ es análogo, con lo que llegamos a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \simeq 4\sqrt{|g|} S_a^{\lambda\gamma}. \quad (5.31)$$

Combinando las ecuaciones 5.31 y 5.27 podemos escribir ahora sí el miembro izquierdo de las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen en el régimen de bajas energías

$$-4\sqrt{|g|} \left[F_a^{(2)\lambda} - \frac{1}{4} e_a^\lambda \mathbb{T} + \frac{\partial_\gamma \left(\sqrt{|g|} S_a^{\lambda\gamma} \right)}{\sqrt{|g|}} \right] \doteq 2\sqrt{|g|} G_a^\lambda, \quad (5.32)$$

en donde hemos identificado a G_a^λ como el tensor de Einstein 2.26. En el régimen de campo débil, obtenemos entonces las ecuaciones de Einstein

$$G_a^\lambda = 8\pi G T_a^\lambda, \quad (5.33)$$

habiendo identificado $k = 8\pi G$.

5.2. Obtención de soluciones

En la sección anterior hemos calculado explícitamente las ecuaciones dinámicas de la modificación determinantal del ETRG. Estas ecuaciones son un punto de partida imprescindible para el estudio de la modificación de soluciones. En esta sección daremos algunos pasos más en ese sendero.

Una primera pregunta que debemos hacernos es si bajo algunas circunstancias podemos recuperar las soluciones de la Relatividad General. Es importante recordar que una dada métrica que sea solución de las Ecuaciones de Einstein da lugar a un conjunto enorme de posibles tétradas. Esto se debe a que la relación entre la métrica y la tétrada es invariante local de Lorentz. Por lo tanto, en el contexto del TEGR, cualquier transformación $\Lambda^a_b(x)$ aplicada a una solución dará lugar a otra. Esto ya no ocurre con las teorías modificadas, que pierden la invariancia local de Lorentz. Por lo tanto, para dos tétradas que den lugar a la misma métrica, las ecuaciones tendrán en principio distinto aspecto.

Una manera de interpretar esto es que una solución a las teorías modificadas da lugar, no solamente a una métrica, sino también a un *frame* preferencial. La interpretación física de estos *frames* preferenciales es todavía una pregunta abierta en estas teorías. Sin embargo, es importante recordar que la violación de la invariancia local de Lorentz, i.e., la emergencia de los frames preferenciales, ocurre en la teoría determinantal a escalas de longitud típicas del orden $l^2 = \lambda^{-1}$. En vistas a que esta escala debe ser muy chica para que la teoría verifique los tests experimentales provistos por la RG, es presumible que posibles violaciones de la invariancia local no sean delatadas a través de la actual generación de experimentos.

Por otro lado, es posible también que este *frame* no sea único, sino que exista toda una familia de tétradas que generen la misma métrica y a su vez sean solución de las ecuaciones modificadas. Esto ha sido estudiado en [28] en el contexto de las teorías $f(\mathbb{T})$, que presentan el mismo fenómeno de emergencia de frames preferenciales. Al conjunto de transformaciones de Lorentz que preservan el carácter de solución de la tétrada se lo ha denominado *grupo remanente*, y fue mostrado que dependiendo del espacio-tiempo en consideración, dicho conjunto puede ser muy basto. Sería de mucho interés extender estas investigaciones al contexto determinantal en cuestión.

A continuación, enunciaremos un conjunto de proposiciones que nos permiten conocer bajo qué circunstancias podemos recuperar las soluciones de la RG en la teoría determinantal. Veamos primero qué ocurre en el caso de las teorías $f(\mathbb{T})$ cuyas ecuaciones de movimiento son [29] :

$$\frac{1}{|e|} \partial_\mu (|e| S_a^{\mu\nu}) f'(\mathbb{T}) - S_\rho^{\nu\mu} T_{a\mu}^\rho f'(\mathbb{T}) + S_a^{\mu\nu} \partial_\mu (\mathbb{T}) f''(\mathbb{T}) + \frac{1}{4} e_a^\nu f(\mathbb{T}) = \frac{k}{2} \mathbf{T}^\nu_a \quad (5.34)$$

Recordemos que para una modificación UV (como las que estamos estudiando), la función f debe cumplir que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Es fácil ver entonces, la siguiente propiedad [29]:

Proposición 1. *Sea $\{g_{\mu\nu}\}$ una solución a las ecuaciones de Einstein con tensor de energía momento $\mathbf{T}^{\mu\nu}$. Sea $\{e^a_\lambda\}$ una tétrada que satisfaga las siguientes propiedades:*

(i) *De lugar a la métrica: $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$*

(ii) *Anule el escalar de Weitzenböck en todo el espacio-tiempo: $\mathbb{T}(e^a_\lambda) = 0$*

Entonces, $\{e^a_\lambda\}$ es solución de las ecuaciones para una deformación $f(\mathbb{T})$ ultravioleta.

Demostración. Por ser una deformación UV, tenemos que $f(\mathbb{T} = 0) = 0$ y que $f'(\mathbb{T} = 0) = 1$. Además, como \mathbb{T} es idénticamente nulo $\partial_\mu \mathbb{T} = 0$. Con lo cual, las ecuaciones 5.34 se reducen a:

$$\frac{1}{|e|} \partial_\mu (|e| S_a^{\nu\mu}) - S_\rho^{\nu\mu} T_{a\mu}^\rho = \frac{k}{2} \mathbf{T}^\nu_a$$

que reconocemos como las ecuaciones del equivalente teleparalelo para $\mathbb{T} = 0$ (ver ec. 5.2). Por hipótesis, $\{e^a_\lambda\}$ es solución de estas ecuaciones. ■

De esta manera, poseemos un método específico para recuperar las soluciones de la Relatividad General en teorías $f(\mathbb{T})$. Basta con encontrar un *frame* que anule el escalar de Weitzenböck. Recordemos que para cualquier tétrada que satisfaga la condición (i) de la proposición anterior, tenemos toda una familia que también la cumplirá, relacionadas mediante una transformación de Lorentz. En 4 dimensiones, el grupo de Lorentz tiene seis parámetros independientes. Esta libertad adicional debería permitirnos encontrar una tétrada que satisfaga (ii). En la sección siguiente, veremos cómo obtener dicha tétrada en el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild.

En la teoría determinantal las cosas se vuelven un poco más intrincadas. Un primer intento un tanto ingenuo sería ver qué ocurre con las ecuaciones en el caso en que se

anula el escalar \mathbb{T} . Estudiando este caso, uno nota rápidamente que no llega a una simplificación significativa de las ecuaciones dinámicas 5.18. Esto era de esperar, ya que el escalar \mathbb{T} corresponde sólo al primer término del desarrollo del determinante, que posee además términos de orden superior en la torsión. Por lo tanto, la teoría determinantal sería capaz de dar lugar a soluciones modificadas incluso en el caso $\mathbb{T} = 0$.

Para reobtener las ecuaciones de la Relatividad General, debemos pedir una condición más drástica: que todas las componentes del tensor $F_{\mu\nu}$ se anulen. Este hecho puede ser sintetizado en la siguiente proposición:

Proposición 2. *Sea $\{g_{\mu\nu}\}$ una solución a las ecuaciones de Einstein con tensor de energía-impulso $\mathbf{T}^{\mu\nu}$. Supongamos que encontramos una tétrada $\{e^a\}$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *Da lugar a la métrica, es decir: $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$*

(ii) *Anula al tensor determinantal: $F_{\mu\nu}(e^a) = 0$*

Entonces, $\{e^a\}$ es solución de las ecuaciones de la teoría determinantal.

Demostración. Como $F_{\mu\nu} = 0$, por definición tenemos que $U_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, lo cual implica que $\sqrt{|U|} = \sqrt{|g|}$ y que $U^{-1\nu\mu} = g^{\nu\mu}$. Además, $\mathbb{T} = 0$.

Entonces vemos que la ecuación 5.1 se reduce a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} = \sqrt{|g|} g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} \quad (5.35)$$

Utilizando la ecuación 5.26 y el hecho de que $F_a^\lambda = 0$, llegamos a que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} = -4\sqrt{|g|} F^{(2)\lambda}_a. \quad (5.36)$$

Por su parte, la ecuación 5.28 se reduce a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \sqrt{|g|} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = 4\sqrt{|g|} S_a^{\lambda\gamma} \quad (5.37)$$

Las ecuaciones de movimiento a las que se llega son entonces:

$$-4 \left[\sqrt{|g|} F^{(2)\lambda}_a + \partial_\gamma \left(S_a^{\lambda\gamma} \sqrt{|g|} \right) \right] = 2\sqrt{|g|} G_a^\lambda (\mathbb{T} = 0) = 16\pi G \mathbf{T}_a^\lambda \quad (5.38)$$

que son satisfechas por ser $g_{\mu\nu}$ solución de las ecuaciones de Einstein. ■

La condición (ii) de esta proposición exige que en $D = 4$ deben anularse las 16 componentes del tensor $F_{\mu\nu}$. Claramente, esta condición es mucho más restrictiva que aquella provista en la proposición 1. Por este motivo, uno esperaría que no siempre sea posible cumplir con ellas y por lo tanto, la teoría determinantal pareciera ser capaz de modificar soluciones que las $f(\mathbb{T})$ no modifican. Este hecho fue verificado en la referencia [25], en donde explícitamente se encontró una solución de vacío en tres dimensiones espacio-temporales que constituye una deformación de la solución cónica estudiada en la RG tridimensional por Deser, Jackiw y 't Hooft en [30], y que la teoría $f(\mathbb{T})$ fue incapaz de modificar.

El siguiente caso más sencillo que podemos analizar es cuando el tensor F sea escalar, es decir, cuando se escriba de la forma $F_{\mu\nu} = Cg_{\mu\nu}$ con C constante. Para este caso tenemos la siguiente propiedad:

Proposición 3. *Sea $\{g_{\mu\nu}\}$ una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ y tensor de energía impulso $\mathbf{T}^{\mu\nu}$. Sea $\{e^a\}$ una tétrada que satisfice:*

(i) *Da lugar a la métrica, es decir: $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$*

(ii) *Da lugar a un tensor determinantal que satisfice $F_{\mu\nu}(e^a) = Cg_{\mu\nu}$ con $C \in \mathbb{R}$ una constante.*

Si escogemos C de modo que $2\Lambda = CD - \lambda(1 + \frac{2C}{\lambda}) \left[1 - (1 + \frac{2C}{\lambda})^{-\frac{D}{2}}\right]$ (recordemos que D es la dimensión del espacio-tiempo), entonces vale que $\{e^a\}$ es solución de las ecuaciones determinantaes con tensor de energía impulso $\mathbf{T}'^{\mu\nu} = (1 + \frac{2C}{\lambda})^{\frac{D}{2}-1} \mathbf{T}^{\mu\nu}$.

Demostración. Como $F_{\mu\nu} = Cg_{\mu\nu}$, por definición vale que: $U_{\mu\nu} = (1 + \frac{2C}{\lambda}) g_{\mu\nu}$, lo cual implica que $\sqrt{|U|} = (1 + \frac{2C}{\lambda})^{\frac{D}{2}} \sqrt{|g|}$ y que $U^{-1\nu\mu} = \frac{g^{\nu\mu}}{(1 + \frac{2C}{\lambda})}$. Además, tomando traza, es claro que $\mathbb{T} = Tr(F) = CD$ Bajo estas condiciones la ecuación 5.1 queda así:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} = \sqrt{|g|} \left[\left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} - 1 \right] e_a^\lambda + \sqrt{|g|} \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a}. \quad (5.39)$$

Por otro lado, la 5.26 nos dice que

$$g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} = 2C e_a^\lambda - 4F^{(2)\lambda}_a \quad (5.40)$$

Juntando estas dos ecuaciones, y utilizando la hipótesis sobre Λ , tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} = -4\sqrt{|g|} \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} \left[F^{(2)\lambda}_a - \frac{1}{4} (\mathbb{T} - 2\Lambda) e_a^\lambda \right] \quad (5.41)$$

Por otro lado, la ecuación 5.28 queda escrita así:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} \sqrt{|g|} \left[g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right] = 4 \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} \sqrt{|g|} S_a^{\lambda\gamma} \quad (5.42)$$

Combinando estas últimas dos ecuaciones podemos escribir el miembro derecho de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$-4 \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} \left[\sqrt{|g|} \left(F^{(2)\lambda}{}_a - \frac{1}{4} (\mathbb{T} - 2\Lambda) e_a^\lambda \right) - \partial_\gamma \left(\sqrt{|g|} S_a^{\lambda\gamma} \right) \right] \quad (5.43)$$

Lo que está entre corchetes es fácil de reconocer como las ecuaciones del ETRG con constante cosmológica [29]. Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación 5.43 como $2\sqrt{|g|}G_a^\lambda(\Lambda)$, donde $G(\Lambda)$ es el tensor de Einstein con constante cosmológica Λ . Por hipótesis $g_{\mu\nu}$ es solución a las ecuaciones de Einstein con tensor de energía impulso $\mathbf{T}^{\mu\nu}$, por lo que

$$2 \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} \sqrt{|g|} G_a^\lambda(\Lambda) = 2k \left(1 + \frac{2C}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}-1} \mathbf{T}^\lambda{}_a = 2k \mathbf{T}'^\lambda{}_a \quad (5.44)$$

■

La proposición 3 puede interpretarse físicamente de la siguiente manera: una tétrada que satisface la condición (ii) genera una constante cosmológica. Esto puede verse también a nivel de las $f(\mathbb{T})$, donde una tétrada que produzca un valor de \mathbb{T} constante en todo el espacio da lugar también a un término tipo constante cosmológica. En la sección 5.3 veremos que para una misma simetría de la métrica, podemos hallar espacio-tiempos con y sin constante cosmológica en función de cómo es boosteada la tétrada.

Ahora analizaremos un último caso. Las deformaciones ultravioletas de la Relatividad General mediante una $f(\mathbb{T})$, implican que $f(0)$ debe ser cero. Por esta razón, cuando en la proposición 1 pedíamos como condición que $\mathbb{T} = 0$, también estábamos imponiendo que la acción sea cero. Esto nos sugiere analizar qué ocurre con las ecuaciones determinantaes si imponemos la condición de que la acción se anule (*on shell*), es decir que $\sqrt{|g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu}|} = \sqrt{|g_{\mu\nu}|}$.

Para el análisis propuesto resulta útil recordar algunas propiedades que vienen del álgebra lineal. En primer lugar, si una matriz A es tal que $\det(I + tA) = 1$ para todo t , donde I es la identidad, entonces la matriz A es nilpotente. Es decir, existe un $K \leq D$ entero tal que $A^K = 0$. Recíprocamente, vale que para cualquier matriz nilpotente N $\det(I + N) = 1$. Con estas propiedades, podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 4. *Sea e^a una familia de tétradas que satisfaga que $F_{\mu\nu}$ sea nilpotente de grado K . Entonces, las ecuaciones determinantaes pueden escribirse de la siguiente*

manera: $G_a^\lambda = k(T_a^\lambda + T_a^{(v)\lambda})$, donde G_a^λ es el tensor de Einstein, T_a^λ es el tensor de energía impulso usual y $T_a^{(v)\lambda}$ puede interpretarse como un tensor de energía-impulso asociado al vierbien.

Demostración. Por la propiedad de las matrices nilpotentes mencionada, vale que $\sqrt{|g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda}F_{\mu\nu}|} = \sqrt{|g_{\mu\nu}|}$. Por otro lado, en el capítulo anterior vimos que la inversa de U podía escribirse formalmente como una serie geométrica. Como F es nilpotente, en este caso esa serie es una suma finita: $U^{-1}{}^{\nu\mu} = \sum_{n=0}^{K-1} \left(-\frac{2}{\lambda}\right)^n (F^n)^{\nu\mu}$. Utilizando estas propiedades, podemos escribir ambos términos de las ecuaciones determinantaes de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\lambda^a} = \sqrt{|g|} \left(g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} - F_a^{(\lambda)} \right) + \left[\sum_{n=1}^{K-1} \left(-\frac{2}{\lambda}\right)^n \sqrt{|g|} \left(-(F^{n+1})^{(\lambda)}{}_a + (F^n)_{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} \right) \right] \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} = \sqrt{|g|} \left(g^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right) + \left[\sum_{n=1}^{K-1} \left(-\frac{2}{\lambda}\right)^n \sqrt{|g|} (F^n)^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right] \quad (5.46)$$

Como podemos ver, en ambas ecuaciones el primer término del miembro derecho es el mismo que aparece en el límite de bajas energías (ver 5.24). Esos términos sabemos, entonces, que podemos agruparlos para formar el tensor de Einstein. Analicemos los segundos términos, aquellos en corchetes en ambas ecuaciones. Veamos que podemos escribirlos como obtenidos a partir de la variación de un nuevo lagrangiano $\mathcal{L}^{(v)}$. Para ello, analicemos la siguiente variación:

$$\delta \left(Tr(F^{(n)}) \sqrt{|g|} \right) = Tr(F^{(n)}) \delta(\sqrt{|g|}) + \delta(Tr(F^{(n)})) \sqrt{|g|} \quad (5.47)$$

El primer término es cero, pues una matriz nilpotente tiene traza cero. Calculemos ahora la variación de la traza, que podemos escribir usando n veces la regla del producto:

$$\delta \left(F_{\sigma_2}^{\sigma_1} F_{\sigma_3}^{\sigma_2} \dots F_{\sigma_1}^{\sigma_n} \right) = n F^{(n-1)\nu}{}_\rho \delta(F^\rho{}_\nu). \quad (5.48)$$

Por su parte, a la variación de $F^\rho{}_\nu$ podemos reescribirla como

$$\delta F^\rho{}_\nu = \delta(F_{\mu\nu} g^{\mu\rho}) = g^{\mu\rho} \delta(F_{\mu\nu}) + \delta g^{\mu\rho} F_{\mu\nu}. \quad (5.49)$$

Anteriormente, vimos que $\frac{\partial g^{\mu\rho}}{\partial e_\lambda^a} = -g^{\lambda(\mu} e_a^{\rho)}$. En conclusión, la variación del término que involucra la traza en 5.47 nos da:

$$\delta(Tr(F^{(n)}) \sqrt{|g|}) = n \left[-F^{(n)(\lambda)}{}_a \delta e_\lambda^a + F^{(n-1)\nu\mu} \delta(F_{\mu\nu}) \right], \quad (5.50)$$

que, como podemos ver, tiene el aspecto de los sumandos que aparecían en las ecuaciones

ciones 5.45 y 5.46. Inspirados en esto, definimos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L}^{(v)} = \sum_{n=1}^{K-1} \left(\frac{-2}{\lambda} \right)^n \frac{\sqrt{|g|}}{n} \text{Tr}(F^{(n)}). \quad (5.51)$$

Si definimos ahora al tensor $T^{(v)}$ como

$$T^{(v)\lambda}_a = \frac{-1}{\sqrt{|g|}k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(v)}}{\partial e_\lambda^\alpha} - \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(v)}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^\alpha)} \right) \right], \quad (5.52)$$

podemos reescribir las ecuaciones de movimiento según

$$G_a^\lambda = k(T^\lambda_a + T^{(v)\lambda}_a). \quad (5.53)$$

■

La forma de las ecuaciones augurada en la proposición 4 podría tener fuertes implicaciones en el proceso de regularización provisto por la teoría determinantal. En efecto, la expresión 5.53 enseña que en estas condiciones se generaría un tensor energía-momento efectivo dado por $T^\lambda_a + T^{(v)\lambda}_a$ cuya naturaleza reside no sólo en el contenido de materia usual (codificado en T^λ_a), sino también en una contribución de carácter geométrico propio de la estructura determinantal. Es esta contribución la que podría fomentar una violación de las condiciones necesarias para la validez de los teoremas de singularidades, puesto que podría generar un estado gravitatorio repulsivo en el régimen de campo fuerte. Si bien no hemos tenido oportunidad de ahondar en esta cuestión, es claro que la profundización de esta línea de trabajo es crucial para entender el mecanismo de regularización detrás de la deformación determinantal.

5.3. Soluciones con simetría esférica

La existencia de soluciones de agujeros negros regulares en vacío en una teoría de gravedad modificada es un tópico abierto. En la Relatividad General el teorema de Birkhoff establece que la métrica de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica y estática. Por este motivo, el objetivo final de este trabajo sería el de poder hallar una solución distinta dentro del contexto de la teoría determinantal. Un primer paso es buscar en qué situaciones se reobtiene el espacio-tiempo de Schwarzschild, para de esta manera comprender las posibles formas de modificarlo. Comenzaremos analizando lo que ocurre en las teorías $f(\mathbb{T})$, puesto que, a pesar de compartir la misma arena geométrica, son considerablemente más fáciles de analizar.

5.3.1. En las teorías $f(\mathbb{T})$

La proposición 1 demostrada en la sección 5.2 nos indica que para conseguir que una solución de las ecuaciones de Einstein sea solución de la teoría modificada de tipo $f(\mathbb{T})$ debemos encontrar un frame que anule el escalar \mathbb{T} . En la referencia [29] se muestra que esto es posible para Schwarzschild. Debido a la importancia que reviste el procedimiento de obtención de la solución para nuestros propósitos inmediatos, describimos a continuación el método utilizado en esa referencia.

Comencemos escribiendo el elemento de línea dado por la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas usuales:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (5.54)$$

Ahora buscaremos una tétrada que satisfaga las condiciones de la proposición 1. Para eso, veamos en primer lugar lo que ocurre con la tétrada diagonal, que se obtiene de tomar la “raíz cuadrada” del tensor métrico:

$$\begin{aligned} e^0 &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt \\ e^1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} dr \\ e^2 &= r d\theta \\ e^3 &= r \sin(\theta) d\phi \end{aligned} \quad (5.55)$$

Si calculamos el valor del escalar de Weitzenböck para esta tétrada, se obtiene que $\mathbb{T} = 16M^3 - 8M^2r - 2Mr^2 + r^3$, claramente distinto de cero. Esto indica que no estamos dentro de las condiciones de la proposición 1. Más aún, la ecuación de movimiento $r - \theta$ lleva a la condición:

$$f''(16M^3 - 8M^2r - 2Mr^2 + r^3) = 0, \quad (5.56)$$

que solo puede cumplirse si se anula la derivada segunda de f , es decir, $f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Por lo tanto, este frame no es adecuado para teorías modificadas. Más aún, tampoco nos brinda una solución en el caso en que $M = 0$. En consecuencia, el frame radial no paraleliza a Minkowski en las $f(\mathbb{T})$. Consideremos ahora la posibilidad de realizar alguna transformación de Lorentz sobre este *frame* de tal manera de poder encontrarnos en las condiciones del teorema. Para ello, probemos en primer lugar un boost radial. Es decir, construyamos una nueva tétrada que provenga de aplicar un boost sobre $\{e^0, e^1\}$, y pidamos que el parámetro del boost $b(r)$ dependa solo del radio. De esta manera,

definimos una nueva tétrada e'^a según:

$$\begin{aligned} e'^0 &= \cosh(b(r))e^0 + \sinh(b(r))e^1 \\ e'^1 &= \sinh(b(r))e^0 + \cosh(b(r))e^1 \\ e'^2 &= e^2 \\ e'^3 &= e^3. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Si calculamos el escalar de Weitzenböck provisto por esta tétrada, reobtenemos el mismo resultado que antes. Esto significa que un boost radial aplicado a la tétrada diagonal no modifica el valor \mathbb{T} y por lo tanto no nos permite obtener su anulación.

El hecho de que el frame diagonal en esféricas no sea solución ni siquiera del espacio de Minkowski, sugirió encontrar una tétrada que asintóticamente (i.e., si $r \rightarrow \infty$), sí paralelizara a Minkowski. A continuación, describimos el método involucrado. En primer lugar, partimos de la métrica de Schwarzschild escrita en coordenadas isotrópicas:

$$ds^2 = -A(\rho)^2 dt^2 + B(\rho)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{5.58}$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y cuyas funciones radiales en el caso de Schwarzschild son:

$$A(\rho) = \frac{2\rho - M}{2\rho + M}, \quad B(\rho) = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2 \tag{5.59}$$

Estas coordenadas isotrópicas cubren solamente la región exterior al radio de Schwarzschild, y la relación entre r y ρ es:

$$\sqrt{r^2 - 2Mr} + r - M = 2\rho. \tag{5.60}$$

A continuación, se define el frame asintótico, el cual se supone que es una buena aproximación al frame buscado solo en el límite de $\rho \rightarrow \infty$. Este frame se obtiene simplemente de tomar la raíz cuadrada de la métrica 5.58, y se ve como

$$\begin{aligned} e^t &= A(\rho)dt, \\ e^x &= B(\rho)dx, \\ e^y &= B(\rho)dy, \\ e^z &= B(\rho)dz. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Este frame es particularmente útil como punto de partida, ya que ofrece la paralelización correcta (cartesiana) del espacio-tiempo en el infinito. Esto puede verse de su

escritura explícita, vía el cálculo del escalar \mathbb{T} , que en este caso resulta

$$\mathbb{T} = \frac{-128M^2\rho^2}{(M-2\rho)(M+2\rho)^5}. \quad (5.62)$$

Si bien es distinto de cero, y por lo tanto, no nos permite obtener Schwarzschild como solución, es claro que tiende a cero en el límite de $\rho \rightarrow \infty$.

Para conseguir que \mathbb{T} se anule, realizamos un boost radial sobre esta tetrada. Este paso no es tan trivial como en el caso de la tetrada diagonal, pero podemos realizarlo de la siguiente manera. Como primer paso, escribimos la parte espacial del frame asintótico en términos del frame esférico:

$$\begin{aligned} e^x &= \cos(\phi) \sin(\theta) e^\rho + \cos(\phi) \cos(\theta) e^\theta - \sin(\theta) \sin(\phi) e^\phi, \\ e^y &= \sin(\theta) \sin(\phi) e^\rho + \cos(\theta) \sin(\phi) e^\theta + \cos(\phi) \sin(\theta) e^\phi, \\ e^z &= \cos(\theta) e^\rho - \sin(\theta) e^\theta. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Sobre este frame, sabemos que podemos realizar un boost radial de parámetro $b(r)$ a través de la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} \tilde{e}^t &= \cosh(b(\rho)) e^t + \sinh(b(\rho)) e^\rho, \\ \tilde{e}^\rho &= \sinh(b(\rho)) e^t + \cosh(b(\rho)) e^\rho. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Finalmente, utilizamos el frame radial ya boosteado para escribir el frame asintótico asociado:

$$\begin{aligned} \tilde{e}^t &= \cosh(b(\rho)) e^t + \sinh(b(\rho)) e^\rho, \\ \tilde{e}^x &= \cos(\phi) \sin(\theta) \tilde{e}^\rho + \cos(\phi) \cos(\theta) e^\theta - \sin(\theta) \sin(\phi) e^\phi, \\ \tilde{e}^y &= \sin(\theta) \sin(\phi) \tilde{e}^\rho + \cos(\theta) \sin(\phi) e^\theta + \cos(\phi) \sin(\theta) e^\phi, \\ \tilde{e}^z &= \cos(\theta) \tilde{e}^\rho - \sin(\theta) e^\theta. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Luego de escribir este amigable frame, recalculamos el valor del escalar de Weitzenböck. Llamando $C(\rho) = \cosh(b(\rho))$, tenemos que:

$$\mathbb{T}(\tilde{e}^a) = -64\rho^2 \frac{(M^2 + 4\rho^2)C(\rho) - (M^2 - 4\rho^2)(-1 + \rho C'(\rho))}{(M-2\rho)(M+2\rho)^5}. \quad (5.66)$$

Como se ve, en este caso su valor sí depende del valor del boost aplicado. Pedimos ahora que $\mathbb{T} = 0$, lo cual nos da una ecuación diferencial para $C(\rho)$. La solución a esta ecuación es:

$$C(\rho) = \frac{M^2 + 4\rho^2 + k\rho}{4\rho^2 - M^2}, \quad (5.67)$$

en donde k es una constante de integración. De esta manera, hemos encontrado un *frame* que satisface las condiciones (i) y (ii) de la proposición 1 y que por lo tanto es solución a las ecuaciones de una teoría $f(\mathbb{T})$ arbitraria. Como comentario final, cabe notar que k parametriza a un conjunto de soluciones que están relacionadas entre sí mediante un subconjunto de transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones remanentes cumplen un rol de simetría *on shell* de las ecuaciones de movimiento.

5.3.2. En la teoría determinantal

La proposición 2 nos indica que la condición $\mathbb{T} = 0$ es insuficiente para garantizar que la tétrada hallada sea solución de la teoría determinantal. La condición que garantiza esto es $F_{\mu\nu} = 0$. Por definición $F_{\mu}^{\mu} = \mathbb{T}$, con lo cual esta última condición implica a la anterior. Teniendo esto en cuenta, parece razonable usar como punto de partida la tétrada hallada en el inciso previo 5.66. Para este *frame*, las componentes del tensor $F_{\mu\nu}(\tilde{e}^a)$ en coordenadas isotrópicas son:

$$\begin{pmatrix} -\frac{16(k+4M)\rho^4(8M\alpha+k\beta)}{(M+2\rho)^8} & -\frac{4(k+4M)\rho^2(\rho\beta k^2+(M^2+4\rho^2)(2\alpha+\beta)k+32M^2\rho\alpha)}{(M-2\rho)^2(M+2\rho)^6\sqrt{\frac{\rho(k+8\rho)(2M^2+k\rho)}{(M^2-4\rho^2)^2}}} & 0 & 0 \\ -4\rho\sqrt{\frac{\rho(k+8\rho)(2M^2+k\rho)}{(M^2-4\rho^2)^2}}(8M\alpha+k\beta) & -\frac{\rho\beta k^2+(M^2+4\rho^2)(2\alpha+\beta)k+32M^2\rho\alpha}{\rho(M^2-4\rho^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k\rho(2\alpha+\beta)}{2(M+2\rho)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k\rho(2\alpha+\beta)\sin^2(\theta)}{2(M+2\rho)^2} \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

Como podemos ver, sus componentes dependen de las constantes de acoplamiento α y β , de la masa M , y del parámetro k que viene del boost. El acoplamiento γ no aparece pues $F_{\mu\nu}^{(3)} = \mathbb{T}g_{\mu\nu} = 0$. Si consideramos $M \neq 0$, se puede ver que no es posible anular el tensor para cualesquiera valores de α y β , por lo que será necesario restringirnos a ciertos valores de estos parámetros. Para anular las componentes (θ, θ) y (ϕ, ϕ) , es necesario que $k(2\alpha + \beta) = 0$, por lo que tenemos dos posibilidades.

Caso 1 : $k = 0$

En este caso, las componentes de $F_{\mu\nu}$ son:

$$\begin{pmatrix} -\frac{512M^2\rho^4\alpha}{(M+2\rho)^8} & -\frac{128M\rho\sqrt{\frac{M^2\rho^2}{(M^2-4\rho^2)^2}}\alpha}{(M+2\rho)^4} & 0 & 0 \\ -\frac{128M\rho\sqrt{\frac{M^2\rho^2}{(M^2-4\rho^2)^2}}\alpha}{(M+2\rho)^4} & -\frac{32M^2\alpha}{(M^2-4\rho^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

con lo cual debe valer que $\alpha = 0$ para que se anulen todas.

Caso 2 : $2\alpha + \beta = 0$

Las componentes de $F_{\mu\nu}$ son:

$$\left(\begin{array}{ccc} -\frac{16(k^2-16M^2)\rho^4\beta}{(M+2\rho)^8} & -\frac{4(k-4M)(k+4M)^2\rho^3\beta}{(M-2\rho)^2(M+2\rho)^6\sqrt{\frac{\rho(k+8\rho)(2M^2+k\rho)}{(M^2-4\rho^2)^2}}} & 0 \ 0 \\ \frac{4(4M-k)\rho\sqrt{\frac{\rho(k+8\rho)(2M^2+k\rho)}{(M^2-4\rho^2)^2}}\beta}{(M+2\rho)^4} & -\frac{(k^2-16M^2)\beta}{(M^2-4\rho^2)^2} & 0 \ 0 \\ 0 & 0 & 0 \ 0 \end{array} \right), \quad (5.70)$$

de donde podemos ver que la condición para que se anulen todas es $k = 4M$.

En conclusión, hemos encontrado dos casos de la teoría determinantal en la que el frame propuesto anula a $F_{\mu\nu}$ para valores específicos de k . Esto significa que se satisfacen las condiciones de la proposición 2 y por lo tanto hemos encontrado que Schwarzschild es solución de la teoría determinantal en estos casos.

La pregunta que a continuación nos hicimos es si Schwarzschild aparece como solución en la teoría determinantal sólo para estos valores específicos de los acoplamientos o si es posible obtenerla para cualesquiera valores de α , β y γ . Para ello analizamos nuevamente el caso $k = 0$. En ese caso, se puede chequear explícitamente que F es nilpotente de grado 2, es decir $F^\mu_\sigma F^\sigma_\nu = 0$. Esto implica que estamos dentro de las condiciones de la proposición 4. Más aún, esto ocurre no sólo para Schwarzschild, sino para cualquier métrica de la forma,

$$ds^2 = -e^{-2f(r)}dt^2 + e^{2f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin(\theta)^2d\phi^2 \quad (5.71)$$

siempre y cuando tomemos un boost con parámetro $b(r) = f(r)$. Puede verse que en el caso de Schwarzschild este boost se reduce al encontrado para $k = 0$. De esta manera, esperábamos que los términos adicionales que aparecen en el caso de F nilpotente dieran lugar a una métrica distinta. Sin embargo, la respuesta fue decepcionante, pues las ecuaciones a las que llegamos resultaron ser las que satisface Schwarzschild, independientemente de α , β y γ . Esto responde, entonces, la pregunta inicial del párrafo.

Por último, nos resta aprovechar la información de la proposición 3. Allí vimos que podíamos originar una constante cosmológica si conseguíamos un boost que nos llevara a $F^{\mu\nu} = Cg_{\mu\nu}$ con C constante. En el caso de simetría esférica podemos obtener el boost de la siguiente manera. Fijemos las constantes $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Por la condición de normalización en 4 dimensiones, tenemos que $\gamma = 1/4$. A continuación proponemos una métrica de la forma 5.71 y una tétrada con un boost libre $C(r)$. Y ahora pedimos la condición $\mathbb{T} = C$ constante. La solución a esta ecuación nos da el siguiente boost:

$$C(r) = \cosh(f(r)) + \frac{e^{f(r)}C}{12}r^2 \quad (5.72)$$

Si ahora vemos las ecuaciones en vacío para este ansatz, encontramos que

$$f(r) = -\frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2M}{r} + \Lambda r^2 \right), \quad (5.73)$$

con $\Lambda = \frac{C^2}{12(C+2\lambda)}$. Esta es conocida como la métrica de Schwarzschild-de Sitter ($\Lambda > 0$) o Schwarzschild-anti de Sitter ($\Lambda < 0$). Corresponde a un espacio-tiempo que representa un agujero negro singular en $r = 0$, pero que asintóticamente no es plano, sino que tiende a un espacio dS o AdS respectivamente. De esta manera hemos demostrado que para las mismas simetrías, podemos encontrar que distintas métricas son solución a las ecuaciones determinantaes en función de la tétrada utilizada como ansatz.

Como comentario final, es importante mencionar que los resultados obtenidos no implican que el espacio-tiempo de Schwarzschild (o bien Schwarzschild-dS/AdS), sea la única solución de vacío de la teoría determinantal bajo la condición de simetría esférica. La obtención de una solución deformada con esta simetría, constituye un problema abierto cuya solución puede residir en el contexto de la teoría determinantal ST.

5.4. La Cosmología

El principal aliciente para aplicar el esquema determinantal como modificación de la Relatividad General es el resultado positivo que ha dado en la regularización de la cosmología [1]. Originalmente, esto se demostró a partir de ecuaciones obtenidas por variación anticipada de la acción, pues no se poseían las ecuaciones completas de movimiento. Este procedimiento es válido en la cosmología debido a la alta simetría de la solución. En esta sección corroboraremos que las ecuaciones utilizadas en [1] son las mismas que obtenemos al usar las ecuaciones completas. Por simplicidad, analizaremos sólo el caso de la cosmología espacialmente plana. En ese caso, podemos escribir la métrica como:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.74)$$

El frame diagonal para esta métrica es el apropiado para paralelizar la variedad de FRW [1]

$$e^0 = dt, e^1 = a(t)dx, e^2 = a(t)dy, e^3 = a(t)dz. \quad (5.75)$$

Para este frame, el escalar de Weitzenböck es

$$\mathbb{T} = -6H^2, \quad (5.76)$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble. Por ser distinto de cero, es de esperar que las ecuaciones sean modificadas por la teoría determinantal (ver proposición 2). En la cosmología, el tensor de energía momento se supone el de un fluido ideal isótro-

po y homogéneo, que en término de la densidad ρ y la presión p , se escribe $T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho(t), p(t), p(t), p(t))$. Utilizando las ecuaciones completas 5.18, llegamos a que la componente (t, t) de las mismas es:

$$\frac{\sqrt{1 - BH^2}}{\sqrt{1 - AH^2}} (1 + 2BH^2 - 3ABH^2) - 1 = k\rho \quad (5.77)$$

y las componentes espaciales conducen a:

$$-1 + \frac{\sqrt{1 - BH^2}}{\sqrt{1 - AH^2}} (3 - 2AH^2 - ABH^4) + \frac{1}{3a^2} \partial_t \left(\dot{a} a \frac{\sqrt{1 - BH^2}}{\sqrt{1 - AH^2}} (3B + A - 4ABH^2) \right) = kP, \quad (5.78)$$

donde hemos definido $A = 6(\beta + 2\gamma)\lambda^{-1}$ y $B = 2(2\alpha + \beta + 6\gamma)\lambda^{-1}$. La ecuación temporal coincide con la presentada en [1] y agregamos la ecuación espacial, que si bien es redundante, pues se deduce de la temporal más la condición de conservación de la energía, no aparece en dicho trabajo. Estas ecuaciones son estudiadas en dos casos interesantes:

Caso B=0

La condición de normalización $\alpha + \beta + 4\gamma = 1$ nos lleva a que $A = 12/\lambda$, en este caso la ecuación temporal que se obtiene es

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{12H^2}{\lambda}}} - 1 = k\rho, \quad (5.79)$$

la cual resulta equivalente a la ecuación 4.79 hallada en el capítulo anterior. La solución a esta ecuación para distintos tipos de fluidos ya fue discutida en dicho capítulo. Allí vimos que el factor de escala no se anula para $t = 0$, eliminando la singularidad inicial del big-bang y reemplazándolo por una etapa inflacionaria de carácter geométrico. De hecho, vimos que:

$$a(t \rightarrow -\infty) \simeq \exp \sqrt{\frac{\lambda}{12}} t \quad (5.80)$$

Caso A=B

En este caso, la ecuación queda de la forma

$$\frac{6}{\lambda} H^2 \left(1 - \frac{9H^2}{2\lambda}\right) = k\rho. \quad (5.81)$$

En [31] se muestra que esta ecuación puede integrarse y da lugar a un *bounce* o rebote. Esto quiere decir que en $t = 0$ el factor de escala alcanza un valor mínimo y luego se vuelve a expandir hacia el pasado. En dicho trabajo se concluye que el factor de escala es continuo mas no suave en el origen. Aún así las geódesicas logran pasar a través de la región $t > 0$ a la de $t < 0$, con lo cual el espacio-tiempo no es singular allí.

En conclusión, hemos mostrado dos situaciones en las que la teoría determinantal da lugar a cosmologías regulares y con comportamientos diferentes: en un caso, la singularidad es reemplazada por una etapa inflacionaria, y en el otro por un rebote. Esto nos muestra que la teoría determinantal esconde un interesante espectro de soluciones.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron dos teorías de gravedad modificada con estructura teleparalela dentro del esquema determinantal. El objetivo principal de estas modificaciones es la búsqueda de soluciones regulares en contraste con los espacio-tiempos singulares que surgen de la Relatividad General. En la primera parte del trabajo se hizo un resumen de las características más destacadas del teleparalelismo. En particular, se notaron dos aspectos que favorecen este contexto para la construcción de una nueva teoría de la gravedad. El primero es que dá lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden en las derivadas del vielbein. En segundo lugar, permite modificar soluciones de vacío ($R = 0$). A continuación, describimos distintos intentos de modificación de la Relatividad, haciendo hincapié en el esquema determinantal.

Dentro del esquema determinantal trabajamos con dos teorías. La primera, que denominamos TT, nos permitió obtener un modelo de gravedad en 1+1 dimensiones. La Relatividad General resulta nula en dos dimensiones, por lo que no es aplicable. La construcción de teorías en dos dimensiones a partir de acciones covariantes no es trivial y en este caso pudimos hacerlo a partir de una teoría puramente teleparalela. Además obtuvimos un método general para calcular las ecuaciones de movimiento de una teoría determinantal en D dimensiones. Se calcularon la acción y las ecuaciones en el régimen de bajas energías dando lugar a ecuaciones análogas a las del ETRG en más dimensiones y a partir de cuya traza se obtiene la ecuación de Jackiw-Teitelboim [5] para la gravedad en dos dimensiones. La cosmología en este régimen concide con la de FRW reducida a una dimensión espacial. Analizamos además la solución estática a estas ecuaciones, la cual presenta un horizonte de eventos. A partir de la acción completa, estudiamos la cosmología en la teoría determinantal, llegando a soluciones equivalentes a las obtenidas en [18] y [19] en cuatro dimensiones. Esta cosmología resulta regular para cierta elección de los parámetros de la teoría, reemplazando la singularidad inicial del Big Bang por una etapa inflacionaria.

La segunda teoría estudiada, a la cual hemos llamado ST, corresponde a la defor-

mación determinantal de la Relatividad General en $D > 2$ dimensiones. Utilizando el mismo método que en el caso anterior obtuvimos las ecuaciones de movimiento de esta teoría, lo cual es un aporte original y un punto de partida indispensable para estudiar la modificación de soluciones. Enunciamos y demostramos un conjunto de proposiciones que nos dan información sobre cómo reobtener los espacio-tiempos de la Relatividad General. Además, nos permiten entender en ciertas condiciones especiales qué tipo de modificación introducen los grados de libertad adicionales en forma de un tensor de energía impulso geométrico, asociado a la forma de la tétrada. Luego, utilizamos estos resultados y los aplicamos en el caso de soluciones con simetría esférica. Observamos que para distintas tétradas es posible obtener Schwarzschild, Schwarzschild de Sitter o Schwarzschild Anti-de Sitter. Finalmente, analizamos la cosmología, utilizando las ecuaciones completas de movimiento obtenidas. Vimos que en el caso de la cosmología plana la misma es regularizada de distintas maneras según la elección de los parámetros de la teoría. En un caso, se obtiene una etapa inflacionaria, mientras que en el otro se observa un rebote.

En investigaciones futuras, el objetivo principal de esta línea será el de encontrar nuevas soluciones con simetría esférica dentro de la teoría determinantal con la intención de hallar agujeros negros regulares.

Bibliografía

- [1] Fiorini, F. Non-singular promises from born-infeld gravity. *Phys.Rev.Lett.* 111 4, 041104 *arXiv:1306.4392 [gr-qc]*, 2013. [iv](#), [iv](#), [2](#), [3](#), [21](#), [59](#), [60](#)
- [2] Jackiw, R., Teitelboim, C. Quantum Theory of Gravity, essays in honour of the 60th birthday of B. DeWitt. 1984. [iv](#)
- [3] Hawking, S., Ellis, G. The large scale structure of spacetime. Cambridge University Press, 1973. [2](#)
- [4] Bañados, M., Teitelboim, C., Zanelli, J. The black hole in three dimensional spacetime. *Phys.Rev.Lett.* 69, *American Physical Society.*, 1992. [2](#), [23](#)
- [5] Brown, J. Lower dimensional gravity. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1988. [2](#), [24](#), [34](#), [62](#)
- [6] Gronwald, F., Hehl, F. On the gauge aspects of gravity. Proc. of the 14th Course of Cosmology and Gravitation, P.G Bergmann, V. de Sabatta and H.J. Treder eds,, 1996. [5](#), [11](#)
- [7] Geroch, R. Spinor structure of space-times in general relativity - part 1. *J.Math.Phys.*9/11 ,1739, 1970. [10](#)
- [8] Geroch, R. Spinor structure of space-times in general relativity - part 2. *J.Math.Phys.* 11 ,1739, 1970. [10](#)
- [9] Stiefel, E. Richtungsfelder und fernparallelismus in n-dimensionalen mannigfaltigkeiten. *Comm. Math. Helv.* 8, 1934. [10](#)
- [10] Maluf, J. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik* 525, 339, 2013. [11](#)
- [11] Cho, Y. Einstein lagrangian as the traslational yang-mills lagrangian. *Phys. Rev. D* 14, 2521, 1976. [11](#)
- [12] Will, C. M. Was einstein right? a centenary assesment. *arXiv:1409.7871 [gr-qc]*, 2014. [14](#)

-
- [13] Wallace, D. The quantization of gravity - an introduction. *arXiv:gr-qc/0004005v1*, 2000. [14](#)
- [14] Wald, R. General Relativity. The University of Chicago Press, 1984. [15](#)
- [15] Hawking, S., Penrose, R. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *The Royal Society Proceedings A*, 1970. [17](#)
- [16] Chiba, T. $1/r$ gravity and the scalar-tensor gravity. *Physical Letter*, *B575*, 2003. [18](#)
- [17] Hamity, B., Barraco, D. First order formalism of $f(r)$ gravity. *General Relativity Gravitation*, *25*, 1996. [18](#)
- [18] Fiorini, F., Ferraro, R. Modified teleparallel gravity:inflation without an inflaton. *Physical Review D**75,084031*, 2007. [18](#), [62](#)
- [19] Fiorini, F., Ferraro, R. On born-infeld gravity in weitzenböck spacetime. *Physical Review D**78,124019*, 2008. [18](#), [62](#)
- [20] Born, M., Infeld, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of The Royal Society*,*A144*, 1934. [18](#)
- [21] Born, M., Infeld, L. On the quantization of the new field equations i. *Proceedings of The Royal Society*, *A147*, 1934. [18](#)
- [22] Born, M., Infeld, L. On the quantization of the new field equations ii. *Proceedings of The Royal Society*, *A150*, 1935. [18](#)
- [23] Fradkin, E., Tseytlin, A. Non linear electrodynamics from quantized strings. *Phys. Lett. B**163*, 1985. [19](#)
- [24] Eisenhart, L. Riemannian Geometry. Princeton University Press, 1949. [23](#)
- [25] Fiorini, F., Ferraro, R. Born–infeld determinantal gravity and the taming of the conical singularity in 3-dimensional spacetime. *Physics Letters B*, *Volume 692*, *Issue 3*, 2010. [24](#), [50](#)
- [26] Nukayama, Y. Liouville field theory: A decade after the revolution. *Int. J. Mod. Phys A*,*19,2771*, 2004. [33](#)
- [27] Fiorini, F., Ferraro, R. A type of born-infeld regular gravity and its cosmological consequences. *Int.J.Mod.Phys. A**24*, 2009. [38](#)
- [28] Ferraro, R., Fiorini, F. Remnant group of local lorentz transformations in $f(t)$ theories. *Physical Review*, *D91, 064019*, 2015. [47](#)

- [29] Fiorini, F. Spherically symmetric static spacetimes in vacuum f (t) gravity. *Phys. Rev. D* 84, 083518 [*arXiv:1109.4209 [gr-qc]*]; 2011. [48](#), [51](#), [54](#)
- [30] Desser, J. R., S., 't Hooft, G. Three dimensional einstein gravity: dynamics of flat space. *Ann. Phys*, 152, 1984. [50](#)
- [31] Fiorini, F. Primordial brusque bounce in born-infeld determinantal gravity. *arXiv:1511.03227*, 2015. [60](#)

Agradecimientos

Tres semanas pasaron desde que terminé de escribir esta tesis y ahora, pasado el agotamiento, la veo con un poco más de cariño. Puedo ver que no es sólo un montón de horas volcadas en un papel, sino también un registro de toda la vida que transcurría en paralelo. Entiendo ahora que esta tesis estaría incompleta si no te cuento quiénes formaron parte de esa vida. Espero también, que estas palabras me sirvan un día para revivir todo lo que sentí.

La gente que contribuyó de una u otra manera a que hoy esté acá es innumerable y quisiera que el viento pudiera llevarle un ¡Gracias! a cada uno de ellos. Me acuerdo de Ana Cristina, mi maestra de segundo grado que me enseñó a disfrutar la matemática. También de Gustavo Gagna, que me transmitió la pasión por las ciencias naturales. De todos mis amigos del Mariano Acosta, con quienes estoy contento de haber crecido. Particularmente quiero agradecerle a Ale (¡Garza!), por ser el mejor amigo que me ha dado la vida, por estar, siempre. Por las risas, las penas, las canciones, las largas charlas sobre la nada misma, las noches de fernet y Rocanrol.

Agradezco a toda la gente de la UBA, en donde comencé a vivir esta locura de la física. A mi familia por haberme ayudado a despegar y llegar a Bariloche. Y a Miriam, por haberme acompañado tanto en cada paso.

Mi agradecimiento principal es para el Instituto Balseiro, para todos los que lo forman y contribuyeron a que sea posible. Haber hecho mi carrera acá es un sueño cumplido, invaluable. La oportunidad que me dio el Instituto la voy a llevar siempre dentro mío. Fue la base para mi crecimiento y deseo profundamente poder retribuirselo y ser parte de la gente que dará lo que haga falta para conseguir que este sueño llegue también a las próximas generaciones.

A toda la camada IB '12, es un orgullo haber formado parte de este hermoso grupo.

A mi director Franco Fiorini, por traerle nueva vida a la Relatividad en este lugar y por su infinita buena onda a lo largo de todo el trabajo.

A Nacho Fabre, cuya ayuda fue -literalmente- indispensable para poder escribir esta tesis.

Quiero terminar agradeciendo a mi segunda familia, a la que formamos acá, a los miembros de "La Casa". Sobre todo quiero resaltar algunas lindas cosas que aprendí de ellos. A Pali, por enseñarme lo que es siempre resistir y mostrarme que la dureza

en el espíritu y la ternura en el corazón son una hermosa combinación. Al Pampa, por demostrarme que no hay excusa (ni la fiaca, ni saber que es una lucha perdida) para no dar siempre lo mejor de uno, por si mismo y por los demás. A Luquitas, por ayudarme a ver que -incluso cuando todo parece gris- la vida tiene colores. A David, por su incondicional amistad y las enriquecedoras discusiones en las que aprendí muchísimo. A Nacho Nariz, con quien descubrí que la risa trasciende al enojo y la tristeza. Al Rodri, por estar siempre dispuesto a dar, sin esperar nada a cambio. Ojalá haya dejado en ustedes una partecita de lo que ustedes dejaron en mí. Sí, me puse cursi, qué ironía ¿no?