

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**MÉTODOS DE TEORÍA DE CAMPOS A DENSIDAD  
FINITA**

**Mario Florencio Solís Benites**  
Maestrando

**Dr. Gonzalo Torroba**  
Director

**Miembros del Jurado**

Dr. César Fosco (Instituto Balseiro)  
Dra. Marina Huerta (Instituto Balseiro)  
Dra. Karen Hallberg (Instituto Balseiro)

Diciembre del 2016

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



A mi Padre

A mi madre, a mi hermano y a Liza



# Índice de contenidos

|   |           |
|---|-----------|
| Índice de contenidos  | v         |
| Resumen   | vii       |
| Abstract  | ix        |
| Introducción  | 1         |
| <b>1. La Teoría Cuántica de Campos no-relativista</b>                       | <b>5</b>  |
| 1.1. Campo Escalar Complejo no-relativista . . . . .                        | 5         |
| 1.2. Campo Fermiónico no-relativista . . . . .                              | 7         |
| 1.3. Campo Fermiónico no-relativista con simetría de Gauge $U(1)$ . . . . . | 10        |
| 1.4. Campo Fermiónico no-relativista en espacios curvos . . . . .           | 12        |
| 1.5. Ejemplos de Teorías no-relativistas en $2 + 1$ dimensiones . . . . .   | 14        |
| 1.5.1. Fermiones libres no-relativistas . . . . .                           | 14        |
| 1.5.2. Teoría no-relativista con campo de Gauge . . . . .                   | 14        |
| <b>2. La Teoría Cuántica de Campos sobre la Superficie de Fermi</b>         | <b>17</b> |
| 2.1. Campos libres a densidad finita . . . . .                              | 17        |
| 2.1.1. Campo complejo relativista . . . . .                                 | 18        |
| 2.1.2. Simetrías locales y fuentes externas . . . . .                       | 19        |
| 2.1.3. Fermiones relativistas . . . . .                                     | 19        |
| 2.1.4. Fermiones no-relativistas . . . . .                                  | 20        |
| 2.2. La superficie de Fermi para la teoría libre . . . . .                  | 20        |
| 2.2.1. La superficie de Fermi . . . . .                                     | 20        |
| 2.2.2. Límite ultrarrelativista ( $m \rightarrow 0$ ) . . . . .             | 21        |
| 2.2.3. Límite no-relativista . . . . .                                      | 21        |
| 2.3. Proyectores sobre la Superficie de Fermi . . . . .                     | 22        |
| 2.3.1. Fermiones relativistas . . . . .                                     | 22        |
| 2.3.2. Fermiones no-relativistas . . . . .                                  | 23        |
| 2.4. El Grupo de Renormalización esférico . . . . .                         | 24        |
| 2.4.1. La Teoría de Landau de los Líquidos de Fermi . . . . .               | 24        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>3. Más allá del Líquido de Fermi</b>                              | <b>27</b> |
| 3.1. Teoría clásica del RG esférico con bosones críticos . . . . .   | 28        |
| 3.2. Efectos cuánticos a 1-lazo . . . . .                            | 29        |
| 3.2.1. Corrección al propagador del bosón . . . . .                  | 30        |
| 3.2.2. Corrección al propagador del fermión con Landau Damping . . . | 32        |
| 3.3. Efectos cuánticos con bosones masivos . . . . .                 | 34        |
| 3.3.1. Solución numérica de la autoenergía del fermión . . . . .     | 36        |
| <br>   |           |
| <b>Conclusiones y direcciones futuras</b>                            | <b>39</b> |
| <br>   |           |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>41</b> |
| <br>   |           |
| <b>Agradecimientos</b>   | <b>43</b> |

# Resumen

En esta tesis desarrollamos métodos de teoría de campos para sistemas con una densidad de materia cuántica no trivial. Esto requiere nuevas técnicas que permitan comprender lo que sucede cuando el vacío trivial de la teoría relativista se reemplaza por un estado no-relativista.

La primera parte de la tesis se enfoca en obtener de manera sistemática la teoría de campos no-relativista. Para esto, partimos de la teoría relativista y deducimos una teoría efectiva válida para escalas de energía mucho menores que las masas de los campos. Se estudia primero el caso bosónico, donde se obtiene una teoría no-relativista con invariancia de escala tipo Lifshitz. A continuación, se consideran sistemas fermiónicos. Desarrollamos un nuevo método, basado en el uso de proyectores de energía, que nos permite obtener la teoría efectiva en  $D$ -dimensiones de espacio-tiempo. Como una aplicación importante, se consideran los efectos de campos externos electromagnéticos y gravitatorios sobre teorías no-relativistas, y se determinan las interacciones que estos producen.

La segunda parte de la tesis está dedicada a sistemas fermiónicos a densidad finita. Primero nos enfocamos en el caso de fermiones libres, y luego discutimos teorías interactuantes. En sistemas libres, generalizamos el método de los proyectores para incorporar la densidad finita, y así deducimos una teoría efectiva válida cerca de la superficie de Fermi. Este formalismo reproduce la teoría de Landau de líquidos de Fermi.

Finalmente, nos enfocaremos en sistemas interactuantes. Con el objetivo de modelar sistemas electrónicos fuertemente correlacionados, como los superconductores de altas temperaturas, estudiamos una superficie de Fermi acoplada a un bosón crítico. Este bosón aparece naturalmente en materia condensada como un parámetro de orden; en física de altas energías da lugar a un modelo efectivo de cromodinámica cuántica a densidad finita. Analizamos las correcciones cuánticas a un lazo, que nos permiten llegar a un non-Fermi liquid, similar a lo que se observa en puntos crítico cuánticos. A continuación, discutimos los efectos de introducir una masa bosónica; esto nos permitirá alejarnos del punto crítico y estudiar otras regiones del diagrama de fases de la teoría.

**Palabras clave:** TEORÍA DE CAMPOS A DENSIDAD FINITA, NON-FERMI LIQUID, GRUPO DE RENORMALIZACIÓN





# Abstract

In this thesis we develop quantum field theory methods for systems with a finite density of quantum matter. This requires new techniques in order to understand what happens when the trivial relativistic vacuum is replaced by a nonrelativistic state.

The first part of the thesis focuses on a systematic derivation of nonrelativistic field theory. To this aim, we start from the relativistic model and deduce an effective theory that is valid at energy scales much smaller than the masses of fields. We study first the bosonic case, where we obtain a nonrelativistic model with Lifshitz scale invariance. Next, we consider fermionic systems. We develop a new method, based on energy projectors, which allows us to calculate the effective theory in  $D$  spacetime dimensions. As an important application, we consider the effects of external electromagnetic and gravitational fields, and determine the interactions that these induce.

The second part of the thesis focuses on fermionic systems at finite density. First we discuss the free case, and then the interacting one. In free systems, we generalize the above method of projectors to incorporate finite density, and we thus determine an effective theory on the Fermi surface. This formalism reproduces Landau's theory of Fermi liquids.

Finally, we analyze interacting systems. With the goal of modelling strongly correlated electronic systems, such as high temperature superconductors, we study a Fermi surface coupled to a critical boson. This boson appears naturally in condensed matter systems as an order parameter; in high energy physics, it gives rise to an effective model of quantum chromodynamics at finite density. We analyze one loop quantum corrections, which produce a non-Fermi liquid similar to what is observed in quantum critical points. Afterwards, we discuss the effects of introducing a bosonic mass; this is used to move away from the critical point, and to study other regions of the phase diagram of the theory.

**Keywords:** QUANTUM FIELD THEORY AT FINITE DENSITY, RENORMALIZATION GROUP, NON-FERMI LIQUID



# Introducción

En la actualidad, los sistemas con muchos grados de libertad cuánticos han abierto nuevos retos a la física teórica. Estos tipos de sistemas tienen como característica especial, *poseer una densidad finita de materia*. Otros sistemas, aparte de poseer densidad finita son *no-relativistas*. Todos estos sistemas se encuentran en diferentes ramas de la física teórica, como en Altas Energías, Materia Condensada y Astrofísica. Por ejemplo, en física de altas energías, está el plasma de Quark-Gluón (QGP)[1], que aún sigue en investigación experimental en RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) . En astrofísica, hipotéticamente, se plantea la existencia de objetos muy densos o compactos, regidos por la teoría de cromodinámica cuántica (QCD) a alta densidad[2, 3]. Estos tipos de sistemas son muy interesantes, ya que en ellos es posible encontrar a los quarks como partículas libres, eludiendo el confinamiento.

Otra motivación importante para esta tesis viene de materia condensada. Estos sistemas poseen una característica diferente a los mencionados anteriormente: son sistemas no-relativistas. Para entender estos sistemas debemos generar una teoría que posea densidad finita de materia y que sea no-relativista. En esta tesis estudiaremos técnicas del *Grupo de Renormalización* [4] y las *Teorías Efectivas*[5, 6] aplicadas a modelos no-relativistas. Estas técnicas están desarrolladas en una teoría con temperatura nula ( $T = 0$ ) y permiten estudiar transiciones de fase. Conocidas como *Transiciones de Fase cuánticas* [7].

Tradicionalmente, las transiciones de fase se clasifican en dos tipos *primer orden* y *segundo orden*, esta última produce efectos interesantes y con gran interés en física teórica. Las transiciones de fase cuánticas ocurren en un *punto crítico cuántico* (QCP) y están asociadas a las fluctuaciones debidas al principio de incertidumbre de Heisenberg. El método que se utiliza para estudiar estas transiciones de fase es determinar *los grados de libertad de menor energía* y tener un valor fijo de ciertos parámetros experimentales como la presión o el doping. Una vez identificado el QCP, lo usaremos como punto de partida para investigar el diagrama de fase [8].

El grupo de renormalización y las transiciones de fase cuántica nos permiten entender el comportamiento de diversos sistemas de materia condensada como los *superconductores de alta temperatura* [9]. Estos tipos de sistemas no son descritos por una teoría de electrones libres no-relativista o débilmente interactuante como es la teoría

del Líquido de Fermi (FL), sino un por modelo donde los electrones se comportan *colectivamente*. Dichos sistemas se conocen como *sistema de electrones fuertemente correlacionados*.

Para estudiar estos sistemas usaremos la teoría cuántica de campos, que es una teoría relativista y bien desarrollada en el vacío de densidad de carga trivial ( $\langle \rho \rangle = 0$ ). Al agregar densidad finita de materia, el sistema no se encontrará en un vacío trivial ( $\langle \rho \rangle \neq 0$ ). La información de la densidad de materia está controlada por el *potencial químico*, que rompe explícitamente la simetría de Lorentz. Esto conduce al desarrollo de una teoría cuántica de campos a densidad finita [10–13].

## Estructura de la tesis y resultados originales

- Capítulo 1. Estudiaremos cómo obtener de manera sistemática el límite no-relativista en la teoría cuántica de campos. Empezaremos entendiendo la *descomposición de modos* para el caso más sencillo, un campo escalar libre masivo. Posteriormente, extender esas ideas a un campo fermiónico. Al extender la descomposición de modos al caso fermiónico, desarrollaremos un **nuevo método**, la *descomposición mediante proyectores de energía* (1.2.6), sección 1.2. Este método es general, siendo independiente de la dimensión y la representación de las matrices de Dirac. Aplicaremos este nuevo método a una teoría para fermiones masivos libres, para luego someter el sistema a un campo electromagnético externo y al campo gravitatorio.

**Los principales resultados** serán, un término de acoplamiento tipo-Pauli proporcional a  $S_{ij}F_{ij}$  (1.3.7) y un acoplamiento con el escalar de curvatura  $R\eta^\dagger\eta$  (1.4.9), respectivamente.

- Capítulo 2

Estudiamos teorías a densidad finita. Incluir una densidad finita de materia en el sistema, es exigir que el valor de expectación de una carga conservada sea distinto al trivial. Comenzamos analizando el caso más simple, fermiones libres relativistas o no-relativistas con masa  $m$ . En el caso relativista, añadir un potencial químico rompe la simetría explícita del grupo de Lorentz; también, apreciaremos que el término del potencial químico es idéntico a añadir una componente temporal de un campo de gauge. Para comprender los cambios que produce el potencial químico sobre la teoría, analizaremos su relación de dispersión, donde el cambio más significativo es tener  $p_0 = 0$  para una superficie en espacio de momento  $\vec{p}$ . Esto se conoce como la *superficie de Fermi*.

**Como resultado original** del capítulo, modificaremos los proyectores para in-

cluir los efectos del potencial químico, sección 2.3.

- Capítulo 3

El capítulo final de la tesis está dedicado al estudio de sistemas fermiónicos interactuantes. Estudiaremos un modelo para dichos sistemas, basados en una superficie de Fermi acoplada a un bosón. Empezaremos entendiendo el sistema a  $T = 0$  donde encontramos un punto fijo conocido como *punto crítico cuántico* (QCP por sus siglas en inglés) y a este tipo de transiciones de fase se conoce como *transición de fase cuántica*. Para conseguir este punto fijo, la masa del bosón tiene que ser ajustada a cero ( $m = 0$ ); esto se conoce como *bosón crítico* y genera una autointeracción entre los pares de Cooper que aumenta hacia el infrarrojo (bajas energías). Esta teoría es un ejemplo de un sistema de *electrones fuertemente correlacionados*, sección 3.1.

Analizaremos la corrección a 1-lazo, sección 3.2, del diagrama asociado a la polarización de vacío, donde obtenemos un nuevo régimen, que está asociado al amortiguamiento de Landau o *Landau Damping*, sección 3.2.1. Así, obtenemos una corrección al propagador del bosón que cambia radicalmente la dinámica. Con este propagador, estudiaremos la corrección sobre la autoenergía del fermión y como nuevo resultado, obtenemos una dimensión anómala. Esto se denomina *Non-Fermi Liquid* (NFL), sección 3.2.2.

Terminaremos el capítulo, presentando **resultados originales** de un Non-Fermi Liquid donde el bosón es masivo, alejándonos ligeramente del QCP, sección 3.3. También presentamos una solución numérica e interpolación para la autoenergía del fermión, sección 3.3.1.



# Capítulo 1

## La Teoría Cuántica de Campos no-relativista

En este capítulo estudiaremos cómo obtener de manera sistemática el límite no-relativista en la teoría cuántica de campos. Desarrollaremos un método sistemático para identificar y obtener los grados de libertad adecuados a escalas de baja energía. Las técnicas aquí desarrolladas serán útiles en capítulos posteriores, por ejemplo, en teorías a densidad finita de materia.

Estamos interesados en el estudio de fermiones, pero empezaremos entendiendo la *descomposición de modos* para el caso más sencillo, un campo escalar libre masivo. Posteriormente, extender esas ideas a un campo fermiónico. Al extender la descomposición de modos al caso fermiónico, desarrollaremos un nuevo método, *la descomposición mediante proyectores de energía*. Este método es general, siendo independiente de la dimensión y la representación de las matrices de Dirac. Aplicaremos este nuevo método a una teoría para fermiones masivos libres, para luego someter el sistema a un campo electromagnético externo y al campo gravitatorio. Los principales resultados serán, un término de acoplamiento tipo-Pauli proporcional a  $S_{ij}F_{ij}$  y un acoplamiento con el escalar de curvatura  $R\eta^\dagger\eta$ , respectivamente. Como parte final del capítulo, se muestran los resultados obtenidos para el caso particular en  $2 + 1$  dimensiones.

### 1.1. Campo Escalar Complejo no-relativista

Consideremos un sistema dado por un campo escalar complejo no interactuante  $\phi(x, t)$ , con masa  $m$  en  $D = d + 1$  dimensiones espacio-temporales de Minkowski  $(+, -, -, -)$ . Descrito por la acción siguiente

$$S[\phi(x, t)] = \int d^D x \mathcal{L}[\phi(x, t)] = \int d^D x [-\phi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi] . \quad (1.1.1)$$

Esta teoría posee un espectro de energía  $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ , que es la relación de dispersión usual de relatividad especial. Como buscamos la teoría no-relativista válida para  $|\vec{p}| \ll m$ , el límite correspondiente sobre la relación de dispersión es

$$E \approx \pm \left( m + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \right), \quad (1.1.2)$$

donde  $m$  es la masa (o energía) en reposo. Para construir la teoría efectiva de bajas energías, necesitamos eliminar esta contribución ultrarrelativista. Proponemos la descomposición de la forma

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ e^{-imt} \eta(x, t) + e^{imt} \chi^\dagger(x, t) \right]. \quad (1.1.3)$$

El factor  $1/\sqrt{2m}$  es para que el término cinético en la lagrangiana no-relativista sea canónico. El término  $e^{\pm imt}$  contiene la contribución de alta energía, los campos  $\eta$  (partícula) y  $\chi$  (antipartícula) son los modos de baja energía. Esta descomposición se puede relacionar con la descomposición de los campos en modos de Fourier de los operadores de aniquilación y destrucción usual ( $\phi(x, t) \sim \int e^{-ipx} \hat{a}_p + \int e^{ipx} \hat{b}_p^\dagger$ ).

Si aplicamos la descomposición de forma explícita en la lagrangiana (1.1.1), nos quedará

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\phi(x, t)] &= -\frac{1}{2m} (\eta^\dagger \partial_0^2 \eta + \chi \partial_0^2 \chi^\dagger) + i\eta^\dagger \partial_0 \eta - i\chi \partial_0 \chi^\dagger + \frac{1}{2m} (\eta^\dagger \nabla^2 \eta + \chi \nabla^2 \chi^\dagger) + \\ &+ e^{2imt} O(\eta^\dagger, \chi^\dagger) + e^{-2imt} O(\eta, \chi), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

donde  $O(\eta^\dagger, \chi^\dagger)$  y  $O(\eta, \chi)$  corresponden a los términos cruzados entre los campos de partícula y antipartícula. Para obtener la Lagrangiana Efectiva en el régimen no-relativista, tenemos que analizar qué términos son los que dominan cuando  $p_0 \ll m$ . Los términos que van acompañados con los modos que oscilan rápidamente  $e^{\pm mit}$ , son despreciados ya que son contribuciones que se promedian a cero para los procesos de interés. Por otro lado, los términos cuadráticos en la derivada temporal,  $\frac{1}{2m} \eta^\dagger \partial_0^2 \eta$ , son despreciados debido a que están muy suprimidos por la masa comparados con  $i\eta^\dagger \partial_0 \eta$ , es decir,  $\frac{1}{2m} \eta^\dagger \partial_0^2 \eta \ll i\eta^\dagger \partial_0 \eta$ . De forma similar para el campo de antipartícula,  $\frac{1}{2m} \chi^\dagger \partial_0^2 \chi \ll i\chi \partial_0 \chi^\dagger$ . Así la *Lagrangiana Efectiva* es

$$\mathcal{L}_{NR}[\eta, \chi] = i\eta^\dagger \partial_0 \eta + i\chi^\dagger \partial_0 \chi - \frac{1}{2m} (|\nabla \eta|^2 + |\nabla \chi|^2) + O(E^2/2m), \quad (1.1.5)$$

donde el término  $O(E^2/2m)$  hace referencia a los términos despreciados. Así, obtenemos la teoría no-relativista para un campo escalar complejo. Notamos que no es invariante de Lorentz explícitamente, ya que la lagrangiana es lineal en  $\partial_0$  y cuadrático en  $\nabla$ .

Los campos  $\eta, \chi$  poseen una solución tipo ondas planas,  $\eta \sim e^{-i\omega t + i\vec{p} \cdot \vec{x}}$ . Al reempla-



zar en (1.1.5), encontramos la relación de dispersión de la teoría no-relativista

$$\mathcal{L}_{NR}[\eta, \chi] \sim \eta^\dagger \left( \omega - \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \eta + \dots \quad (1.1.6)$$

Este modelo posee una invarianza de escala cualitativamente diferente del caso relativista. En efecto, la acción es invariante frente a transformaciones de escala

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \lambda\omega, \\ \vec{p} &\rightarrow \lambda^{1/2}\vec{p}, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

y la transformación de escala para los campos es

$$(\eta, \chi) \rightarrow \lambda^{d/4}(\eta, \chi). \quad (1.1.8)$$

Entonces, el *exponente dinámico* de la teoría no-relativista es  $z = 2$ , y esto se le conoce como *invariante de escala de Lifschitz*. Más en general,  $z$  se define como  $\omega \sim |\vec{p}|^z$  en la relación de dispersión. Es apreciable la diferencia que hay con el campo en la teoría relativista donde  $[\phi] = ((d+1) - 2)/2$ .

## 1.2. Campo Fermiónico no-relativista

Ahora que sabemos cómo obtener una teoría no-relativista en un campo escalar complejo, veamos qué ocurre en el caso de un campo fermiónico. La principal diferencia entre ambos campos recae en el carácter espinorial del campo fermiónico. Para un campo fermiónico libre de masa  $m$ , en  $D = d + 1$  dimensiones espacio-temporales de Minkowski  $(+, -, -, -)$ , el álgebra de Clifford está definida por  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . El sistema viene descrito por la lagrangiana

$$\mathcal{L}[\psi(x, t)] = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (1.2.1)$$

Al igual que el campo escalar complejo de la sección anterior, posee la misma relación de dispersión  $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Como buscamos su teoría efectiva en el caso no-relativista  $E \ll m$ , su relación de dispersión también se aproximará mediante la ecuación (1.1.2). Entonces, para obtener la teoría efectiva, lo conseguiremos de forma similar al campo escalar complejo de la sección anterior. Utilizaremos la descomposición de modos, con los campos de baja energía  $\eta, \chi$  y los factores oscilatorios,  $e^{\pm imt}$ , como los modos de alta energía.

En el caso fermiónico hay una diferencia importante. Eso se debe a que el campo fermiónico tiene carácter espinorial, es decir, el segundo término de la ecuación (1.1.3)

que corresponde a la antipartícula, se obtendrá mediante una conjugación de carga. En el caso de la ecuación (1.1.3), la conjugación de carga es trivial: el complejo conjugado. Para fermiones, el operador de conjugación de carga está definido como  $\psi_C = \hat{C}\gamma^0\psi^*$  y cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\hat{C}^{-1}\hat{C} &= \hat{C}^\dagger\hat{C} = \mathbb{1}, \\ \hat{C}(\gamma^\mu)^t\hat{C}^{-1} &= -\gamma^\mu, \\ \hat{C}^{-1}\gamma^\mu\hat{C} &= -(\gamma^\mu)^t.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Entonces, la descomposición de modos para el caso fermiónico es

$$\psi(x, t) = e^{-imt}\eta(x, t) + \hat{C}\gamma^0 e^{imt}\chi^\dagger(x, t).\tag{1.2.3}$$

Reemplazando (1.2.3) en la lagrangiana de Dirac (1.2.1),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\psi(x, t)] &= i\eta^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\eta - i\chi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\chi - m[\eta^\dagger(\gamma^0 - 1)\eta + \chi^\dagger(1 + \gamma^0)\chi] + \\ &+ e^{2imt}O(\eta^\dagger, \chi^*) + e^{-2imt}O(\eta, \chi^\dagger),\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

donde tuvimos que hacer uso de las propiedades del operador de conjugación de la carga y de las matrices gamma. Los términos  $O(\eta^\dagger, \chi^*)$ ,  $O(\eta, \chi^\dagger)$  representan los términos cruzados de la teoría. Lo importante es notar que hay términos proporcionales a la masa  $m$  y que dependen de la matriz  $\gamma_0$ . Esto nos dice, que únicamente ciertas componentes de los espinores  $\eta$  y  $\chi$  se hacen masivos.

Proponemos la descomposición para los campos de baja energía de la siguiente manera

$$\eta = \left(\hat{P}_+ + \hat{P}_-\right)\eta,\tag{1.2.5}$$

donde  $\hat{P}_\pm$  es el *proyector de energía* que está definido como

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0).\tag{1.2.6}$$

Usaremos como notación  $\hat{P}_\pm\eta = \eta_\pm$ , y de forma análoga, planteamos la descomposición para  $\chi$ . Los proyectores de energía nos permitirán separar las componentes espinoriales correspondientes a los grados de libertad muy pesados y los livianos. Así la descomposición de modos es

$$\psi(x, t) = e^{-imt}\left(\hat{P}_+ + \hat{P}_-\right)\eta + \hat{C}\gamma^0 e^{imt}\left(\hat{P}_+ + \hat{P}_-\right)\chi^*.\tag{1.2.7}$$

Con la descomposición con proyectores, sobre el resultado obtenido en (1.2.4), obtene-

mos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi(x, t)] &= \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\chi, \\
&= \eta^\dagger \gamma_0 [i\gamma^\mu \partial_\mu - m(1 - \gamma^0)] \eta + \chi^\dagger \gamma^0 [i\gamma^\mu \partial_\mu - m(\gamma^0 + 1)] \chi, \\
&= i\eta^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \eta + 2m\eta^\dagger \hat{P}_- \eta + i\chi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \chi + 2m\chi^\dagger \hat{P}_+ \chi. \quad (1.2.8)
\end{aligned}$$

Esto muestra que las componentes  $\eta_-$  y  $\chi_+$  son las componentes masivas de los espinores. Si descomponemos en las proyecciones de los campos, encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\chi &= i\eta_+^\dagger \partial_0 \eta_+ + i\eta_-^\dagger \partial_0 \eta_- + i\eta_+^\dagger \gamma^i \partial_i \eta_- - i\eta_-^\dagger \gamma^i \partial_i \eta_+ + 2m\eta_-^\dagger \eta_- + \\
&+ i\chi_+^\dagger \partial_0 \chi_+ + i\chi_-^\dagger \partial_0 \chi_- + i\chi_+^\dagger \gamma^i \partial_i \chi_- - i\chi_-^\dagger \gamma^i \partial_i \chi_+ + 2m\chi_+^\dagger \chi_+. \quad (1.2.9)
\end{aligned}$$

Para los campos pesados, despreciamos los términos  $\eta_-^\dagger \partial_0 \eta_-$ ,  $\chi_+^\dagger \partial_0 \chi_+$  comparado con los términos de masa, debido al límite no-relativista,  $E \ll m$ . Para eliminar las componentes pesadas de los espinores  $\eta_-$  y  $\chi_+$ , integraremos haciendo uso de las ecuaciones de movimiento. Existen cuatro ecuaciones de movimiento, que se calculan extremizando la acción, dos asociadas a  $\eta_-$  y dos a  $\chi_+$ . La ecuación de movimiento de  $\eta_-$  es

$$\eta_- = i \frac{\gamma^i \partial_i}{2m} \eta_+. \quad (1.2.10)$$

Reemplazando las ecuaciones de movimiento correspondientes en (1.2.9), se obtiene

$$\mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\chi = i\eta_+^\dagger \partial_0 \eta_+ - \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger \gamma^i \gamma^j \partial_i \partial_j \eta_+ + i\chi_-^\dagger \partial_0 \chi_- - \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger \gamma^i \gamma^j \partial_i \partial_j \chi_-. \quad (1.2.11)$$

Descomponemos el producto de matrices gamma en parte simétrica y antisimétrica con ayuda del conmutador y anticonmutador. De esas cantidades únicamente contribuirá la simétrica que corresponde al anticonmutador. El anticonmutador de dos matrices gamma está definido, para el caso de las componentes espaciales, como  $\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij}$ , y así, obtenemos la Lagrangiana Efectiva no-relativista para fermiones en  $D = d + 1$  dimensiones espacio-temporales

$$\mathcal{L}_{NR}[\eta_+, \chi_-] = i\eta_+^\dagger \partial_0 \eta_+ + \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger \nabla^2 \eta_+ + i\chi_-^\dagger \partial_0 \chi_- + \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger \nabla^2 \chi_-. \quad (1.2.12)$$

Resumiendo, al imponer la descomposición de modos para el caso fermiónico, es necesario incluir los proyectores de energía y así, identificar las componentes pesadas que luego serán eliminadas mediante sus ecuaciones de movimiento. En trabajos previos era necesario conocer la dimensión del sistema y una representación de las matrices gamma. Aquí obtuvimos un método independiente de la dimensión del sistema, sistemático y consistente de obtener una teoría efectiva para fermiones en el régimen no-relativista.

Un hecho importante, es la transformación que sufre la simetría del sistema. En

la teoría relativista, el sistema posee simetría sobre las transformaciones de Lorentz. La invarianza de Lorentz está asociada a un grupo  $SO(1, d)$ , donde la representación de un campo fermiónico, está dada por el doble cubrimiento del álgebra de  $su(D/2)$ . Así, al eliminar una de las componentes en el límite no-relativista, estamos eliminando uno de las dos álgebras de  $su(D/2)$ . Entonces, el grupo transformaciones asociados al sistema es  $SU(D/2)$  en el caso de  $D = 3 + 1$ , es el grupo  $SU(2)$ . Esta simetría refleja la invarianza sobre las rotaciones de espín que es una simetría interna global, es decir, paso de ser una simetría explícita en la teoría relativista a una simetría interna global no explícita en la teoría no-relativista.

Analicemos los detalles de la Lagrangiana Efectiva, empezando con su relación de dispersión. Para ello proponemos una solución tipo ondas planas, como en el caso del campo escalar, obteniendo

$$\mathcal{L}_{NR}[\eta_+, \chi_-] \sim \eta_+^\dagger \left( \omega - \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \eta_+ + \dots; \quad (1.2.13)$$

la teoría presenta una invarianza de escala de Lifschitz con un exponente dinámico  $z = 2$ ; recordemos que el escaleo correspondiente es  $[\omega] = 1$ ,  $[\vec{p}] = 1/2$  y de los campos

$$[\eta_+] = [\chi_+] = -d/4. \quad (1.2.14)$$

Podemos reconocer la diferencia que hay con la dimensión de escala para el campo  $\psi$  en la teoría relativista  $[\psi] = ((d + 1) - 1)/2$ .

### 1.3. Campo Fermiónico no-relativista con simetría de Gauge $U(1)$

Ahora que conocemos cómo obtener el límite no-relativista para un campo fermiónico, estudiaremos el comportamiento de la teoría con una simetría de Gauge (o calibre)  $U(1)$  (local). Para ello, se hace uso de la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$  donde  $A_\mu$  es un campo de gauge externo, sin dinámica en la teoría, y  $g$  es el acoplamiento con el campo de materia. La lagrangiana para el campo fermionico en presencia del campo externo, viene dada por

$$\mathcal{L}[\psi(x, t)] = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi, \quad (1.3.1)$$

con el acople minimal.

Nuestro objetivo ahora es obtener el límite no-relativista, es decir,  $E \ll m$ . Seguimos los mismos pasos de la sección 1.2 y la descomposición de modos es la misma a

(1.2.3). Así la lagrangiana luego de descomponer en modos

$$\mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\chi = i\eta^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu D_\mu \eta + 2m\eta^\dagger \hat{P}_- \eta + i\chi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu D_\mu \chi + 2m\chi^\dagger \hat{P}_+ \chi. \quad (1.3.2)$$

Utilizando la descomposición con los proyectores de energía (1.2.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\chi &= i\eta_+^\dagger D_0 \eta_+ + i\eta_-^\dagger D_0 \eta_- + i\eta_+^\dagger \gamma^i D_i \eta_- - i\eta_-^\dagger \gamma^i D_i \eta_+ + 2m\eta_-^\dagger \eta_- + \\ &+ i\chi_+^\dagger D_0 \chi_+ + i\chi_-^\dagger D_0 \chi_- + i\chi_+^\dagger \gamma^i D_i \chi_- - i\chi_-^\dagger \gamma^i D_i \chi_+ + 2m\chi_+^\dagger \chi_+ \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Debido al límite no-relativista, los términos de frecuencia de los campos pesados son mucho menores que los términos acompañados con las masas,  $\eta_-^\dagger D_0 \eta_+ \ll m\eta_-^\dagger \eta_-$  y  $\chi_-^\dagger D_0 \chi_+ \ll m\chi_-^\dagger \chi_-$ , y por tanto son desprecios. Eliminamos los campos pesados integrándolos con sus ecuaciones de movimiento

$$\eta_- = i \frac{\gamma^i D_i}{2m} \eta_+, \quad (1.3.4)$$

y lo análogo para  $\chi_+$ . Así, encontramos

$$\mathcal{L} \simeq i\eta_+^\dagger D_0 \eta_+ - \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger \gamma^i \gamma^j D_i D_j \eta_+ + i\chi_-^\dagger D_0 \chi_- - \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger \gamma^j \gamma^i D_i D_j \chi_-. \quad (1.3.5)$$

Descompongamos ahora el producto de matrices gamma y de derivadas covariante en parte simétrica y antisimétrica; usando la definición del álgebra de las matrices gamma  $\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\chi &= i\eta_+^\dagger D_0 \eta_+ + \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger D^i D_i \eta_+ - \frac{1}{8m} \eta_+^\dagger [\gamma^i, \gamma^j] [D_i, D_j] \eta_+ + \\ &+ i\chi_-^\dagger D_0 \chi_- + \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger D^i D_i \chi_- + \frac{1}{8m} \chi_-^\dagger [\gamma^i, \gamma^j] [D_i, D_j] \chi_-. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Así, la Lagrangiana no-relativista para fermiones con acople minimal resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NR}[\eta_+, \chi_-] &= i\eta_+^\dagger D^0 \eta_+ + \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger D^i D_i \eta_+ + \frac{g}{2m} \eta_+^\dagger S^{ij} F_{ij} \eta_+ \\ &+ i\chi_-^\dagger D^0 \chi_- - \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger D^i D_i \chi_- + \frac{g}{2m} \chi_-^\dagger S^{ij} F_{ij} \chi_-. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Donde  $S^{ij}$  es el operador de espín de la teoría que se encuentra definido como

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j], \quad (1.3.8)$$

y  $F_{ij}$  es el campo electromagnético que se obtiene al calcular el conmutador de las derivadas covariantes

$$[D_i, D_j] f = igF_{ij} f. \quad (1.3.9)$$

El término de acoplamiento del tipo  $S^{ij}F_{ij}$  es conocido en  $D = 3 + 1$  como el *acoplamiento de Pauli*, donde adquiere la forma  $\vec{B} \cdot \vec{S}$ . El acoplamiento del tipo Pauli en nuestra teoría efectiva está suprimido por la masa  $m$ . A pesar de la supresión por  $1/m$ , estos términos no pueden despreciarse, debido a que contienen las primeras contribuciones proporcionales a  $S_{ij}F_{ij}$  o  $\nabla^2$ , respectivamente. Encontramos un ejemplo de esto anteriormente cuando el término  $\eta^\dagger(\nabla^2/2m)\eta$  dio origen a  $z = 2$ . También encontraremos los acoplamientos minimales usuales que están comprendidos dentro de la derivada covariante y van suprimidos por la masa, al igual que el acoplamiento de tipo Pauli.

## 1.4. Campo Fermiónico no-relativista en espacios curvos

La otra situación de interés corresponde a colocar al sistema en una variedad espacial curva, con métrica  $g_{ij}$ . La métrica del espacio-tiempo es en este caso,

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.4.1)$$

donde se trabaja en un espacio-tiempo de  $D = d+1$  dimensiones. La acción está definida

$$S[\psi(x, t)] = \int dt d^d x \sqrt{g} \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (1.4.2)$$

donde  $g = \det(g^{ij})$  y la derivada covariante es  $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}S_{ab}$ , donde  $\omega_\mu^{ab}$  es la *conexión de espín* que nos da la noción del transporte paralelo. Está definida

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2}e^{\nu a}(\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) - \frac{1}{2}e^{\nu b}(\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) - \frac{1}{2}e^{\rho a}e^{\sigma b}(\partial_\rho e_{\sigma c} - \partial_\sigma e_{\rho c})e_\mu^c. \quad (1.4.3)$$

Los índices planos son  $a, b$  y los índices curvos son  $\mu, \rho, \sigma$ . La derivada covariante es  $D_\mu = (D_0, D_i)$ , donde la componente temporal de la derivada covariante es, simplemente, la derivada parcial ( $D_0 \equiv \partial_0$ ). Los pasos son similares al de caso  $U(1)$ , excepto que el conmutador de las derivadas covariantes da

$$[D_\mu, D_\nu]f = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}^{ab}S_{ab}f. \quad (1.4.4)$$

Aquí el operador de espín está definido con los índices planos  $S_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$ . Haciendo la descomposición de modos, usando los proyectores de energía y despreciando los términos que no dominan en el régimen no-relativista obtenemos una ecuación idéntica a (1.3.5), donde el anticonmutador de las matrices gamma está definido en el espacio-tiempo euclideo  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . Así, el producto de matrices gamma y las derivadas

covariantes lo hallaremos de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + 2g^{\mu\nu})D_\mu D_\nu, \\
&= D_\mu D_\mu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][D_\mu, D_\nu], \\
&= D_\mu D^\mu + \frac{1}{32}R_{\mu\nu}{}^{ab}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma_a, \gamma_b].
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Usado las definiciones mencionadas sobre el tensor de curvatura y el operador de espín, también la propiedad de las matrices gamma para encontrar una parte puramente antisimétrica [14],

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} - (\gamma^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} \pm \text{permutaciones}) + \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}, \tag{1.4.6}$$

obtenemos

$$\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = D_\mu D_\nu - \frac{R}{4}. \tag{1.4.7}$$

En nuestra teoría efectiva no-relativista únicamente aparecen las componentes espaciales de la derivada covariante; por tanto reemplazamos los índices espacio-temporales por índices puramente espaciales.

$$\gamma^i \gamma^j D_i D_j = D_i D_j - \frac{R}{4}. \tag{1.4.8}$$

Reemplazando en la Lagrangiana (1.3.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NR} &= i\eta_+^\dagger \partial_0 \eta_+ + \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger D_i D^i \eta_+ + i\chi_-^\dagger \partial_0 \chi_- + \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger D_i D^i \chi_- - \\
&- \frac{1}{8m} R \eta_+^\dagger \eta_+ - \frac{1}{8m} R \chi_-^\dagger \chi_-,
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

esta es la lagrangiana efectiva en el límite no-relativista. Donde encontramos un nuevo tipo de acoplamiento en la teoría efectiva, un término que contiene el escalar de curvatura  $R$ . Este es un resultado interesante: implica que un fermión en un espacio de curvatura no nula adquiere un potencial químico proporcional a  $R$  en el límite no-relativista. También, recuperamos los acoplamientos minimales correspondientes a las componentes espaciales y no hay acoplamiento minimal con la componente temporal; esto se debe a que el sistema en la teoría relativista se encuentra en coordenadas curvas sólo para la parte espacial.

## 1.5. Ejemplos de Teorías no-relativistas en $2 + 1$ dimensiones

En esta sección analizaremos el caso particular del sistema en  $D = 2+1$  dimensiones espacio-temporales de Minkowski. Para ello usaremos los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Empezaremos con el caso más sencillo, una teoría libre, para luego incluir un campo electromagnético externo y finalmente incluir los cambios debido a una métrica espacial curva, con el objetivo de ilustrar varios de los resultados generales anteriores.

### 1.5.1. Fermiones libres no-relativistas

En estas dimensiones del sistema, definimos la signatura de la métrica como  $(+, -, -)$  y las siguientes convenciones

$$\gamma_\mu = (\sigma_3, i\sigma_2, -i\sigma_1) , \quad (1.5.1)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda . \quad (1.5.2)$$

El método de descomposición de modos combinando con los proyectores de energía, que desarrollamos anteriormente, nos brinda un esquema libre de representación. Aquí presentaremos los cálculos usando la representación explícita (1.5.1). Volviendo a la ecuación (1.2.11) usamos la descomposición en parte simétrica y antisimétrica de las matrices gamma, en vez de eso, que ahora puede obtenerse de (1.5.2). El segundo término de esa definición es antisimétrico mientras que el producto de derivadas parciales es puramente simétrico. Así, la única parte que contribuye es el término simétrico en (1.5.2). La lagrangiana en  $D = 2 + 1$  dimensiones resulta

$$\mathcal{L}_{NR}[\eta_+, \chi_-]^{2+1} = i\eta_+^\dagger \partial_0 \eta_+ + \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger (\partial_1^2 + \partial_2^2) \eta_+ + i\chi_-^\dagger \partial_0 \chi_- + \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger (\partial_1^2 + \partial_2^2) \chi_- , \quad (1.5.3)$$

donde expresamos todos los componentes espaciales  $i = 1, 2$ .

### 1.5.2. Teoría no-relativista con campo de Gauge

Para el caso de fermiones con simetría de gauge  $U(1)$ , usamos los resultados de la sección 1.3. En la ecuación (1.3.5), usamos la descomposición en parte simétrica y antisimétrica para el producto de las matrices gamma y las derivadas covariantes, de ello solo contribuye lo correspondiente a la parte antisimétrica de (1.5.2) y el campo magnético en  $2 + 1$  dimensiones está definido como  $B = \epsilon_{ij0} F^{ij}$ . La lagrangiana (1.3.5)



será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NR}[\eta_+, \chi_-] &= i\eta_+^\dagger D^0 \eta_+ + \frac{1}{2m} \eta_+^\dagger D^i D_i \eta_+ - \frac{g}{2m} \eta_+^\dagger B \eta_+ \\ &+ +i\chi_-^\dagger D^0 \chi_- + \frac{1}{2m} \chi_-^\dagger D^i D_i \chi_- + \frac{g}{2m} \chi_-^\dagger B \chi_- . \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Así, obtuvimos el mismo acoplamiento con el campo magnético  $B$  que se encontró en [15].



# Capítulo 2

## La Teoría Cuántica de Campos sobre la Superficie de Fermi

En el capítulo 1, obtuvimos la forma adecuada de identificar los grados de libertad en el régimen no-relativista, ( $E \ll m$ ). En el presente capítulo, estudiamos teorías a densidad finita. Incluir una densidad finita de materia en el sistema, es exigir que el valor de expectación de una carga conservada sea distinto al trivial. Comenzamos analizando el caso más simple, fermiones libres relativistas o no-relativistas con masa  $m$ . En el caso relativista, añadir un potencial químico rompe la simetría explícita del grupo de Lorentz; también, apreciaremos que el término del potencial químico es idéntico a añadir una componente temporal de un campo de gauge. Para comprender los cambios que produce el potencial químico sobre la teoría, analizaremos su relación de dispersión, donde el cambio más significativo es tener  $p_0 = 0$  para una superficie en espacio de momento  $\vec{p}$ . Esto se conoce como la *superficie de Fermi*. Posteriormente, modificaremos los proyectores para incluir los efectos del potencial químico. Como parte final del capítulo, explicamos el desarrollo del Grupo de Renormalización (RG) Esférico [5, 6], que conduce a una teoría efectiva consistente sobre la superficie de Fermi.

### 2.1. Campos libres a densidad finita

Como mencionamos anteriormente, la teoría cuántica de campos relativista está desarrollada con un valor de expectación nulo para la densidad partículas (o vacío sin materia). La pregunta que necesitamos resolver es la siguiente: *¿cómo implementar una densidad finita de materia?*

Para responder a esta pregunta, recordemos cómo se incluye la densidad finita en mecánica estadística. Se trabaja en el ensamble gran canónico, donde se modifica al hamiltoniano

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H} - \mu N, \quad (2.1.1)$$

Aquí,  $\mu$  es el potencial químico y  $N$  es la densidad de carga conservada correspondiente al número de partículas. De esta forma, se modifica el hamiltoniano de la función de partición. El valor de expectación del número de partículas se obtiene entonces como

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathcal{Z} \neq 0, \quad (2.1.2)$$

donde  $\mathcal{Z}$  es la función de partición. En ausencia de potencial químico, la teoría tendría como valor de expectación  $\langle N \rangle = 0$ , correspondiente al vacío sin materia.

Ahora, extenderemos estas ideas a la teoría de campos y también encontraremos su relación con una teoría gauge.

### 2.1.1. Campo complejo relativista

Para comenzar, consideremos un sistema de bosones cargados libres, con masa  $m$ , en  $D = d + 1$  dimensiones. El sistema está descrito por la Lagrangiana

$$\mathcal{L}[\phi^\dagger, \phi] = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - m^2 (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.1.3)$$

El sistema posee una simetría  $U(1)$

$$\phi \rightarrow e^{-i\alpha} \phi. \quad (2.1.4)$$

De acuerdo al teorema de Noether, esta simetría da lugar a una corriente conservada

$$j^\mu = i [\phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi)^\dagger \phi]. \quad (2.1.5)$$

La condición de conservación en la teoría relativista es  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . En consecuencia, la carga total

$$Q = i \int d^d x [\phi^\dagger (\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi)^\dagger \phi], \quad (2.1.6)$$

es conservada,  $\partial_0 Q = 0$ . La carga mide el *número de partículas* del sistema; por eso, denotaremos su densidad como  $N = i[\phi^\dagger (\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi)^\dagger \phi]$ .

De acuerdo a (2.1.1), el hamiltoniano en presencia del potencial químico

$$\mathcal{H}[\pi_\phi, \phi] = |\pi_\phi|^2 + |\nabla \phi|^2 - \mu (\pi_1 \phi_2 - \pi_2 \phi_1), \quad (2.1.7)$$

Para obtener la lagrangiana correspondiente a este hamiltoniano, integraremos los momentos  $\pi_\phi$

$$\mathcal{L}[\phi^\dagger, \phi; \mu] = (\partial_0 \phi - i\mu \phi)^\dagger (\partial^0 \phi - i\mu \phi) - |\nabla \phi|^2 - m^2 |\phi|^2, \quad (2.1.8)$$

donde el producto del primer término obtenemos un término  $\mu^2 |\phi|^2$  que ingresa como una *masa taquiónica* en la lagrangiana, ya que posee el signo contrario a la masa. Lo

más importante, es notar que se puede redefinir el primer término con una derivada temporal análogamente a una derivada covariante,  $D_0 = \partial_0 - i\mu$ . Así, la presencia de una deriva covariante, nos hace pensar en transformaciones locales del grupo  $U(1)$ .

### 2.1.2. Simetrías locales y fuentes externas

Para calcular las correlaciones de la corriente (2.1.5), es necesario introducir un campo que sirva como fuente. Para el caso de la simetría global  $U(1)$ , proponemos la acción con un campo  $A_\mu$  externo

$$S[\phi^\dagger, \phi] = \int d^D x [(\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi + j^\mu A_\mu] , \quad (2.1.9)$$

Esta acción no es del todo correcta; no es invariante de gauge si la simetría  $U(1)$  se promueve a una simetría local. El procedimiento correcto es reemplazar las derivadas parciales por derivadas covariantes  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ . Esto da lugar a un término  $|\phi|^2 A_\mu^2$  ausente en (2.1.9). Así, la acción en presencia de un campo exterior resulta

$$S[\phi^\dagger, \phi] = \int d^D x [(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi] . \quad (2.1.10)$$

Comparando el resultado con (2.1.8), deducimos que el potencial químico corresponde a encender la componente temporal de un campo de gauge externo  $\mu = A_0$ . El análisis con las derivadas covariantes concuerda, así con el resultado del hamiltoniano. Esto también muestra la ruptura explícita de la simetría de Lorentz: el potencial químico asocia un valor de expectación para la densidad de materia.

### 2.1.3. Fermiones relativistas

Consideremos un campo de Dirac libre con masa  $m$  en  $D = d + 1$  dimensiones. La teoría tiene simetría  $U(1)$

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi , \quad (2.1.11)$$

con corriente conservada  $j_\mu = \psi^\dagger \gamma_\mu \psi$ . La densidad de carga  $\psi^\dagger \psi$  reproduce la conocida densidad de fermiones. De acuerdo a la discusión anterior, la lagrangiana correspondiente a la teoría con densidad finita resulta

$$\mathcal{L}[\psi(x, t); \mu] = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \mu \psi^\dagger \psi . \quad (2.1.12)$$

Si analizamos la transformación local de  $U(1)$ , vemos que no es necesario incluir un término cuadrático en  $A_\mu$ . Esto es debido a que el campo de Dirac es de primer orden en las derivadas y por tanto, la corriente es lineal.

Otro aspecto importante es examinar lo que sucede con la invarianza de Lorentz. Al imponer la densidad finita de materia, habrá un valor de expectación para la densidad de carga distinto al trivial. Pero el bilineal que acompaña al potencial químico,  $j_0 = \psi^\dagger \psi$ , no es invariante bajo Lorentz. Es decir, el valor de expectación  $\langle j^0 \rangle$  rompe la simetría de Lorentz explícitamente.

### 2.1.4. Fermiones no-relativistas

En el capítulo 1 obtuvimos la teoría no-relativista de fermiones libres con masa  $m$

$$\mathcal{L}[\psi(x, t)] = \psi^\dagger \left( i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi. \quad (2.1.13)$$

A densidad finita la lagrangiana se modifica

$$\mathcal{L}[\psi(x, t)] = \psi^\dagger \left( i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi + \mu \psi^\dagger \psi. \quad (2.1.14)$$

1. Notamos que en el caso no-relativista (1.3.7), otros campos contribuyen a la densidad finita: para  $D = 2 + 1$  dimensiones el campo magnético  $B$  contribuye al término de potencial de potencial químico; ver (1.5.4).
2. Para el caso de espacios curvos, ingresa como el escalar de curvatura da una contribución al potencial químico; ver (1.4.9)

## 2.2. La superficie de Fermi para la teoría libre

Ahora que sabemos como agregar una densidad finita a una teoría, esto nos lleva a estudiar si la relación de dispersión se ve afectada. Estudiaremos los límites relativistas y no-relativistas por separado.

### 2.2.1. La superficie de Fermi

Tenemos la teoría de fermiones de Dirac dada por (2.1.12), con las mismas convenciones de dimensiones y signatura. Planteamos una solución en ondas planas de la forma  $\psi \sim e^{-i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \psi$  y la reemplazamos sobre la ecuación (2.1.12), obteniendo

$$\mathcal{L}[\psi(p_0, \vec{p})] = \psi^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 (p_0 + \mu) + \gamma^i p_i - m] \psi. \quad (2.2.1)$$

Hacemos un cambio de variable para la componente temporal del momento  $\tilde{p}_0 = p_0 + \mu$ , entonces su ecuación de movimiento es

$$[i\gamma^0 \tilde{p}_0 + \gamma^i p_i - m] \psi(p_0, \vec{p}) = 0. \quad (2.2.2)$$

Así, la relación de dispersión de Dirac se modifica reemplazando  $p_0 \rightarrow \tilde{p}_0$ . Entonces, la energía es

$$p_0 = -\mu \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.2.3)$$

El caso sin densidad finita y sin masa, la relación de dispersión es  $p_0^2 = \vec{p}^2$ . El autovalor de energía para el autoestado fundamental es  $p_0 = 0$ ; para conseguirlo, la única opción es que  $\vec{p} = 0$ . Pero con la presencia de densidad finita y de la masa, conseguimos un valor del momento  $\vec{p}$  finito (distinto de cero) para  $p_0 = 0$ . Este valor define una superficie en el espacio de momentos

$$\vec{p}^2 = \mu^2 - m^2. \quad (2.2.4)$$

En general, definimos a esta superficie de la siguiente manera:

*La superficie formada por los valores de  $\vec{p}$ , tal que la energía del sistema se anule, se conoce como "Superficie de Fermi".*

A los valores del momento que definen la superficie de Fermi los denotaremos como  $k_F$  y a la energía como  $\varepsilon(\vec{p})$ . Entonces la ecuación (2.2.4) define la superficie de una esfera de radio  $k_F = \sqrt{\mu^2 - m^2}$ .

La superficie de Fermi juega un rol fundamental en teoría efectiva de bajas energías, debido a que los grados de libertad de baja energía se encuentran muy cerca a la superficie de Fermi.

### 2.2.2. Límite ultrarrelativista ( $m \rightarrow 0$ )

El límite ultrarrelativista que corresponde ( $m \rightarrow 0$ ). Así, el radio de Fermi es  $\vec{k}_F = \mu$ , y nuestro interés es el comportamiento de la energía  $\varepsilon(\vec{p})$  cerca de la superficie de Fermi. Para ello, aproximaremos los momentos cerca de la superficie de Fermi, es decir,  $\vec{p} = \vec{k}_F + \delta\vec{p}$ . Entonces

$$\varepsilon(\vec{p}) = |\vec{p}| - \mu = \vec{k}_F + \delta\vec{p} = \delta\vec{p}, \quad (2.2.5)$$

y la energía cerca de la superficie de Fermi, va linealmente con el momento. La velocidad de propagación es  $v_F = c$ .

### 2.2.3. Límite no-relativista

En este caso tenemos una relación de dispersión no-relativista cuadrática, así el potencial químico es  $\mu = \frac{\vec{k}_F^2}{2m}$  y usamos la misma aproximación a la superficie de Fermi,  $\vec{p} = \vec{k}_F + \delta\vec{p}$ . Entonces en la relación de dispersión para soluciones con energía positiva

$$\varepsilon(\vec{p}) \simeq m + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu \simeq m + \frac{k_F^2}{2m} + \frac{\vec{k}_F}{m} \delta\vec{p} - \mu \simeq m + \frac{\vec{k}_F}{m} \delta\vec{p}. \quad (2.2.6)$$

El primer término se elimina con ayuda de la descomposición de modos que estudiamos en el capítulo 1. El segundo término, contiene un factor que se le conoce como la velocidad de Fermi,  $\vec{v}_F = \frac{\vec{k}_F}{m}$ .

Esto nos dice, que la Lagrangiana (2.1.14) se puede hallar haciendo un límite no-relativista si venimos de una teoría relativista.

## 2.3. Proyectores sobre la Superficie de Fermi

Ahora que sabemos bien como agregar la densidad finita, y que los grados de libertad de más baja energía se encuentran cerca de la superficie de Fermi, necesitamos implementar un método para obtener esos grados de libertad. Para ello, trabajaremos de forma análoga al capítulo 1, usando la intuición de la descomposición de modos para determinar los proyectores con densidad finita.

### 2.3.1. Fermiones relativistas

Comencemos con una teoría relativista para fermiones de Dirac con densidad finita, dada por la lagrangiana (2.1.12). Entonces hacemos la separación en modos de alta y baja energía como una descomposición

$$\psi(x, t) = e^{i\vec{k}_F \cdot \vec{x}} \eta(t, x) + \hat{C} \gamma^0 e^{-i\vec{k}_F \cdot \vec{x}} \chi^*(t, x), \quad (2.3.1)$$

reemplazamos en la lagrangiana (2.1.12), y consideramos los términos de baja energía. Así en espacio de momentos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\eta, \chi} &= \eta^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 p_0 - i\gamma^i p_i - m - \gamma^i k_{Fi}] \eta + e^{2i\vec{k}_F \cdot \vec{x}} \mathcal{O}(\eta, \chi^t) + \\ &+ \chi^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 p_0 - \gamma^i p_i + \gamma^i k_{Fi}] \chi + e^{-2i\vec{k}_F \cdot \vec{x}} \mathcal{O}(\chi^*, \eta^\dagger), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

donde despreciaremos los términos que llevan exponenciales  $e^{\pm 2i\vec{k}_F \cdot \vec{x}}$ .

Analicemos la componente correspondiente a  $\eta$ ; esta componente debe satisfacer la ecuación de movimiento de un fermión de Dirac, la ecuación para la componente espinorial sobre la superficie de Fermi es entonces

$$\left( -\mu\gamma^0 + \sqrt{\vec{k}_F^2 + m^2} - i\gamma^i k_{Fi} - m + \mu\gamma^0 \right) \eta = 0. \quad (2.3.3)$$

El término de potencial químico desaparece, También, así obtenemos un término tipo proyector

$$\left[ 1 - \gamma^0 \frac{(\gamma^i k_{Fi} + m)}{\sqrt{\vec{k}_F^2 + m^2}} \right] \eta = 0. \quad (2.3.4)$$



Esto nos lleva a definir los proyectores sobre la superficie de Fermi,

$$\hat{P}_{\pm}(k_F) = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \gamma^0 \frac{(\gamma^i k_{Fi} + m)}{\sqrt{\vec{k}_F^2 + m^2}} \right]. \quad (2.3.5)$$

De manera similar, en la ecuación de movimiento encontraremos el proyector  $\hat{P}_+(k_F)$ , actuando sobre  $\chi$ . Ya que  $\hat{P}_\eta = 0$ ,  $\hat{P}_+\chi = 0$ , es posible asociar la componente  $\eta$  y  $\chi$  con las siguientes componentes del espinor de Dirac:

$$\hat{P}_+(k_F)\psi(p) = \eta(p), \quad (2.3.6)$$

$$\hat{P}_-(k_F)\psi(p) = \chi(p). \quad (2.3.7)$$

Efectivamente, como  $\hat{P}_+\hat{P}_- = 0$ ,  $\eta$  y  $\chi$  automáticamente satisfacen

$$\hat{P}_-(k_F)\eta = 0, \quad (2.3.8)$$

$$\hat{P}_+(k_F)\chi = 0. \quad (2.3.9)$$

Finalmente, utilizando (2.3.6) obtenemos

$$\mathcal{L}[\eta, \chi] = \eta^\dagger (p_0 - \varepsilon_p^-) \eta + \chi^\dagger (p_0 - \varepsilon_p^+) \chi. \quad (2.3.10)$$

Cuando la masa es  $m = 0$ , el proyector se simplifica a

$$\hat{P}_{\pm}(p) = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \gamma^0 \frac{\gamma^i k_{Fi}}{|\vec{k}_F|} \right], \quad (2.3.11)$$

y la relación de dispersión es  $\varepsilon_p^{(\pm)} = -\mu \pm |\vec{p}|$ . Por lo tanto (2.3.10) quedará de la forma

$$\mathcal{L}[\eta, \chi] = \eta^\dagger (p_0 + \mu + |\vec{p}|) \eta + \chi^\dagger (p_0 + \mu - |\vec{p}|) \chi. \quad (2.3.12)$$

### 2.3.2. Fermiones no-relativistas

Los proyectores que mostramos en (2.3.5), pueden ser reducidos a los proyectores de energía que encontramos en el capítulo 1. Para ello, el límite adecuado es  $k_F \ll m$ . Si reemplazamos en (2.3.5) y usamos el límite adecuado obtenemos

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^0). \quad (2.3.13)$$

Esto coincide con el resultado (1.2.6) y provee un chequeo no trivial para el presente formalismo.

## 2.4. El Grupo de Renormalización esférico

Hasta el momento, hemos tratado con teorías de fermiones libres, y fermiones libres en presencia de campos externos. Hemos conseguido encontrar sus teorías efectivas en el régimen no-relativista y las excitaciones de más bajas energías cerca de la superficie de Fermi. En el resto de la tesis desarrollaremos un formalismo para sistemas fermiónicos interactuantes. Cuando se agregan interacciones de Fermi del tipo  $(\psi^\dagger\psi)^2$ , el Grupo de renormalización reproduce la teoría de Landau del Líquido de Fermi. Los electrones son mapeados a *cuasi-partículas*, que son electrones *vestidos* por las interacciones, donde las interacciones que son eliminadas, se absorben en el "vestido" del electrón.

Como primer paso en esta dirección, desarrollaremos ahora el Grupo de Renormalización para fermiones libres. Nos basaremos en los trabajos de Shankar [5] y Polchinski [6].

### 2.4.1. La Teoría de Landau de los Líquidos de Fermi

Consideremos un sistema de fermiones libres no-relativista cuya teoría está dada por (2.1.14). Resulta conveniente usar una transformación de Fourier en coordenadas espaciales

$$\psi_\sigma(t, \vec{x}) = \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \psi_\sigma(t, \vec{p}). \quad (2.4.1)$$

Así la Acción resulta

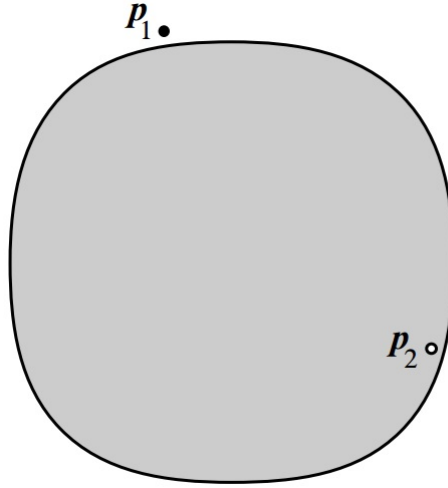
$$S[\psi^\dagger, \psi] = \int dt \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} [i\psi^\dagger \partial_0 \psi - (E(\vec{p}) - \mu) \psi^\dagger \psi], \quad (2.4.2)$$

donde omitimos los índices,  $\sigma$ , de espín  $SU(2)$  debido a que es una transformación global interna. Por simplicidad nos enfocaremos en el caso  $E(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$ .

Las excitaciones de menor energía se encontrarán como una partícula cercana al mar de Fermi o como un hueco cerca de la superficie, tal como se muestra en la Fig. 2.1. Queremos la teoría que describa dichas cuasi-partículas cerca de la superficie de Fermi. Para ello haremos una transformación de escala de momento mediante un factor  $s = e^t$ , con el objeto de encontrar cuáles son los términos relevantes a bajas energías. Si en el caso no-relativista tenemos las escalas en potencias de la frecuencia (o energía) que encontramos en el capítulo 1, que reescribiremos a continuación

$$[\omega] = 1, \quad [\vec{p}] = 1/2, \quad (2.4.3)$$

pero al hacer la transformación de escala, estamos yendo hacia la superficie de Fermi. Para ello usaremos una parametrización esférica, donde  $k_F$  será el radio asociado a la d-esfera de Fermi y un vector perpendicular a la (d-1)-superficie de Fermi,  $p_\perp \hat{n}$ , que es



**Figura 2.1:** Superficie de Fermi

muy pequeño comparado con  $k_F$ . Así, el vector de momento se reescribe

$$\vec{p} = (k_F + p_\perp) \hat{n}, \quad (2.4.4)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector de norma 1 que determina la posición sobre la superficie de Fermi.

La lagangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \psi_\sigma^\dagger \left[ i\partial_0 - \frac{(k_F + p_\perp)^2}{2m} + \mu \right] \psi_\sigma, \\ &= \psi_\sigma^\dagger (i\partial_0 - v_F p_\perp) \psi_\sigma. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

en el límite  $p_\perp \ll k_F$  y  $v_F = k_F/m$ . Esto dará lugar, a lo que se conoce como *Grupo de renormalización esférico* o RG esférico.

Empezaremos analizando la teoría libre, usando (2.4.4) en (2.4.2). Entonces linealizamos la relación de dispersión con el potencial químico usando una serie de Taylor alrededor de  $k_F$

$$\begin{aligned} E(\vec{p}) - \mu &= E(\vec{p} = k_F \hat{n}) + (\vec{p} - k_F \hat{n}) E'(\vec{p} = k_F) + \mathcal{O}(p_\perp^2) - \mu, \\ &= v_F(k_F) p_\perp \hat{n}, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

donde  $E(k_F) = \mu$ , que es la definición de la superficie de Fermi y  $E'(k_F) = v(k_F)$  es la velocidad de Fermi. La relación de dispersión es lineal y la transformación de los momentos es  $p_0 \rightarrow sp_0$  y  $\vec{p}_\perp \rightarrow s\vec{p}_\perp$ . Observamos que  $k_F$  no escala con la transformación, ya que justamente son los modos de energía que deseamos eliminar. Así, las dimensiones de escala clásica de energía necesarias para mantener la nueva relación de dispersión es

$$[\omega] = 1, \quad [\hat{p}_\perp] = 1, \quad [\hat{n}] = 0, \quad (2.4.7)$$

este escaleo se debe, a que la nueva relación de dispersión es lineal.

El elemeto de d-volume es  $d^d\vec{p} = k_F^{d-1} d\Omega_{d,\hat{n}} dp_\perp$ , modifica la transformación de Fourier (2.4.1) que resulta

$$\psi_\sigma(t, \vec{x}) = k_F^{d-1} \int \frac{d\Omega_{d,\hat{n}}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{dp_\perp}{(2\pi)} e^{i(k_F+p_\perp)\hat{n}\cdot\vec{x}} \psi_{\sigma,\hat{n}}(t, \vec{p}). \quad (2.4.8)$$

El subíndice  $\hat{n}$ , nos indica las diferentes direcciones radiales sobre la d-esfera de Fermi que puede ser pensado como un índice de "sabor" (simetría interna de los quarks en QCD), esto genera un simetría interna global. El subíndice  $\sigma$  lo obviaremos en secciones posteriores. La Acción resulta

$$S_{eff}[\psi^\dagger, \psi] = k_F^d \int dt \frac{d\Omega_{d,\hat{n}}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{dp_\perp}{(2\pi)} \psi^\dagger [i\partial_0 - v_F p_\perp] \psi_\sigma. \quad (2.4.9)$$

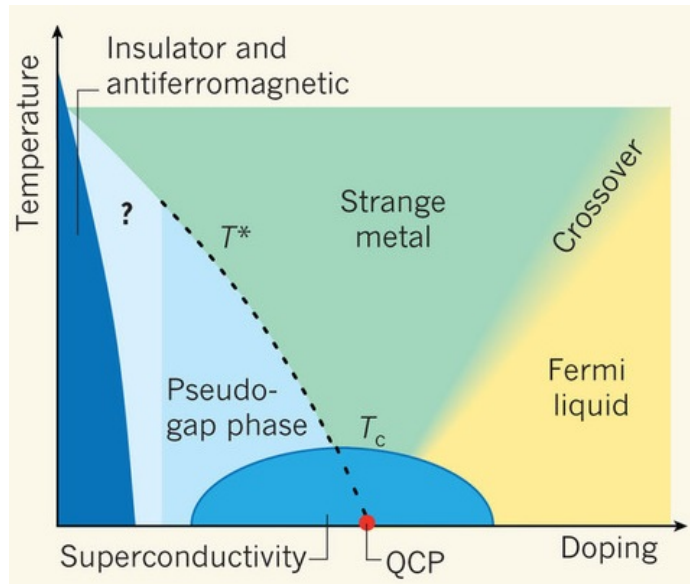
La dimensión del campo sobre la superficie de Fermi es fija,  $[\psi] = -1/2$ .

Es importante notar que el sistema efectivo de bajas energías corresponde a una suma (integral) sobre cuasi-partícula unidimensional ( $d = 1$ ), cuyo lagrangiano depende sólo de  $(p_0, p_\perp)$ . Entonces hay una reducción de  $D = d+1$  a  $D_{Ef} = 1+1$ , esto se conoce como *violación de hiperescala*.

# Capítulo 3

## Más allá del Líquido de Fermi

El capítulo final de la tesis está dedicado al estudio de sistemas fermiónicos interactuantes.



**Figura 3.1:** Diagrama de fase de un superconductor de alta temperatura.

Las interacciones son responsables de *comportamientos colectivos* fascinantes, un ejemplo son los superconductores. Los superconductores se puede obtener de una teoría de un líquido de Fermi con interacción mediante un fonón (bosón *emergente* de la teoría). Esto genera un acoplamiento del tipo  $1/m^2(\psi^\dagger\psi)^2$  que son las autointeracciones entre los *pares de Cooper* y están suprimidas por la masa del fonón. Este modelo explica, desde el enfoque de la teoría de campos, la teoría BCS de la superconductividad [16].

Posteriormente se descubrieron los *superconductores de alta temperatura* [9], que se producen materiales aisladores o antiferromagnéticos. El diagrama de fase típico para los superconductores de alta temperatura se aprecia en la figura 3.1. Este tipo de comportamiento no puede ser explicado con la teoría interactuante con fonones (o BCS), se requiere correlaciones electrónicas más intensas. Un objetivo central en teoría

de Materia Condensada es desarrollar un formalismo que explique la física de estos materiales.

En el presente capítulo, estudiaremos un modelo para dichos sistemas, basados en una superficie de Fermi acoplada a un bosón. Empezaremos entendiendo el sistema a  $T = 0$  donde encontramos un punto fijo conocido como *punto crítico cuántico* (QCP por sus siglas en inglés) y a este tipo de transiciones de fase se conoce como *transiciones de fase cuánticas* [7]. Para conseguir este punto fijo, la masa del bosón tiene que ser ajustada a cero ( $m = 0$ ); esto se conoce como *bosón crítico* y genera una autointeracción entre los pares de Cooper que aumenta hacia el infrarrojo (bajas energías). Esta teoría es un ejemplo de un sistema de *electrones fuertemente correlacionados*.

Analizaremos la corrección a 1-lazo del diagrama asociado a la polarización de vacío, donde obtenemos un nuevo régimen, que está asociado al amortiguamiento de Landau o *Landau Damping*. Así, obtenemos una corrección al propagador del bosón que cambia radicalmente la dinámica. Con este propagador, estudiaremos la corrección sobre la autoenergía del fermión y como nuevo resultado, obtenemos una dimensión anómala. Esto se denomina *Non-Fermi Liquid* (NFL) y es un candidato para explicar las propiedades no convencionales de los metales.

Terminaremos el capítulo, presentando resultados originales de un Non-Fermi Liquid donde el bosón es masivo, alejándonos ligeramente del QCP.

### 3.1. Teoría clásica del RG esférico con bosones críticos

Partimos de una teoría de fermiones no-relativistas con densidad finita y bosones críticos en  $D = d + 1$  dimensiones. La Acción euclídea es

$$S = \int d\tau d^d x \left\{ \frac{1}{2} [A(\partial_\tau \phi)^2 + (\nabla \phi)^2] + \psi^\dagger [\partial_\tau + E(i\nabla) - \mu] \psi + L_{int} \right\}, \quad (3.1.1)$$

La constante  $A$ , depende del sistema de interés. En sistemas relativistas a densidad finita, tales como QCD con materia bariónica,  $A = 1$ . En materia condensada donde el bosón  $\phi$  es emerge como un parámetro de orden,  $A = 0$ . Más adelante veremos que incluir esta dinámica temporal no afectará el resultado.

La lagrangiana de interacción general es

$$L_{int} = g\phi\psi^\dagger\psi + \lambda(\psi^\dagger\psi)^2 + \dots \quad (3.1.2)$$

Para el análisis de NFLs, estamos interesados en el acoplamiento tipo Yukawa, entonces despreciaremos los otros tipos de acoplamientos en el presente trabajo ( $\lambda = 0$ ).

Usamos la descomposición de modos sobre a superficie de Fermi como vimos en la sección 2.4.1, donde los momentos fermiónicos se escriben como  $\vec{q} = \hat{n}(k_F + q_\perp)$  y para los bosones,  $\vec{p} = \hat{n}p_\perp + \vec{p}_\parallel$ . Obtenemos los siguientes términos en la acción  $S[\phi(\tau, p_\perp + p_\parallel), \psi(\tau, p_\perp)] = S_b + S_f + S_{int}$ ,

$$S_f = \int d\tau \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^{d-1}} \frac{dq_\perp}{2\pi} \psi^\dagger(\tau, q_\perp) (\partial_\tau + v_F q_\perp) \psi(\tau, q_\perp), \quad (3.1.3)$$

$$S_b = \int d\tau \frac{dp_\perp}{2\pi} \frac{d^{d-1}p_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2} \phi(\tau, -\vec{p}) (\partial_\tau^2 - p_\perp^2 - p_\parallel^2) \phi(\tau, \vec{p}), \quad (3.1.4)$$

$$S_{int} = g \int d\tau \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^{d-1}} \frac{dq_\perp}{2\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(\tau, \vec{p}) \psi^\dagger(\tau, \vec{q} + \vec{p}) \psi(\tau, \vec{q}). \quad (3.1.5)$$

En (3.1.3) se definió la velocidad de Fermi como  $v_F = E'(k_F)$ .

Para el caso del fermión sobre la superficie de Fermi es

$$q'_0 = e^t q_0, \quad q'_\perp = e^t q_\perp, \quad (3.1.6)$$

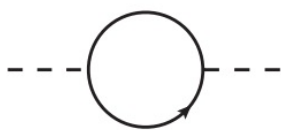
mientras que la posición angular  $\hat{n}$  sobre la superficie de Fermi no escala. Así, obtenemos el escaleo clásico que deja invariante a la teoría

$$\phi'(p') = e^{-\frac{(d+3)}{2}t} \phi(p), \quad \psi'(q_\perp) = e^{-\frac{3}{2}t} \psi(\vec{q}_\perp), \quad g' = e^{\frac{d-3}{2}t} g. \quad (3.1.7)$$

El escaleo del fermión corresponde a un sistema de 2 dimensiones, que se debe a la superficie de Fermi. El escaleo del bosón, por el contrario, depende de las dimensiones espaciales. Es importante notar que el acoplamiento se vuelve marginal cuando  $d = 3$ , que es la dimensión que nos enfocaremos en la siguiente sección. La razón para esto es que cerca de la dimensión crítica donde  $[q] = 0$ , es posible hacer una teoría de perturbaciones ya que el acoplamiento es muy pequeño ( $g \ll 1$ ).

## 3.2. Efectos cuánticos a 1-lazo

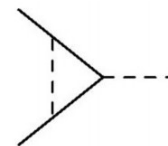
Ahora que sabemos como escala clásicamente la teoría, estudiaremos las correcciones cuánticas a 1-lazo de la teoría.



(a) Polarización del vacío.



(b) Autoenergía del Fermión.



(c) Corrección al vértice.

**Figura 3.2:** Diagramas de Feynman a 1-Lazo, donde las líneas cortadas corresponde al propagador del bosón y las líneas continuas al fermión.

Los diagramas de Feynman a 1-lazo se muestran en la Figura 3.2. El diagrama correspondiente a la polarización del vacío se muestra en la figura 3.2a corrige al propagador bosónico. La autoenergía del fermión correspondiente al diagrama de la figura 3.2b añade correcciones al propagador del fermión. La corrección al vértice dada por el diagrama que se muestra en la figura 3.2c no será añadida en el presente trabajo, debido a que en una teoría tipo Large-N, donde  $\psi$  es un vector con N componentes. Y  $\phi$  es una matriz  $N \times N$ , como se obtendría en una teoría de gauge  $SU(N)$ , su corrección está suprimida por potencias  $1/N$  [11].

### 3.2.1. Corrección al propagador del bosón

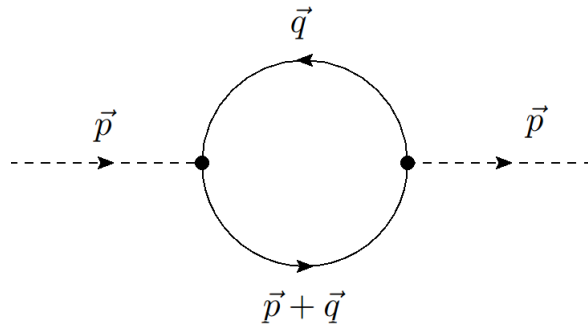
La teoría dada por la acción ( $S[\phi(\tau, p_\perp + p_\parallel), \psi(\tau, p_\perp)]$ ), posee una integral debido al lazo en el diagrama que se muestra en la figura 3.3, dada por

$$\Pi(p_0, \vec{p}) = g^2 \int \frac{dq_0 d^d \vec{q}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{[iq_0 - E(\vec{q})][i(q_0 + p_0) - E(\vec{p} + \vec{q})]}. \quad (3.2.1)$$

Hacemos la proyección sobre la superficie de Fermi, y obtenemos con  $d = 3$  dimensiones

$$\Pi(p_0, \vec{p}) = g^2 k_F^2 \int \frac{dq_0 dq_\perp d\Omega_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{[iq_0 - v_F q_\perp][i(q_0 + p_0) - v_F(q_\perp + \vec{p} \cdot \hat{n})]}, \quad (3.2.2)$$

donde  $\hat{n}$  tiene la dirección perpendicular a la superficie de Fermi, que en 2-dimensiones es la dirección radial. Podemos escoger una dirección particular para el momento  $\vec{p}$  sin perder generalidad; entonces  $\vec{p} = p\hat{z}$ . Debido al producto escalar  $\vec{p} \cdot \hat{n}$ , la integral  $\Pi(p_0, \vec{p})$



**Figura 3.3:** Elección de los momentos para la polarización del vacío.

depende de la orientación angular con respecto al eje axial de la superficie de Fermi, que parametrizamos por el ángulo  $\theta$ . Hacemos una sustitución  $\cos(\theta) = x$ , obteniendo

$$\Pi(p_0, \vec{p}) = \frac{g^2 k_F^2}{2\pi} \int_{-1}^1 dx \int \frac{dq_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_\perp}{2\pi} \frac{1}{[iq_0 - v_F p_\perp][i(p_0 + q_0) - v_F(q_\perp + |\vec{p}|x)]}. \quad (3.2.3)$$



Esta integral se puede calcular por residuos, obteniendo como resultado

$$\Pi(p_0, \vec{p}) = \frac{g^2 k_F^2}{2\pi^2 v_F} \left[ \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F} \tan^{-1} \left( \frac{|\vec{p}| v_F}{|p_0|} \right) \right] = M_D^2 \left[ \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F} \tan^{-1} \left( \frac{|\vec{p}| v_F}{|p_0|} \right) \right]. \quad (3.2.4)$$

Aquí  $M_D^2 = g^2 k_F^2 / 2\pi^2 v_F$  se conoce como *masa de Debye*. La corrección al propagador del bosón posee dos límites que analizamos a continuación.

1. Cuando  $|\vec{p}| \gg p_0$ :

$$\tan^{-1} \left( \frac{|\vec{p}| v_F}{|p_0|} \right) \approx \frac{\pi}{2} \longrightarrow \Pi(p_0, \vec{p}) \simeq \frac{\pi}{2} M_D^2 \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F}. \quad (3.2.5)$$

En este caso, la corrección del propagador es proporcional a  $|p_0|/|p|$  lo cual produce un cambio interesante en la dinámica del sistema.

2. Cuando  $|\vec{p}| \ll p_0$ :

$$\tan^{-1} \left( \frac{|\vec{p}| v_F}{|p_0|} \right) \approx \frac{|\vec{p}| v_F}{|p_0|} \longrightarrow \Pi(p_0, \vec{p}) \simeq M_D^2. \quad (3.2.6)$$

En esta ocasión, la corrección induce un amortiguamiento grande que suprime la dinámica de los bosones.

Estamos interesados en el caso 1; entonces la inversa del propagador (o relación de dispersión) corregido es

$$D^{-1}(p) = Ap_0^2 + \vec{p}^2 + \Pi(p) = Ap_0^2 + \vec{p}^2 + \frac{\pi}{2} M_D^2 \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F}. \quad (3.2.7)$$

Haciendo un análisis de la relación de dispersión con la corrección, encontramos que en el régimen ( $|\vec{p}| \gg p_0$ ) el término correspondiente a  $Ap_0^2$  es muy pequeño comparado con el término de damping y por lo tanto, lo despreciamos. Así, obtenemos una nueva relación de dispersión

$$D^{-1}(p) \simeq \vec{p}^2 + \frac{\pi}{2} M_D^2 \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F}. \quad (3.2.8)$$

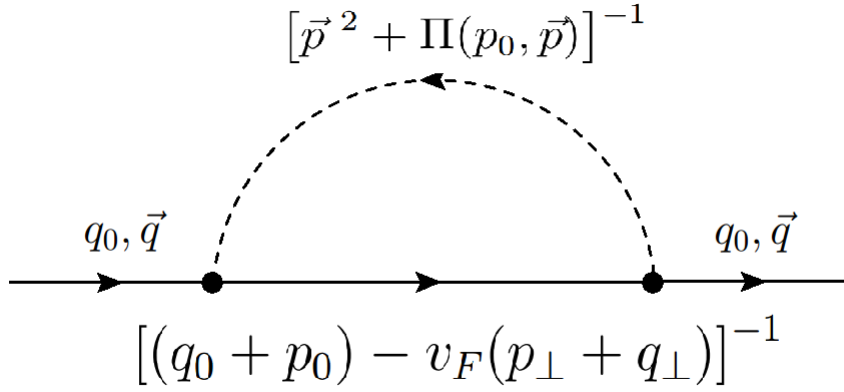
Este resultado produce un cambio dramático en el exponente dinámico para los bosones críticos: obtenemos  $z = 3$  y para que el escaleo de la relación de dispersión sea covariante los momentos transforman con dimensión

$$[p_0] = 1, \quad [|\vec{p}|] = 1/3. \quad (3.2.9)$$

Esta contraste, recordemos que en la teoría relativista sin damping de Landau,  $z = 1$ .

### 3.2.2. Corrección al propagador del fermión con Landau Damping

Ahora que conocemos un nuevo régimen donde los bosones críticos son modificados por el Landau damping, será interesante incluirlos en el diagrama correspondiente a la autoenergía del fermión. La contribución debido al diagrama que se muestra en la



**Figura 3.4:** Elección del sentido de los momentos.

figura 3.4 es la siguiente:

$$\Sigma(q_0, \vec{q}) = -g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ \vec{p}^2 + M_D^2 \frac{|p_0|}{v_F |\vec{p}|} \right] [i(q_0 + p_0) - v_F(p_{\perp} + q_{\perp})]}, \quad (3.2.10)$$

donde obviamos el factor  $\pi/2$  en la corrección al bosón ya que puede ser absorbido dentro de  $M_D^2$ . El término  $p_0^2$  se desprecia debido al límite  $|\vec{p}| \gg p_0$ .

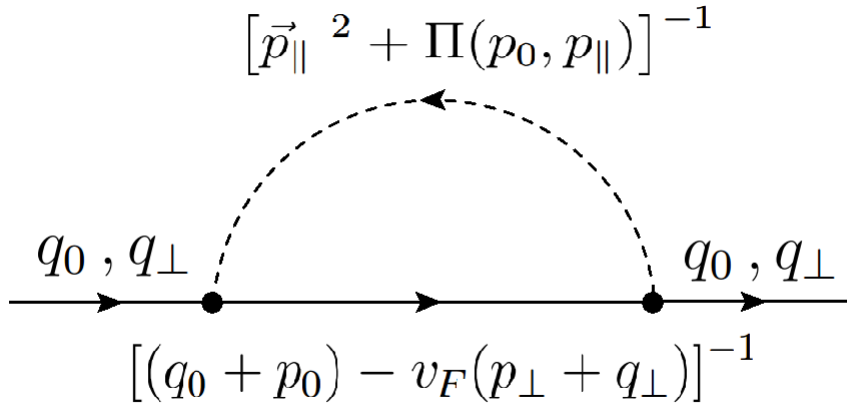
Recordemos que los momentos para el bosón fueron descompuesto en parte paralela y perpendicular a la superficie de Fermi. Como en el propagador interno del fermión posee la componente perpendicular del momento del bosón, ambos deben poseer la misma dimensión de escala. La escala del momento perpendicular del fermión es  $[q_{\perp}] = 1$ , entonces

$$[p_{\perp}] = 1. \quad (3.2.11)$$

Así, la única componente del bosón que posee la escala 1/3 es

$$[p_{\parallel}] = 1/3. \quad (3.2.12)$$

En consecuencia, en el límite de bajas energías la componente del momento bosónica paralela en la superficie de Fermi se hace más importante y podemos despreciar  $p_{\perp}$  en



**Figura 3.5:** Autoenergía del fermión con el propagador corregido, donde se aprecia la separación de las componentes paralela y perpendicular de los momentos.

el propagador bosónico. De esta manera,

$$\Sigma(q_0, \vec{q}) = -g^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^{2-\epsilon}p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\left[ \vec{p}_{\parallel}^2 + M_D^2 \frac{|p_0|}{v_F p_{\parallel}} \right]} \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi} \frac{1}{[i(q_0 + p_0) - v_F(p_{\perp} + q_{\perp})]}, \quad (3.2.13)$$

donde denotamos  $|\vec{p}_{\parallel}| = p_{\parallel}$ .

Esto produce una simplificación importante de los efectos cuánticos. El momento paralelo pasa a través de propagador del bosón y el momento perpendicular a través del propagador del fermión y por lo tanto la integral de lazo factoriza. Esto lo representamos en la figura 3.5.

El cálculo de la autoenergía del fermión dada por (3.2.10) se efectúa analíticamente en  $d = 3 - \epsilon$ ; se resuelve la integral sobre  $p_{\perp}$  mediante residuos obteniendo una integral que depende de  $\text{Sgn}(q_0 + p_0)$ . La función signo produce 3 regiones de las cuales sólo contribuye aquella donde  $p_0$  tiene como sus límites a 0 y  $q_0$ ,

$$\Sigma(q_0) = \frac{4\pi i g^2}{v_F} \int \frac{d^{2-\epsilon}p_{\parallel}}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^{q_0} \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{p_{\parallel}^2 + \frac{|p_0|}{v_F p_{\parallel}} M_D^2}. \quad (3.2.14)$$

Finalmente

$$\Sigma(q_0) \simeq \frac{2ig^2}{v_F \epsilon} q_0 (M_D^2 |q_0|)^{-\epsilon/3}. \quad (3.2.15)$$

Añadiremos esta corrección a la inversa del propagador fermiónico para obtener el propagador corregido cuánticamente

$$G_F(q_0, q_{\perp}) = -(iq_0 - v_F q_{\perp}) - \Sigma(q_0) = -iq_0 + v_F q_{\perp} - iq_0 \frac{2g^2}{v_F \epsilon} (M_D^2 |q_0|)^{-\epsilon/3}. \quad (3.2.16)$$

Podemos asociar esta corrección del propagador fermionico a una teoría efectiva cuántica compuesta con el acoplamiento de Yukawa  $g$ . Entonces

$$Z(q_0) = 1 - \frac{\Sigma(q_0)}{iq_0} = 1 + \frac{2g^2}{v_F \epsilon} (M_D^2 |q_0|)^{-\epsilon/3}. \quad (3.2.17)$$

Cuando la frecuencia

$$q_0 \ll \left( \frac{2g^2}{v_F \epsilon} \right)^{3/\epsilon} (M_D^2)^{-1} = \mu_{NFL} \quad (3.2.18)$$

el único término que contribuye es el asociado a la corrección al propagador  $\Sigma$ , obteniendo

$$Z(q_0)q_0 \simeq \frac{2g^2}{v_F \epsilon} M_D^{-2\epsilon/3} q_0^{1-\epsilon/3}. \quad (3.2.19)$$

Esto define una *dimensión anómala* para la dinámica del fermión, donde la dimensión anómala es el exponente  $\gamma$  en  $p_0^{1-2\gamma}$ ; por lo tanto obtenemos

$$2\gamma \simeq \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.2.20)$$

Entonces, el fermión a bajas energías ( $q_0 \ll \mu_{NFL}$ ) adquiere una dimensión anómala cambiando dramáticamente su dinámica. Este fermión ya no es descrito por una teoría basada en el Líquido de Fermi. A esta teoría se conoce como *Non-Fermi Liquid* (NFL)[11]. El polo simple en el propagador de la teoría libre es reemplazado por una función no analítica con una potencia no entera de la frecuencia. Físicamente, las correcciones cuánticas destruyen las cuasi-partículas y transforma la superficie de Fermi en un objeto incoherente.

### 3.3. Efectos cuánticos con bosones masivos

Ahora que conocemos como se produce un NFL, presentaremos resultados originales de un NFL cuando el bosón es masivo extendiendo los resultados obtenidos en Nuestra motivación principal es utilizar la mas bosonica como parámetro para alejarse del QCP. Esto nos permitirá comenzar a explorar otras regiones del diagrama de fase.

La teoría viene dada por  $S[\phi(\tau, p_\perp + p_\parallel), \psi(\tau, p_\perp)] = S_b + S_f + S_{int}$ , donde a la acción del boson (3.1.4) se le añade un término de masas

$$S_b = \int d\tau \frac{dp_\perp}{2\pi} \frac{d^{d-1}p_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2} \phi(\tau, -\vec{p}) (A\partial_\tau^2 - p_\perp^2 - p_\parallel^2 + m^2) \phi(\tau, \vec{p}). \quad (3.3.1)$$

Los resultados de la polarización del vacío no son afectados por la presencia de la masa,

así que obtenemos la corrección al propagador (3.2.7) con masa

$$D^{-1}(p) = Ap_0^2 + \vec{p}^2 + m^2 + \frac{\pi}{2} M_D^2 \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F}. \quad (3.3.2)$$

Por los mismos argumentos que utilizamos en la sección anterior, el término de frecuencia del bosón se desprecia debido a que es muy pequeño comparado con el damping ( $p_0 \ll \vec{p}$ ). Por lo tanto

$$D^{-1}(p) \simeq \vec{p}^2 + m^2 + \frac{\pi}{2} M_D^2 \frac{|p_0|}{|\vec{p}| v_F}. \quad (3.3.3)$$

Utilizando el último resultado, efectuaremos la corrección al propagador del fermión. Por simplicidad, nos restringimos a  $q_0 > 0$ . La contribución de la autoenergía

$$\begin{aligned} \Sigma(q_0) &= \frac{4\pi i g^2}{v_F} \int \frac{d^{2-\epsilon} p_{\parallel}}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^{q_0} \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{p_{\parallel}^2 + m^2 + \frac{|p_0|}{v_F p_{\parallel}} M_D^2}, \\ &= \frac{4\pi i g^2}{v_F} \int \frac{d^{2-\epsilon} p_{\parallel}}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \frac{p_{\parallel}}{M_D^2} \log \left[ \frac{M_D^2 q_0 + m^2 p_{\parallel} + p_{\parallel}^3}{m^2 p_{\parallel} + p_{\parallel}^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Esta integral no se puede resolver analíticamente, pero si podremos estudiar sus límites para la masa comparada con la frecuencia externa  $q_0$ .

1. Cuando  $m \ll q_0$ :

$$\Sigma(q_0) \simeq \frac{4\pi i g^2}{v_F} \int \frac{d^{2-\epsilon} p_{\parallel}}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \frac{p_{\parallel}}{M_D^2} \log \left[ \frac{M_D^2 q_0 + p_{\parallel}^3}{p_{\parallel}^3} \right] \simeq \frac{2i g^2}{v_F \epsilon} M_D^{-2\epsilon/3} q_0^{1-\epsilon/3}. \quad (3.3.5)$$

El momento paralelo que posee el factor  $m^2$  se desprecia comparado con  $q_0$ . Esto concuerda con el caso no masivo que analizamos en la sección anterior y donde obtuvimos como resultado un Non-Fermi Liquid.

2. Cuando  $m \gg q_0$ :

$$\Sigma(q_0) \simeq \frac{4\pi i g^2}{v_F} \int \frac{d^{2-\epsilon} p_{\parallel}}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \frac{p_{\parallel} q_0}{p_{\parallel}^2 + m^2} \simeq -g^2 \frac{4\pi^3 m}{v_F} m^{-\epsilon} q_0. \quad (3.3.6)$$

El término de frecuencia resultante posee una potencia 1 independiente del parámetro  $\epsilon$ . Si añadimos esta corrección sobre el propagador fermiónico, encontramos que su exponente dinámico es cero ( $2\gamma = 0$ ). Esto se aprecia en el factor de renormalización de la frecuencia

$$-i q_0 Z(q_0) = -i q_0 \left( 1 + i g^2 \frac{4\pi^3 m}{v_F} m^{-\epsilon} \right). \quad (3.3.7)$$

Los efectos cuánticos se manifiestan ahora en la potencia no entera con la que aparece la masa en  $Z(q_0)$ .

Analizando estos casos, apreciamos el comportamiento de la teoría en su diagrama de fase en las cercanías a punto crítico cuántico (QCP). Lo que no es trivial, es comprender como interpola de un Líquido de Fermi a Non-Fermi Liquid. Para ello, es necesario obtener una solución completa de la autoenergía del fermión y lo haremos numéricamente.

### 3.3.1. Solución numérica de la autoenergía del fermión

La contribución de la autoenergía del fermión es

$$\Sigma(q_0) = \frac{4\pi i g^2}{v_F} \frac{\Omega_{1-\epsilon}}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^\infty dp_{\parallel} p_{\parallel}^{2-\epsilon} \log \left[ \frac{q_0 + m^2 p_{\parallel} + p_{\parallel}^3}{m^2 p_{\parallel} + p_{\parallel}^3} \right], \quad (3.3.8)$$

donde hacemos  $M_D^2 = 1$  y se descompuso esféricamente sobre el momento paralelo. Como ejemplo, calculamos la solución numérica para  $\epsilon = 0.9$ ,  $m = 0.5$  y con un cutoff  $\Lambda = 10^4$  en unidades de  $M_D = 1$ . Parametrizamos la autoenergía como  $\Sigma \propto q_0^\alpha$ . El valor del exponente  $\alpha$  para los límites de la masa del bosón son

$$m \gg q_0 \rightarrow \alpha = 1.0, \quad (3.3.9)$$

$$m \ll q_0 \rightarrow \alpha = 0.7. \quad (3.3.10)$$

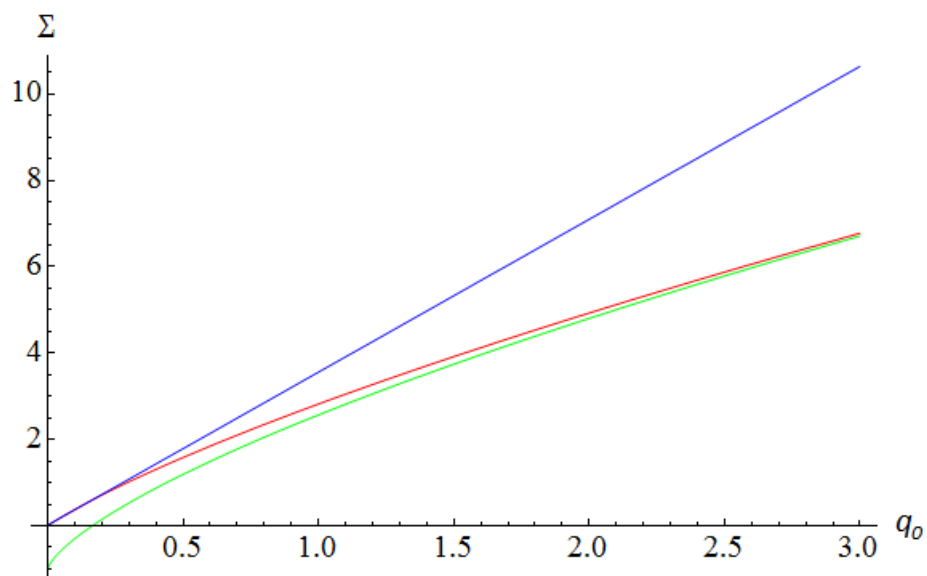
Las curvas (o rectas) mostradas en la figura 3.6 fueron ajustadas de la solución numérica obtenida.

Usaremos los límites de la sección anterior, que compara de la masa del bosón con la frecuencia externa, para verificar el resultado numérico. El comportamiento de la autoenergía varía con respecto al valor de  $q_0$ . Para valores muy cercanos de cero ( $q_0 \rightarrow 0$ ), el comportamiento está descrito por un FL, es decir, por una dependencia lineal en  $\Sigma$  (3.3.6). Con el aumento de  $q_0$ , el término de frecuencia se hace más importante que la masa del bosón y la teoría describe un NFL. Los valores intermedios de  $q_0$  describen numéricamente la interpolación entre FL y NFL.

Una forma precisa de hallar el valor del exponente en la solución numérica es trabajar con variables logarítmicas. Estos resultados se aprecian en la figura 3.7 haciendo el ajuste para los límites de la masa del bosón, obtenemos

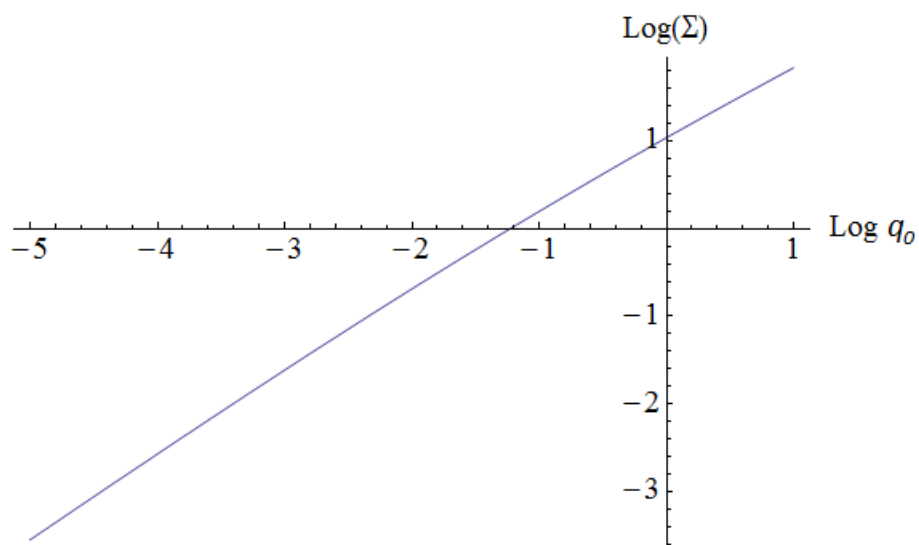
$$m \gg q_0 \rightarrow \alpha \approx 1.0, \quad (3.3.11)$$

$$m \ll q_0 \rightarrow \alpha \approx 0.7. \quad (3.3.12)$$



**Figura 3.6:** La línea de color rojo representa la solución general de la integral para  $\Sigma$ . La recta de color azul es el ajuste que describe el comportamiento del Líquido de Fermi. Y la curva de color verde, ajusta al Non-Fermi Liquid.

Este resultado concuerda aproximadamente con la predicción teórica.



**Figura 3.7:** Gráfica de la solución numérica en escala logarítmica.





# Conclusiones y direcciones futuras

En el presente trabajo de tesis se enfocó en desarrollar métodos de teoría campos aplicables a la materia cuántica. Esto requirió ir más allá del vacío relativista de la teoría, considerando efectos no-relativistas y de densidad finita.

En primer lugar, en el capítulo 1 desarrollamos un método sistemático para obtener límites no-relativista. En presencia de campos externos, electromagnéticos y gravitatorios, se obtuvo como resultado novedoso un acoplamiento tipo Pauli en  $(d + 1)$ -dimensiones y un acoplamiento con el escalar de curvatura. Para ello, fue necesario la identificación y la elaboración de un esquema nuevo, mediante proyectores de energía, para eliminar los grados de libertad de alta energía. Las técnicas desarrolladas fueron utilizadas para la elaboración de nuevas técnicas en teorías a densidad finita.

En el capítulo 2, comenzó el análisis de teorías a densidad finita finita. Nos enfocaremos principalmente en fermiones libres. Este estudio tuvo como consecuencia El desarrollo del capítulo 1 permitió encontrar nuevos proyectores, y así derivamos una teoría efectiva sobre la superficie de Fermi fermiones libres.

Finalmente, el capítulo 3, se enfocó en sistemas fermiónicos interactuantes con bosones críticos y masivos. A partir de las interacciones con bosones críticos, se obtuvo un punto crítico cuántico. Esto dio origen a una dimensión anómala para los fermiones, obteniéndose un non-Fermi Liquid. Otro resultado importante fue la incorporación de una masa bosónica, que se utilizó como parámetro para alejarse del punto crítico. Calculamos la autoenergía fermiónica en presencia de esta masa, combinando límites analíticos y resultados numéricos. Así, identificamos la interpolación entre el régimen NFL (válido para frecuencias mucho mayores a la masa bosónica) y un régimen tipo FL que aparece a muy baja frecuencia.

Queremos destacar que esta tesis sugiere direcciones futuras de estudio:

- Añadir otros tipos de interacción al modelo de fermiones sobre la superficie de Fermi con bosones masivos, como  $(\psi^\dagger\psi)^2$  que se encuentra relacionando con la estabilidad superconductora (Canal BCS y Forward).
- Estudiar otros sistemas con esta nueva teoría, como el *Efecto Kondo* y sistemas con impurezas.

- Considerar temperatura no nula como nuevo parámetro para describir el comportamiento del modelo en otras fases.
- Estudiar Transporte cerca del punto crítico.

# Bibliografía

- [1] Bohr, H., Nielsen, H. Hadron production from a boiling quark soup. *Nuclear Physics B*, **128** (2), 275 – 293, 1977. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377900323>. 1
- [2] Ivanenko, D. D., Kurdgelaidze, D. F. Hypothesis concerning quark stars. *Astrophysics*, **1**, 251–252, 1965. [Astrofiz.1,479(1965)]. 1
- [3] Ivanenko, D., Kurdgelaidze, D. F. Remarks on quark stars. *Lettere al Nuovo Cimento (1969-1970)*, **2** (1), 13–16, 1969. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02753988>. 1
- [4] Wilson, K. G., Kogut, J. B. The Renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, **12**, 75–200, 1974. 1
- [5] Shankar, R. Renormalization group approach to interacting fermions. *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 129–192, 1994. 1, 17, 24
- [6] Polchinski, J. Effective field theory and the Fermi surface. En: Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92): From Black Holes and Strings to Particles Boulder, Colorado, June 3-28, 1992, págs. 0235–276. 1992. 1, 17, 24
- [7] Sachdev, S. Quantum Phase Transitions:. 2<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. URL <https://www.cambridge.org/core/books/quantum-phase-transitions/33C1C81500346005E54C1DE4223E5562>. 1, 28
- [8] Sachdev, S. Quantum phase transitions. *Physics World*, **12** (4), 33, 1999. URL <http://stacks.iop.org/2058-7058/12/i=4/a=23>. 1
- [9] Bednorz, J. G., Müller, K. A. Possible hightc superconductivity in the ba–la–cu–o system. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **64** (2), 189–193, 1986. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01303701>. 1, 27
- [10] Torroba, G., Wang, H. Quantum critical metals in 4 –  $\epsilon$  dimensions. *Phys. Rev.*, **B90** (16), 165144, 2014. 2

- 
- [11] Raghu, S., Torroba, G., Wang, H. Metallic quantum critical points with finite BCS couplings. *Phys. Rev.*, **B92** (20), 205104, 2015. [30](#), [34](#)
- [12] Fitzpatrick, A. L., Torroba, G., Wang, H. Aspects of Renormalization in Finite Density Field Theory. *Phys. Rev.*, **B91**, 195135, 2015.
- [13] Fitzpatrick, A. L., Kachru, S., Kaplan, J., Raghu, S., Torroba, G., Wang, H. Enhanced Pairing of Quantum Critical Metals Near  $d=3+1$ . *Phys. Rev.*, **B92** (4), 045118, 2015. [2](#)
- [14] Green, M., Schwarz, J., Witten, E. Superstring Theory: Volume 2, Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1987. [13](#)
- [15] Leblanc, M., Lozano, G., Min, H. Extended superconformal Galilean symmetry in Chern-Simons matter systems. *Annals Phys.*, **219**, 328–348, 1992. [15](#)
- [16] Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, **108**, 1175–1204, Dec 1957. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>. [27](#)

# Agradecimientos

En estas letras quiero mencionar a las personas que hicieron posible el desarrollo del presente trabajo, desde el inicio de la aventura como Físico hasta el día de entrega de este documento.

Comenzaré agradeciendo a los miembros de mi familia mi padre Mario, por su ejemplo como persona, como amigo y padre. Mi madre Marleni, por su gigante dedicación a mi y a mi hermano, para impulsarnos a mejorar incluso cuando el cansancio le ganaba. A mi hermano por ser siempre la persona que me acompañaba, por compartir los gustos y disgustos juntos. A mi perro, Liza, por acompañarme durante las noches de estudio en el grado. A ellos y a los demás miembros de mi familia, por apoyarme desde lejos.

A mis amigos de la facultad de Ciencias Física de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), especialmente a los miembros del Grupo de Física Teórica (GFT-UNMSM) y a mi asesor de Licenciatura Teofilo Vargas, por ser los primeros en motivar mi interés en la física teórica y apoyarme en mi desarrollo profesional.

Quiero agradecer profundamente a Gonzalo Torroba, por ser la persona que me apoyo desde un inició durante la Maestría, por su inmensa paciencia en soportar todas mis dudas, preguntas y consultas. Por ayudarme incluso cuando estaba ocupado, por el apoyo constante para sacar adelante este trabajo y por impulsar mi autonomía como profesional. Muchas Gracias.

A mis amigos del IB, especialmente a Alberto Giraldo por acompañarme durante todas materias en la Maestría, por ser el primero en soportar mis dudas y preguntas de las materias. A Isabel Goos por todos los mates cebados y las galletas que me comí durante todo este año y medio. A Ambos, por su compañía durante la realización de este trabajo que hizo más agradable la escritura. A Ciro Cordeiro, por ser casi un hermano para mi y ser un buen compañero de habitación.

Finalmente te agradezco, sí a ti! por llegar al punto final de este trabajo.

