

TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS FISICAS

Compactificación con Flujos y Estabilización de Moduli

Damián Federico Abasto

Dr. Gerardo Aldazabal
Director

Lic. Damián Federico Abasto
Maestrando

Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica
Universidad Nacional de Cuyo
Diciembre de 2005

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
1. Introducción	1
2. Teoría de cuerdas en espacios no orientables	4
2.1. Espectro bosónico sobre la Botella de Klein	4
2.2. Espectro fermiónico	6
2.2.1. Análisis	7
2.3. Funciones de partición e invariancia modular	8
3. Teoría de Supergravedad	10
3.1. Introducción	10
3.2. Supergravedad en $D = 11$	12
3.3. Supergravedad en $D = 10$	12
4. Flujos en teorías tipo IIB y IIA	14
4.1. Estructura de Moduli del Toro	14
4.2. Introducción a la estabilización de los moduli con flujos	17
4.3. Condiciones de consistencia para la compactificación con flujos	18
4.4. Ecuaciones de tadpole	19
4.4.1. Planos Orientifolds	21
4.5. Flujos en teoría IIB	22
4.5.1. Flujos de RR en teoría tipo IIB, compactificado en un Calabi Yau.	23

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
4.5.2. Flujos en la teoría IIB, en la formulación de superpotencial.	25
4.6. Flujos en teoría tipo IIA	28
4.6.1. Flujos de NSNS en teoría tipo IIA, compactificada en un Calabi- Yau.	28
5. Flujos en teorías IIA con orientifolds	31
5.1. Moduli, flujos y superpotenciales.	31
5.2. Flujos geométricos	35
5.2.1. Modificación de la geometría del espacio, debido a los flujos de NSNS	36
5.3. Superpotencial para los flujos geométricos	37
6. Estabilización de moduli en $T^6/Z_2 \times Z_2$.	39
6.1. Descripción del modelo	39
6.2. Estabilización de los moduli.	44
7. Conclusiones y futuras líneas de investigación	49
A. Espacio de Moduli de variedades Calabi Yau	51

TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS FISICAS

Compactificación con Flujos y Estabilización de Moduli

Damián Federico Abasto

Dr. Gerardo Aldazabal
Director

Lic. Damián Federico Abasto
Maestrando

Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica
Universidad Nacional de Cuyo
Diciembre de 2005

*Porque fuiste una persona y un padre excelente. . .
Gracias por tu amor, por tu cariño, por enseñarme a vivir.
Gracias papá ! ! !*

- Has leído el libro que te di?
- Cuál, el que estaba 25 pesos?
- No... el de Erich Fromm, acerca del amor.
- Si... pero es el mismo no?
- Estás seguro? Hasta donde puedo ver, nuestro criterio es tan diferente, que prácticamente hablamos de cosas distintas, cuando en realidad se trata de la misma.

Resumen

Se ha estudiado la compactificación con flujos en el ámbito de teorías tipo IIA. Las distintas relaciones de consistencia que deben cumplir estos modelos fue analizada, junto con las posibles formas para los superpotenciales, los cuales dependen de los flujos y de los moduli que surgen en este contexto. Finalmente se aplicó el mecanismo de fijación de moduli, en términos de los superpotenciales, a un modelo Minkowski supersimétrico en el marco de branas intersecantes, con dos de los moduli fijados por los flujos.

Agradecimientos

A Gerardo, por toda la ayuda que me ha dado, y por la paciencia que siempre tuvo conmigo para explicarme.

A Andrea... por todo su amor, por apoyarme siempre, y por hacerme una persona tan feliz a su lado.

A mi familia, que a la distancia me ha brindado siempre mucha fuerza para seguir adelante.

A Pablo, Marta y Glauco, por todo el cariño que me han dado.

A Hernán y Ariana, por estar en las buenas y en las malas, siempre dispuestos a ayudar.

A mis compañeros de clase, por hacer de los momentos duros algo mas placentero, y de los momentos placenteros, algo inolvidable.

Capítulo 1

Introducción

Con sólo cambiar los constituyentes fundamentales de la materia, de puntos a objetos extendidos o cuerdas, se ha desarrollado una teoría que podría llegar a describir todas las interacciones fundamentales de la Naturaleza, en un mismo marco unificador. Se trata de la Teoría de Supercuerdas. La misma incluye tanto cuerdas abiertas como cerradas, y en este último sector, un campo de spin 2 sin masa, que posee el comportamiento del gravitón.

La teoría requiere de la supersimetría en la hoja de mundo para poder incluir a los fermiones. Es realmente sorprendente que pueda obtenerse fermiones espacio temporales, a partir de una acción para fermiones bidimensionales, en la hoja de mundo de la cuerda.

Otro ingrediente importante es el concepto de compactificación. La teoría predice el número de dimensiones espacio temporales y las fija en $9+1$. Tomando 6 de estas dimensiones espaciales como una variedad compacta de tamaño suficientemente pequeño, es posible que la misma sea indetectable, inclusive para los aceleradores actuales de partículas. Es de esperar que muchas de las propiedades de la teoría en cuatro dimensiones dependa fuertemente de la variedad donde se compactifique.

Una de las tareas mas ambiciosas es la de obtener tanto el espectro de partículas como el de las interacciones del Modelo Estándar, a partir de la Teoría de Supercuerdas. Esta área de investigación se conoce como Fenomenología de Cuerdas.

Se ha podido avanzar gran parte en esa dirección mediante el descubrimiento de las D-branas. Básicamente se tratan de objetos BPS extendidos, en cuyo volumen de mundo se encuentran los extremos de las cuerdas abiertas, mientras que las cuerdas cerradas pueden propagarse por todo el espacio. Se han podido construir modelos asombrosos, que contienen el espectro del Modelo Estándar junto con su grupo de gauge. Ejemplo de ello son teorías con branas intersecantes (donde nuestro espacio de $3+1$ dimensiones habita en el volumen de mundo de la intersección de las branas), y teorías con branas situadas en puntos singulares de orbifolds en el espacio interno.

Sin embargo, las dimensiones extras que aún quedan en este tipo de modelos deben ser compactificadas, y en el proceso, se crean campos escalares sin masa, llamados moduli. Estos se obtienen al realizar una reducción dimensional de teorías en diez dimensiones, similar al proceso de Kaluza Klein. Por ejemplo, para el caso de una p forma $C^{(p)}$ en diez dimensiones compactificada en un espacio interno CY_6 de 6 dimensiones, esta forma dará lugar a varios campos en cuatro dimensiones, dependiendo de cual sea la estructura del grupo de cohomología de la variedad interna. Estos campos surgen como coeficientes de la expansión de $C^{(p)}$ en $h_p(CY_6)$ formas armónicas de CY_6 .

Estos campos escalares de moduli controlan la geometría del espacio interno de la variedad. Al no tener masa, no existe un potencial que fije su valor, y la teoría en cuatro dimensiones es independiente de las deformaciones del espacio donde se compactifique. Por lo tanto, la teoría de Supercuerdas perturbativa no singulariza, en principio, la variedad correcta para describir el espacio de compactificación, de forma tal de obtener la física del Modelo Estándar.

Teniendo en cuenta esto último, junto con el hecho que no se hayan observado partículas escalares de masa nula, hace necesario encontrar un mecanismo que otorgue masas a estos campos, y desaparezcan del espectro a bajas energías.

El problema de encontrar potenciales escalares que fijen el valor de estos campos se conoce como estabilización de moduli. En los últimos años se han propuesto mecanismos capaces de cumplir con este proceso, y se conocen como compactificación con flujos. La idea básica consiste en otorgar nuevos grados de libertad a las derivadas exteriores de los campos en diez dimensiones, compatible con la invariancia de Poincaré en cuatro dimensiones. Así, en el contexto de teoría de cuerdas tipo IIA, se pueden agregar términos no triviales de flujo a los tensores de campo $H_3 = dB_2$, $F_2 = dC^{(1)}$, $F_4 = dC^{(3)}$, a lo largo de las dimensiones compactas. De esta forma es posible generar potenciales para estos flujos, y al realizar la reducción dimensional, los parámetros de moduli del espacio interno entrarán en juego, haciendo posible estabilizar su valor, mediante la minimización del potencial escalar obtenido.

Otro método equivalente consiste en plantear superpotenciales que dependan de los flujos y de los campos de moduli en cuatro dimensiones, a partir del cual se pueda obtener los potenciales escalares para los moduli.

Al existir un potencial escalar, el espacio de moduli deja de tener direcciones planas, habiendo valores preferidos para estos campos. Así, la física en cuatro dimensiones ya no queda invariante al tomar distintos puntos del espacio de moduli, debido a que estos han sido “levantados” por el potencial escalar.

Cabe remarcar que estos términos de flujo están presentes en la teoría de supercuerdas perturbativa a bajas energías, y no son objetos que se incluyan desde fuera de la teoría. Por lo tanto, este método de fijación de los moduli simplemente explota su existencia, al asignar términos no triviales de las formas integradas sobre ciclos de la variedad interna.

El objetivo de la presente tesis es mostrar este mecanismo en acción, aplicándolo a un modelo tipo MSSM en el contexto de branas intersecantes, en teorías IIA. A diferencia de las teorías IIB, la IIA presenta mayores posibilidades de estabilizar todos los tipos de moduli que aparecen en la teoría, en el contexto de compactificaciones toroidales.

La tesis se divide en cinco capítulos. En el capítulo 2 mostramos el tema que motivó inicialmente el trabajo de tesis, que fue la posibilidad de estudiar la compactificación de teorías de cuerdas en espacios no orientables. En ella se tomó como variedad no orientable la más sencilla, que es la botella de Klein. Sin embargo, se llegó a la conclusión que la teoría en este tipo de espacios es, por lo menos, incompleta, y en principio necesitaría de nuevos ingredientes para hacerla consistente.

En el capítulo 3 se realiza una breve introducción a la teoría de supergravedad. Todo el mecanismo de compactificación con flujos se realiza en el ámbito de teorías efectivas de Supercuerdas, constituida por teorías de supergravedad, en el límite de volúmenes grandes y valores para el dilatón mayores que uno¹, donde la aproximación de supergravedad es válida. Se desconoce cómo implementar la compactificación con flujos a nivel de la hoja de mundo de las cuerdas.

En el capítulo 4 daremos una descripción de los conceptos que nos serán de interés. En particular, se muestra cómo surgen los campos de moduli para el caso del toro, analizando el caso específico del campo de Kähler. Luego, se da una breve introducción a la metodología de compactificación con flujos, analizando algunas de las condiciones de consistencia de estos modelos. Finalmente se implementa la estabilización en teorías tipo IIB y tipo IIA.

En el capítulo 5 se describe el mecanismo de flujos para el caso de teorías IIA con orientifolds, incluyendo además los de tipo geométricos.

En el capítulo 6, se aplican todos los conceptos desarrollados anteriormente a un caso específico de branas intersecantes en teorías IIA, que dan como resultado un modelo MSSM en bajas energías. Nos centraremos en espacios tipo Minkowski M_4 supersimétricos, mostrando que es posible la estabilización de dos moduli, quedando expresados únicamente en término de los flujos².

Finalmente, en el apéndice se generaliza el concepto de espacios de moduli para las variedades de Calabi Yau.

¹En efecto, el acoplamiento está dado por e^{-S} , con S el dilatón, por lo que para acoplamientos pequeños, $S > 1$.

²En modelos analizados con anterioridad en la literatura, sólo era posible obtener relaciones lineales entre los moduli.

Capítulo 2

Teoría de cuerdas en espacios no orientables

El objetivo inicial del trabajo fue investigar la posibilidad de realizar compactificaciones de la teoría de cuerdas sobre espacios que no sean Calabi Yau, y en particular, espacios no orientables. El ejemplo mas sencillo es el de la botella de Klein, y fue la que se eligió para compactificar. Se obtuvo sobre dicha variedad la descripción de la teoría de cuerdas bosónica y fermiónica. Si bien el modelo resultante posee una función de partición bosónica que no cumple con la invariancia modular [1], es posible, en principio, agregar nuevos ingredientes de forma tal que la teoría quede consistente.

2.1. Espectro bosónico sobre la Botella de Klein

Vamos a estudiar el espectro de la cuerda cerrada bosónica de la teoría de supercuerdas, para lo cual nos centraremos en compactificar dos de las 9 dimensiones espaciales, X^9 y X^{10} .

La botella de Klein es un espacio de dimensión dos no orientable. Se puede obtener a partir del plano R^2 por la acción del grupo G generado por dos elementos:

$$\begin{aligned} K_1(X^9, X^{10}) &= (X^9, X^{10} + 2\pi R^{10}), \\ K_2(X^9, X^{10}) &= (X^9 + \pi R^9, -X^{10}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

De esta forma, K_1 y K_2 generan un rectángulo de lados πR^9 y $2\pi R^{10}$, como se muestra en la figura 2.1:

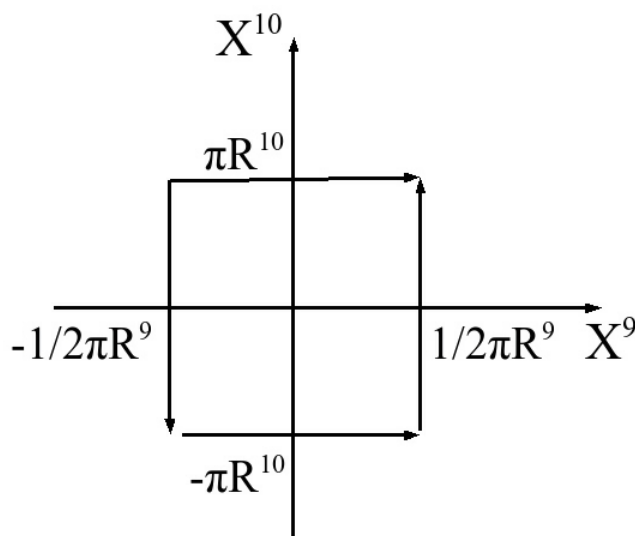


Figura 2.1: Botella de Klein. Por la acción del grupo 2.1, un par de lados opuestos quedan identificados con sentidos contrarios.

Los estados bosónicos podrán ser clasificados según el winding a lo largo de la dirección X^9 , de la siguiente forma:

1) Si el winding L^9 a lo largo de X^9 es par, los extremos de la cuerda bosónica estarán en puntos identificados por $(K_2)^2$. Pero, según 2.1, $(K_2)^2(X^9, X^{10}) = (X^9 + 2\pi R^9, X^{10})$, que define un toro de lados $2\pi R^9$ y $2\pi R^{10}$. En ese caso, desarrollando en osciladores X^9 y X^{10} tendremos las expresiones usuales para compactificación en un toro [4]:

$$X^9(\sigma, \tau) = x^9 + \frac{m^9}{R^9}\tau + L^9 R^9 \sigma + \frac{i}{2} \sum_{Z \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n^9 e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^9 e^{-2in(\tau+\sigma)}], \quad (2.2)$$

$$X^{10}(\sigma, \tau) = x^{10} + \frac{m^{10}}{R^{10}}\tau + 2L^{10} R^{10} \sigma + \frac{i}{2} \sum_{Z \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n^{10} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{10} e^{-2in(\tau+\sigma)}],$$

donde x^9 es la posición del centro de masas y R^9 el momento.

2) En cambio, si el winding a lo largo de la dirección X^9 es impar, la cuerda se cerrará únicamente si su centro de masas se encuentra en puntos fijos de la dirección X^{10} , dados por $X^{10} = 0$ y $X^{10} = \pi R^{10}$. Además, debido al signo menos que aparece por la acción de K_2 en 2.1, tendremos que X^{10} deberá cumplir con: $X^{10}(\sigma + \pi, \tau) =$

$-X^{10}(\sigma, \tau)$. La cuerda no desarrollará modos winding, y debido a que queda localizada en dichos puntos fijos del grupo G , el momento de su centro de masas será nulo.

El desarrollo en osciladores será en este caso¹:

$$X^9(\sigma, \tau) = x^9 + \frac{m^9}{R^9}\tau + L^9 R^9 \sigma + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_{Z \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n^9 e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^9 e^{-2in(\tau+\sigma)}], \quad (2.4)$$

$$X^{10}(\sigma, \tau) = (\pi \acute{o} 0) + \frac{i}{2} \sum_{Z+1/2} \frac{1}{n} [\alpha_n^{10} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{10} e^{-2in(\tau+\sigma)}].$$

2.2. Espectro fermiónico

Los osciladores fermiónicos estarán dados por $\psi^9(\sigma, \tau)$ y $\psi^{10}(\sigma, \tau)$. Para determinar la forma en la cual se comportan en la Botella de Klein, impondremos las condiciones de supersimetría sobre la hoja de mundo [3]:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\varepsilon} \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu &= -i \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Al igual que la sección anterior, es útil la separación del espectro según estados con winding par e impar.

1) Para el caso de winding par, los osciladores fermiónicos $\psi^9(\sigma, \tau)$ y $\psi^{10}(\sigma, \tau)$ no se modifican por la acción del grupo 2.1.

2) Para el caso de winding impar, la acción del grupo 2.1 sobre X^{10} deberá ser tenida en cuenta (X^9 queda inalterado). En efecto, para que el espectro siga siendo supersimétrico, las ecuaciones para X^{10} en 2.5 se modificarán como:

$$\begin{aligned} \delta_{Susy}(\delta_{Klein} X^{10}) &= \bar{\varepsilon} (\delta_{Klein} \psi^\mu), \\ \delta_{Susy}(\delta_{Klein} \psi^\mu) &= -i \rho^\alpha \partial_\alpha (\delta_{Klein} X^\mu) \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De la primer ecuación, obtenemos:

¹El comportamiento aquí es muy similar a de un orbifold Z_2 . Ver [6]

$$\delta_{Susy}(-X^{10}(\sigma, \tau)) = \bar{\varepsilon}(\delta_{Klein}\psi^{10}),$$

con lo cual

$$-\delta_{Susy}X^{10}(\sigma, \tau) = \bar{\varepsilon}(\delta_{Klein}\psi^{10}).$$

Según la segunda ecuación en 2.5, $\delta X^{10} = \bar{\varepsilon}\psi^{10}$, por lo que reemplazando:

$$-\bar{\varepsilon}\psi^{10} = \bar{\varepsilon}(\delta_{Klein}\psi^{10}).$$

Llegamos entonces a:

$$\delta_{Klein}\psi^{10} = -\psi^{10} \implies \psi^{10}(\sigma + \pi, \tau) = -\psi^{10}(\sigma, \tau). \quad (2.7)$$

2.2.1. Análisis

Recordemos el comportamiento de $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ en los sectores de Ramond y Neveu-Schwarz:

$$\begin{aligned} \psi^\mu(0, \tau) &= \psi^\mu(\pi, \tau) \longrightarrow \text{Ramond,} \\ \psi^\mu(0, \tau) &= -\psi^\mu(\pi, \tau) \longrightarrow \text{Neveu Schwarz.} \end{aligned}$$

Vemos por lo tanto que al aplicar la modificación 2.7 generada por la Botella de Klein, los sectores NS y R se intercambian:

$$R \longleftrightarrow NS.$$

En efecto, aquí la analogía con el orbifold Z_2 se hace presente nuevamente. De hecho, la acción de K_2 involucra un twist en el espectro fermiónico, tipo Z_2 . Así, los sectores de la cuerda cerrada NS-NS, NS-R, por un lado, y R-NS, R-R por otro, se pueden interpretar como sectores twisted y untwisted bajo el orbifold Z_2 .

Por lo tanto, el efecto del grupo 2.1, y en especial K_2 , es la de intercambiar sectores preexistentes en la cuerda fermiónica, dejando al espectro total invariante. La acción del grupo de la botella de Klein es por lo tanto trivial sobre la cuerda fermiónica.

2.3. Funciones de partición e invariancia modular

Daremos ahora las expresiones para las funciones de partición en el caso de la botella de Klein, para su espectro bosónico. Veremos que la función de partición total no es invariante modular, por lo que la teoría sobre la Botella de Klein es inconsistente.

Para ello, identifiquemos cuatro sectores del espectro bosónico, dependiendo si L^9 y m^9 son pares o impares. Las funciones de partición resultantes son:

1) L^9 y m^9 pares

$$Z_1 = \frac{|p|^{-1/3}}{8|\eta|^4} (|\theta_4|^2 + |\theta_3|^2) \left(|\theta_4|^2 + |\theta_3|^2 + |\theta_2|^2 + \frac{4|\eta|^3 |p|^{1/4}}{|\theta_2|} \right).$$

2) L^9 par, y m^9 impar

$$Z_2 = \frac{|p|^{-1/3}}{8|\eta|^4} |\theta_2|^2 (|\theta_4|^2 + |\theta_2|^2 + |\theta_3|^2 - 2|\theta_4| |\theta_3|).$$

3) L^9 impar, y m^9 par

$$Z_3 = \frac{|p|^{-1/12}}{2|\eta|} |\theta_2|^2 \left(\frac{1}{|\theta_4|} + \frac{1}{|\theta_3|} \right).$$

3) L^9 impar, y m^9 impar

$$Z_4 = \frac{|p|^{-1/12}}{2|\eta|} (|\theta_3|^2 - |\theta_4|^2) \left(\frac{1}{|\theta_4|} + \frac{1}{|\theta_3|} \right).$$

En todas estas expresiones, $p^2 = q = e^{i\tau\pi}$, y además las funciones teta θ_i están dadas por [1]:

$$\begin{aligned} -\theta_1 &= \vartheta_{11} = -iq^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{n-1}), \\ \theta_2 &= \vartheta_{10} = 2q^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^n)^2, \\ \theta_3 &= \vartheta_{00} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-1/2})^2, \\ \theta_4 &= \vartheta_{01} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1/2})^2, \end{aligned}$$

mientras que la función eta de Dedekin es:

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n),$$

donde $\tau = \pi R^9 + i2\pi R^{10}$.

La suma de las funciones de partición de cada sector da la función de partición total Z [7]:

$$Z = \frac{|p|^{-1/3}}{48 |\eta|^2} [-18(|\theta_2|^4 + |\theta_3|^4 + |\theta_4|^4) + 16(|\theta_2|^3 + |\theta_3|^3 + |\theta_4|^3)x \quad (2.8)$$

$$(|\theta_2| + |\theta_3| + |\theta_4|) + 9(|\theta_2|^2 + |\theta_3|^2 + |\theta_4|^2)^2$$

$$-(|\theta_2| + |\theta_3| + |\theta_4|)^4]. \quad (2.9)$$

Ante las transformaciones modulares $\tau \longrightarrow \tau + 1$ y $\tau \longrightarrow -1/\tau$, la función de partición total no queda invariante. Se puede ver que la causa de la falla es la presencia del factor $|p|^{-1/3}$ y de un factor τ que no se cancela y sale fuera del paréntesis que contiene todas las funciones teta. Sin embargo, el corchete por si solo queda inalterado. Esto último hace pensar que sería posible obtener todavía una función de partición invariante, compactificando las 4 dimensiones restantes de la variedad interna de dimensión espacial 6, en espacios cuya función de partición anule los términos adicionales $|p|^{-1/3}$ y τ . Sin embargo, esto es una hipótesis, que deberá ser estudiada en un futuro.

Capítulo 3

Teoría de Supergravedad

En este capítulo daremos una breve introducción a los temas de supergravedad que nos serán de interés mas adelante.

3.1. Introducción

La teoría de supercuerdas tiene como límite de bajas energías a la teoría de supergravedad [2]. Debido a que el método de estabilización de los moduli se aplica a este límite, veremos a continuación una breve introducción a la teoría de supergravedad¹.

El grupo de simetrías de la teoría de supergravedad es una extensión del grupo usual de Poincaré, donde se incluyen generadores fermiónicos de supersimetría (cuyas componentes se denominan supercargas), con parámetros de transformación locales. De esa forma, el álgebra de supergravedad incluye el grupo de Lorentz, los generadores de traslación, y los generadores de supersimetría. Además, esta superálgebra puede ser extendida para incluir generadores de gauge, cuyos parámetros son p formas. El requerimiento de supersimetría local lleva a la inclusión de la gravedad, ya que el álgebra incluye transformaciones generales de coordenadas, y es por ello que se la conoce como teoría de supergravedad.

Dado que los parámetros de las transformaciones de supergravedad son espinores, el número Q de supercargas deberá ser siempre un múltiplo entero N (que se identifica con el número de supersimetrías) del número de componentes q de la representación irreducible del álgebra de supergravedad:

$$Q = Nq. \tag{3.1}$$

¹Para referencias sobre supergravedad ver [5], [2].

El número de componentes q de la representación irreducible depende de la dimensión del espacio, y algunos casos son los que se muestran a continuación:

Dimensión	Tipo de espinor	Número de componentes q
$2 \bmod 8$	Majorana-Weyl	$2^{D/2-1}$
$3, 9 \bmod 8$	Majorana	$2^{(D-1)/2}$
$4, 8 \bmod 8$	Majorana	$2^{D/2}$
$5, 7 \bmod 8$	Dirac	$2^{(D+1)/2}$
$6 \bmod 8$	Weyl	$2^{D/2}$

Sin embargo, se puede establecer un límite al número de supersimetrías. Para teorías de supergravedad, el máximo está dado por 32 supercargas. Superálgebras con más generadores dan lugar a estados con helicidad mayor que 2. En efecto, dado un estado no masivo con helicidad λ , luego de aplicarle las supercargas Q , obtendremos un estado con helicidad $\lambda - Q/8$. Para que la helicidad sea mayor que -2, partiendo de $\lambda = 2$, entonces $2 - Q/8 \geq -2$, con lo cual $Q \leq 32$. Cuando se tiene exactamente 32 supercargas, tenemos lo que se conoce como teoría de supergravedad maximal.

Cuando uno combina la condición anterior sobre el número máximo de supercargas, con la dimensión del espinor irreducible en dimensión D , uno puede obtener los diferentes valores posibles para N .

Una conclusión interesante es que no existen teorías de supergravedad para dimensiones mayores que 11, ya que la dimensión mínima del espinor es por lo menos mayor que 64 (con lo cual, tendríamos estados de helicidad mayores que 2). Luego, el límite dimensional es para $D = 11$, donde sólo es posible la supergravedad maximal, con 32 supercargas.

En diez dimensiones uno puede tener $N = 1$ o $N = 2$ supersimetrías, que corresponden a 16 o 32 supercargas. Solo el primer caso no contiene necesariamente a la gravedad. El segundo contiene dos espinores de Majorana-Weyl, y permite la construcción de dos teorías distintas, según la quiralidad sea la misma u opuesta, dando origen a las teorías de supergravedad tipo IIA y tipo IIB, con supersimetrías (1,1) o (2,0) respectivamente (donde la notación indica el número de supersimetrías con quiralidad positiva y negativa, respectivamente).

Pasemos ahora a describir brevemente las teorías de supergravedad maximales en $D = 11$ y $D = 10$.

3.2. Supergravedad en $D = 11$

En once dimensiones uno tiene supersimetría maximal. Además, el álgebra permite incluir un grupo de gauge. Como es de esperarse de una supersimetría maximal, sólo permite un multiplete, que es el gravitatorio. En efecto, sus grados de libertad están dados por los multipletes de $SO(9)$ de la forma:

$$D = 11 : \quad (\mathbf{44} + \mathbf{84})_B + (\mathbf{128})_F. \quad (3.2)$$

Este multiplete está representado por los siguientes campos:

$$D = 11 : \quad \{g_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho}, \psi_\mu\}, \quad (3.3)$$

donde $g_{\mu\nu}$ representa el campo gravitatorio, $C_{\mu\nu\rho}$ es una 3 forma, potencial de gauge y ψ_μ es un fermión de Majorana, que representa al gravitino.

3.3. Supergravedad en $D = 10$

Tomando la supersimetría maximal en $D = 10$, uno tiene la posibilidad de elegir espinores de Majorana-Weyl de quiralidades opuestas, dando como resultado la teoría no quiral tipo IIA, o bien elegir los espinores de igual quiralidad, dando la teoría quiral tipo IIB.

Como se dijo anteriormente, la supersimetría maximal sólo contiene al multiplete de gravedad, cuyos grados de libertad son:

$$\begin{aligned} IIA : \quad & [\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c] \times [\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s] = [(\mathbf{35}_v + \mathbf{28} + \mathbf{1})_{NS-NS} + (\mathbf{56}_v + \mathbf{8}_v)_{R-R}]_B \quad (3.4) \\ & + [(\mathbf{56}_s + \mathbf{8}_s)_{NS-R} + (\mathbf{56}_c + \mathbf{8}_c)_{R-NS}]_F, \\ IIB : \quad & [\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c] \times [\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c] = [(\mathbf{35}_v + \mathbf{28} + \mathbf{1})_{NS-NS} + (\mathbf{35}_c + \mathbf{28} + \mathbf{1})_{R-R}]_B \\ & + [(\mathbf{56}_s + \mathbf{8}_s)_{NS-R} + (\mathbf{56}_s + \mathbf{8}_s)_{R-NS}]_F. \end{aligned}$$

Estas son representaciones del grupo $SO(8)$. Notar que este grupo contiene tres representaciones de dimensión 8: una bosónica, la vectorial $\mathbf{8}_v$, y dos fermiónicas, de quiralidades opuestas $\mathbf{8}_c$ y $\mathbf{8}_s$.

La representación en campos se muestra a continuación:

$$Tipo\ IIA : \quad \{g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, C_\mu^{(1)}, C_{\mu\nu\rho}^{(3)}, \dots, C_{\mu_1 \dots \mu_9}^{(9)}; \psi_\mu^{(+)}, \psi_\mu^{(-)}, \lambda^{(+)}, \lambda^{(-)}\}, \quad (3.5)$$

$$Tipo\ IIB : \quad \{g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, C^{(0)}, C_{\mu\nu}^{(2)}, \dots, C_{\mu_1 \dots \mu_{10}}^{(10)}; \psi_\mu^{(+)}, \tilde{\psi}_\mu^{(+)}, \lambda^{(+)}, \tilde{\lambda}^{(+)}\}. \quad (3.6)$$

El sector bosónico NS - NS (de Neveu-Schwarz), común a las dos teorías, contiene a la gravedad, una 2 forma $B_{\mu\nu}$ ², y al dilatón. Las partes bosónicas restantes que provienen de sector Ramond - Ramond, RR, contienen p formas, donde p es impar para la teoría tipo IIA y par para la IIB. Los campos fermiónicos surgen de los dos sectores de NS-R y R-NS, y son dos gravitones de Majorana-Weyl de quiralidades opuestas para tipo IIA ($\psi_{\mu}^{(+)}$ y $\psi_{\mu}^{(-)}$), y de la misma quiralidad para la tipo IIB ($\psi_{\mu}^{(+)}$ y $\tilde{\psi}_{\mu}^{(+)}$), junto con los dilatinos de Majorana Weyl (compañero supersimétrico del dilatón ϕ), $\lambda^{(+)}$ y $\lambda^{(-)}$ para la IIA, y $\lambda^{(+)}$, $\tilde{\lambda}^{(+)}$ para la IIB.

²En cohomología de variedades complejas, $B_{\mu\nu}$ es una (1,1) forma.

Capítulo 4

Flujos en teorías tipo IIB y IIA

En este capítulo describiremos cuáles son los moduli de la variedad en la cual compactificaremos la teoría de supercuerdas, como así también la forma en la cual se incluyen los flujos en las teorías tipo IIA y IIB.

4.1. Estructura de Moduli del Toro

El espacio de moduli de una variedad consiste básicamente en el conjunto de posibles valores de los parámetros que caracterizan dicha variedad. Por ejemplo, para el caso de S^1 , existe un único parámetro que caracteriza a este espacio, que es su radio. Debido a que el radio puede tomar valores positivos o ser cero, el espacio de moduli es $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Para el caso del toro, el espacio de moduli es más complicado. Se mostrará en esta sección cómo surge uno de sus moduli, estudiando el toro T^6 . Para ello, debido a que nos concentraremos más adelante en la teoría tipo IIA, veremos cuál es parte de su acción, cómo se modifica al pasar de $D=10$ a $D=4$, e identificaremos uno de los moduli. El conjunto completo de moduli se mostrará en la sección 5.1.

Parte de la acción de la teoría tipo IIA está dada por¹:

$$S_{10} = \int \left[e^{-2\hat{\phi}} \left(-\frac{1}{2} \hat{R} * \mathbf{1} + 2d\hat{\phi} \wedge *d\hat{\phi} - \frac{1}{4} \hat{H}_3 \wedge *\hat{H}_3 \right) \right], \quad (4.1)$$

donde el sombrero denota campos en $D = 10$, $\hat{\phi}$ es el dilatón, \hat{R} es el escalar de Ricci, y \hat{H}_3 es tensor de campo de la 2-forma \hat{B}_2 , $\hat{H}_3 = d\hat{B}_2$. $*$ denota el operador estrella de Hodge, el cual es un mapeo lineal $* : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{m-r}(M)$, con $\Omega^r(M)$ el espacio de

¹Aquí solo mostramos la parte de la acción que nos será de interés. La acción completa puede consultarse en[8]

las r formas sobre la variedad M , y con $m = \dim(M)$. Su expresión en un vector base de $\Omega^r(M)$ es:

$$*(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (4.2)$$

Pasemos ahora a compactificar esta acción en un toro seis dimensional T^6 factorizable, es decir que globalmente se puede escribir como: $T^6 = T^2_{(1)} \times T^2_{(2)} \times T^2_{(3)}$. En forma similar a la reducción tipo Kaluza-Klein, se puede expandir el campo \hat{B}_2 en una base ω_i de $H^{(1,1)}(T^2_{(i)})$ como²:

$$\hat{B}_2 = B_2 + b^i \omega_i. \quad (4.3)$$

Para el caso del campo \hat{R} , su descomposición a $D = 4$ requiere mas cuidado, ya que la métrica caracteriza al espacio que estamos considerando. En efecto, el toro pertenece a una clase amplia de espacios llamados Calabi-Yau [9]. Una de sus características es poseer un tensor de Ricci nulo, $R_{\mu\nu}(g) = 0$. Para identificar los estados de gravitón en la teoría efectiva en $D = 4$, uno debe considerar variaciones de la métrica alrededor de un valor de expectación $g^0_{\mu\nu}$, con $R_{\mu\nu}(g^0) = 0$. Estas variaciones $\delta g_{\mu\nu}$ no deben cambiar la condición del toro de ser Ricci plano, por lo que:

$$R_{\mu\nu}(g^0 + \delta g) = 0. \quad (4.4)$$

Esta condición, junto con que las variaciones de métrica tengan derivada covariante nula, $\nabla^\mu \delta g_{\mu\nu} = 0$, dan como resultado la ecuación de Lichnerowicz:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \delta g_{\rho\sigma} + 2R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.5)$$

Se puede demostrar [10] que las ecuaciones para las variaciones del tipo (2,0) $\delta g_{\alpha\beta}$ y para las (1,1) $\delta g_{\alpha\bar{\beta}}$ se desacoplan, con lo cual las soluciones pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= z^\alpha \Omega_{\alpha\gamma\delta} (\chi_\alpha)_\beta^{\gamma\delta}, \\ \delta g_{\alpha\bar{\beta}} &= v^i (\omega_i)_{\alpha\bar{\beta}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde Ω es la forma (3,0), única de las Calabi - Yau³, χ son formas armónicas (1,2) y ω_i son formas armónicas (1,1). Desde el punto de vista de espacio interno, z^α y v^i son parámetros en las expansiones anteriores, pero desde el punto de vista del espacio en cuatro dimensiones, estos parámetros aparecen como campos escalares.

² $h^{(1,1)} = 1$ para el toro, por lo que el índice i numera las (1,1) formas en cada toro T^2 de $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$

³Ver el apéndice.

z^α , v^i y b^i se conocen con el nombre de moduli, y tienen como característica principal carecer de un potencial que fije su valor. Para el caso de las variaciones de la métrica, esto se traduce a que Teoría de Cuerdas, o Supergravedad, no tiene, en principio, un mecanismo dinámico que determine la variedad sobre la cual compactificar. Esto significa que para la teoría en diez dimensiones, todos los toros son iguales, e ir de uno a otro “infinitesimalmente” cerca en el espacio de moduli no cuesta energía. Por lo tanto, todos los campos que aparecen de las deformaciones de la variedad toroidal son direcciones planas del potencial y parametrizan la degeneración de vacío. Sin embargo, como veremos mas adelante (sección 4.5) los términos de flujo, propios de la teoría de supergravedad, dan lugar a un superpotencial capaz de fijar el valor de los moduli.

Reemplacemos ahora las expresiones 4.3 y 4.5 en la acción 4.1, e integremos sobre T^6 . Para ello, hay que recordar que $h^{(1,1)}(T^2) = 1$, y en particular podemos tomar $\omega_i = dz^i \wedge d\bar{z}^i$, con $z^i = x^{2i} + ix^{2i+1}$, las coordenadas del toro $T_{(i)}^2$, con lo cual, por ejemplo:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{4V} \int_{T^6} \omega_i \wedge *\omega_j, \quad (4.7)$$

con V el volumen de T^6 . Teniendo en cuenta esto, obtenemos que el término cinético para el campo \hat{B}_2 será:

$$-\frac{1}{4} \int_{T^6} \hat{H}_3 \wedge *\hat{H}_3 = -\frac{V}{4} dB_2 \wedge *dB_2 - V \delta_{ij} db^i \wedge *db^j. \quad (4.8)$$

Para la parte que depende del escalar de Ricci, se puede demostrar [11] que su expansión es de la forma⁴:

$$\int_{T^6} -\hat{R} * \mathbf{1} \sim R * \mathbf{1} - \delta_{ij} dv^i \wedge *dv^j. \quad (4.9)$$

Colocando estas dos expresiones en la acción original 4.1, obtenemos:

$$S_4 = \int \left[-\frac{1}{2} R * \mathbf{1} - \delta_{ij} dt^i \wedge *dt^j - \frac{V}{4} dB_2 \wedge *dB_2 \right], \quad (4.10)$$

donde hemos definido unos nuevos campos complejos t^i , dados por:

$$t^i = b^i + iv^i. \quad (4.11)$$

Estos campos escalares complejos se conocen como moduli de Kähler, y básicamente parametrizan el espacio de todas las posibles métricas de una variedad de Kähler [10].

⁴Se debe tener en cuenta una transformación tipo Weyl en cuatro dimensiones para incluir el factor de volumen. Sin embargo, aquí solamente nos interesará mostrar los tipos de términos cinéticos que aparecen de la acción de Einstein.

Vemos por lo tanto que en la teoría efectiva a bajas energías, nos ha aparecido la dependencia de la geometría de nuestro espacio como campos complejos en $D = 4$, para los cuales no hay asociado en principio ningún potencial.

4.2. Introducción a la estabilización de los moduli con flujos

Daremos a continuación una introducción a estabilización de los moduli mediante flujos.

Como mencionamos anteriormente, los moduli son campos que aparecen a bajas energías y para los cuales no se posee un mecanismo dinámico que fije su valor.

Uno de los aspectos más interesantes de los flujos consiste en la posibilidad de fijar los moduli geométricos, que son los que describen características del espacio como ser su “tamaño” y su estructura compleja.

Como veremos más adelante, es posible encontrar superpotenciales que involucren integrales no nulas de formas de RR y de NSNS a lo largo de ciclos de la variedad. Debido a que este potencial dependerá de la geometría de la variedad, los puntos en el espacio de moduli ya no serán todos equivalentes, y la geometría será deformada de manera tal de minimizar dicho potencial, fijando los valores de los moduli.

Por ejemplo, consideremos el caso de un toro $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$, y de un 3-ciclo factorizable de $H_3(T^6, \mathbb{Z})$, de la forma $\Pi_3(T^6) = \Pi_1(T^2) \times \Pi_1(T^2) \times \Pi_1(T^2)$, es decir, formado por productos de tres 1-ciclos en cada uno de los toros. En principio, la forma de cada uno de estos ciclos no está fijada, y por ende, la teoría de cuerdas en T^6 es indiferente a ella. Tomemos ahora componentes no nulas de F_3 y H_3 a lo largo de cada 1-ciclo, y consideremos las integrales $\int_{\Pi_3(T^6)} F_3 = f \neq 0$, $\int_{\Pi_3(T^6)} H_3 = h \neq 0$. Este tipo de integrales de las formas sobre ciclos dan lo que se conoce como los flujos f y h . Como veremos en la próxima sección, los valores posibles de f y h son enteros, y por ende no pueden variar en forma continua. Los flujos serán no nulos sólo a lo largo de las direcciones internas de la variedad donde uno compactifica, para no violar la simetría de Poincaré en $D=4$.

Si el potencial depende de los flujos, en ese caso las deformaciones de los ciclos implicarán un cambio en la energía, y ya no habrán direcciones planas en el espacio de moduli. De hecho, la variedad tenderá a estar en un punto del espacio de moduli tal que minimice este potencial. La dependencia de la geometría de la variedad viene dada por la integral a lo largo de los ciclos. Así, eligiendo un conjunto adecuado de flujos que minimice el potencial, se podrán fijar los moduli.

4.3. Condiciones de consistencia para la compactificación con flujos

Existen un conjunto de condiciones para los flujos de formas de RR y NSNS que se deben cumplir. Estas condiciones valen tanto para teorías tipo IIB y como en IIA. En las siguientes secciones nos dedicaremos en particular a cada una de ellas. Este conjunto de condiciones fue estudiado en [12]. Tomaremos el caso de formas RR F_3 y NSNS H_3 .

1) Debido a que F_3 y H_3 son formas exactas ($H_3 = dB_2$ y $F_3 = dC_2$), deberán cumplir con la condición de Bianchi:

$$dH_3 = 0, \quad dF_3 = 0. \quad (4.12)$$

2) La inclusión de flujos contribuye a las ecuaciones de tadpole, que serán analizadas en la siguiente sección.

3) Se puede establecer una condición de cuantización para una forma, en forma análoga a cómo se realiza para el caso de una partícula cargada en presencia de un monopolo de Dirac [1]. De hecho, para una F_3 y H_3 tendremos que las condiciones de cuantización son:

$$\frac{1}{(2\pi)^2\alpha'} \int_{\Pi} H_3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{(2\pi)^2\alpha'} \int_{\Pi} F_3 \in \mathbb{Z}, \quad (4.13)$$

para Π un ciclo cualquiera de $H_3(T^6, \mathbb{Z})$.

Sin embargo, estas condiciones se ven modificadas al estudiar orbifolds. En efecto, en espacios cociente con algún grupo, como ser $T^6/Z_2 \times Z_2$, existirán algunos ciclos abiertos en T^6 , pero sin embargo que pueden ser cerrados bajo la acción del orbifold (por ejemplo, si los extremos del ciclo terminan en puntos identificados por el orbifold). Por lo tanto, al imponer las condiciones de cuantización, debemos asegurarnos que las integrales a lo largo de estos nuevos ciclos estén bien definidas.

Tomemos el caso del orientifold ΩR de $T^6 = (T^2)^3$. Consideremos la acción de ΩR , con $R : y_m \rightarrow -y_m$, donde y_m representa todas las coordenadas internas de T^6 . En ese caso, existirán nuevos ciclos cerrados bajo la acción del orientifold. Ejemplo de ello son los ciclos⁵ $0 \leq y_5 \leq 1$ y $0 \leq y_6 \leq 1/2$, para y_5 e y_6 coordenadas del tercer toro en T^6 . Vemos que este toro tiene un volumen que es 1/2 el del ciclo original. En general, los ciclos tienen un volumen que es $V/|P|$, donde $|P|$ es el orden del orientifold.

Para el caso que nos interesará, el orientifold $T^6/Z_2 \times Z_2 \times \Omega R$, habrán ciclos de volumen mínimo, que serán 1/8 de los de T^6 . En efecto, habrá un factor 1/2 proveniente del orientifold ΩR , junto con dos factores 1/2 adicionales del orbifold $Z_2 \times Z_2$. En ese caso,

⁵Los valores $y=0$, $y=1/2$ son los puntos fijos de R .

para asegurar que los flujos estén cuantizados correctamente, sus integrales en 3-ciclos factorizables $\Pi_3(T^6) = \Pi_1(T^2) \times \Pi_1(T^2) \times \Pi_1(T^2)$, deberán ser multiples de 8:

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{\Pi} H_3 \in 8\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{\Pi} F_3 \in 8\mathbb{Z}. \quad (4.14)$$

4.4. Ecuaciones de tadpole

Consideremos el caso de un objeto cargado ante un campo, como ser un electrón y el campo eléctrico, dentro de un espacio compacto. En ese caso, las líneas de carga no pueden escapar al infinito, y la ley de Gauss impone que la suma total de las carga se anule.

Las branas son objetos cargados ante formas de RR [14]. Una p brana D_p (que tiene volmuen de mundo $p+1$ dimensional) se acopla a una $p+1$ forma F_{p+1} . En ese caso, una D_p -brana será una fuente en las ecuaciones de movimiento de dicho campo:

$$dH_{p+2} = *J_{7-p}^e, \quad d * H_{p+2} = *J_{p+1}^m, \quad (4.15)$$

donde $H_{p+2} = dA_{p+1}$ es el tensor de campo de la $p+1$ forma A_{p+1} , y $*$ es el operador estrella de Hodge, que, como se mencionó anteriormente, en un espacio métrico de dimensión D , relaciona al espacio de las p formas $\Omega^p(T^6)$ con el de las $D - p$ formas $\Omega^{D-p}(T^6)$. J^e y J^m representan a las cargas eléctricas y magénticas de la RR forma, respectivamente. En ese caso, las ecuaciones de movimiento establecen la condición:

$$\int_{\Gamma_k} *J_{10-k} = 0, \quad (4.16)$$

donde Γ_k es cualquier subvariedad del espacio T^6 de dimensión k .

Consideremos ahora el caso de una compactificación toroidal. El caso en el cual estaremos interesados será $M_4 \times T^6$, con T^6 el espacio compacto. En este esquema consideremos un conjunto K de N_a D6 branas coincidentes, con $a = 1, \dots, K$, cada una con un volumen de mundo de la forma $M_4 \times \Pi_a(T^6)$. A las D6 branas se acomplanarán formas A_7 de RR. En ese caso, los términos de la acción a bajas energías que dependerá de dicha forma serán

$$\begin{aligned} S_{A_7} &= \int_{M_4 \times T^6} H_8 \wedge *H_8 + \sum_a N_a \int_{M_4 \times \Pi_a} A_7 \\ &= \int_{M_4 \times T^6} A_7 \wedge dH_2 + \sum_a N_a \int_{M_4 \times T^6} A_7 \wedge \delta_{\Pi_a}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde H_8 es el tensor de campo de A_7 , H_2 es su dual de Hodge y δ_{Π_a} es el dual de Poincaré de Π_a en T^6 . En el último paso, hemos realizado una integración por partes para poder expresar todo en términos de A_7 , y el dual de Poincaré nos permite expresar las dos integrales sobre todo el espacio.

En ese caso, las ecuaciones de movimiento para A_7 serán:

$$dH_2 = \sum_a N_a \delta_{\Pi_a}. \quad (4.18)$$

Por lo tanto, utilizando esta expresión, la condición 4.16 se puede expresar como una en homología, de la forma:

$$\sum_a N_a \Pi_a = 0, \quad (4.19)$$

con $\Pi_a \in H_3(T^6, \mathbb{Z})$. Vemos que las cargas de RR están especificadas por los ciclos Π_a , con lo cual un número N_a de branas tendrá una carga total $N_a \Pi_a$. La ecuación 4.19 nos dice que la carga total de los K conjuntos de N_a branas debe anularse, como habíamos dicho al comienzo, por encontrarse “enrolladas” en ciclos de una variedad compacta.

Recordemos que estos ciclos Π_a son factorizables, y pertenecen a un toro T^6 de la forma $T^6 = T_{(1)}^2 \times T_{(2)}^2 \times T_{(3)}^2$. En ese caso, el ciclo Π_a será:

$$\Pi_a = (n_a^{(1)}[a_1] + m_a^{(1)}[b_1]) \otimes (n_a^{(2)}[a_2] + m_a^{(2)}[b_2]) \otimes (n_a^{(3)}[a_3] + m_a^{(3)}[b_3]), \quad (4.20)$$

donde $[a_i], [b_i]$ son 1 ciclos base del grupo de homología $H_1(T_{(i)}^2, \mathbb{Z})$. $n_a^{(i)}$ y $m_a^{(i)}$ se los interpreta como en número de veces que una brana se enrolla a lo largo de los ciclos $[a_{(i)}]$ y $[b_{(i)}]$. Para el caso de un toro T^2 , con $[a] = (1, 0)$ y $[b] = (0, 1)$, una D6-brana con una coordenada a lo largo de él se muestra en la figura 4.1, que corresponde a $n = 2$ y $m = 3$.

Usando este desarrollo para Π_a junto con la condición 4.19, se llega al siguiente conjunto de condiciones, llamado ecuaciones de tadpole:

$$\begin{aligned} \sum_a N_a n_a^{(1)} n_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 0, & \sum_a N_a n_a^{(1)} n_a^{(2)} m_a^{(3)} &= 0, \\ \sum_a N_a n_a^{(1)} m_a^{(2)} m_a^{(3)} &= 0, & \sum_a N_a m_a^{(1)} m_a^{(2)} m_a^{(3)} &= 0, \\ \sum_a N_a n_a^{(1)} m_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 0, & \sum_a N_a m_a^{(1)} n_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 0, \\ \sum_a N_a m_a^{(1)} n_a^{(2)} m_a^{(3)} &= 0, & \sum_a N_a m_a^{(1)} m_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

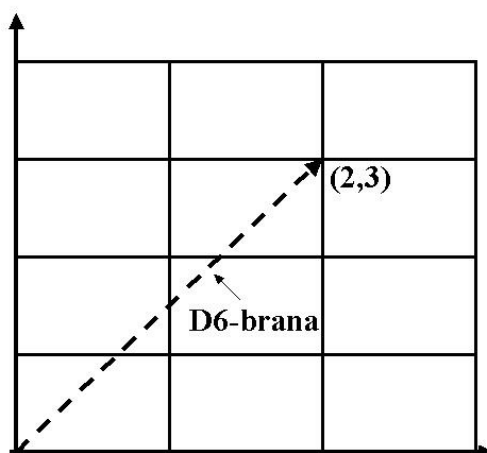


Figura 4.1: D6-brana con una dimensión a lo largo del toro T^2 . El número de veces que se enrolla a lo largo del ciclo [a] es 2, mientras que a lo largo de [b] es de 3.

4.4.1. Planos Orientifolds

La inclusión de planos orientifolds O_p de dimensión p originarán términos adicionales a las ecuaciones de tadpole, con signos opuestos al de las branas. Estos planos se ubican sobre puntos fijos de la acción de un orbifold o de un orientifold, y en general estarán cargados bajo las formas de RR. El hecho que tengan contribuciones opuestas al de las branas es un factor importante a la hora de construir modelos similares al Modelo Estándar, ya que la situación de mínima energía con una configuración que posea únicamente branas es que el número de ellas sea cero.

Consideremos el caso de la teoría tipo IIB, con 3D-branas en $T^6/Z_2 \times Z_2$, sujetas a la acción del orientifold $R\Omega$. Si llamamos Z^i , $i = 1, 2, 3$ a las coordenadas complejas del toro $T^2_{(i)}$ en T^6 , con $Z^{(i)} = X^{2i} + iX^{2i+1}$, $i = 1, 2, 3$, entonces tomaremos a la acción de R sobre estas coordenadas internas como:

$$R : Z^{(i)} \longleftrightarrow -Z^{(i)}, i = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Es ese caso, al realizar esta identificación del orientifold, se producirán 64 O_3 planos. En efecto, serán de dimensión 3, ya que la transformación $Z^{(i)} \longleftrightarrow -Z^{(i)}$ para cada

i genera un O_7 , por lo que tomando sucesivamente las transformaciones en $i = 1, 2, 3$, pasaremos a $O_7 \rightarrow O_5 \rightarrow O_3$. Serán además 64, ya que es la combinación de los cuatro puntos fijos generados en un toro, con cada uno de los tres T^2 , da $4^3 = 64$.

La presencia de estos planos orientifolds implica que las D3 branas deben quedar invariantes ante su acción. Por ende, para cada conjunto K de N_a D3 branas, $a=1, \dots, K$, caracterizada por números $(n_a^{(i)}, m_a^{(i)})^6$ de Π_a , se deben incluir sus imágenes ante la acción de $R\Omega$, dando N_a D3 branas con números $(n_a^{(i)}, -m_a^{(i)})$, que identificaremos como Π_{a^*} . En ese caso, debido a que la carga relativa de las D3 branas con los O3 planos es de $-1/2$ [2], al imponer que la carga total de las branas y los planos orientifolds sea 0, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum_a N_a (\Pi_a + \Pi_{a^*}) - \frac{1}{2} 64 \Pi_{O3} &= 0, \\ \sum_a N_a (\Pi_a + \Pi_{a^*}) - 32 \Pi_{O3} &= 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

con Π_{O3} el 3 ciclo de homología donde se enrolla el $O3$. De esa forma, imponiendo la cancelación de los coeficientes correspondientes a las mismas clases independientes de homología, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum_a N_a n_a^{(1)} n_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 16, \\ \sum_a N_a m_a^{(1)} m_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 0, \text{ y permutaciones de } 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Vemos que en estas expresiones sólo quedan productos que contienen un número par de m 's. Los términos con un número impar se anulan idénticamente al considerar las branas y sus imágenes ante los planos orientifolds.

4.5. Flujos en teoría IIB

En teorías tipo II, se han encontrado dos formas equivalentes de generar un superpotencial que dependa de los moduli. Una consiste en partir de teorías de supergravedad

⁶En realidad, en el contexto de teorías IIB, los números $(n_a^{(i)}, m_a^{(i)})$ adquieren otro significado, a saber: $m_a^{(i)}$ es el número de veces que las D3 branas se enrollan a lo largo del toro $T_{(i)}^2$, mientras que $n_a^{(i)}$ es la unidad de flujo magnético de la brana, con la relación $\frac{m_a^{(i)}}{2\pi} \int_{T_{(i)}^2} F_a^{(i)} = n_a^i$, con $F_a^{(i)}$ el tensor de campo electromagnético $F = dA$. Este modelo es T dual a teorías tipo IIA con D6 branas, donde $(n_a^{(i)}, m_a^{(i)})$ pasan a ser los números de enrollamiento de estas D6 branas a lo largo de 1 ciclos no triviales de T^2 .

en 10 dimensiones, con flujos no triviales para formas de NSNS y RR, y compactificar luego en un Calabi Yau, obteniendo así un potencial escalar en 4 dimensiones.

Otra forma es tomar la teoría de supergravedad en 4 dimensiones, y obtener el potencial escalar a partir de un superpotencial propuesto. Esta última será el método que utilizaremos mas tarde para hallar modelos fenomenológicos en teorías tipo IIA.

Sin embargo, mostraremos cómo pueden obtenerse potenciales por reducción dimensional en Calabi Yau, primero para el caso de teorías tipo IIB con flujos de RR, y luego para la teoría tipo IIA con flujos de NSNS, en la sección 4.6.1.

4.5.1. Flujos de RR en teoría tipo IIB, compactificado en un Calabi Yau.

Consideremos la acción bosónica de la teoría IIB en $D = 10$, dada por:

$$\begin{aligned}
 S_{IIB} = \int e^{-2\hat{\phi}} & \left(-\frac{1}{2} \hat{R} * \mathbf{1} + 2d\hat{\phi} \wedge *d\hat{\phi} - \frac{1}{4} \hat{H}_3 \wedge * \hat{H}_3 \right) \\
 & - \frac{1}{2} \left(d\hat{C}^{(0)} \wedge *d\hat{C}^{(0)} + \hat{F}_3 \wedge * \hat{F}_3 + \frac{1}{2} \hat{F}_5 \wedge * \hat{F}_5 \right) \\
 & - \frac{1}{2} \hat{C}^{(4)} \wedge \hat{H}_3 \wedge \hat{F}_3,
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde nuevamente el sombrero es para indicar cantidades en 10 dimensiones, y donde los tensores de campo \hat{F}_5 , \hat{F}_3 y \hat{H}_3 están dados por:

$$\hat{H}_3 = d\hat{B}_2, \quad \hat{F}_3 = d\hat{C}^{(2)} - \hat{C}^{(0)} d\hat{B}_2, \tag{4.26}$$

$$\hat{F}_5 = d\hat{C}^{(4)} - \frac{1}{2} \hat{C}^{(2)} \wedge d\hat{B}_2 + \frac{1}{2} \hat{B}_2 \wedge d\hat{C}^{(2)}, \tag{4.27}$$

con el espectro mostrado en 3.5.

Para obtener el espectro en una variedad de Calabi Yau, utilizaremos una reducción tipo KK, tomando las fluctuaciones de los campos alrededor de su valor de expectación, y derivando la dinámica de estas fluctuaciones. Como estamos interesados en la teoría a bajas energías, se trunca el espectro de KK, dejando fuera los estados que adquieren masa. Esto se obtiene realizando una expansión de los campos en 10 dimensiones, considerando sólo aquellos no masivos, mediante el desarrollo de dichos campos en formas armónicas de la variedad donde uno compactifica. De esta manera, los campos no masivos estarán completamente determinados por la topología de la variedad interna. Este resultado es básicamente lo que se había obtenido en la sección 4.1 para el caso del toro, donde se vió que los campos t^i tenían componentes v^i a lo largo de las formas armónicas ω_i .

Realicemos entonces la compactificación sobre un Calabi Yau de dimensión compleja 3, CY_3 , con lo cual expandiremos los campos \hat{B}_2 , $\hat{C}^{(2)}$ y $\hat{C}^{(4)}$ en formas armónicas, como:

$$\hat{B}_2 = B_2 + b^i \omega_i, \quad \hat{C}^{(2)} = C^{(2)} + c^i \omega_i, \quad (4.28)$$

$$\hat{C}^{(4)} = D_2^i \wedge \omega_i + V^A \alpha_A - U_B \beta^B + \rho_i \tilde{\omega}^i, \quad (4.29)$$

donde ω_i denota la base de $(1, 1)$ formas armónicas de CY_3 , con $i = 1, \dots, h^{(1,1)}$; $\tilde{\omega}^i$ es su

base dual de $(2,2)$ formas y (α_A, β^B) representa una base de formas armónicas real para $H^3(CY_3)$, con $A, B = 0, \dots, h^{(2,1)}$. D_2^i es una dos forma, mientras que c^i, U_B, V^A, b^i y ρ_i serán escalares en 4 dimensiones. Este tipo de compactificaciones da como resultado un espectro de partículas con $N=2$, en cuatro dimensiones [2].

En este esquema, podemos colocar flujos de RR en la forma $\hat{C}^{(2)}$, agregando términos proporcionales a las formas armónicas en su tensor de campo, haciendo:

$$d\hat{C}^{(2)} \longrightarrow d\hat{C}^{(2)} + m^A \alpha_A - e_A \beta^A, \quad (4.30)$$

donde m^A y e_A son las constantes de flujo.

En ese caso, redefiniremos parte de la acción, de forma tal que el tensor de campo $d\hat{C}^{(2)}$, y no su forma asociada $\hat{C}^{(2)}$, sea el que que aparezca en la acción. Sólo si esto es posible el procedimiento estará bien definido, ya que las formas armónicas son cerradas, pero no exactas. En efecto, con esta modificación, de la ecuación 4.28 tendríamos $d\hat{C}^{(2)} \longrightarrow d\hat{C}^{(2)} + m^A \alpha_A - e_A \beta^A \longrightarrow dC^{(2)} + dc^i \omega_i + m^A \alpha_A - e_A \beta^A$, pero en caso que en la acción apareciera también la forma asociada $\hat{C}^{(2)}$, esto implicaría que dicha expansión sea la derivada exterior de $\hat{C}^{(2)}$, lo cual llevaría a que las formas armónicas ω_i, α_A y β^A son exactas. Teniendo esto en cuenta y expresando todo en términos de $d\hat{C}^{(2)}$, podemos considerar a los tensores de campo, y no a sus formas asociadas, como los campos “fundamentales”.

Vemos que este campo $\hat{C}^{(2)}$ sólo aparece en la acción 4.25 mediante su tensor de campo $d\hat{C}^{(2)}$, mientras que en \hat{F}_3 y en \hat{F}_5 será necesario realizar una integración por

partes para que ello ocurra. De esta forma, ambos se modificarán, y por ejemplo, \hat{F}_3 pasará a ser de la forma [15]:

$$\hat{F}_3 = dC^{(2)} - C^{(0)} H_3 + (dc^i - C^{(0)} db^i) \omega_i + m^A \alpha_A - e_A \beta^A. \quad (4.31)$$

Al reemplazar esto en la acción 4.25, el término cinético para \hat{F}_3 ⁷ dará como resultado un potencial escalar de los moduli, que puede ser expresado como:

$$V \propto \int_{M_4 \times CY_3} \hat{F}_3 \wedge * \overline{\hat{F}_3}, \quad (4.32)$$

donde $\overline{\hat{F}_3}$ indica conjugación. La dependencia del potencial en los moduli proviene de realizar la integración de las formas ω_i , α_A y β^A en el espacio interno CY_3 .

4.5.2. Flujos en la teoría IIB, en la formulación de superpotencial.

El método de compactificación con flujos en teoría IIB ha sido objeto de gran estudio (ver [17], [18], [16]). Lo que haremos será mostrar cómo puede obtenerse un potencial escalar análogo a 4.32, pero a partir de un superpotencial de una determinada forma.

Para ello, consideremos la teoría tipo IIB dentro de un Calabi Yau CY_3 , con flujos para los tensores de campo de NSNS H_3 y para el tensor de campo de RR, F_3 . Habrán condiciones de consistencia que deberán cumplirse, parte de los cuales ha sido ya analizado en el capítulo 4.3.

Además de estas condiciones, debemos considerar dos más.

1) Las configuraciones con flujos de H_3 y F_3 requerirán de la existencia de planos orientifold O3. Esto puede verse del término $\int_{M_4 \times CY_3} \hat{C}^{(4)} \wedge \hat{H}_3 \wedge \hat{F}_3$ en 4.25. Una vez que compactifiquemos 4D, los flujos presentes en \hat{H}_3 y \hat{F}_3 se combinarán para contribuir a una ecuación de tadpole para $\hat{C}^{(4)}$, con un coeficiente positivo N_{flujo} , en unidades de carga de las D3 branas. La única forma de cancelar estos tadpoles es mediante la inclusión de O3 planos, que poseen una carga opuesta a las D3 branas. Por lo tanto, esta condición impone que estudiemos teorías tipo IIB con orientifolds.

El caso general incluirá D3 branas, junto con O3 planos y flujos. Para un número N_{D3} de D3 branas y N_{O3} planos orientifolds, tendremos que los términos de la acción de supergravedad en 10 dimensiones que contiene a la forma $\hat{C}^{(4)}$ serán:

$$\begin{aligned} S_{\hat{C}^{(4)}} = & \frac{1}{2} \int_{M_4 \times CY_3} \hat{F}_5 \wedge * \hat{F}_5 + \int_{M_4 \times CY_3} \hat{C}^{(4)} \wedge \hat{H}_3 \wedge \hat{F}_3 \\ & + Q_{D3} \sum_{i=1}^{N_{D3}} \int_{D3_i} \hat{C}^{(4)} + Q_{O3} \sum_{i=1}^{N_{O3}} \int_{O3_i} \hat{C}^{(4)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

⁷Sin considerar el que proviene de \hat{F}_5

donde Q_{D3} y Q_{O3} se refieren a la carga de una D3 brana y de un O3 plano. En forma análoga a como se procedió en la sección 4.4, podemos expresar esa acción en todo el espacio 10D, mediante la dualidad de Poincaré, dando como ecuación de movimiento para $\hat{C}^{(4)}$ [18]:

$$d\hat{F}_5 = \hat{H}_3 \wedge \hat{F}_3 + N_{O3}\delta_{\text{II}D3} + Q_{O3}\delta_{\text{II}O3}, \quad (4.34)$$

con $\delta_{\text{II}O3}$ y $\delta_{\text{II}D3}$ formas duales de Poincaré de los ciclos a lo largo de los cuales se enrollan los O3 planos y las D3 branas, respectivamente. Por lo tanto, integrando esta última ecuación, se llega a que la carga total de RR debe anularse:

$$N_{\text{flujos}} + N_{D3} + N_{O3}Q_{O3} = 0, \quad (4.35)$$

donde se ha normalizado las cargas a la de la D3 brana, considerando que las mismas poseen una carga +1. En ese caso, como habíamos visto en 4.4.1, los O3 planos tendrán una carga -1/2. Por último, el término N_{flujos} está dado por:

$$N_{\text{flujos}} = \frac{1}{(4\pi\alpha')^2} \int_{CY_3} H_3 \wedge F_3 = \frac{i}{2(4\pi\alpha')^2} \int_{CY_3} \frac{G_3 \wedge \bar{G}_3}{\text{Im}(\tau)}, \quad (4.36)$$

donde τ está dado por⁸ $\tau = C^{(0)} + ie^{-\phi}$, y donde:

$$G_3 = F_3 + \tau H_3. \quad (4.37)$$

2) La segunda condición a satisfacer está relacionada con la forma G_3 . En efecto, las ecuaciones de movimiento imponen que G_3 no contenga partes imaginarias anti duales, es decir, debe satisfacer:

$$*_6 G_3 = iG_3, \quad (4.38)$$

donde $*_6$ es el operador de Hodge definido según la métrica de CY_3 . Esta condición se la suele llamar ISD en la literatura (de anti-self dual, en inglés).

El término cinético de la forma G_3 en la acción en 4D está dado por [12]:

$$\begin{aligned} S_{4d} &= -\frac{1}{4\text{Im}(\tau)} \int_{CY_3} G_3 \wedge *_6 \bar{G}_3 \\ &= -\frac{1}{2\text{Im}(\tau)} \int_{CY_3} \frac{G_3^+ \wedge *_6 \bar{G}_3^+}{\text{Im}(\tau)} - \frac{1}{4} \int_{CY_3} \frac{G_3 \wedge \bar{G}_3}{\text{Im}(\tau)}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

El segundo factor es proporcional al flujo de F_3 y H_3 , mientras que el primero es el potencial escalar en 4D:

$$V = -\frac{1}{2\text{Im}(\tau)} \int_{CY_3} \frac{G_3^+ \wedge *_6 \bar{G}_3^+}{\text{Im}(\tau)}. \quad (4.40)$$

⁸ τ es un campo complejo a bajas energías, llamado axo-dilatón. $C^{(0)}$ se conoce como axión, mientras que ϕ es el dilatón.

Aquí se ha descompuesto a la forma G_3 en componentes G_3^+ y G_3^- , $G_3 = G_3^+ + G_3^-$, tales que:

$$*_6 G_3^\pm = \mp i G_3^\pm. \quad (4.41)$$

Este potencial escalar es semidefinido positivo, y depende de τ a través de la definición de G_3 , y de los moduli que determinan la métrica en el espacio interno (moduli de Kähler) ya que éstos fijan la forma en la cual G_3 se descompone como $G_3 = G_3^+ + G_3^-$.

En [19] se propuso que este potencial escalar podría obtenerse de un superpotencial W dado por:

$$W = \int_{CY_3} G_3 \wedge \Omega, \quad (4.42)$$

donde Ω es la forma (3,0) holomórfica única de un CY_3 (ver apéndice). Este superpotencial dependerá de los moduli provenientes de la estructura compleja de la variedad CY_3 [10], y del axo-dilatón τ , presente en la definición de G_3 , pero no depende de los moduli de Kähler. Este tipo de modelos que no dependen del "tamaño" de la variedad donde se compactifica se conoce como modelos "no-scale". Dado un superpotencial W , el potencial escalar estará dado por:

$$V = e^K (G^{m\bar{n}} D_m W \overline{D_n W} - 3 |W|^2), \quad (4.43)$$

donde los índices m, n recorren todos los moduli de CY_3 . Las derivadas covariantes están dadas por $D_m W = \partial_m W + W(\partial_m K)$. K es el potencial de Kähler para el espacio de moduli de estructura complejas y de clase de Kähler de CY_3 , que se puede expresar como:

$$K = -\ln[-i(\tau - i\bar{\tau})] - 3 \ln[-i(J - i\bar{J})] - \ln \left(-i \int_{CY_3} \Omega \wedge \bar{\Omega} \right), \quad (4.44)$$

donde τ representa los moduli de la estructura compleja del CY_3 , J son los moduli de Kähler, y $\bar{\Omega}$ es la forma (0,3) antiholomórfica.

Como el superpotencial no depende de los moduli de Kähler J , la derivada covariante $D_J W$ será:

$$D_J W = \partial_J W + W(\partial_J K) = W \left(\frac{-3i}{J - \bar{J}} \right), \quad (4.45)$$

y por ser K el potencial de Kähler, el término dependiente de J dará la métrica en el espacio de los moduli de Kähler al derivar, de la forma:

$$G^{J\bar{J}} = \frac{1}{\partial_J \partial_{\bar{J}}} K = \frac{i(J - \bar{J})^2}{3}, \quad (4.46)$$

con lo cual:

$$G^{J\bar{J}} D_J W \overline{D_{\bar{J}} W} = 3 |W|^2. \quad (4.47)$$

Por lo que la expresión general 4.43 se reducirá a:

$$V \propto e^K \left(G^{i\bar{j}} D_i W \overline{D_{\bar{j}} W} \right), \quad (4.48)$$

donde ahora los índices i, j suman sobre todos los moduli, excepto los de Kähler.

Por lo tanto, obtenemos un potencial positivo definido, con lo cual imponiendo que $D_i W = 0$, el potencial escalar se anulará, y la energía será mínima. Evaluando estos mínimos en función de los flujos para H_3 y F_3 , se obtienen los valores para los moduli.

4.6. Flujos en teoría tipo IIA

En lo que queda de este capítulo vamos a describir la teoría de supergravedad tipo IIA en 10 dimensiones, colocando flujos de formas NSNS. Esto originará un potencial escalar al compactificar 6 dimensiones espaciales. El mismo puede ser obtenido de un superpotencial, análogo al caso anterior para la teoría tipo IIB. Sin embargo, no estudiaremos aquí la formulación equivalente con un superpotencial, mostrando un análisis mas detallado del mismo en el próximo capítulo.

4.6.1. Flujos de NSNS en teoría tipo IIA, compactificada en un Calabi-

Yau.

La acción bosónica de la teoría tipo IIA en $D = 10$ está dada por:

$$S_{IIA} = \int e^{-2\hat{\phi}} \left(-\frac{1}{2} \hat{R} * \mathbf{1} + 2d\hat{\phi} \wedge *d\hat{\phi} - \frac{1}{4} \hat{H}_3 \wedge * \hat{H}_3 \right) \quad (4.49)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\hat{F}_2 \wedge * \hat{F}_2 + \hat{F}_4 \wedge * \hat{F}_4 \right) + \dots,$$

con los tensores de campo \hat{F}_2 , \hat{H}_3 y \hat{F}_4 dados por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_3 &= d\hat{B}_2, & \hat{F}_2 &= d\hat{C}^{(1)}, \\ \hat{F}_4 &= d\hat{C}^{(3)} - \hat{B}_2 \wedge \hat{C}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde los disitntos campos corresponden al espectro mostrado en 3.5. Los puntos suspensivos en la acción indican términos topológicos que no serán tenidos en cuenta⁹. La compactificación de la supergravedad IIA en CY_3 da como resultado una teoría $N = 2$, en $D = 4$ [2].

Análogamente a como se procedió en la sección 4.5.1, vamos a expandir los campos $\hat{C}^{(1)}$, \hat{B}_2 y $\hat{C}^{(3)}$ en formas armónicas ω_i y (α_A, β^B) , introducidas anteriormente. En ese caso, las expresiones son:

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(1)} &= A^{(0)}, & \hat{B}_2 &= B_2 + b^i \omega_i, \\ \hat{C}^{(3)} &= C^{(3)} + A^i \wedge \omega_i + \xi^A \alpha_a - \tilde{\xi}_A \beta^A,\end{aligned}\tag{4.51}$$

donde C_3 es una tres forma, B_2 una dos forma, $A^{(0)}$ y A^i son uno formas, y $b^i(x)$, $\xi^A(x)$, $\tilde{\xi}_A(x)$ son escalares en $D = 4$. La uno forma $\hat{C}^{(1)}$ en diez dimensiones sólo contiene una uno forma $A^{(0)}$ en cuatro dimensiones, ya que un Calabi Yau de dimensión compleja 3 no posee formas armónicas de dimensión 1[20].

Tomemos ahora el caso en el cual el tensor de campo de la forma de NSNS, $\hat{H}_3 = d\hat{B}_2$, adquiere flujos no triviales, parametrizados por elementos del tercer grupo de homología del Calabi - Yau, $H^3(CY)$, de la forma:

$$\hat{H}_3 \longrightarrow \hat{H}_3 + p^A \alpha_A - q_A \beta^A, \quad A, B = 0, \dots, h^{(2,1)},\tag{4.52}$$

donde p^A, q_A son $2h^{(2,1)} + 2$ parámetros de flujo, necesarios para especificar completamente el valor de \hat{H}_3 en el espacio interno CY_3 .

Recordemos que para poder obtener la acción a bajas energías, será necesario redefinir los campos en la teoría tipo IIA, de forma tal que la dos forma \hat{B}_2 aparezca sólo bajo su tensor de campo $\hat{H}_3 = d\hat{B}_2$. En ese caso, realizando la transformación $\hat{C}^{(3)} \longrightarrow \hat{C}^{(3)} + \hat{C}^{(1)} \wedge \hat{B}_2$, la acción 4.49 quedará invariante, mientras que ahora:

$$\hat{F}_4 = d\hat{C}^{(3)} - \hat{C}^{(1)} \wedge \hat{H}_3.\tag{4.53}$$

De esta manera, los flujos entrarán en la teoría compactificada sólo a través de los tensores de campo, para los cuales se adicionaron valores de flujos no triviales. En efecto, tomando las ecuaciones 4.50, 4.51, 4.52 y 4.53, se llega a que los tensores de campo para $\hat{C}^{(1)}$, \hat{B}_2 y $\hat{C}^{(3)}$ se modifican como:

$$\begin{aligned}\hat{F}_2 &= dC^{(1)}, \\ \hat{H}_3 &= dB_2 + db^i \omega_i + p^A \alpha_A - q_A \beta^A, \\ \hat{F}_4 &= dC^{(3)} - C^{(1)} \wedge H_3 + (dA^i - A^{(0)} db^i) \wedge \omega_i + D\xi^A \wedge \alpha_A - D\tilde{\xi}_A \wedge \beta^A,\end{aligned}\tag{4.54}$$

con

⁹Ver la referencia [15]

$$D\xi^A = d\xi^A - p^A A^0, \quad D\tilde{\xi}_A = d\tilde{\xi}_A - q_A A^0. \quad (4.55)$$

Estas modificaciones son análogas a las que se obtuvieron en 4.31.

Al reemplazar estas expresiones en la acción 4.49, se llega a un superpotencial escalar que dependerá de los moduli de estructura compleja de la variedad. Minimizando este potencial, es posible estabilizar estos moduli. No se dará la expresión de este potencial, que involucra varios elementos de compactificación de teorías de supergravedad en Calabi-Yau. La expresión completa puede obtenerse en [15].

Sin embargo, se argumentó en [19], [21], que en este potencial puede ser obtenido de un superpotencial de la forma:

$$W \propto \int_{CY_3} (C^{(3)} + ie^{-\phi}\Omega) \wedge H_3, \quad (4.56)$$

donde sólo los valores de estos campos en la variedad interna contribuyen al superpotencial.

En el próximo capítulo daremos un análisis mas detallado de estos superpotenciales, dentro del esquema de teoría de cuerdas en orientifolds.

Capítulo 5

Flujos en teorías IIA con orientifolds

En este capítulo nos centraremos sobre modelos de toros T^6 , que se puedan describir globalmente como producto de tres toros T^2 . Es decir, como dijimos anteriormente, T^6 es un toro factorizable como $T^6 = T^2 \otimes T^2 \otimes T^2$.

Vamos a analizar los moduli que surgen en esta teoría, como así también los superpotenciales resultantes. Obtendremos nuevos flujos, que no provendrán de las formas ya existentes en la teoría, llamados flujos geométricos. Las ecuaciones de tadpole serán obtenidas para esta teoría. Finalmente, hallaremos la forma del superpotencial que dependa de 4 moduli y encontraremos su mínimo. En el próximo capítulo, aplicaremos este caso a un orientifold $T^6/Z_2 \times Z_2$ en teoría IIA.

5.1. Moduli, flujos y superpotenciales.

Nos centraremos ahora en un orientifold sobre un toro factorizable T^6 , sobre el cual actúa un orbifold $Z_2 \otimes Z_2$, que caracterizaremos en la sección 6.1. Además, aplicamos una proyección orientifold dado por $\mathfrak{S} = \Omega_P (-1)^{F_L} \sigma$, donde Ω_P es el operador de paridad en la hoja de mundo de la cuerda, $(-1)^{F_L}$ es el operador de número fermiónico para los modos left, y σ es una involución de orden dos sobre toro ($\sigma^2 = 1$).

Cada toro será cuadrado, caracterizado por un área $A_i = R_x^i R_y^i$, y con parámetros de estructura compleja τ_i de cada T_i^2 dados por $\tau_i = R_y^i / R_x^i$.

La (3,0) forma holomórfica Ω , que aparecía en la ecuación 4.42, ahora será de la forma:

$$\Omega = (dx^1 + i\tau_1 dy^1) \wedge (dx^2 + i\tau_2 dy^2) \wedge (dx^3 + i\tau_3 dy^3), \quad (5.1)$$

donde $y^i = x^{i+3}$, $i = 1, 2, 3$, y (x^i, y^i) son las coordenadas internas del toro T_i^2 .

Sea el siguiente conjunto de 3-formas, cada una con una 1-forma en cada toro T^2 :

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, & \beta_0 &= dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3, \\
 \alpha_1 &= dx^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3, & \beta_1 &= dy^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\
 \alpha_2 &= dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^3, & \beta_2 &= dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^3, \\
 \alpha_3 &= dy^1 \wedge dy^2 \wedge dx^3, & \beta_3 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dy^3.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

La involución del orientifold σ actúa de la forma $\sigma(x^i) = x^i$, $\sigma(y^i) = -y^i$, por lo que en las coordenadas complejas $Z^i = X^i + iY^i$, $i = 1, 2, 3$, tendremos que $\sigma(Z^i) = \bar{Z}^i$. En ese caso, las formas α_i serán pares ante σ , mientras que las β_i serán impares. La noralización es tal que $\int_{T^6} \alpha_i \wedge \beta_j = \delta_{i,j}$.

En este contexto, habrán 7 moduli, que son los de estructura compleja U_i y los de Kähler T_i , para cada toro $T^2_{(i)}$, junto con el dilatón S , dados por [22]:

$$\begin{aligned}
 S &= e^{-\phi} \prod_{i=1}^3 \left[\frac{\text{Re}(T_i)}{\tau_i} \right]^{1/2} + iC_0, \\
 U_1 &= e^{-\phi} \prod_{i=1}^3 [\text{Re}(T_i)]^{1/2} \sqrt{\frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_1}} + iC_1, \\
 U_2 &= e^{-\phi} \prod_{i=1}^3 [\text{Re}(T_i)]^{1/2} \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_2}} + iC_2, \\
 U_3 &= e^{-\phi} \prod_{i=1}^3 [\text{Re}(T_i)]^{1/2} \sqrt{\frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_3}} + iC_3, \\
 T_1 &= J_{14} - iB_{14}, \\
 T_2 &= J_{25} - iB_{25}, \\
 T_3 &= J_{36} - iB_{36}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Estas expresiones son un caso particular del que se muestra en el apéndice. Aquí, C_i son las componentes de la forma $C^{(3)}$ en la base de los α_i 5.2, $C^{(3)} = \sum C_i \alpha_i$, y los subíndices en J y B denotan sus componenes a lo largo de las formas $(1, 1)$ ω_i , impares ante σ :

$$\omega_1 = dx^1 \wedge dy^1 \quad ; \quad \omega_2 = dx^2 \wedge dy^2 \quad ; \quad \omega_3 = dx^3 \wedge dy^3. \tag{5.4}$$

En esta base ω_i , la forma complexificada de Kähler $J_C = B + iJ$ (ver apéndice) estará dada por:

$$J_C = B + iJ = i \sum_{i=1}^3 T_i \omega_i. \tag{5.5}$$

En particular, para el caso del toro factorizable T^6 , las partes reales de las estructuras de Kähler $T_{(i)}$ están dadas por las áreas $R_x^i R_y^i$, por lo que $J_{14} = A_1 = R_x^1 R_y^1$, $J_{25} = A_2 = R_x^2 R_y^2$, $J_{36} = A_3 = R_x^3 R_y^3$.

Introducimos ahora los flujos para las formas de RR y NSNS. Estos serán términos que se agregarán a los tensores de campo como hicimos en las secciones anteriores. Para el caso del tensor de campo NS H_3 , este es impar ante la acción del orientifold \mathfrak{S} , por lo que los flujos permitidos serán combinación lineal de los β_i :

$$\bar{H}_3 = \sum_{i=0}^3 h_i \beta_i, \quad (5.6)$$

donde h_i son los flujos, y donde la barra sobre H_3 es para indicar que sólo estamos considerando términos de flujo para H_3 .

Para las formas de RR, F_0 y F_4 serán pares, mientras que F_2 y F_6 serán impares ante el orientifold, por lo que su desarrollo será de la forma:

$$\bar{F}_0 = -m, \quad \bar{F}_6 = e_0 dvol_6, \quad (5.7)$$

$$\bar{F}_2 = \sum_{i=1}^3 q_i \omega_i, \quad \bar{F}_4 = \sum_{i=1}^3 e_i \tilde{\omega}_i, \quad (5.8)$$

donde m , e_0 , q_i y e_i son los flujos para estas formas, ω_i está dado por 5.4, y donde $\tilde{\omega}_i$ son las formas pares ante σ :

$$\tilde{\omega}_1 = dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3, \quad \tilde{\omega}_2 = dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^3 \wedge dy^3, \quad (5.9)$$

$$\tilde{\omega}_3 = dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2. \quad (5.10)$$

La normalización de estas formas es tal que $\int_{T^6} \omega_i \wedge \tilde{\omega}_j = \delta_{ij}$.

Al igual que en la sección 4.3, los flujos deberán estar apropiadamente cuantizados. Las condiciones para este caso son:

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{\Pi_3} \bar{H}_3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\mu_{p-2}}{2\pi} \int_{\Pi_p} \bar{F}_p \in \mathbb{Z}, \quad (5.11)$$

donde Π_p es cualquier p -ciclo de T^6 , y $\mu_p = 1/(2\pi)^p \alpha'^{(p+1)/2}$ [22]. Una diferencia importante de las teorías tipo IIA respecto de las tipo IIB es que en la primera los flujos de NSNS y RR crean superpotenciales que dependen tanto de los moduli de Kähler como de las estructuras complejas. Ello es porque la forma en la cual se acomplan estos campos a los moduli en el superpotencial es distinta. Mientras que en teorías tipo IIB, ambos flujos estaban multiplicando Ω bajo la integral (con lo cual estabilizan sólo la estructura compleja de la variedad), en teoría IIA los flujos de RR 5.7 darán potenciales para los

moduli de Kähler, mientras que los flujos de NSNS 5.6 darán potenciales escalares para los moduli de estructura compleja y para el axo-dilatón.

El superpotencial para los moduli de Kähler está dado por:

$$W_K = \int_{T^6} e^{J_C} \wedge \bar{F}_{RR}, \quad (5.12)$$

mientras que el superpotencial para las estructuras complejas es:

$$W_Q = \int_{T^6} \Omega_C \wedge \bar{H}_3. \quad (5.13)$$

\bar{F}_{RR} representa una suma sobre todos los flujos de RR dados por 5.7. J_C es la estructura de Kähler complexificada, expresada en 5.5, mientras que Ω_C es la $(3, 0)$ forma holomórfica invariante ante la acción del orientifold \mathfrak{S} , dado por (ver apéndice):

$$\Omega_C = C^{(3)} + i \operatorname{Re}(C\Omega), \quad (5.14)$$

donde $C^{(3)}$ y Ω fueron dados anteriormente, y donde C es:

$$C = e^{-\phi_4} e^{K_{cs}/2}, \quad K_{cs} = -\ln \left[-\frac{i}{4} \int_{T^6} \Omega \wedge \Omega^* \right], \quad (5.15)$$

con $e^{\phi_4} = e^\phi / \sqrt{\operatorname{Re}(T_1) \operatorname{Re}(T_2) \operatorname{Re}(T_3)}$.

Reemplazando estos resultados en los superpotenciales 5.12 y 5.13, se puede expresar W_K en función de los moduli T_i, U_i y S :

$$W_K = e_0 + i \sum_{i=1}^3 e_i T_i - q_1 T_2 T_3 - q_2 T_1 T_3 - q_3 T_1 T_2 + im T_1 T_2 T_3, \quad (5.16)$$

$$W_Q = ih_0 S - i \sum_{i=1}^3 h_i U_i. \quad (5.17)$$

El superpotencial total será la suma de ambos, es decir:

$$W_{IIA} = e_0 + ih_0 S + \sum_{i=1}^3 i e_i T_i - i \sum_{i=1}^3 h_i U_i \quad (5.18)$$

$$-q_1 T_2 T_3 - q_2 T_1 T_3 - q_3 T_1 T_2 + im T_1 T_2 T_3. \quad (5.19)$$

En la sección 6.2 analizaremos un caso de este superpotencial, junto con un posible mínimo. Sin embargo, todavía es posible agregar otro tipo de flujos, llamados geométricos, que provienen de T-dualizar flujos de NSNS en teorías tipo IIB.

5.2. Flujos geométricos

Los flujos geométricos en tipo IIA surgen al realizar T-dualidad sobre teorías con flujos de NSNS en tipo IIB. El nombre proviene del hecho que flujos no triviales de NSNS en IIB deforman la métrica usual del toro T^6 en IIA, por lo que los términos que surgirán en el superpotencial pueden interpretarse como provenientes de una métrica “twisted”.

Consideremos el superpotencial para la teoría tipo IIB con flujos de NSNS \bar{h}_3 y de RR \bar{f}_3 ¹. Para \bar{f}_3 tomamos la combinación mas general:

$$\bar{f}_3 = -m\alpha_0 - e_0\beta_0 + \sum_{i=1}^3 (e_i\alpha_i - q_i\beta_i), \quad (5.20)$$

donde para \bar{h}_3 nos restringimos a:

$$\bar{h}_3 = h_0\beta_0 - \sum_{i=1}^3 a_i\alpha_i. \quad (5.21)$$

Con este tipo de flujos, en teoría IIB tendremos que el superpotencial asociado W_{IIB} será de la forma 4.42:

$$W_{IIB} = \int (\bar{f}_3 - \tau\bar{h}_3) \wedge \Omega. \quad (5.22)$$

Si sustituimos las expresiones 5.1, 5.20 y 5.21 se llega a:

$$W_{IIB} = e_0 + h_0\tau + i \sum_{i=1}^3 (a_i\tau + e_i) \tau_i - q_1\tau_2\tau_3 - q_2\tau_1\tau_3 - q_3\tau_1\tau_2 + im\tau_1\tau_2\tau_3, \quad (5.23)$$

donde recordemos que $\tau = C^{(0)} + ie^{-\phi}$ y $\tau_i = R_y^i/R_x^i$.

Ante T-dualidad, τ se convierte en el dilatón de IIA, S , y los τ_i pasan a ser los moduli de Kähler T_i , por lo que el superpotencial W_{IIA} pasará a:

$$W_{IIA} = e_0 + ih_0S + \sum_{i=1}^3 (ie_i - a_iS)T_i - q_1T_2T_3 - q_2T_1T_3 - q_3T_1T_2 + imT_1T_2T_3. \quad (5.24)$$

Vemos que este resultado coincide con el que se obtuvo en 5.18, con $a_i = 0$, y $h_i = 0$.

¹Las letras minúsculas son para diferenciar los flujos de IIB con los de la teoría IIA

5.2.1. Modificación de la geometría del espacio, debido a los flujos de NSNS

Como se mencionó anteriormente, los flujos no triviales de NSNS modifican la métrica del toro T^6 en teoría IIA. Para ello, veamos un ejemplo sencillo [22]. Consideremos la métrica del toro T^6 factorizable, cuya forma será:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dy^1)^2 + (dx^2)^2 + (dy^2)^2 + (dx^3)^2 + (dy^3)^2, \quad (5.25)$$

con (x^i, y^i) las coordenadas del toro T_i^2 . Elijamos como flujo para \bar{h}_3 la forma:

$$\bar{h}_3 = -a_1 dx^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 - a_2 dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^3 - a_3 dy^1 \wedge dy^2 \wedge dx^3. \quad (5.26)$$

Realicemos ahora T-dualidad sobre las direcciones x^1, x^2, x^3 . Elijamos para ello un gauge de b_2 , con $\bar{h}_3 = db_2$, tal que b_2 no dependa de estas coordenadas. Sea entonces:

$$b_2 = -a_1 y^3 dx^1 \wedge dy^2 - a_2 y^1 dx^2 \wedge dy^3 - a_3 y^2 dx^3 \wedge dy^1. \quad (5.27)$$

Usando las reglas de T-dualidad en [13], se llega a una métrica dada por:

$$ds'^2 = (dx^1 + a_1 y^3 dy^2)^2 + (dx^2 + a_2 y^1 dy^3)^2 + (dx^3 + a_1 y^2 dy^1)^2 + (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2. \quad (5.28)$$

Vemos que las identificaciones usuales para un toro factorizable T^6 :

$$(x^i + 1; y^i) \sim (x^i; y^i) \quad ; \quad (x^i; y^i) \sim (x^i; y^i + 1) \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.29)$$

se cambian por:

$$\begin{aligned} (x^i + 1; y^i) &\sim (x^i; y^i), \\ (x^2; y^1) &\sim (x^2 - a_2 y^3; y^1 + 1), \\ (x^3; y^2) &\sim (x^3 - a_3 y^1; y^2 + 1), \\ (x^1; y^3) &\sim (x^1 - a_1 y^2; y^3 + 1). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Estas identificaciones son necesarias para que, por ejemplo, $dx^1 + a_1 y^3 dy^2 = d(x^1 - a_1 y^2) + a_1(y^3 + 1)dy^2$ esté definido globalmente.

Este tipo de espacio, lejos de ser un toro factorizable $T^6 = T^2 \otimes T^2 \otimes T^2$, se conocen en la literatura como toros “twisted” (ver [23], [13]).

Los toros twisted se pueden caracterizar como espacios paralelizables, con una base de veilbeins $\eta^\alpha = e_\mu^\alpha dx^\mu$ no nula en todo el espacio (ver [24]), donde $\{e_\mu^\alpha\} \in GL(m, \mathbb{R})$ (m es la dimensión del espacio interno).

El toro twisted está definido por la siguiente relación para sus 1-formas tangentes η^P [22]:

$$\eta^P = -\frac{1}{2}\omega_{MN}^P \eta^M \wedge \eta^N, \quad (5.31)$$

donde ω_{MN}^P son coeficientes constantes, antisimétricos en sus índices inferiores. Estos son los flujos geométricos en los cuales estamos interesados. Los mismos cumplen con la siguiente condición de Bianchi:

$$\omega_{[MN}^P \omega_{R]N}^S = 0, \quad (5.32)$$

además de $\omega_{MP}^P = 0$.

Una 2-forma escrita en la base $\{\eta^M\}$, $X = X_{MN}\eta^M \wedge \eta^N$, tendrá como derivada exterior coeficientes dados por:

$$(dX)_{LMN} = \omega_{[LM}^P X_{N]P}, \quad (5.33)$$

donde se ha usado la identidad 5.31, y donde se ha supuesto que X no depende de las coordenadas internas x^M .

5.3. Superpotencial para los flujos geométricos

Es posible plantear un superpotencial que incluya a los flujos geométricos. La forma para el superpotencial fue propuesta en [25], y generaliza a la expresión para el superpotencial W_Q en 5.17:

$$W_Q = \int_{T^6} \Omega_C \wedge (\bar{H}_3 + dJ_C), \quad (5.34)$$

donde dJ_C se calcula usando la igualdad 5.33.

Usando la expresión para Ω_C dada en 5.14, calculando W_Q y sumando este superpotencial a W_K 5.16 se obtiene el superpotencial total, dado por:

$$W = e_0 + ih_0 S + \sum_{i=1}^3 \left[\left(ie_i - a_i S - b_{ii} U_i - \sum_{j \neq i} b_{ij} U_j \right) T_i - ih_i U_i \right] - q_1 T_2 T_3 - q_2 T_1 T_3 - q_3 T_1 T_2 + im T_1 T_2 T_3, \quad (5.35)$$

donde b_{ij} , a_i son los flujos geométricos, con las siguientes identificaciones:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{56}^1 \\ \omega_{56}^2 \\ \omega_{45}^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{23}^1 & \omega_{53}^4 & \omega_{26}^4 \\ \omega_{34}^5 & -\omega_{31}^2 & \omega_{61}^5 \\ \omega_{42}^6 & \omega_{15}^6 & -\omega_{12}^3 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Con los flujos geométricos ω escritos de esta forma, las identidades de Bianchi 5.32 se traduce en términos de a_i y b_{ij} a la forma:

$$\begin{aligned} b_{ij}a_j + b_{jj}a_i &= 0, \\ b_{ik}b_{kj} + b_{kk}b_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Implementaremos este tipo de superpotencial en el próximo capítulo, donde tendremos compactificaciones en modelos T^6 , con proyecciones orientifold $\mathfrak{S} = \Omega_P(-1)^{F_L}\sigma$. Así, expresando dJ_C en la base 5.2, los flujos en 5.36 son aquellos que quedan invariantes² ante la acción de σ .

El superpotencial W en 5.35 será el que utilizaremos en el próximo capítulo para estabilizar los moduli de una teoría $T^6/Z_2 \times Z_2$ con el orientifold $\mathfrak{S} = \Omega_P(-1)^{F_L}\sigma$.

Vemos que la notación dada en 5.36 es coherente con el ejemplo introducido en 5.2.1, teniendo en cuenta que para ese caso:

$$\begin{aligned} \eta^1 &= dx^1 + a_1 y^3 dy^2, & \eta^4 &= dy^1 \\ \eta^2 &= dx^2 + a_2 y^1 dy^3, & \eta^5 &= dy^2 \\ \eta^3 &= dx^3 + a_3 y^2 dy^1, & \eta^6 &= dy^3. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Vemos entonces que

$$\begin{aligned} d\eta^1 &= \omega_{56}^1 \eta^5 \wedge \eta^6 = a_1 \eta^5 \wedge \eta^6, \\ d\eta^2 &= \omega_{64}^2 \eta^6 \wedge \eta^4 = a_2 \eta^6 \wedge \eta^4, \\ d\eta^3 &= \omega_{45}^3 \eta^4 \wedge \eta^5 = a_3 \eta^4 \wedge \eta^5, \end{aligned}$$

siendo nulos el resto de los flujos geométricos.

²Recordar que las formas α_i son pares ante σ , mientras que las β_i son impares

Capítulo 6

Estabilización de moduli en $T^6/Z_2 \times Z_2$.

En este capítulo aplicaremos lo que hemos visto acerca de estabilización de moduli en un orbifold $T^6/Z_2 \times Z_2$, con un espectro MSSM, en el contexto de teoría IIA. Este modelo fue estudiado en [28] dentro de teorías IIB. Empezaremos por describir el modelo, y luego aplicaremos un caso especial del potencial 5.35 para estabilizar los moduli.

6.1. Descripción del modelo

Consideremos un orbifold $T^6/Z_2 \times Z_2$, con una proyección orientifold ΩR . El toro T^6 es factorizable como $T^6 = T_{(1)}^2 \times T_{(2)}^2 \times T_{(3)}^2$, y las coordenadas complejas z^i de cada toro

$T_{(i)}^2$ están dados por $z^i = x^i + iy^i$, con $y^i = x^{i+3}$, con $i = 1, 2, 3$. Cada toro $T_{(i)}^2$ estará definido por $(x^i, y^i) \simeq (x^i + 1, y^i) \simeq (x^i, y^i + 1)$, por lo que serán cuadrados, de lado unitario.

Los generadores θ y ω del orbifold $Z_2 \times Z_2$ actúan sobre las coordenadas internas de la forma:

$$\begin{aligned}\theta & : (z^1, z^2, z^3) \longrightarrow (-z^1, -z^2, z^3), \\ \omega & : (z^1, z^2, z^3) \longrightarrow (z^1, -z^2, -z^3).\end{aligned}\tag{6.1}$$

La proyección orientifold ΩR es tal que:

$$R : (z^1, z^2, z^3) \longrightarrow (\bar{z}^1, \bar{z}^2, \bar{z}^3),\tag{6.2}$$

donde las barras indican conjugación.

Los planos orientifolds tendrán 6+1 dimensiones, generados por el volumen de mundo $M_4 \times \{\text{Im } z^i = 0, 1/2\}$, $i = 1, 2, 3$. En efecto, cada conjugación $z^i \longrightarrow \bar{z}^i$ genera por

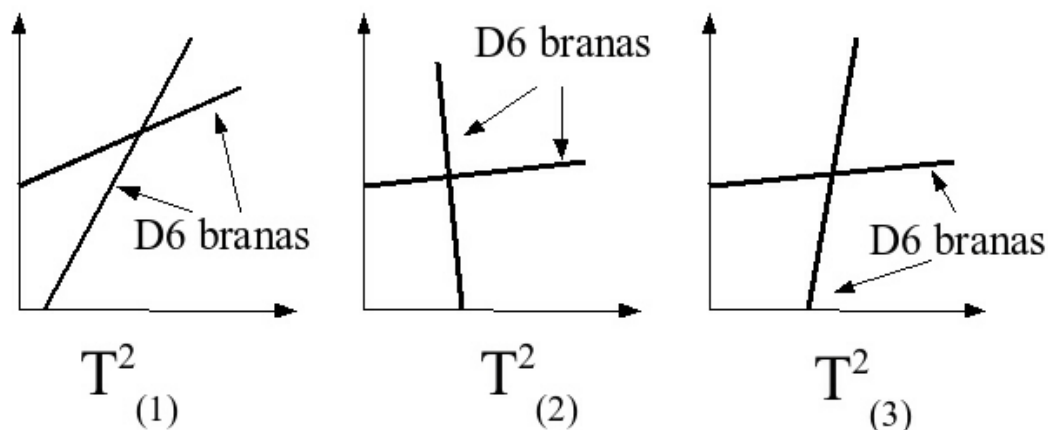


Figura 6.1: En esta figura se muestra la posición relativa de dos D6 branas en el espacio interno T^6 . El volumen de mundo de su intersección es el espacio de Minkowski M_4 .

separado un plano orientifold O_8 , por lo que aplicando sucesivamente estas conjugaciones para $i = 1, 2, 3$ se generarán O_6 planos: $O_8 \rightarrow O_7 \rightarrow O_6$. El número total de ellos estará dado por el producto del número de puntos fijos de R , que son dos (por $\text{Im } z^i = 0, 1/2$), por el número de conjugaciones, que son 3 ($i = 1, 2, 3$), con lo cual $2^3 = 8$.

Consideremos que estos O_6 planos se encuentran enrollados en cada toro T^2 con números de enrollamiento $(1,0) \otimes (1,0) \otimes (1,0)$.

Además de los O-planos, tenemos K grupos de N_a D6-branas coincidentes, $a = 1, \dots, K$, cada una con números de enrollamiento $[(n_a^1, m_a^1)] \times [(n_a^2, m_a^2)] \times [(n_a^3, m_a^3)]$, donde (n_a^i, m_a^i) indica el número de enrollamiento para el toro $T_{(i)}^2$. Estas D6 branas se encontrarán varias veces en T^6 , y nuestro espacio de Minkowski estará formado por las intersecciones de estas branas en el espacio interno junto con su volumen de mundo en $D=4$. La figura 6.1 muestra la disposición para dos branas intersecantes en T^6 .

Para que esta disposición de branas sea invariante ante los O-planos, se deberán agregar grupos de N_{a^*} branas D6, imágenes ante el orientifold, con números de intersección $(n_a^i, -m_a^i)$.

En cuanto a los grupos de gauge, cada conjunto de N_a branas generará un grupo de gauge $U(N_a) = SU(N_a) \times U(1)$, proveniente de las cuerdas que empiezan y terminan sobre la misma brana. El espectro quirral fermiónico provendrá de las cuerdas abiertas que se propaguen de una brana a la otra, y transformarán según la presentación bifundamental (N_a, \bar{N}_b) del grupo $U(N_a) \times U(N_b)$.

Debido a la presencia del orbifold $Z_2 \times Z_2$, bajo la acción de ω los grupos $U(N)$ se separarán como $U(N/2) \times U(N/2)$, mientras que la acción de θ es el de agrupar estos dos

grupos en un solo $U(N/2)$ [26]. La acción de este orbifold da como resultado una teoría con $N=1$. Además, en caso que N_a branas se encuentren sobre un plano orientifold, el grupo resultante es un $USp(2N_a)$ [27].

El número de familias fermiónicas que van de una brana N_a a una N_b estará dado por el número de veces que las dos branas se intersecan. Para el caso de un toro T^6 factorizable, esto estará dado por el número de intersección I_{ab} :

$$I_{ab} = [\Pi_a] \cdot [\Pi_b] = \prod_{i=1}^3 I_{ab}^{(i)} = \prod_{i=1}^3 (n_a^i m_b^i - m_a^i n_b^i), \quad (6.3)$$

para $[\Pi_a]$, $[\Pi_b]$ los 3-ciclos factorizables sobre los cuales se enrollan las branas N_a y N_b .

$I_{ab}^{(i)}$ es el número de intersección de las dos branas, sobre el toro $T_{(i)}^2$. La quiralidad de los fermiones vendrá dada además por el signo de I_{ab} , siendo positivo para fermiones de quiralidad left, mientras que para fermiones right I_{ab} será positivo.

Recordemos el espectro del Modelo Estándar:

$$\begin{aligned} Q_L^i &= (3, 2)_{\frac{1}{6}}, \\ U_R^i &= (3, 1)_{-\frac{1}{3}}, \\ D_R^i &= (3, 1)_{\frac{1}{3}}, \\ L^i &= (1, 2)_{-\frac{1}{2}}, \\ E_R^i &= (1, 1)_1. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Si bien el grupo de gauge del Modelo Estándar es $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, son necesarias en principio cuatro conjunto de D6 branas coincidentes, y no tres, para lograr el contenido fermiónico del Modelo Estándar. Por ejemplo, los quarks left Q_L^i serán cuerdas abiertas que van de una brana con grupo $U(3)$ a otra con grupo $U(2)$. Pero, para agregar a los leptones right E_R^i , será necesario agregar un cuarto conjunto de branas, que provean un grupo adicional $U'(1)$ entre los cuales se extenderán los estados de cuerda abierta E_R^i .

Además, habrá dos condiciones adicionales que deberá cumplir el modelo:

1) Deberá satisfacer las ecuaciones de tadpole:

$$\begin{aligned} \sum_a N_a n_a^{(1)} n_a^{(2)} n_a^{(3)} &= 16, \\ \sum_a N_a m_a^{(1)} m_a^{(2)} n_a^{(3)} &= -16, \text{ y permutaciones de } 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Vemos que estas ecuaciones son análogas al caso mostrado en 4.24, con la modificación que ahora las ecuaciones de la segunda línea deben ser igual a -16. Esto proviene básicamente de la acción del orbifold Z_2xZ_2 sobre los planos orientifolds¹.

2) Como deseamos que el modelo sea supersimétrico, con $N=1$, esto establecerá una relación entre las áreas de los toros, para números fijos de enrollamiento (n_a^i, m_a^i) dados por [29]:

$$\sum_i \tan^{-1} \left(\frac{m_a^i A_i}{n_a^i} \right) = \pi, \quad (6.6)$$

donde A_i es el área de cada toro $T_{(i)}^2$.

Un modelo que cumple con todas estas condiciones y posee tres familias fermiónicas fue dado en [28] y se muestra a continuación:

Branas N_α	(n_a^1, m_a^1)	(n_a^2, m_a^2)	(n_a^3, m_a^3)
$N_a = 6$	(1,0)	(3,1)	(3,-1)
$N_b = 2$	(0,1)	(1,0)	(0,-1)
$N_c = 2$	(0,1)	(0,-1)	(1,0)
$N_d = 2$	(1,0)	(3,1)	(3,-1)
$N_{h_1} = 2$	(-2,1)	(-3,1)	(-4,1)
$N_{h_2} = 2$	(-2,1)	(-4,1)	(-3,1)
$N_f = 40$	(1,0)	(1,0)	(1,0)

Para este conjunto de números de intersección, se puede ver que la condición 6.6 se satisface eligiendo, por ejemplo:

$$A_2 = A_3 = A, \quad (6.7)$$

$$\tan^{-1} \left(-\frac{1}{2}A_1 \right) + \tan^{-1} \left(-\frac{1}{3}A \right) + \tan^{-1} \left(-\frac{1}{4}A \right) = \pi. \quad (6.8)$$

Por otro lado, las D6 branas están distribuidas de la siguiente forma respecto a los planos orientifold: Las N_b branas, las N_c y las N_f branas están ubicadas en planos orientifolds, mientras que las restantes no. Las N_{h_1} , N_{h_2} y las N_f son necesarias para cancelar los tadpoles y vemos que mientras las branas N_{h_1} , N_{h_2} se intersectan con las N_a , N_b , N_c y N_d , la N_f no. Además, las N_a y las N_d branas son en realidad coincidentes.

Este conjunto de branas tiene un grupo de gauge dado por:

$$SU(4) \times USp(2) \times USp(2) \times U(1)^3 \times USp(40). \quad (6.9)$$

¹Ver apéndice A de [26]

El grupo $SU(4)$ proviene de las branas coincidentes N_a y N_d ; los dos $USp(2) \equiv SU(2)$ provienen de N_b y N_c ; $U(1)^3$ proviene del $U(1)_a$ de N_a , de N_{h_1} y de N_{h_2} ; y finalmente el grupo $USp(40)$ es generado por las branas N_f .

El grupo de gauge 6.9 puede romperse hasta alcanzar el del Modelo Estándar. La forma en la cual se realiza implica varios pasos, cuya descripción completa estaría fuera del alcance de la presente tesis. Sólo mencionaremos brevemente cómo esto puede implementarse (para una referencia mas completa, ver [27], [28], [18]). El grupo $SU(4)$ puede romperse separando las branas N_a y N_d dando un grupo $SU(3) \times U(1)_d$. Los grupos $USp(2)$ son isoformas a $SU(2)$. Uno de ellos, por ejemplo el que proviene de N_c , puede romperse separando las branas y sus imágenes ante el plano orientifold, dando así un $U(1)_c$. Finalmente, el grupo $USp(40)$ puede descomponerse en $U(1)^{40}$ separando las branas N_f . Recombinando las branas N_{h_1} y N_{h_2} , dando una única brana h , es posible eliminar gran cantidad de fermiones exóticos provenientes de cuerdas que conectan las branas N_a, N_b, N_c o N_d junto con N_{h_1} y N_{h_2} , no quedando materia quiral cargada ante $U(1)^{40}$.

Finalmente, con este proceso, es posible obtener un modelo de D6 branas intersecantes de la forma [27]²:

Branas N_α	Grupo de Gauge	Nombre
$N_a = 6$	$SU(3) \times U(1)_a$	Brana bariónica
$N_b = 2$	$SU(2)$	Brana left
$N_c = 2$	$U(1)_c$	Brana right
$N_d = 2$	$U(1)_d$	Brana leptónica

Hay que recordar que por la acción del orbifold $Z_2 \times Z_2$ un conjunto de N_a branas dará un grupo $U(N_a/2)$. Además, tomando a las branas N_b sobre un plano orientifold, es posible generar un grupo $USp(2) \equiv SU(2)$. El nombre de cada brana proviene del tipo de cuerdas que terminan en ella. Por ejemplo, en la brana bariónica, sólo terminarán cuerdas que representen estados bariónicos.

Dados este conjunto de branas los números de intersección deberán ser:

$$I_{ab} = 3, I_{ac} = -3, I_{ac^*} = -3, I_{db} = 3, I_{dc} = -3, I_{dc^*} = -3. \quad (6.10)$$

En ese caso, el espectro quiral será de la forma:

²Aquí no hemos incluido las branas imágenes a^*, b^*, c^*, d^* ante los planos orientifolds.

Intersección	Partícula del MS	$SU(3) \times SU(2)$	Q_a	Q_c	Q_d	Y
(ab)	Q_L	$3(3,2)$	1	0	0	1/6
(ac)	U_R	$3(3,1)$	-1	1	0	-2/3
(ac*)	D_R	$3(3,1)$	-1	-1	0	1/3
(db)	L	$3(1,2)$	0	0	1	-1/2
(dc)	N_R	$3(1,1)$	0	1	-1	0
(dc*)	E_R	$3(1,1)$	0	-1	-1	1

Aquí, la hipercarga está definida por:

$$Y = \frac{1}{6}Q_a - \frac{1}{2}Q_c - \frac{1}{2}Q_d. \quad (6.11)$$

Se puede demostrar que esta es la única combinación no anómala de cargas $U(1)$ ³.

6.2. Estabilización de los moduli.

Vamos a aplicar lo que hemos visto acerca de flujos de NSNS, de RR, y geométricos al orientifold $T^6/Z_2 \times Z_2$. Para ello, utilizaremos la expresión del superpotencial W en 5.35 para flujos no nulos de la forma 5.6, 5.7, 5.36. Recordemos que para este caso, los flujos deberán estar cuatizados según la condición 4.14.

Hay tres puntos que debemos analizar:

1) Ecuaciones de tadpole. Un aspecto importante al colocar flujos es que modificarán en general las ecuaciones de tadpole. En efecto, habrán nuevos términos que aparecerán en las ecuaciones, dependientes de los flujos.

Para ver ello, definamos la forma $G_2 = dC^{(1)} + mB_2 + \bar{F}_2$. En ese caso, las ecuaciones de tadpole se obtendrán de la ecuación de movimiento para las formas $C^{(7)}$ que se acoplarán a las D6 branas y a los O_6 planos, a partir del término del lagrangiano en IIA dado por:

$$\int_{M_4 \times T^6} G_2 \wedge *G_2 + \sum_a N_a \int_{M_4 \times \Pi_a} C_7 + \sum_a N_{a^*} \int_{M_4 \times \Pi_{a^*}} C_7 - 4 \times 8 \int_{M_4 \times \Pi_{O_6}} C_7. \quad (6.12)$$

La única contribución a C_7 del término cinético para G_2 vendrá de $dC_7 \wedge (mB_2 + \bar{F}_2)$, donde $*F_2 = F_8 = dC_7$. Realizando una integración por partes, se puede expresar este

³El resto recibe correcciones por el mecanismo de Green-Schwarz[28]. Así, los bosones asociados adquirirán masas de Stueckelberg, dando simetrías de gauge globales. En particular, la que está asociada a Q_a está dada por 3B, donde B es el número bariónico, y Q_d es el número leptónico. Por lo tanto, estos modelos predicen la estabilidad del protón.

término como $C_7 \wedge (m\bar{H}_3 + d\bar{F}_2)$. La dependencia de los flujos entrará en este término, con las expresiones 5.7 y 5.6.

El segundo y tercer términos representan el acomplamineto de la forma C_7 a las D6 branas y su imágenes ante los planos orientifolds, mientras que el último término es el acomplamiento de C_7 a cada O_6 (recordemos que teníamos 8 planos, con carga -4 relativa a D_6).

Así, de las ecuaciones de movimiento para C_7 se llega a las ecuaciones de tadpole:

$$\begin{aligned} \sum_a N_a n_a^{(1)} n_a^{(2)} n_a^{(3)} + \frac{1}{2}(h_0 m + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3) &= 16, & (6.13) \\ \sum_a N_a n_a^{(1)} m_a^{(2)} m_a^{(3)} + \frac{1}{2}(m h_1 - q_1 b_{11} - q_2 b_{21} - q_3 b_{31}) &= -16, \\ \sum_a N_a m_a^{(1)} n_a^{(2)} m_a^{(3)} + \frac{1}{2}(m h_2 - q_1 b_{12} - q_2 b_{22} - q_3 b_{32}) &= -16, \\ \sum_a N_a m_a^{(1)} m_a^{(2)} n_a^{(3)} + \frac{1}{2}(m h_3 - q_1 b_{13} - q_2 b_{23} - q_3 b_{33}) &= -16, \end{aligned}$$

donde se ha usado la ecuación 5.33 para calcular $d\bar{F}_2$.

2) Condiciones de Supersimetría. Estamos interesados en soluciones supersimétricas tipo Minkowski. La primer condición impone que $D_\Phi W = 0$, mientras que si nuestro espacio es M_4 esto impone $V = 0$. El potencial escalar V es:

$$V = e^K (G^{m\bar{n}} D_m W \overline{D_n W} - 3 |W|^2). \quad (6.14)$$

Tendremos por lo tanto que $W = 0$ para Minkowski, y la condición de supersimetría se traduce en $\partial W / \partial \Phi = 0^4$, con $\Phi = S, T_i, U_i$.

Sin embargo, la configuración de D6 branas impone la restricción adicional 6.6 para supersimetría⁵, que se escribe nuevamente aquí:

$$\sum_i \tan^{-1} \left(\frac{m_a^i A_i}{n_a^i} \right) = \pi. \quad (6.15)$$

Para compatibilizar ambas soluciones en el modelo mostrado en la sección anterior 6.1, debemos entonces pedir que ambas condiciones se cumplan. Sin embargo, la

⁴Estas condiciones se deberían interpretar como valores de espectación $\langle W \rangle = 0$ y $\langle \partial W / \partial \Phi \rangle = 0$. Sin embargo, para simplificar la notación, supondremos los vevs implícitamente en lo que sigue.

⁵Esta relación no ha sido tenida en cuenta en la literatura.

restricción sobre las áreas 6.7, 6.8 impone restricciones sobre los valores reales de los moduli T_i . Como se mencionó a continuación de la ecuación 5.5, las partes reales de T_i están dadas por las áreas de los toros $T_{(i)}^2$, de la forma $\text{Re}(T_i) = t_i = R_x^i R_y^i = A_i$. Por lo tanto, en concordancia con 6.7, 6.8, tomaremos en el superpotencial $t_2 = t_3 = t$, y elijiremos los flujos de forma tal que T_1 no aparezca, ya que su parte real t_1 puede ser obtenida de t a partir de la ecuación 6.8.⁶

Por lo tanto, teniendo en cuenta el punto 2), junto con las condiciones de Bianchi sobre los flujos geométricos 5.37, se llega que el superpotencial W mas general posible es:

$$W = e_0 + ih_0S + ie_2T_2 + ie_3T_3 - a_2ST_2 - a_3ST_3 - \quad (6.16)$$

$$- \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & -b_{32}\frac{a_2}{a_3} & b_{23} \\ b_{21}\frac{a_3}{a_2} & b_{32} & -b_{23}\frac{a_3}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} - \quad (6.17)$$

$$-i \sum_{i=1}^3 h_i U_i - q_1 T_2 T_3.$$

Vemos que los flujos $q_2, q_3, b_{11}, b_{12}, b_{13}, m$ y a_1 se han puesto cero, para que T_1 no aparezca en la integral⁷. Por otro lado, se ha escrito en forma matricial el acoplamiento de T_i con U_i , utilizando una matriz para los coeficientes b_{ij} mas general, compatible con las condiciones de Bianchi 5.37, y pidiendo que $a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$.

La notación que utilizaremos es: $\text{Re}(S) = s, \text{Im}(S) = \bar{s}, \text{Re}(T_2) = t, \text{Re}(T_3) = t, \text{Im}(T_2) = v_2, \text{Im}(T_3) = v_3, \text{Re}(U_i) = u_i, \text{Im}(U_i) = \bar{u}_i$.

Recordemos que $\text{Re}(T_2) = t = \text{Re}(T_3) = t$. En principio, se pueden distinguir dos casos, según se tome $v_2 = v_3$ y $v_2 \neq v_3$.

1) Caso $v_2 = v_3$. Con esta condición, $T_2 = T_3$, por lo que por consistencia $a_2 = a_3$. Sin embargo, de analizar la parte real de la condición de supersimetría $\partial W / \partial S = 0$, se llega a $t = 0$.

2) Caso $v_2 \neq v_3$. En este caso se da que es posible estabilizar v_2 y v_3 en forma exacta, en términos de los flujos, sin quedar direcciones planas en el resto de los moduli.

⁶En caso contrario, puede que aparezcan algunas incompatibilidades entre la solución estabilizada por flujos y la condición sobre las áreas 6.8, ya que en general las soluciones obtenidas estabilizando los moduli son relaciones del tipo algebraicas, mientras que la dada por 6.8 no lo es.

⁷Al pedir que T_1 no aparezca en W estamos haciendo a primera vista una simplificación, ya que si bien t_1 puede ser obtenido de t , no estamos incluyendo $\text{Im}(T_1) = v_1$ que bien podría ser distinto de $\text{Im}(T_2)$ y $\text{Im}(T_3)$. Sin embargo, de analizar las condiciones de Bianchi 5.37, para que a_2 y a_3 sean distintos de cero (y uno así pueda incluir al moduli S), necesariamente $b_{1i} = 0, i = 1, 2, 3$, con lo cual v_1 no estará incluido en el superpotencial.

Imponiendo la condición de supersimetría $\partial W/\partial\Phi = 0$, se estabilizan las partes imaginarias:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{a_2} + \frac{h_1}{b_{21}} \right), \\ v_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{b_{21}} - \frac{h_0}{a_2} \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

mientras que se establecen las siguientes condiciones para los flujos:

$$a_2 = -a_3, \quad b_{32} = b_{23} = 0, \quad q_1 = 0, \quad e_2 = -e_3, \quad h_2 = h_3 = 0. \quad (6.19)$$

Al mismo tiempo, al imponer la condición de Minkowski $W = 0$ se llegan a condiciones para los flujos, de forma tal de evitar que $u_1 = 0$ ⁸. Estas condiciones son:

$$\begin{aligned} b_{21}h_0 + a_2h_1 &= 0, \\ e_2h_0 &= e_2a_2. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Usando estas condiciones, junto con las ecuaciones obtenidas para v_1 y v_2 , llegamos a la expresión final:

$$v_2 = 0, \quad (6.21)$$

$$v_3 = \frac{h_1}{b_{21}}, \quad (6.22)$$

mientras que el resto de los moduli queda inderterminado.

Por lo tanto, este resultado nos dice que:

$$\begin{aligned} B_{25} &= 0, \\ B_{36} &= -\frac{h_1}{b_{21}}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

según las expresiones en 5.3. Por lo tanto, a diferencia de modelos anteriores que se han estudiado en la literatura, es posible fijar exactamente dos moduli en el caso de Minkowski⁹.

⁸Recordemos que u_1 está definido en términos de radios de los toros, por lo que si u_1 fuese cero, los toros tendrían algunas de sus dimensiones nulas.

⁹En general, para el caso de Minkowski, se obtienen sólo relaciones lineales entre los moduli.

Un aspecto importante de este resultado es que no contribuye a las ecuaciones de tadpole 6.13 por lo que la solución es consistente.

Cabe recalcar que en este capítulo nos hemos restringido a soluciones supersimétricas en Minkowski, en donde se ha compatibilizado la condición que proviene de branas supersimétricas ($t_2 = t_3 = t$), junto con la que proviene del superpotencial. Esto representa una restricción muy fuerte para otros modelos MSSM a nivel de branas, sin flujos, y muchas veces las soluciones obtenidas violan la conservación de la carga de RR.

Sin embargo, en caso que no se tenga en cuenta el vínculo $t_2 = t_3 = t$, es posible obtener varios superpotenciales, que fijan en general combinaciones lineales de los moduli. Algunos de ellos pueden encontrarse en [22]. Un ejemplo de un potencial tal para el orientifold orbifold $T^6/Z_2 \times Z_2$ es:

$$W = e_0 - T_2(a_2 S + b_{21} U_1 - i e_2) - T_3(a_3 S + b_{31} U_1 - i e_3) - i h_1 U_1 + i h_0 S, \quad (6.24)$$

donde debido a que $m = q_i = 0$, este potencial no contribuye a los tadpoles.

Imponiendo las siguientes condiciones sobre los flujos:

$$e_2 a_3 = e_3 a_2, \quad h_0 b_{31} = -a_3 h_1, \quad h_0 b_{21} = -a_2 h_1, \quad h_0 e_2 = e_0 a_2, \quad (6.25)$$

se llega la siguiente relación entre los moduli[22]:

$$h_0 = a_2 v_2 + a_3 v_3, \quad e_2 = a_2 \bar{s} + b_{21} \bar{u}_1, \quad t_3 = -\frac{b_{21} t_2}{b_{31}}, \quad s = -\frac{b_{21} u_1}{a_2}. \quad (6.26)$$

Vemos que en este modelo de Minkowski no supersimétrico, se establecen relaciones lineales entre los moduli.

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de investigación

En el presente trabajo hemos avanzado en los modelos de compactificación con flujos. Los mismos han recibido gran atención en la literatura, y muchos de los conceptos ya desarrollados en estos modelos han sido expuestos. Hemos visto que los flujos se presentan como un método novedoso en la estabilización de los moduli. Vimos cómo se implementan en teorías tipo IIB y en teorías tipo IIA, tanto a nivel de supergravedad como así también mediante la formulación con superpotenciales. En ambas formulaciones se obtiene un potencial escalar, que al ser minimizado permite en principio estabilizar los moduli.

Vimos que en teorías tipo IIA es posible proponer superpotenciales que involucren a todos los moduli, mientras que en teorías IIB el superpotencial depende sólo de los moduli de estructura compleja U_i .

Hemos analizado un ejemplo de un orientifold supersimétrico $T^6/Z_2 \times Z_2$, y vimos que es posible fijar las partes imaginarias de T_2 y T_3 en términos únicamente de flujos, mientras que el resto queda indeterminado. Además, esta fijación se realizó teniendo en cuenta la condición de supersimetría que proviene tanto de las branas (que establecen relaciones entre las áreas de los toros de T^6) como del superpotencial. Esta condición, junto con el resultado que obtuvimos, no ha sido estudiada en trabajos anteriores.

Cabe preguntarse si es posible encontrar otros modelos MSSM en branas, distintos al orientifold estudiado, cuyas ecuaciones de tadpole queden fijadas por los flujos, y donde se pueda compatibilizar las condiciones de supersimetría proveniente de las branas, dado por 6.6, junto con la que surge del superpotencial. En general, esto resulta difícil, ya que la restricción de supersimetría es muy fuerte, y las ecuaciones de tadpole no se satisfacen.

Es posible aún incluir en estos modelos otros tipos de flujos, llamados no geométricos. Estos fueron propuestos inicialmente en [13], y analizamos en mayor profundidad en [30]. Básicamente, estos flujos se obtiene de aplicar la operación de T-dualidad varias

veces, a lo largo de direcciones a, b, c en las cuales las formas de NSNS en teoría IIB son tales que $[\bar{h}_3]_{abc} \neq 0$.

En el ejemplo dado en 5.2.1, este último caso se evitó, ya que T dualizamos a lo largo de x^1, x^2 y x^3 , mientras que las componentes $[\bar{h}_3]_{abc}$ de la forma \bar{h}_3 dependían a lo sumo de un x^i .

Sin embargo, es posible generalizar esto. En particular, si partimos de una teoría tipo IIB en un toro factorizable T^6 , con flujos de NSNS del tipo $[\bar{h}_3]_{abc}$, al T dualizar una vez a lo largo de la dirección a por ejemplo, se obtiene una teoría tipo IIA, cuyo espacio deja de ser un toro factorizable, pasa a un toro “twisted” (como vimos en 5.2.1), y donde la métrica se modifica adquiriendo un término del tipo $(dx^a - f_{bc}^a dx^b)^2$, siendo f_{bc}^a el flujo geométrico. Si T dualizamos ahora en la direcciones b y c , es posible obtener en principio nuevos términos de la forma Q_c^{ab} y R^{abc} . Estos nuevos “flujos”, llamados no geométricos, en principio tendrían que estar presentes en teorías tipo IIA, ya que provienen de aplicar la simetría exacta de T dualidad sobre teorías IIB. En forma esquemática, los flujos que se obtienen al T dualizar reiteradas veces pueden resumirse como:

$$[\bar{h}_3]_{abc} \xleftarrow{T_a} f_{cb}^a \xleftarrow{T_b} Q_c^{ab} \xleftarrow{T_c} R^{abc}. \quad (7.1)$$

Para estos flujos no geométricos, es posible plantear condiciones de Bianchi similares a 5.37, e inclusive generalizar las expresiones de los superpotenciales W_Q y W_K en 5.13 y 5.12, de forma tal de incluirlos. Se puede ver que se obtienen así polinomios de hasta orden cuatro en los moduli. Además estos nuevos flujos también contribuyen a las ecuaciones de tadpole.

Sin embargo, la interpretación de estos flujos aún está en discusión. No queda claro en qué clase de espacios se realiza la compactificación al incluir los flujos Q_c^{ab} y R^{abc} , y se desconoce una descripción geométrica y topológica de estos espacios (de ahí el nombre de flujos no geométricos). Inclusive, no está claro si es válido aplicar la aproximación de supergravedad en este contexto, válida sólo cuando los moduli adquieren masas mucho menores que los estados masivos que surgen de excitaciones de las cuerdas (como ser modos de Kaluza Klein y de winding) que son despreciados al realizar la reducción dimensional. Pero, al incluir flujos no geométricos, es posible ver que los modos de propagación de la cuerda usuales se mezclan con los modos winding[13].

Si bien el presente trabajo se centró en espacios de compactificación toroidales, el caso general de Calabi - Yau con flujos es aún mas desconocido. Hay mucha actividad alrededor de este tema. Se ha visto que la implementación de T dualidad y simetría espejo en estos espacios con flujos trae como resultado variedades que no son complejas ni Ricci planas, y con holonomía distinta a la de $SU(3)$ (ver por ejemplo [31]).

Con seguridad, el estudio de compactificación con flujos, su relación con T dualidad y simetría espejo, ampliará los conceptos actuales tanto en el ámbito de las Supercuerdas como en el de las Matemáticas.

Apéndice A

Espacio de Moduli de variedades Calabi Yau

En este apéndice daremos una descripción de cómo pueden obtenerse las expresiones 5.3 para los moduli del toro, dentro de un contexto general de compactificaciones en espacios de Calabi Yau. Para una descripción mas detallada puede consultarse [10], [24], [8] y [9].

Una variedad de Calabi Yau puede definirse como una variedad de Kähler compacta que admite una métrica que es Ricci plana. A su vez, una variedad de Kähler es una variedad compleja que admite una $(1,1)$ forma cerrada $J = ig_{\mu\bar{\nu}}dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}}$, donde las partes puras de la métrica $g_{\mu\bar{\nu}}$ son cero¹. Una característica de estas métricas es que pueden definirse en forma local en una carta U_i , mediante una función K_i llamada potencial de Kähler, definida por $g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} K_i$

Shing-Tung Yau probó que dada una variedad de Kähler M con una forma de Kähler J_0 existe una única métrica de Kähler Ricci plana para M , cuya forma de Kähler asociada J está en la misma clase de cohomología que J_0 .

De esta forma, el conjunto de parámetros (llamado espacio de moduli) que describen a las variedades de Calabi Yau puede tomarse como el espacio de parámetros de métricas de Kähler, Ricci planas. Este espacio de parámetros puede ser obtenido pensando en variaciones infinitesimales $g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}$ de una métrica Ricci plana $g_{\mu\nu}^0$:

$$R_{\mu\nu}(g^0) = 0; R_{\mu\nu}(g^0 + \delta g) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Estas consideraciones habían sido obtenidas en la sección 4.1 pensando en el contexto del gravitón. Cualquier métrica $g_{\mu\nu}$ relacionada con $g_{\mu\nu}^0$ mediante un difeomorfismo

¹El toro es un caso especial de variedad compleja y tiene dimensión compleja $\dim_{\mathbb{C}} = 1$. En ese caso, se pueden definir coordenadas en el toro de forma tal que $J = Adz \wedge d\bar{z}$, con A el área del toro. Comparar con la discusión a continuación de 5.5.

será Ricci plana. Por ende, para dejar de lado los casos en cual cuales $\delta g_{\mu\nu}$ sea generada por un cambio de coordenadas, imponemos la condición $\nabla^\mu \delta g_{\mu\nu} = 0$. Esto es análogo a una fijación de gauge como en Electromagnetismo. Esta condición, junto con la ecuación A.1, da como resultado la condición de Lichnerowicz:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \delta g_{\rho\sigma} + 2R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Las variaciones del tipo $\delta g_{i\bar{j}}$ y δg_{ij} pueden desacoplarse, y estudiarse por separado. Se pueden asociar (1,1) formas armónicas a las variaciones del tipo $\delta g_{i\bar{j}}$ que satisfagan A.2, mediante:

$$i\delta g_{i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}. \quad (\text{A.3})$$

Con las variaciones de la métrica del tipo δg_{ij} que satisfagan A.2 pueden asociarse (2,1) formas armónicas dadas por:

$$\Omega_{ijk} \delta g_{\bar{g}}^k dz^i \wedge dz^j \wedge dz^{\bar{g}}, \quad (\text{A.4})$$

donde Ω es la única forma (3,0) holomórfica. El origen de la misma puede describirse

brevemente de la siguiente forma. En general, estos espacios tienen holonomía contenida en $SU(N)$. Sin embargo, se suele definir a las Calabi Yau como aquellas cuya holonomía es precisamente $SU(N)$. Para variedades de Kähler compactos con holonomía $SU(N)$ siempre es posible definir una forma $(n, 0)$ Ω , llamada forma de volumen, que no se anula en todo el espacio, y además su derivada covariante es nula. Es posible demostrar que esta forma es holomórfica y armónica. Una manera de ver que Ω está definida en todo el espacio es definiéndola localmente sobre un punto de la variedad M , y luego trasladarla por transporte paralelo a todo M . Dado que Ω es un singlete ante $SU(N)$, la misma queda invariante al trasladarla a lo largo de una curva cerrada.

Para los casos de interés fenomenológico, las variedades de Calabi Yau tienen dimensión compleja 3 ($\dim_{\mathbb{R}} = 6$), con lo cual el grupo de holonomía será $SU(3)$, y tendremos que Ω será una (3,0) forma holomórfica.

Por lo tanto, de las ecuaciones anteriores se ve que el espacio de moduli de las variedades de Kähler está dado por $H^{(1,1)}(M, \mathbb{Z}) \oplus H^{(2,1)}(M, \mathbb{Z})$. En particular, las variaciones dadas por $\delta g_{\mu\nu}$ están relacionadas con modificaciones de la estructura compleja de la variedad M . En efecto, la métrica $g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}$ es una de Kähler en una variedad M , cercana a la original $g_{\mu\nu}^0$. Por lo tanto, debe existir un sistema de coordenadas en el cual las partes puras de la métrica $g_{\mu\nu}$ sean cero. Bajo una transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow x^\mu + f^\mu(x)$ las variaciones de la métrica transforman de acuerdo a

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} - \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\mu} g_{\sigma\nu} - \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma}. \quad (\text{A.5})$$

Si $f^\mu(x)$ es holomórfica entonces la estructura de índices de δg_{ij} quedará invariante. Por ende, la parte pura de las variaciones puedan ser eliminadas por una transformación de coordenadas, pero no por una transformación holomórfica de coordenadas. Por ende, cambios en las partes puras de la métrica δg_{ij} corresponden precisamente a cambios en la estructura compleja.

Por otro lado, debido a que la forma de Kähler $J = ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}}$ pertenece a $H^{(1,1)}(M)$, las variaciones del tipo mixtas $\delta g_{i\bar{j}}$ corresponderán exactamente a las variaciones de cohomología no triviales en la forma de Kähler de la variedad.

Por lo que para resumir, el espacio de moduli \mathcal{M} de una variedad de Calabi-Yau se puede descomponer como:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^K \times \mathcal{M}^{EC}, \quad (\text{A.6})$$

donde \mathcal{M}^K es el espacio de las formas de Kähler, que está en correspondencia biunívoca con las formas armónicas $H^{(1,1)}(M, \mathbb{Z})$ de la variedad M , mientras que \mathcal{M}^{EC} es el espacio de moduli de las estructuras complejas, en relación biunívoca con el espacio de las formas armónicas $H^{(2,1)}(M, \mathbb{Z})$.

Un resultado interesante es que en cada uno de estos espacios de moduli es posible definir una métrica, y de hecho el espacio resultante es de Kähler.

Veamos primero el caso de las $(1,1)$ formas, que parametrizan el espacio \mathcal{M}^K de las formas de Kähler. Tomemos ω_A , con $A = 1, \dots, h_{11}$ una base para $H^{(1,1)}(M, \mathbb{Z})$. En ese caso, es posible escribir a J y al tensor B en esta base, de la forma:

$$J_C = B + iJ = i \sum_{A=1}^{h_{11}} T_A \omega_A. \quad (\text{A.7})$$

J_C se conoce como forma de Kähler complejificada. Dado que B y J son reales, estarán parametrizados por las partes reales e imaginarias de T_A .

T_A son los moduli de Kähler. Su expresión general está dada por:

$$T_A = -i \int_M J_C \wedge \tilde{\omega}_A, \quad (\text{A.8})$$

con $\tilde{\omega}_A$ las formas duales a ω_A . La métrica de Kähler en el espacio de moduli \mathcal{M}^K está dada por:

$$G_{AB} = -3! \frac{\partial}{\partial T^A} \frac{\partial}{\partial T^B} \log V, \quad (\text{A.9})$$

donde V es el volumen de la variedad de Calabi Yau, dada por $V = 1/3! \int_M J \wedge J \wedge J$. Por lo tanto, vemos que el volumen es el potencial de Kähler.

Para el caso del espacio de las estructuras complejas, dadas por las (2,1) formas, este se puede caracterizar por un conjunto de parámetros z^α , $\alpha = 1, \dots, h_{2,1}$. En función de estos parámetros, la métrica $G_{\alpha\bar{\beta}}$ del espacio de moduli \mathcal{M}^{EC} viene dado por:

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \log \left(i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} \right), \quad (\text{A.10})$$

donde $\bar{\Omega}$ indica la conjugada de Ω . Vemos por lo tanto que $-\log \left(i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} \right)$ corresponde al potencial de Kähler.

Si tomamos una base canónica (α_a, β^b) para $H^3(M, \mathbb{Z})$, tal que $\int_M \alpha_a \wedge \beta^b = \delta_a^b$, los períodos de la forma Ω están definidos por:

$$Z^a = \int_M \Omega \wedge \beta^a, \quad \mathcal{F}_a = \int_M \Omega \wedge \alpha_a. \quad (\text{A.11})$$

Se puede ver que \mathcal{F}_a y Z^a no son independientes, y la relación entre ellos está dada por [10]:

$$\mathcal{F}_a = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z^a}. \quad (\text{A.12})$$

Es posible escribir el potencial de Kähler K en función de \mathcal{F} y Z^a , de la forma:

$$K_{EC} = -\log \left(i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) = -i \left(\bar{Z}^a \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z^a} - Z^a \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{Z}^a} \right). \quad (\text{A.13})$$

Recordemos sin embargo que nuestro trabajo se centró en orientifolds del tipo $\mathfrak{S} = \Omega_P(-1)^{F_L} \sigma$, con σ una involución sobre la variedad de Calabi Yau, $\sigma^2 = 1$. Ante la acción de este operador el espacio de las formas armónicas queda dividido en formas pares e impares ante σ :

$$H^P(M) = H_+^P \oplus H_-^P. \quad (\text{A.14})$$

En particular, eligiendo $\tilde{\omega}_a$ una base de formas para $H_-^{(1,1)}$, se llega a que la expresión para los moduli de Kähler T_i es:

$$T_a = -i \int_M J_C \wedge \tilde{\omega}_a. \quad (\text{A.15})$$

Sin embargo, la geometría del espacio de Kähler \mathcal{M}^{EC} es mas complicado, ya que la involución es no holomórfica y modifica la estructura compleja del espacio de las

deformaciones de la estructura compleja. La forma $(3,0)$ holomorfa Ω no es invariante ante σ , ya no posee derivada covariante nula, y debe ser reemplazada por [20]:

$$\Omega_C = C^{(3)} + i \operatorname{Re}(C\Omega),$$

donde la 3 forma $C^{(3)}$, par ante σ , se expande en la base a_α de $H_+^{(3)}$, $C^{(3)} = \xi^\alpha a_\alpha$, y donde C está dado por:

$$C = e^{-\phi_4} e^{K_{EC}/2},$$

donde el potencial de Kähler K_{EC} está dado por la expresión A.13.

Los moduli de estructura compleja Z^a para el caso anterior, en A.11 vienen dados ahora por U_i :

$$U_i = i \int \Omega_C \wedge \beta_i, \tag{A.16}$$

donde β_i expande una base para $H_+^{(3)}$. En particular, para $i = 0$ se obtiene el moduli S .

Estas expresiones para U_i y T_a son las que hemos particularizado en el caso del toro en 5.3, y sobre las cuales centramos nuestra atención al estudiar su estabilización.

Bibliografía

- [1] J. Polchinski, *String Theory*, Vol 1.
- [2] J. Polchinski, *String Theory*, Vol 2.
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Vol. 1 y Vol 2.
- [4] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*.
- [5] D. Bailin, A Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing.
- [6] G. Aldazabal, *D=4 Orientifolds Models*. Notas para la Escuela Latinoamericana de Cuerdas, Méjico (Octubre - Noviembre 2000).
- [7] S. Elitzur, N. Malkin, *Fermionic Klein bottle*, Phys. Rev. D, Vol. 42, Num. 4, pag. 1159.
- [8] T. W. Grimm, J. Louis, *The effective action of Type IIA Calabi-Yau orientifolds*, hep-th 0412277
- [9] A. Font, *Introduction to String Compactification*, Lect. Notes Phys. 668:101-181, 2005.
- [10] P. Candelas, X. C. de la Ossa, *Moduli Space of Calabi Yau Manifolds*, Nucl. Phys. B, Vol. B355, No. 2, pag. 455-481.
- [11] M Bodner, A. C. Cadavid, S Ferrara, *(2,2) Vacuum configurations for Type IIA superstrings: N=2 supergravity Lagrangians and algebraic geometry*, Class. Quantum Grav. 8 (1991) 789-807.
- [12] S. B. Giddings, S. Kachru, J. Polchinski, *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, Phys. Rev D 66 (2002), 106006, arXiv:hep-th/0105097.
- [13] S. Kachru, M. Schulz, P. K. Tripathy, S. Trivedi, *New Supersymmetric String Compactifications*, arXiv:hep-th/0211182.

- [14] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. 75, 4724 (1995), arXiv:hep-th/9510017.
- [15] A. Micu, *Background Fluxes in Type II String Compactifications*, DESY-THESIS-2003-020, Jul 2003.
- [16] S. Kachru, M. Schultz, S. Trivedi, *Moduli Stabilization from Fluxes in a Simple Type IIB Orientifold*, arXiv:hep-th/0201028.
- [17] J. F. G. Cascales, A. M. Uranga, *Chiral 4d string vacua with D-branes and NSNS and RR fluxes*, arXiv:hep-th/0303024.
- [18] J.F.G. Cascales, *Flux Compactifications: Theory and Model Building*. Tesis Doctoral. Febrero 2005.
- [19] S. Gukov, C. Vafa, E. Witten, *CFT's From Calabi - Yau Four-folds*, Nucl. Phys. B584 (2000) 69, arXiv:hep-th/0202208.
- [20] T. W. Grimm, J. Louis, *The effective action of Type IIA Calabi-Yau orientifolds*, arXiv:hep-th/0412277.
- [21] S. Gukov, *Solitons, superpotentials and calibrations*, Nucl. Phys. B574 (2000) 169, arXiv:hep-th/9911011.
- [22] P. G. Cámara, A. Font, L. E. Ibáñez, *Fluxes, moduli fixing and MSSM-like vacua in a simple IIA orientifold*, arXiv:hep-th/0506066.
- [23] N. Kaloper, R. C. Myers, *The $O(dd)$ Story of Massive Supergravity*, arXiv:hep-th/9901045.
- [24] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Grad. Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing.
- [25] G. Villadoro, F. Zwirner, *$N=1$ effective potential from dual type IIA D6/O6 orientifolds with general fluxes*, arXiv:hep-th/0503169.
- [26] M. Cvetič, G. Shiu, A. Uranga, *Chiral Four-Dimensional $N=1$ Supersymmetric Type IIA Orientifolds from Intersecting D6-Branes*, arXiv:hep-th/0107166.
- [27] D. Cremades, L. E. Ibáñez, F. Marchesano, *Yukawa couplings in intersecting D-brane models*, arXiv:hep-th/0302105.
- [28] F. Marchesano, G. Shiu, *Building MSSM Flux Vacua*, arXiv:hep-th/0409132.
- [29] M. M. S. Jabbari, *Classification of Different Branes at Angles*, arXiv:hep-th/9710121.

- [30] J. Shelton, W. Taylor, B. Wecht, *Nongeometric Flux Compactification*, arXiv:hep-th/0508133.
- [31] S. Gurrieri, J. L. Micu, D. Waldram, *Mirror Symmetry in Generalized Calabi-Yau Compactifications*, arXiv:hep-th/0211102.