

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN FÍSICAS

**JUNTURA DE TÉTRADAS EN TEORÍAS
GRAVITACIONALES $f(T)$**

Lic. M. Onetto
Maestrando

Dr. F. Fiorini
Director

Miembros del Jurado

Dra. S. Mollerach (Instituto Balseiro)

Dra. M. Huerta (Instituto Balseiro)

Dr. D. Mazzitelli (Instituto Balseiro)

15 de Diciembre de 2016

Grupo de Partículas y Campos– Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Resumen	1
Abstract	3
1. Introducción	5
2. Relatividad General	7
2.1. La gravedad de Einstein	7
2.2. Hipersuperficies y Curvatura Extrínseca	9
2.2.1. Descripción de una Hipersuperficie	9
2.2.2. Vectores y la métrica inducida	10
2.2.3. Curvatura Extrínseca	11
2.3. Condiciones de Juntura	12
2.3.1. Introducción	12
2.3.2. Primera condición de juntura	13
2.3.3. Los tensores $R_{\beta\lambda\delta}^{\alpha}$ y $T_{\alpha\beta}$	14
2.3.4. Segunda condición de Juntura	16
2.4. Ejemplo I: La cuerda de Gott	17
2.5. Ejemplo II: Colapso gravitatorio de polvo en 2+1	20
3. El Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General	23
3.1. El Espacio de Weitzenböck	23
3.2. Invariancia ante transformaciones de Lorentz	28
3.3. La Acción Teleparalela	29
4. Teorías de Gravedad Modificada	31
4.1. Deformaciones $f(T)$	32
4.2. Invariancia de Lorentz en las teorías $f(T)$	34
4.2.1. Generalidades	34
4.2.2. El frame de Schwarzschild	35

4.2.3. El frame de FRW, Universo cerrado	39
4.3. El grupo remanente	41
5. La Problemática de la Juntura	47
5.1. Juntura de tétradas	47
5.2. Un ejemplo muy descriptivo. Juntura en el espacio de Minkowski	47
5.3. La cuerda de Gott en teorías $f(T)$	50
5.4. Un frame estelar	54
Conclusiones	59
Bibliografía	61

Resumen

En la presente tesis de Maestría se presenta la problemática de la juntura de tétradas en teorías $f(T)$. Para delinear el camino hacia su entendimiento, se presenta una descripción de las condiciones de juntura en Relatividad General, junto a dos ejemplos en donde éstas fueron aplicadas. Luego se describe el Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General, que será el punto de partida para las teorías de gravedad modificada $f(T)$. Estas teorías tienen como particularidad que no son invariantes locales de Lorentz, sin embargo existe un subgrupo de transformaciones que sí dejan invariantes a las ecuaciones dinámicas. En este trabajo se realiza una descripción del así llamado *grupo remanente*, junto a su rol fundamental para juntura de soluciones en las teorías $f(T)$. En el último capítulo se presentan dos ejemplos donde se logró hacer un correcto empalme de los campos para los cuales se estudió sus respectivos grupos remanentes.

Abstract

The problem of tetrads junction in $f(T)$ theories is studied. The description of junction conditions in General Relativity is explained in detail and applied in two descriptive examples. Also, as the Teleparallel Equivalent of General Relativity is the starting point to develop $f(T)$ gravitational modified theories, it is fully described. What is peculiar of $f(T)$ theories is that local Lorentz Invariance is lost as a symmetry. However, there is still a subgroup which preserves the dynamical equations. In the text there is a description of what is called the *remnant group* and its role while solving the problem of junction. In the last chapter two examples of global solutions for $f(T)$ theories are presented, as well as the study of their respective *remnant groups*.

Keywords:

Capítulo 1

Introducción

Desde las leyes de la mecánica puntual escritas por Newton en el siglo XVII, la descripción de las leyes de la naturaleza consiste en ecuaciones diferenciales. Dado que estas ecuaciones son deterministas, existen casos donde basta dar condiciones iniciales para conocer completamente la evolución del sistema. En otros casos, por ejemplo el electromagnetismo, uno debe imponer, además, condiciones de contorno para conocer la solución en todo el espacio. En el contexto de las ecuaciones de Maxwell, las condiciones serán las de Neumann para el campo eléctrico y Dirichlet para el potencial electrostático. Es así como el conjunto de ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno es lo que identifica a una teoría física.

La teoría de la Relatividad General de Einstein (RG), cuyos fundamentos se describen brevemente en el Capítulo 2, no podía ser excepción a esta fuerte afirmación. A pesar de que han pasado más de 100 años desde su concepción en 1915, todavía se estudia lo que hoy se llama *formulación de valores iniciales*, que consiste en la descripción de la evolución del espacio-tiempo dado un conjunto de condiciones iniciales. La razón por la cual la problemática sigue abierta, es consecuencia de que las ecuaciones de campo son no lineales. Y luego, demostrar unicidad de las soluciones resulta dificultoso en casos generales. Asimismo, la *formulación de valores iniciales* sí está bien definida, por ejemplo, tomando como hipótesis que el espacio sea globalmente hiperbólico, lo cual resulta ser una condición muy fuerte sobre la geometría.

En RG, un problema asociado a la formulación de valores iniciales, es la determinación de las condiciones de contorno o frontera para la métrica al forzar junturas de soluciones con distintas simetrías. Estas condiciones fueron expuestas por Israel en 1966 [1], y las mismas son introducidas en este trabajo en la sección (2.3). El logro conceptual de estas condiciones es manifestar la relación entre el salto en las componentes de la métrica cuando sobre una hipersuperficie se acumula un *thin shell* de materia. El análogo electromagnético a esto es la discontinuidad de la componente normal del vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , en caso de existir una densidad de carga

superficial.

Aún luego de un siglo, RG sigue siendo la teoría que mejor describe la interacción gravitatoria. Sin embargo, existen hoy varias motivaciones para modificar la teoría de Einstein, las cuales se comentan en el Capítulo 4. Naturalmente estas modificaciones darán lugar a nuevas ecuaciones de campo, que a su vez poseerán nuevas condiciones de juntura. Por ejemplo, un caso muy estudiado en el contexto de las teorías de gravedad modificada, es la teoría de Lovelock propuesta en 1971 [2], la cual es una generalización de RG en D dimensiones espacio-temporales, y cuyas condiciones de juntura fueron determinadas por Willison y Gravanis en 2004 [3]. Otros ejemplos de teorías de gravedad modificadas proponen deformaciones de la acción de Hilbert-Einstein, como las denominadas $f(R)$, y son descritas brevemente en el Capítulo 4. Fue Senovilla en 2013 quien expuso las condiciones de juntura para las $f(R)$ [4].

Finalmente existen las teorías $f(T)$, centrales en este trabajo y expuestas en el Capítulo 4, que en lugar de modificar la acción de Hilbert-Einstein, deforman su equivalente teleparalelo (expuesto en el Capítulo 3). Este tipo de teorías fueron desarrollada en 2006 por Ferraro y Fiorini [5], y sus condiciones de juntura todavía no fueron determinadas. La principal característica de las $f(T)$ recae en la pérdida de invariancia local ante transformaciones de Lorentz, la cual se describe en detalle en (4.2), y cuya consecuencia, entre otras, es restringir la posibilidad de empalmar dos soluciones de la teoría. Es así como el estudio del grupo remanente, un subgrupo de transformaciones de Lorentz que sí dejan invariante a la teoría, será crucial para realizar el empalme de los campos que representan soluciones de dos, o más regiones del espacio. En el Capítulo 5 se presentan dos ejemplos de empalme en teorías $f(T)$, junto al estudio de su grupo remanente, lo cual representa el principal aporte original de este trabajo.

Capítulo 2

Relatividad General

2.1. La gravedad de Einstein

La gravedad se destaca entre el resto de las interacciones fundamentales de la naturaleza por la siguiente propiedad: dos partículas con masas y composiciones diferentes adquieren la misma aceleración, de hecho dadas las mismas condiciones iniciales realizan trayectorias idénticas. Esta idea, presentada por Galileo en la Edad Moderna, predice la peculiar igualdad entre el valor de la masa inercial de un cuerpo y su masa gravitatoria. La coincidencia se mantuvo en el paradigma de la física hasta que Einstein presentó la teoría de la Relatividad General en 1915. Allí, esta coincidencia en valor numérico pasó a ser explicada como una consecuencia propia de la teoría, postulando que la gravedad no es una fuerza propiamente dicha sino una suerte de comportamiento inercial resultante de la trayectoria sobre un espacio-tiempo curvo.

El trabajo de Einstein comienza con el siguiente planteo: siempre es posible encontrar localmente un sistema de referencia acelerado tal que el campo gravitatorio se anule y allí, para un observador en ese sistema, valdrán las leyes de la Relatividad Especial. A este postulado se lo conoce como Principio de Equivalencia, invitando a redefinir la fuerza gravitatoria como una consecuencia geométrica del espacio-tiempo. Es decir, la trayectoria realizada por una partícula en presencia de gravedad, en lugar de ser explicada por una fuerza gravitatoria, se describe como el movimiento *Natural* en la geometría que lo contiene. Con la geometrización de su movimiento, una partícula libremente gravitante está genuinamente libre de fuerzas y se mueve inercialmente sobre las curvas provistas por la geometría. En resumen, la teoría de la Relatividad General de Einstein es una teoría que relaciona la distribución de materia y energía con la geometría del espacio-tiempo.

Para realizar una descripción geométrica del espacio-tiempo, RG hace uso del lenguaje de la geometría diferencial Lorentziana tomando como ente dinámico al tensor métrico $g_{\mu\nu}$, objeto que determina cómo se mide la distancia espacio-temporal entre

cada par de puntos de la variedad diferencial.

El intervalo se define como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde μ y ν corresponden a cada una de las coordenadas locales tomadas para describir la variedad. De aquí en adelante se tomará como convención la suma sobre índices repetidos.

Haciendo uso de principios variacionales sobre las trayectorias en el espacio-tiempo, se obtienen las ecuaciones de movimiento de las partículas libremente gravitantes, denominadas geodésicas. El objeto a extremar para la determinación de estas trayectorias es

$$S = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}} d\lambda, \quad (2.2)$$

siendo λ el parámetro afin de las curvas en cuestión.

Por ejemplo, en el caso de una geometría plana, las geodésicas serán rectas, como lo son las trayectorias de una partícula libre en la Relatividad Especial.

A continuación se presenta la ecuación de la geodésica para una partícula libremente gravitante según RG:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\nu 2}} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} = 0, \quad (2.3)$$

en donde $\Gamma_{\sigma\rho}^\mu$ es la conexión de Levi-Civita definida en una base coordenada como,

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\sigma\alpha} + \partial_\sigma g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\sigma\rho}). \quad (2.4)$$

Otra cantidad importante a definir es el tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$, cuyas componentes son

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma. \quad (2.5)$$

Este objeto, junto a algunas de sus contracciones, es el que provee de información sobre la curvatura de la geometría, y será un actor protagónico en las ecuaciones dinámicas.

Si contraemos los índices λ y ν , obtenemos lo que se conoce como tensor de Ricci $R_{\mu\rho}$, y tomando la traza de este último $R_{\mu}^\mu \equiv R$, obtenemos el escalar de Ricci. Utilizando argumentos de simetría y conservación, Einstein encontró una expresión que vincula la distribución de materia y energía con la geometría del espacio tiempo, dada por un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que hoy denominamos

ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G\mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

siendo $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ el tensor de energía- impulso de la materia.

2.2. Hipersuperficies y Curvatura Extrínseca

En la presente sección se exponen los objetos básicos necesarios para derivar las condiciones de juntura de RG halladas por Israel en 1966 [6]. Es interesante resaltar que existe una forma alternativa de derivar estas condiciones, simplemente variando la acción de Einstein-Hilbert junto al término de superficie de Hawking-Gibbons. Esta técnica es recurrente en la literatura sobre juntura de soluciones en teorías gravitatorias de ordenes superiores.

2.2.1. Descripción de una Hipersuperficie

En una variedad espacio-temporal n-dimensional, una *hipersuperficie* es una subvariedad (n-1)-dimensional que puede ser catalogada como tipo espacio, tiempo o nula. Para poder definir esta subvariedad se requiere expresar un vínculo entre las coordenadas de la variedad global, ie

$$S(x^\mu) = 0, \quad (2.7)$$

o bien, una relación entre las coordenadas de la variedad global y otras intrínsecas de la hipersuperficie,

$$x^\mu = x^\mu(y^a), \quad (2.8)$$

siendo y^a ($a = 1, 2, \dots, n - 1$) las coordenadas intrínsecas de la hipersuperficie.

Un ejemplo básico de esta definición es un círculo embebido en R^2 , el cual puede ser descrito con el vínculo $S(x, y) = x^2 + y^2 - R = 0$, o bien con la relación $x = R \cos(\theta)$ y $y = R \sin(\theta)$, con θ como coordenada intrínseca.

Habiendo definido qué es una hipersuperficie, procedemos a definir el vector normal a ella. Consideremos entonces a Σ como una hipersuperficie definida por la condición (2.7), de la cual calculamos el vector $S_{,\mu}$. Es claro que $S_{,\mu}$ resulta normal a Σ ya que la función S sólo cambia en las direcciones ortogonales a ella.

Si nos restringimos a hipersuperficies tipo tiempo o espacio, no es difícil verificar que el vector normal unitario a Σ estará definido como:

$$n_\mu = \frac{\epsilon S_{,\mu}}{|g^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta}|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.9)$$

donde ϵ corresponde a:

$$n^\mu n_\mu = \epsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo espacio} \\ 1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo tiempo} \end{cases} \quad (2.10)$$

Para la descripción de hipersuperficies nulas, ver [8] y [7].

2.2.2. Vectores y la métrica inducida

El hecho de embeber una hipersuperficie Σ en una variedad \mathcal{M} impone una relación entre los tensores definidos en cada una de ellas:

- Tensores en Σ : Son objetos que transforman como tensores ante transformaciones de coordenadas y^a sobre Σ , y escalares ante transformaciones de x^μ sobre \mathcal{M} .
- Tensores en \mathcal{M} : Son objetos que transforman como tensores ante transformaciones de las coordenadas x^μ sobre \mathcal{M} , y son invariantes ante transformaciones ante el cambio de coordenadas y^a sobre Σ .

Otra consecuencia de que Σ esté embebida en \mathcal{M} , es poder definir campos vectoriales tangentes a Σ como *proyecciones* de los campos en \mathcal{M} ,

$$\partial_{y^a} \rightarrow E_a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \partial_\alpha = E_a^\alpha \partial_\alpha \quad (2.11)$$

En otro léxico, el hecho de que Σ esté embebida permite realizar el *push forward* de ∂_{y^a} desde Σ a \mathcal{M} . Vale destacar que carece de sentido realizar esta operación con otro objeto que no sean los vectores ∂_{y^a} , por ejemplo las 1-formas dy .

Asimismo, dado que los vectores E_a son tangentes a Σ podemos concluir que:

$$E_a^\alpha n_\alpha = 0. \quad (2.12)$$

Habiendo definido vectores sobre Σ , procedemos a construir una métrica sobre la hipersuperficie. Ésta será resultado de “proyectar” la métrica $g_{\alpha\beta}$ del espacio ambiente \mathcal{M} de alguna forma similar a como se hizo con los vectores ∂_{y^a} .

El procedimiento consiste esencialmente en restringir el intervalo ds^2 sobre la imagen de Σ y, luego, escribir al mismo en coordenadas intrínsecas de la subvariedad, es decir

$$\begin{aligned} ds^2|_\Sigma &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|_\Sigma \\ &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^a dy^b \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dicho esto definimos la métrica inducida h_{ab} como:

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} = g_{\alpha\beta} E_a^\alpha E_b^\beta \quad (2.14)$$

Habiendo construido una base de campos vectoriales y una métrica sobre Σ , estamos en condiciones de construir un objeto capaz de tomar objetos que viven en \mathcal{M} y definirlos sobre la hipersuperficie. Para ello proponemos

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta. \quad (2.15)$$

Como se muestra en el Cap. 15 de [8], el objeto $h_{\alpha\beta}$ cumple que:

- El tensor es ortogonal a n_α

$$h_{\alpha\beta} n^\alpha = h^{\alpha\beta} n_\alpha = 0 \quad (2.16)$$

- Para vectores V_μ ortogonales a n_α

$$h_{\alpha\beta} V^\alpha = g_{\alpha\beta} V^\alpha, \quad (2.17)$$

confirmando que $h_{\alpha\beta}$ cumple su rol de proyector sobre Σ y resulta coincidir con la métrica $g_{\alpha\beta}$ sobre la hipersuperficie. Esta última afirmación se deduce de

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} E_a^\alpha E_b^\beta = h_{\alpha\beta} E_a^\alpha E_b^\beta. \quad (2.18)$$

Naturalmente también podemos definir el tensor $h^{\alpha\beta}$ como

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} h_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

pero es importante destacar que este objeto $h^{\alpha\beta}$ no es la inversa de la métrica $h_{\alpha\beta}$, ya que por cómo definimos al proyector, $h_{\alpha\beta}$ no posee inversa. En cambio, su contracción resulta

$$h_{\alpha\mu} h^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta - \epsilon n_\alpha n^\beta. \quad (2.20)$$

2.2.3. Curvatura Extrínseca

Habiendo estudiado las propiedades intrínsecas de una hipersuperficie Σ , continuamos nuestra búsqueda de capturar la parte extrínseca de su geometría. Definamos a la curvatura extrínseca como:

$$K_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_\mu n_\nu. \quad (2.21)$$

Utilizando propiedades de la sección anterior, sumadas a las ecuaciones de Gauss-Codazzi, ver [8], la curvatura extrínseca puede reescribirse simplemente como

$$K_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha n_\beta. \quad (2.22)$$

Geoméricamente $K_{\alpha\beta}$ viene a representar el cambio del vector normal n^μ a medida que nos movemos sobre la hipersuperficie. A diferencia de la curvatura definida por el tensor de Riemann, el tensor $K_{\alpha\beta}$ nos brinda información sobre cómo la subvariedad en cuestión está embebida en el espacio ambiente.

Si queremos proyectar este nuevo tensor sobre Σ obtenemos:

$$K_{\alpha\beta}|_\Sigma \rightarrow K_{ab} = E_a^\alpha E_b^\beta K_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

Entonces podemos escribir a la curvatura extrínseca como:

$$K_{ab} = \nabla_\alpha n_\beta E_a^\alpha E_b^\beta \quad (2.24)$$

Los objetos h_{ab} y K_{ab} descritos en estas secciones, poseen esencialmente toda la información que uno necesita para caracterizar la geometría de las hipersuperficies. Dada su importancia, h_{ab} y K_{ab} son denominados *1^{era} forma fundamental* y *2^{da} forma fundamental* de Σ , respectivamente.

2.3. Condiciones de Juntura

2.3.1. Introducción

Con lo descrito en la sección anterior, están a nuestra disposición todas las herramientas para formalizar las condiciones de juntura establecidas por Israel en el contexto de Relatividad General [1]. El escenario consistirá en una hipersuperficie Σ que divide al espacio tiempo en dos regiones \mathcal{V}^+ y \mathcal{V}^- . En cada región podemos definir una métrica $g_{\mu\nu}^\pm$ con coordenadas x_μ^\pm apropiadas. El objetivo último de las condiciones será que las métricas $g_{\mu\nu}^\pm$ se empalmen suavemente sobre Σ , junto a que la solución global para $g_{\mu\nu}$ esté bien definida como objeto dinámico de las ecuaciones de Einstein. La problemática en general no resulta trivial ya que las coordenadas x_μ^\pm difieren entre sí en ambas regiones, puesto que se trata, en general, de soluciones con simetrías muy diferentes, por lo que no es posible compararlas directamente. Allí aparece la ventaja de haber construido tensores sobre Σ cuyo rol es protagónico en las condiciones de juntura.

Para poder identificar en qué región \mathcal{V}^\pm del espacio-tiempo nos encontramos, imaginemos que Σ está atravesada por una congruencia de geodésicas que la intersecan ortogonalmente. Tomemos τ como el tiempo propio a lo largo de las geodésicas y parametricémoslas de tal forma que, a $\tau = 0$, coincidan con el punto que cruzan en Σ . Así para $\tau > 0$ nos encontremos en la región \mathcal{V}^+ y para $\tau < 0$ en \mathcal{V}^- , como se esquematiza en la figura (2.1). Esta construcción también nos dice que un desplazamiento infinitesimal hacia fuera de la hipersuperficie, a lo largo de una de estas geodésicas, estará descrito por $dx^\alpha = n^\alpha d\tau$.

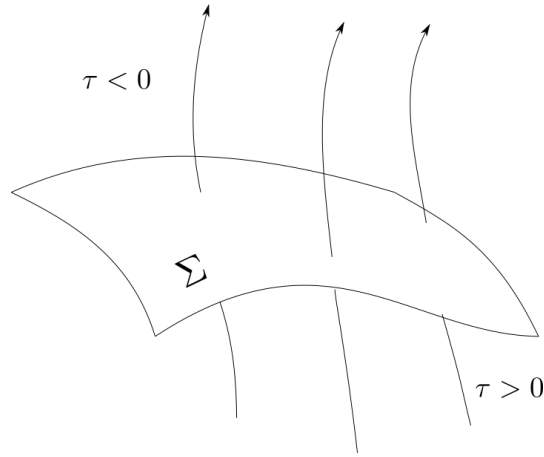


Figura 2.1: Diagrama de una hipersuperficie Σ intersectada ortogonalmente por geodésicas. Las mismas se encuentran parametrizadas por un parámetro τ tal que éste se anule sobre Σ .

Si consideramos al parámetro τ como una función de las coordenadas x^α , se encuentra la siguiente relación

$$n_\mu = \epsilon \partial_\alpha \tau. \quad (2.25)$$

Para poder comparar objetos a ambos lados de la hipersuperficie, introducimos la notación

$$[A] \equiv A(\mathcal{V}^+)|_\Sigma - A(\mathcal{V}^-)|_\Sigma. \quad (2.26)$$

Un ejemplo de esto es

$$[n^\alpha] = [E_a^\alpha] = 0. \quad (2.27)$$

La primera relación sale de la continuidad de τ a lo largo de la geodésica, y la segunda de que las y^a están definidas en ambos lados de Σ .

2.3.2. Primera condición de juntura

Con el objetivo de dilucidar la primera condición de contorno, podemos comenzar escribiendo al tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ como una descomposición de dos tensores $g_{\alpha\beta}^+$ y $g_{\alpha\beta}^-$, cada uno correspondiente a una región del espacio dividido por una hipersuperficie. La forma de escribir matemáticamente ésto, es utilizar el lenguaje de distribuciones, es decir

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(\tau)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-\tau)g_{\alpha\beta}^-, \quad (2.28)$$

donde Θ es la función escalón.

Nos interesa saber si la métrica $g_{\alpha\beta}$ resulta una solución de las ecuaciones de Einstein bien definida, para ello se requiere que los objetos construidos con ella, como ser el tensor de curvatura de Riemann, estén bien definidos como distribuciones. Será la anulación de los términos mal definidos que generará las condiciones tales que la métrica

sea una genuina solución de la ecuaciones.

Construiremos entonces, paso a paso, los objetos que rigen las ecuaciones dinámicas en este lenguaje. La derivada de la métrica (2.28) resulta

$$g_{\alpha\beta,\lambda} = \Theta(\tau)g_{\alpha\beta,\lambda}^+ + \Theta(-\tau)g_{\alpha\beta,\lambda}^- + \epsilon[g_{\alpha\beta}]\delta(\tau)n_\lambda, \quad (2.29)$$

donde se usó la ecuación (2.25) en el último término.

Previo a calcular los símbolos de Christoffel, podemos adelantarnos y ver que el último término de la ecuación (2.29) traerá problemas, dado que será proporcional a $\Theta(\tau)\delta(\tau)$, objeto que no está bien definido como distribución. Para solucionar esto y poder escribir la conexión afín, impondremos entonces que lo que acompaña a $\Theta(\tau)\delta(\tau)$ se anule, es decir $[g_{\alpha\beta}] = 0$. Por ahora, esta condición sólo vale en el sistema de coordenadas tomado, pero puede hacerse independiente de ellas si proyectamos sobre Σ , resultando en

$$\begin{aligned} 0 &= [g_{\alpha\beta}] = [g_{ab}]E_\alpha^a E_\beta^b = [g_{ab} E_\alpha^a E_\beta^b] \\ 0 &= [h_{ab}] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Este resultado se traduce en que la métrica inducida sobre la hipersuperficie tiene que ser idéntica en ambos lados de Σ . Así concluye la primera condición de juntura, propia de la geometría de la hipersuperficie e independiente del sistema de coordenadas x_μ^\pm tomado.

2.3.3. Los tensores $R_{\beta\lambda\delta}^\alpha$ y $T_{\alpha\beta}$

Tensor de Riemann

El procedimiento continúa calculando la forma distribucional del tensor de Riemann, para lo cual necesitamos los $\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha$ y sus derivadas $\Gamma_{\beta\lambda,\delta}^\alpha$. Utilizando la primera condición de juntura, los símbolos de Christoffel resultan:

$$\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = \Theta(\tau)\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha+} + \Theta(-\tau)\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha-}. \quad (2.31)$$

Luego, si derivamos $\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha$ obtenemos

$$\Gamma_{\beta\lambda,\delta}^\alpha = \Theta(\tau)\Gamma_{\beta\lambda,\delta}^{\alpha+} + \Theta(-\tau)\Gamma_{\beta\lambda,\delta}^{\alpha-} + \epsilon\delta(\tau)[\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha]n_\delta. \quad (2.32)$$

Finalmente, el tensor de Riemann puede escribirse como

$$R_{\beta\lambda\delta}^\alpha = \Theta(\tau)R_{\beta\lambda\delta}^{\alpha+} + \Theta(-\tau)R_{\beta\lambda\delta}^{\alpha-} + \epsilon\delta(\tau)A_{\beta\lambda\delta}^\alpha, \quad (2.33)$$

donde

$$A_{\beta\lambda\delta}^\alpha = \epsilon([\Gamma_{\beta\delta}^\alpha]n_\lambda - [\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha]n_\delta). \quad (2.34)$$

Vemos aquí que el tensor de Riemann está bien definido como distribución, con la peculiaridad de que tiene una singularidad sobre Σ . Veremos ahora como interpretar este término.

Tensor de Energía Impulso Superficial

Las cantidades $A_{\beta\lambda\delta}^\alpha$, que surgen de calcular el tensor de Riemann, son tensores resultantes de la diferencia de Christoffels $[\Gamma_{\beta\delta}^\alpha]$. Ahora nos embarcaremos en encontrar una forma más explícita para ellos.

El hecho de que la métrica sea continua a través de la hipersuperficie Σ implica que sus derivadas en las *direcciones tangentes* también serán continuas, por lo que si hay una discontinuidad en la cantidad $[g_{\alpha\beta,\lambda}]$, ésta será debido a una cantidad en la dirección de n_λ . Así, existe un tensor $\kappa_{\alpha\beta}$ tal que

$$[g_{\alpha\beta,\lambda}] = \kappa_{\alpha\beta} n_\lambda. \quad (2.35)$$

Contrayendo con n^λ obtenemos

$$\kappa_{\alpha\beta} = \epsilon [g_{\alpha\beta,\lambda}] n^\lambda. \quad (2.36)$$

Reemplazando en la expresión para $[\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha]$ y luego en el tensor $A_{\beta\lambda\delta}^\alpha$ de la ecuación (2.34), obtenemos que

$$A_{\beta\lambda\delta}^\alpha = \frac{\epsilon}{2} (\kappa_\delta^\alpha n_\beta n_\lambda - \kappa_\lambda^\alpha n_\beta n_\delta - \kappa_{\beta\delta} n^\alpha n_\lambda + \kappa_{\beta\lambda} n^\alpha n_\delta), \quad (2.37)$$

que es la parte con la distribución $\delta(\tau)$ del tensor de Riemann.

Pasemos a contraer entonces el primer y tercer índice de $A_{\beta\lambda\delta}^\alpha$ que resultará importante para calcular el Ricci $R_{\alpha\beta}$, y así ir construyendo la forma distribucional del tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$. Esto es

$$A_{\alpha\mu\beta}^\mu = A_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon}{2} (\kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - \kappa n_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta}), \quad (2.38)$$

donde $\kappa \equiv \kappa_\alpha^\alpha$. Si volvemos a contraer los índices obtenemos entonces la parte asociada a la $\delta(\tau)$ del escalar de curvatura:

$$A \equiv A_\mu^\mu = \epsilon (g^{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} - \epsilon \kappa). \quad (2.39)$$

Juntando los resultados obtenidos en (2.39) y (2.38), obtenemos la forma distribu-

cional del tensor de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = \Theta(\tau)G_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-\tau)G_{\alpha\beta}^- + \delta(\tau)\frac{\epsilon}{2}\{\kappa_{\mu\alpha}n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta}n^\mu n_\alpha - \kappa n_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}(\kappa_{\mu\nu} - \epsilon\kappa)\}. \quad (2.40)$$

Como ya fue mencionado, las ecuaciones de RG nos vinculan el tensor de Einstein con la distribución de energía y materia del Universo. Si observamos la expresión anterior, esta igualdad nos sugiere que de haber una singularidad en $G_{\alpha\beta}$, corresponderá a materia acumulada en forma de *thin shells*, es decir, que la distribución de energía impulso responsable estará acompañada de una $\delta(\tau)$. La expresión del $T_{\alpha\beta}$ entonces resulta:

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(\tau) T_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-\tau)T_{\alpha\beta}^- + \delta(\tau) S_{\alpha\beta}, \quad (2.41)$$

donde $S_{\alpha\beta} = 8\pi (A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Ag_{\alpha\beta})$. Los dos primeros términos corresponden claramente a la distribución de materia en cada región \mathcal{V}^+ y \mathcal{V}^- . El último término, por otro lado, corresponde a un *thin shell* de materia, es decir, a una densidad de materia acumulada sobre la hipersuperficie. Al igual que sucede en electromagnetismo, la discontinuidad en el campo dinámico de la teoría tiene un correlato con la acumulación de fuentes sobre la frontera.

2.3.4. Segunda condición de Juntura

La segunda condición de juntura resultará entonces de analizar el último término de la ecuación (2.41). Comparando ambos miembros de la ecuación de Einstein, obtenemos

$$16\pi \epsilon S_{\alpha\beta} = \kappa_{\mu\alpha}n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta}n^\mu n_\alpha - \kappa n_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}(\kappa_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \epsilon\kappa). \quad (2.42)$$

De aquí se puede verificar que $S_{\alpha\beta}$ es tangente a la hipersuperficie, dado que $S_{\alpha\beta}n^\beta = 0$. Esto nos permite proyectar en coordenadas intrínsecas de Σ según $S_{ab} = S_{\alpha\beta}E_a^\alpha E_b^\beta$. Evaluando en la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} 16\pi S_{ab} &= -\kappa_{\alpha\beta}E_a^\alpha E_b^\beta - \epsilon(\kappa_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \epsilon\kappa) h_{ab} \\ &= -\kappa_{\alpha\beta}E_a^\alpha E_b^\beta - \kappa_{\mu\nu}(g^{\mu\nu} - h^{mn}E_m^\mu E_n^\nu) h_{ab} + \kappa h_{ab} \\ &= -\kappa_{\alpha\beta}E_a^\alpha E_b^\beta + h^{mn}E_m^\mu E_n^\nu h_{ab}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Usando ahora que

$$\begin{aligned} [\nabla_\beta n_\alpha] &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^\mu]n_\mu \\ &= -\frac{1}{2}(\kappa_{\mu\alpha}n_\beta + \kappa_{\mu\beta}n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta}n_\mu)n^\mu \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon\kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\mu\alpha}n_\beta n^\mu - \kappa_{\mu\beta}n_\alpha n^\mu), \end{aligned} \quad (2.44)$$

podemos escribir

$$[K_{ab}] = [\nabla_{\beta} n_{\alpha}] E_a^{\alpha} E_b^{\beta} = \frac{\epsilon}{2} \kappa_{\alpha\beta} E_a^{\alpha} E_b^{\beta}. \quad (2.45)$$

Finalmente, podemos concluir que

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{16\pi} ([K_{ab}] - [K]h_{ab}). \quad (2.46)$$

Esta última expresión nos relaciona cómo es el salto en el tensor de energía impulso debido al salto en la curvatura extrínseca al pasar de un lado de Σ al otro. Así, concluimos que cualquier paso suave a través de Σ implicará $[K_{ab}] = 0$. De violarse esta condición, la teoría impone que se acumule una distribución de materia superficial sobre la frontera. Así concluye la segunda condición de juntura.

2.4. Ejemplo I: La cuerda de Gott

La ruptura de simetría en una teoría de campos puede conducir a la formación de lo que se conoce como defectos topológicos. Ejemplos de éstos son monopolos, cuerdas y paredes cósmicas [9].

Fenómenos del universo temprano resultantes del proceso de gran unificación pudieron haber dado lugar a estos defectos topológicos, debido a que este escenario era un lugar propenso a que se restauren simetrías por sus altas temperaturas y densidades extremas. Sin embargo, las paredes y monopolos tienen que evitarse en modelos cosmológicos por su gran discrepancia con la evidencia observacional. Por otro lado, la existencia de cuerdas cósmicas permitiría explicar, por ejemplo, la formación de galaxias y estructuras a gran escala. En este apartado se presentan las métricas que describen soluciones a las ecuaciones de Einstein dentro de una cuerda cósmica y fuera de ella, para luego obtener una solución global del espacio-tiempo.

La solución a las ecuaciones de campo para la métrica con un T_{μ}^{ν} cuyas únicas componentes no nulas son $T_t^t = T_z^z = \frac{-1}{8\pi r_0^2}$, es:

$$ds^2 = -dt^2 + r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) + dz^2, \quad (2.47)$$

con $t \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in [0, \theta_M]$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ y $r_0 = cte$.

La geometría del espacio-tiempo a t y z constantes, corresponde a la de un cascarón esférico con radio de curvatura r_0 . La circunferencia C de la cuerda medida desde su cintura es $C = 2\pi r_b = 2\pi r_0 \sin(\theta_M)$.

Por otro lado, la métrica solución de vacío con simetría de traslación en z , es

$$ds^2 = -dt^2 + B_0^2 dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (2.48)$$

donde $B_0 = \frac{1}{\cos\theta_M}$ y, $t \in (-\infty, \infty)$, $z \in (-\infty, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y $r \in (r_b, \infty)$. Las coordenadas (t, z, ϕ) utilizadas para describir esta región coinciden exactamente con las utilizadas en la región interior.

Motivados por ver con mayor claridad la geometría exterior, realizamos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} R &= rB_0 = \frac{r}{\cos(\theta_M)} \\ \Phi &= \phi \cos(\theta_M). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Así, la métrica pasa a ser

$$ds^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2d\Phi^2 + dz^2, \quad (2.50)$$

donde ahora $\Phi \in [0, \cos(\theta_M)2\pi]$.

En estas coordenadas podemos apreciar que la métrica dada en (2.50), es la misma que la del espacio de Minkowski en coordenadas cilíndricas, pero con un déficit angular.

Fijando t y z constantes podemos visualizar las dos superficies definidas por $ds^2 = r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$, en la región interior y $ds^2 = B_0^2 dr^2 + r^2 d\phi^2$ (2.47), en la exterior, como una superficie embebida en un 3-espacio euclídeo $ds^2 = dw^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$. La solución exterior corresponde a una superficie $w(r) = (B_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}r$ que describe un cono cuyo vértice se hallaría en $r = 0$. La solución interior, como ya fue mencionado, representa un cascarón esférico. Basta ahora imponer las condiciones de juntura para determinar como estas dos superficies se unen suavemente. Un diagrama de las superficies embebidas en R^3 puede verse en la figura (2.2).

Procedemos entonces a realizar el empalme. Para facilitar los cálculos, realizamos en la métrica interior (2.47) el cambio de coordenadas $\rho = r_0 \theta$. Esto resulta en

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r_0^2 \sin^2(\rho/r_0)d\phi^2 + dz^2. \quad (2.51)$$

Como se comenta en el artículo de Gott [10], la condición de juntura podría resumirse en pedir continuidad de la métrica y de su primera derivada. Aquí vamos a exigir algo más débil, haremos uso de las condiciones de Israel y pediremos continuidad de la métrica y de la curvatura extrínseca.

Para atacar la problemática, definamos la hipersuperficie Σ descrita por $\rho = r_0\theta_M$ en coordenadas interiores, y $r = r_0 \sin(\theta_M)$ en coordenadas exteriores. En consecuencia, la 1^{era} forma fundamental de Σ resulta:

$$h_{ab} = -dt^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (2.52)$$

siendo t, ϕ, z las coordenadas en común de ambas regiones, y r la coordenada en la región exterior.

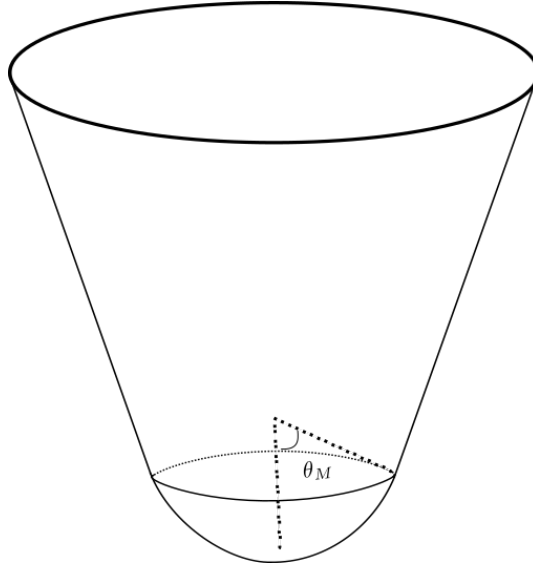


Figura 2.2: Diagrama del empalme de soluciones correspondiente a una cuerda cósmica, embebidas en R^3 , a t y z constantes. La superficie cónica representa el espacio-tiempo en la región exterior de la cuerda. Esta superficie se empalma suavemente con un cascarón esférico que representa la geometría en la región interior de la cuerda.

La proyección de la métrica exterior e interior sobre Σ determina la primera condición de juntura:

$$r_0^2 \sin(\theta_M)^2 = R^2 \quad (2.53)$$

A su vez, los vectores tangentes a Σ en el interior y en el exterior son

$$E_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} = \begin{cases} e_t^\mu = (1, 0, 0, 0) & \text{Coordenadas} \\ e_\phi^\mu = (0, 0, 1, 0) & (t, \rho, \phi, z) \\ e_z^\mu = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad (2.54)$$

y

$$E_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} = \begin{cases} e_t^\mu = (1, 0, 0, 0) & \text{Coordenadas} \\ e_\phi^\mu = (0, 0, 1, 0) & (t, r, \phi, z) \\ e_z^\mu = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad (2.55)$$

respectivamente. Con estos objetos nos dedicamos a calcular K_{ij} como se mostró en (2.24). En la región exterior resulta:

$$K_{ti} = K_{zi} = 0 \quad \forall i, \quad K_{\phi\phi} = -r \cos(\theta_M). \quad (2.56)$$

Luego, del lado interno de Σ tenemos

$$K_{ti} = K_{zi} = 0 \quad \forall i, \quad K_{\phi\phi} = -r_0 \cos(\rho/r_0) \sin(\rho/r_0). \quad (2.57)$$

Si evaluamos las coordenadas en Σ y utilizamos lo obtenido en (2.53), podemos observar que en ambos lados de Σ la 2^{da} forma fundamental coincide y su valor es

$$K_{\phi\phi} = r_0 \cos(\theta_M) \sin(\theta_M). \quad (2.58)$$

Habiendo satisfecho ambas condiciones de juntura, obtuvimos que las soluciones para la métrica dentro y fuera de la cuerda componen una solución general a las ecuaciones de Einstein en todo el espacio-tiempo.

2.5. Ejemplo II: Colapso gravitatorio de polvo en 2+1

En esta sección mostraremos otro ejemplo de empalme de soluciones de dos espacio-tiempos con constante cosmológica Λ , en este caso en 2+1 dimensiones [11]. El primero corresponde a una solución cosmológica generada por materia en forma de polvo, y el segundo a la solución circularmente simétrica de vacío conocida como agujero negro BTZ [12]. El problema de juntura así definido, es un modelo simplificado en 2+1 dimensiones del análogo 3+1 dimensional tratado por Oppenheimer y Snyder [13].

Consideremos entonces como distribución de materia en la región interior un disco de polvo sin presión. Siguiendo la Ref. [11], este disco estará destinado a colapsar en un tiempo propio finito a una singularidad. Desde ese momento en adelante, la métrica solución de todo el espacio resultará solamente la exterior, correspondiente al agujero negro BTZ. Dado que nuestro disco está colapsando, la hipersuperficie que oficia de frontera entre las soluciones, variará instante a instante. Esto implica que la condición de juntura también dependerá de algún parámetro *temporal*.

Para comenzar, entonces, partimos de la geometría generada por el disco de polvo cuya descripción esta dada por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{\sqrt{1 - kr^2}} + r^2 d\theta^2 \right), \quad (2.59)$$

donde r y θ son las coordenadas radiales y angulares comoviles al polvo, t es el tiempo propio, y $a(t)$ es el factor de escala.

El tensor de energía impulso correspondiente a esta distribución de materia es $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, 0, 0)$ y su conservación $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ implica $\rho a = \rho_0 a_0$, siendo ρ_0 y a_0 la densidad y el factor de escala a $t = 0$.

Las ecuaciones de Einstein resultan

$$\partial_{tt}a = -\Lambda a \quad (2.60)$$

y

$$\Lambda a^2 + k - 8\pi G\rho_0 a_0^2 + (\partial_t a)^2 = 0, \quad (2.61)$$

las cuales resuelven toda la dinámica geométrica en la región interior.

La métrica en el exterior del polvo es, como ya mencionamos, el agujero negro BTZ sin carga ni momento angular, cuyo intervalo es

$$ds^2 = -(\Lambda R^2 - M)dT^2 + \frac{dR^2}{\Lambda R^2 - M} + R^2 d\theta^2, \quad (2.62)$$

donde M es una constante de integración representativa de la masa.

Teniendo escritas las métricas $g_{\alpha\beta}$ en ambas regiones del espacio, podemos proceder a empalmarlas sobre la hipersuperficie Σ dependiente del tiempo definida por $\mathcal{R} = r_0 a(t)$.

La métrica h_{ab} sobre la hipersuperficie es

$$ds^2|_{\Sigma} = -dt^2 + \mathcal{R}(t)^2 d\theta^2, \quad (2.63)$$

siendo t la coordenada temporal comóvil al polvo, y θ la coordenada angular que coincide para ambas regiones.

Los vectores tangentes sobre Σ en las coordenadas interiores son

$$E_t^\mu = (1, 0, 0), \quad E_\theta^\mu = (0, 0, 1). \quad (2.64)$$

Por otro lado, en la región exterior se escriben como

$$E_t^\mu = (\partial_t T, \partial_t R, 0), \quad E_\theta^\mu = (0, 0, 1). \quad (2.65)$$

Definida la hipersuperficie Σ y los vectores tangentes, el siguiente paso consiste en definir su vector normal n^μ en cada *cara* de Σ . Haciendo uso de (2.10) y (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} n^\mu &= \left(0, \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}}, 0\right) && \text{para la región interior} \\ n^\mu &= (-\partial_t R, \partial_t T, 0) && \text{para la región exterior} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ahora procedemos a imponer la primera condición de Israel, la continuidad de la métrica sobre la hipersuperficie, o bien $[h_{ab}] = 0$. En nuestro caso implica

$$\begin{aligned} -(\partial_t T)^2 (\Lambda R^2 - M) + \frac{(\partial_t R)^2}{\Lambda R^2 - M} &= -1 \\ R = r_0 a(t) &= \mathcal{R}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde ∂_t corresponde a la derivada parcial respecto a la coordenada temporal. Es in-

interesante notar cómo la continuidad de la métrica nos relaciona las cartas coordenadas. En ciertos casos, en forma explícita como en la segunda expresión, y en otros de forma implícita, como es el caso de la primera expresión.

Dado que no existe ningún *thin shell* de materia acumulado en la hipersuperficie, la segunda condición de juntura consistirá en la continuidad de la curvatura extrínseca sobre Σ , es decir $[K_{ab}] = 0$.

El tensor K_{ab} calculado según la ecuación (2.24) para el caso interior resulta:

$$K_{tt} = K_{t\theta} = 0, \quad K_{\theta\theta} = r_0 a(t) \sqrt{1 - kr^2}, \quad (2.68)$$

donde t y θ son las coordenadas intrínsecas de Σ .

Luego, para la región exterior se tiene

$$\begin{aligned} K_{tt} &= \frac{d}{d\mathcal{R}} \sqrt{\Lambda \mathcal{R}^2 - M + (\partial_t \mathcal{R})^2} \\ K_{\theta t} &= 0 \\ K_{\theta\theta} &= -\mathcal{R} \sqrt{\Lambda \mathcal{R}^2 - M + (\partial_t \mathcal{R})^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

La continuidad de K_{ab} nos exige que

$$\begin{aligned} \sqrt{\Lambda \mathcal{R}^2 - M + (\partial_t \mathcal{R})^2} &= cte \\ \Lambda \mathcal{R}^2 - M + (\partial_t \mathcal{R})^2 &= 1 - kr_0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Notemos que ambas expresiones son consistentes, ya que r_0 es constante sobre Σ . Utilizando la ecuación (2.61), vinculamos ahora las constantes de integración de ambas regiones, obteniendo

$$M = 8\pi G \rho_0 a_0^2 r_0^2 - 1. \quad (2.71)$$

Esto nos dice la única manera en que ambas soluciones puedan constituir una solución global para describir el problema del colapso gravitatorio. Las constantes de integración dejan de ser independientes y pasan a estar relacionadas. En este caso, la densidad del polvo ρ_0 determina la masa M del agujero negro BTZ, según la ecuación (2.71).

Capítulo 3

El Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General

3.1. El Espacio de Weitzenböck

En este capítulo se presenta un formalismo alternativo a RG denominado Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (ETRG), el cual se encuentra explicado detalladamente en [14][15]. En el contexto de la geometría diferencial, el espacio-tiempo descrito por RG consiste en una variedad pseudo Riemanniana \mathcal{M} , con una métrica $g_{\mu\nu}$ y asociada a la derivada covariante con la conexión de Levi-Civita. Mientras que en ETRG, la variedad diferencial a utilizar presenta curvatura nula [15] y la gravedad se ve manifestada vía la presencia de torsión, otro ente típico en las variedades diferenciales. Este nuevo espacio sin curvatura, llamado espacio de Weitzenböck, se caracteriza en que sus geodésicas no describen la trayectoria de partículas libremente gravitante. Esto se debe a que la conexión en este espacio, que llamaremos conexión de Weitzenböck, difiere de la de Levi-Civita la cual realiza la descripción apropiada de estas trayectorias. Es interesante mencionar que fue el mismo Einstein quien desarrolló la noción de teleparalelismo en un intento por unificar la gravedad y el electromagnetismo en una misma teoría [16], dando pie a muchos trabajos en el tópico.

La descripción geométrica del teleparalelismo considera una variedad diferencial Hausdorff \mathcal{M} , paracompacta y C^∞ [17]. Al ser una variedad, \mathcal{M} cumple que para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno U donde podemos definir coordenadas locales dadas por $x = x^\mu$ y su respectiva base coordenada en p como $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\mu = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})$ donde $\mu = 0, 1, 2, 3$. En ese mismo punto la base dual es $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^\mu = (dx^\mu)$, siendo $\langle \mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}^\nu \rangle = \delta_\mu^\nu$. Así cualquier vector $\mathbf{V} \in T_p\mathcal{M}$ se escribe $\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{E}_\mu$, y cualquier 1-forma $\mathbf{F} \in T_p^*\mathcal{M}$ se escribe como $\mathbf{F} = F_\mu \mathbf{E}^\mu$. En particular el tensor métrico se escribe como

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{E}^\mu \otimes \mathbf{E}^\nu, \quad (3.1)$$

cuyas componentes $g_{\mu\nu}$ son los productos internos de los vectores en la base coordenada, ie

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu) = \mathbf{g}(\mathbf{E}_\nu, \mathbf{E}_\mu). \quad (3.2)$$

Por otro lado, en cada punto p de la variedad es posible definir una base ortonormal $\mathbf{e} = \mathbf{e}_a(p)$ en el espacio tangente T_pM , es decir que sus productos escalares referidos a la métrica \mathbf{g} resultan iguales a las componentes del tensor de Minkowski,

$$\eta_{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{g}(\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_a). \quad (3.3)$$

Los campos vectoriales $\mathbf{e}(p) = \mathbf{e}_a(p)$ pueden ser expresados en la base coordenada como,

$$\mathbf{e}_a = e_a^\mu \mathbf{E}_\mu, \quad (3.4)$$

por lo tanto la ec. (3.3) significa

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (3.5)$$

Aceptando que la matriz e_a^μ posee inversa, utilizaremos los símbolos e_μ^a para indicar las componentes de la misma, esto es

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b. \quad (3.6)$$

La primera de estas relaciones implica que e_a^μ no son más que las componentes de la 1-formas que constituyen la base dual $\mathbf{e}^* = \mathbf{e}^a(p)$ en $T_p^*M : \langle \mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b \rangle = \delta_b^a$. Es decir,

$$\mathbf{e}^a = e_\mu^a \mathbf{E}^\mu \quad (3.7)$$

Usando (3.6) podemos invertir las relaciones anteriores

$$\mathbf{E}^\mu = e_\mu^a \mathbf{e}_a \quad \mathbf{E}_\mu = e_a^\mu \mathbf{e}^a \quad (3.8)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.5) muestran el rol que cumplen las matrices e_a^μ , siendo ellas una suerte de intermediario entre el plano tangente T_pM y la propia variedad M . Estas matrices parten de una base de vectores asociados a cada una de las coordenadas donde la distancia se determina con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, a otra con una descripción espacialmente plana con tensor métrico $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Para ello, los símbolos e_a^μ portan dos tipos de índices: los índices latinos $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ se refieren a coor-

denadas en el espacio tangente, mientras que los índices griegos $\lambda, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ corresponden a las coordenadas en la variedad. Así los índices latinos de este objeto poseen un carácter tensorial lorentziano ya que la tétrada está definida a partir de la ecuación (3.5) invariante ante transformaciones de Lorentz. Por otro lado, los índices griegos de la tétrada están relacionados a los cambios generales de coordenadas en la variedad. Físicamente estos objetos e_μ^a vienen a representar observadores en caída libre, ya que esencialmente la transformación que los define (3.9) es el cambio de coordenadas punto a punto tal que el sistema sea el de un observador inercial.

A nivel operacional las componentes de las tétradas pueden ser vistas como herramientas para convertir índices griegos en latinos y viceversa, es decir objetos de \mathcal{M} a $T_p M$. Por ejemplo, según la ec. (3.8), cualquier vector $\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{E}_\mu$ es reescrito como $\mathbf{V} = V^a \mathbf{e}_a$, siendo sus componente lorentzianas

$$V^a = e_a^\mu V_\mu. \quad (3.10)$$

Tomando el camino inverso a través de la ecuación (3.5), tenemos

$$V^\mu = e_a^\mu V^a. \quad (3.11)$$

Al igual que en la variedad, en el plano tangente $T_p M$ podemos construir una biyección con su espacio dual $T_p^* M$ a través de la métrica. Es decir, identificar cada vector de $T_p M$ con una 1-forma de $T_p^* M$. A esta identificación se la suele llamar *subir y bajar índices*. Por lo tanto, a la 1-forma que corresponde al vector de componentes V^μ se la escribe como,

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad (3.12)$$

es decir,

$$V_a e_\mu^a = g_{\mu\nu} e_b^\nu V^b. \quad (3.13)$$

Si multiplicamos a izquierda por e_a^μ , la ecuación anterior se resume en

$$V_a = \eta_{ab} V^b. \quad (3.14)$$

Como siempre, definimos las inversas de los operadores $g_{\mu\nu}$ y η_{ab} tal que cumplan

$$\eta_{ab} \eta^{ac} = \delta_b^c \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho. \quad (3.15)$$

Estos nuevos operadores son los encargados de subir índices en su respectivo espacio, obteniendo así

$$V^\mu = g^{\mu\nu}V_\nu, \quad (3.16)$$

lo cual puede ser reescrito usando (3.11)

$$V^a e_a^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu^b V_b, \quad (3.17)$$

y luego multiplicando ambos miembros por e_μ^c se obtiene

$$V^a = g^{\mu\nu} e_\mu^c e_\nu^b V_b. \quad (3.18)$$

Esto nos lleva a concluir que

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b, \quad (3.19)$$

o bien,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (3.20)$$

En particular se pueden bajar y subir índices de la propia tétrada. Puede verificarse que

$$e_a^\mu = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu^b. \quad (3.21)$$

Asimismo como el producto interno entre vectores no depende de la base, podemos escribirlo en términos de contracción de índices tanto lorentzianos como latinos:

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{W} \rangle = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = \eta_{ab} V^a W^b = V^\mu W_\mu = V^a W_a \quad (3.22)$$

Cabe aclarar que las reglas de transformación entre índices lorentzianos y espacio-temporales se aplican análogamente a cualquier tensor de rango superior. Este formalismo esencialmente nos permite codificar la información de la geometría del espacio-tiempo en las tétradas, en lugar de hacerlo en el tensor métrico. Podemos, por ejemplo, reescribir la acción de Hilbert-Einstein utilizando la tétrada.

El lenguaje de RG, como ya fue mencionado, es el característico de la geometría pseudo-Riemanniana con una conexión simétrica, que es la de Levi-Civita. Esta conexión es la que determina cómo es el transporte paralelo de un vector sobre la variedad. En una base coordenada la conexión se expresa mediante los símbolos de Christoffel como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (3.23)$$

La conexión Levi-Civita, se caracteriza por su compatibilidad con la métrica, lo que

significa que la derivada covariante de la métrica es nula. A su vez por ser simétrica posee torsión nula, por lo que las curvas autoparalelas son las geodésicas para esta conexión.

Si utilizamos ahora el campo de tétradas podemos construirnos una nueva noción de paralelismo, es decir una nueva conexión, donde un campo \mathbf{V} será autoparalelo si sus componentes lorentzianas V^a son constantes. Por lo tanto,

$$\partial_\nu V^a = \partial_\nu(V^\mu e_\mu^a) = 0 \quad (3.24)$$

o bien,

$$e_\mu^a \partial_\nu V^\mu + V^\mu \partial_\nu e_\mu^a = 0 \quad (3.25)$$

Contrayendo a izquierda con e_a^ρ , obtenemos

$$\delta_\mu^\rho \partial_\nu V^\mu + V^\mu e_a^\rho \partial_\nu e_\mu^a = 0 \quad (3.26)$$

Entonces la derivada covariante que se anula cuando las componentes V^a son constantes, es aquella asociada a la conexión de Weitzenböck, cuyas componentes expresadas en una base coordenada son

$${}^{(\mathbf{w})}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda \partial_\nu e_\mu^a. \quad (3.27)$$

Luego, puede verse que la derivada de Weitzenböck de un vector cualquiera resulta

$${}^{(\mathbf{w})}D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + {}^{(\mathbf{w})}\Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho = e_a^\mu \partial_\nu V^a \quad (3.28)$$

En particular la derivada de Weitzenböck de los vectores de la tétrada se anula,

$${}^{(\mathbf{w})}D_\nu e_a^\alpha = \partial_\nu e_a^\alpha + {}^{(\mathbf{w})}\Gamma_{\nu\rho}^\alpha e_a^\rho = e_b^\mu \partial_\nu (e_\mu^b e_a^\mu) \equiv 0. \quad (3.29)$$

Este resultado es una consecuencia inmediata de la relación de ortonormalidad de las componentes lorentzianas en la ecuación (3.6), que determina que dichas componentes de \mathbf{e}_a son 1 ó 0. En general, cuando una conexión no es simétrica en base coordenada se defina el tensor de *torsión*,

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (3.30)$$

En el caso de la conexión de Weitzenböck la torsión $T_{\mu\nu}^\lambda$ resulta

$${}^{(\mathbf{w})}T_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda (\partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a). \quad (3.31)$$

Puede verificarse que este objeto se comporta como un tensor ante cambio generales

de coordenadas y también es invariante ante transformaciones de Lorentz (globales) en el plano tangente.

Asimismo, utilizando la conexión de Weitzenböck podemos obtener el tensor de curvatura $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$ definido en el Capítulo 2, el cual puede verificarse que es idénticamente nulo. Este resultado es esperable dado que hemos definido la conexión de Weitzenböck de forma tal de garantizar un paralelismo absoluto. Esto significa que podemos acceder a la comparación de dos vectores distantes, ya que el transporte paralelo es independiente del camino. De esta forma observamos que el espacio de Weitzenböck es un espacio plano como el de Minkowski, en el sentido de que ambos poseen curvatura nula.

A la luz de estos nuevos conceptos podemos reescribir la ecuación de la geodésica en términos de los nuevos campos. Para eso, definiremos la *contorsión* como el objeto $K^\sigma_{\mu\rho}$ que es resultado de la diferencia entre dos conexiones arbitrarias, y por lo tanto transforma como tensor. Es decir

$$K^\sigma_{\mu\rho} = \{ \} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \hat{\Gamma}^\sigma_{\mu\rho} \quad (3.32)$$

En particular si tomamos la conexión de Weitzenböck ${}^{(w)}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$ (la cual cumple que la derivada covariante de la tétrada es idénticamente nula), y la de Levi-Civita definida en la ecuación (3.23), entonces la *contorsión* tiene la siguiente expresión

$$K^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^\sigma_{\mu\nu} + T^\sigma_{\nu\mu} - T^\sigma_{\mu\nu}). \quad (3.33)$$

Utilizando esta última expresión podemos reescribir la ecuación que describe el movimiento de una partícula libremente gravitante como,

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau} = -K^\mu_{\sigma\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau}. \quad (3.34)$$

Consecuentemente, vemos que la partícula libremente gravitante en el espacio de Weitzenböck se desvía de las trayectorias paralelas por la acción de la parte simétrica de la contorsión. Es este último término es donde está contenida la fuerza gravitatoria.

3.2. Invariancia ante transformaciones de Lorentz

En la sección anterior se describió el transporte paralelo asociado a un campo de tétradas sobre la variedad. El transporte de un vector es paralelo cuando las proyecciones del mismo sobre la tétrada son constantes, por lo que las transformaciones globales son una simetría en esta teoría. Como las tétradas cumplen la relación dada por la ecuación (3.9) las transformaciones globales asociadas a la simetría son las correspon-

dientes al grupo de Lorentz. En consecuencia, las ecuaciones que describan la forma de las tétradas en función de la distribución de materia y energía, deberán de ser invariantes ante realizar transformaciones globales del grupo de Lorentz.

Ahora si bien las transformaciones globales del grupo de Lorentz son una simetría clara en esta nueva geometría, las transformaciones locales no lo son. En RG los objetos a estudiar son las componentes del tensor métrico que se vinculan con los campos de tétradas según la ec. (3.20), invariante ante transformaciones *locales* del grupo de Lorentz. La invariancia puede verse ya que por definición el tensor métrico es invisible a transformaciones que suceden en el espacio tangente. Sin embargo en el espacio de Weitzenböck, son justamente las transformaciones en el tangente las que determinan la orientación de estos campos y definen si la tétrada es paralela o no, perdiendo así la invariancia local. Será entonces la distribución de materia y energía la que orientará la tétrada sobre la variedad, dando como resultado una matriz e_a^μ con 16 coeficientes, que será más o menos simple según el sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ que se elija.

3.3. La Acción Teleparalela

En esta sección nos proponemos construir una acción equivalente a la acción que describe la dinámica de la teoría de la Relatividad General. Las ecuaciones que surgirán de esta nueva acción deberán, por ser equivalentes a RG, ser invariantes locales de Lorentz.

El equivalente teleparalelo consiste en reescribir al escalar R en términos de la tétrada y sus derivadas. Para ello, en la definición del tensor de Riemann, se reemplaza la conexión de Levi-Civita por la torsión y la contorsión vía la ec. (3.32), quedando todo expresado en términos de las tétradas y sus primeras derivadas. Luego, haciendo las contracciones pertinentes, obtenemos R según:

$$|e| R = -|e| \left(\frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} - T_\nu^{\mu\nu} T_{\theta\mu}^\theta \right) + 2\partial_\nu (e T_\theta^{\theta\nu}), \quad (3.35)$$

en donde $|e| = \sqrt{|g|}$ es el determinante de la matriz e_a^λ . Definiendo el tensor $S_\rho^{\mu\nu}$ como

$$S_\rho^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (T_\rho^{\mu\nu} - T_\rho^{\nu\mu} - T_\rho^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (\delta_\rho^\mu T_\theta^{\theta\nu} - \delta_\rho^\nu T_\theta^{\theta\mu}) \quad (3.36)$$

y el escalar de Weitzenböck $T = S_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho$, podemos reescribir la ecuación (3.35) como:

$$|e| R = |e| T + 2\partial_\mu (e T_\theta^{\theta\mu}) \quad (3.37)$$

Dada esta relación podemos entonces construir el Lagrangiano teleparalelo \mathcal{L}_T como

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{16\pi G} |e| T, \quad (3.38)$$

el cual difiere del Lagrangiano de Hilbert-Einstein sólo en una derivada total, y consecuentemente involucra ecuaciones de movimiento equivalentes a las de la Relatividad General.

Algo curioso a destacar es que en el Lagrangiano teleparalelo sólo aparecen derivadas primeras del campo dinámico (la tétrada), resultando en ecuaciones de movimiento con derivadas de segundo orden. En contraposición a esto, el Lagrangiano de Hilbert-Einstein posee derivadas segundas de la métrica y por lo tanto sus ecuaciones de movimiento deberían ser de cuarto orden. Sin embargo estos términos terminan reagrupándose en una derivada total que no aporta a la acción, resultando en las ecuaciones conocidas de Relatividad General.

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos las ecuaciones movimiento para el Lagrangiano teleparalelo [18],

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T^\rho_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} e_a^\nu T = 4\pi G \mathcal{T}_a^\nu. \quad (3.39)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein rephraseadas en términos teleparalelos.

Capítulo 4

Teorías de Gravedad Modificada

Luego del temprano éxito de RG en lo concerniente a la explicación del perihelio de Mercurio y de la deflexión de la luz por efecto del campo gravitatorio, siguieron un conjunto de predicciones y observaciones que consagraron a RG como la teoría que mejor describe la interacción gravitatoria hasta la fecha. Entre ellas, se encuentran la predicción de la expansión del Universo, la formación de estructuras como las galaxias, la abundancia de los elementos livianos como Hidrógeno y Helio, la radiación remanente conocida como *radiación cósmica de fondo*, y la reciente confirmación experimental de la existencia de ondas gravitacionales [19].

Sin embargo, RG manifiesta ciertos aspectos formales que resultan patológicos para una teoría física. La teoría se resiste, a diferencia del resto de los teorías fundamentales de la naturaleza, a ser cuantizada. Si bien existen candidatos tendientes a resolver esta problemática, como la Teoría de Cuerdas, Loop Quantum Gravity y Causal Sets, entre otras, no existe en la actualidad un consenso general al respecto. En el área cosmológica, RG falla en explicar la aceleración cósmica y el origen de la inflación desde un punto de vista puramente geométrico. Por último, RG presenta singularidades inherentes que han generado discusiones desde su comienzo. Respecto a éstas existen dos cuestiones de principal interés, la singularidad que aparece en el origen del Universo y aquellas que surgen del colapso gravitatorio. La existencia de ellas en la teoría resulta patológica ya que involucra el concepto de incompletitud geodésica. Esto, esencialmente, indica que RG predice que para un observador cual fuere, bajo ciertas circunstancias, existe un cierto valor de su tiempo propio donde él cesará de existir. Más aún, en una gran cantidad de soluciones de las ecuaciones Einstein, existen “regiones” en donde el propio concepto de espacio-tiempo no cuenta con una descripción adecuada. En un principio se creyó que tomando un sistema de coordenadas apropiado uno podría evitar los puntos singulares, pero remarcablemente los teoremas de singularidad, provistos por Hawking y Penrose [20], demuestran la inevitabilidad de las singularidades dentro de RG en condiciones sumamente generales.

Es por eso que esquemas modificados (clásicos) para la gravedad, han despertado interés creciente en los últimos años. En lo que sigue, introduciremos uno de tales esquemas, conocido como teorías de gravedad de tipo $f(T)$, centrales en nuestro trabajo. Discutiremos primero su estructura, y luego ejemplificaremos la emergencia de frames preferenciales en el contexto de estas teorías. Finalmente, abordaremos la cuestión de la invariancia de Lorentz remanente, y del grupo asociado. Este tema resulta central en la problemática de la juntura, que se tratará en el capítulo próximo, por lo que ofrecemos varios ejemplos de grupos remanentes en 4.3.

4.1. Deformaciones $f(T)$

Con el fin de encarar ciertos aspectos inquietantes de la Relatividad General, en la última década se han estudiado una serie de teorías de gravedad modificada. La mayor parte de estas teorías consiste en deformar un cierto Lagrangiano \mathcal{L} (que en nuestro caso será el de Hilbert-Einstein) compuesto por un escalar L y un objeto $|e|$ que transforma como densidad, y reemplazarlo por otro $\mathcal{L}_D = |e| f(L)$. La elección de f será tal que se preserven todos los resultados deseados de la teoría original y la modifique en el régimen adecuado.

Para ilustrar el procedimiento general, consideremos un Lagrangiano invariante $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^a, \phi^a_{,\mu}, \phi^a_{,\mu\nu}, \dots, x^\mu)$ dependiente de ciertos campos ϕ^a y sus derivadas hasta orden n , y una densidad $e = e(\phi^a, x^\mu)$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange en vacío para el Lagrangiano deformado \mathcal{L}_D serán

$$\begin{aligned} 0 &= \dots - \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \phi^a_{,\mu\nu}} \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \phi^a_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \phi^a} \\ 0 &= \dots - \partial_\mu \partial_\nu \left(f'(L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{,\mu\nu}} \right) + \partial_\mu \left(f'(L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{,\mu}} \right) - f'(L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \\ &\quad + (L f'(L) - f(L)) \frac{\partial e}{\partial \phi^a} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si se busca deformar la teoría a altas energías ($L \gg 1$), entonces f deberá cumplir

$$f(L) \simeq L + O(L^2) \quad (4.2)$$

i.e.,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \quad (4.3)$$

En general las ecuaciones (4.1) tendrán soluciones diferentes a las de la teoría original con $\mathcal{L} = e L$. Sin embargo, no todas las soluciones resultan deformadas con este procedimiento. Un ejemplo concreto son las soluciones de la teoría de partida con $L = 0$,

dado que si reemplazamos esta condición en (4.1) y usamos (4.2) vemos que el último término en (4.1) se anula y que estas soluciones también resuelven las ecuaciones de campo para el Lagrangiano deformado \mathcal{L}_D .

En Relatividad General el Lagrangiano de la teoría está compuesto por el escalar de curvatura R el cual es nulo para todas las soluciones de vacío de la teoría, incluso también lo es para aquellas fuentes con tensor-energía impulso con traza idénticamente cero (como aquellas cosmologías, por ejemplo, cuyo contenido de materia está conformado por un fluido perfecto de radiación). Entonces si realizamos una deformación cumpliendo (4.2), RG mantiene sus soluciones en teorías deformadas del estilo $\mathcal{L}_D \propto \sqrt{-g}f(R)$.

Las teorías $f(R)$, a diferencia de otras teorías deformadas, contienen en su Lagrangiano derivadas segundas del objeto dinámico, la métrica. A pesar de esto, en el caso de que $f \equiv 1$ los términos de cuarto orden en las ecuaciones de Euler-Lagrange se cancelan mutuamente dejando lugar a las ecuaciones de segundo orden conocidas de RG. Sin embargo, al deformar con una $f \neq 1$ estos términos siguen presentes dando lugar a ecuaciones muy complicadas de tratar.

Incidentalmente, también podemos mencionar que no todas las $f(R)$'s que aparecen en la literatura verifican las condiciones (4.2). Para evitar los contratiempos típicos de las teorías $f(R)$, haremos uso de la maquinaria teleparalela tratada brevemente en el capítulo 2. Como allí fue explicado, el Lagrangiano del equivalente teleparalelo de la teoría de Einstein, ec. (3.38), está construido cuadráticamente con el tensor de torsión. Esto implica que el Lagrangiano contiene sólo derivadas primeras del vielbein e_a^μ por lo que las ecuaciones de movimiento serán siempre de segundo orden en las derivadas de la tétrada. Remarcablemente, este hecho es cierto aún cuando se consideran deformaciones del Lagrangiano de TERG. En efecto, consideremos una teoría con una acción S de la forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int e(f(T)) + \mathcal{L}_{mat} dx, \quad (4.4)$$

en donde $f(T)$ es una función arbitraria del invariante de Weitzenbeck $T = S_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho$. Las ecuaciones de Euler Lagrange variando respecto de la tétrada dan a lugar a las ecuaciones de movimiento

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) f_T + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T_{\mu\lambda}^\rho f_T + S_a^{\mu\nu} \partial_\mu T f_{TT} + \frac{1}{4} e_a^\nu f = 4\pi G \mathcal{T}_a^\nu, \quad (4.5)$$

en donde las primas se refieren a la diferenciación respecto del escalar T . Es claro ver que al tomar $f \equiv 1$ uno recupera las ecuaciones de ETRG (4.8). El punto más importante de esta construcción es que uno preserva el orden de derivadas en las ecuaciones de movimiento aún cuando la teoría esté deformada, a diferencia de las $f(R)$'s.

4.2. Invariancia de Lorentz en las teorías $f(T)$

4.2.1. Generalidades

En esta sección discutiremos la acción del grupo de Lorentz sobre tetradas solución de las ecuaciones de movimiento de una teoría de tipo $f(T)$ arbitraria. Para ello, resumiremos los aspectos más relevantes del análisis efectuado en [21], cuya lectura se recomienda al lector interesado en los detalles. La motivación de estudiar subgrupos del grupo de Lorentz que ofician de grupos de simetría on shell de las teorías $f(T)$, proviene de un hecho simple; ante una transformación de Lorentz efectuada sobre una tetrada solución $e^{a'} = \Lambda(x)e^a$, el invariante de Weitzenböck transforma según

$$T \rightarrow T' = T + \text{derivada total} \quad (4.6)$$

Esta transformación pone en evidencia que, en el caso de realizar deformaciones, las transformaciones locales de la tetrada no dejan invariante al lagrangiano de la teoría, ya que el término de derivada total queda encapsulado en el argumento de la función f . Para el caso en que $f \equiv 1$, esa derivada total es un término de borde que no participa en las ecuaciones, y es así que la RG, en su versión de teleparalelismo absoluto, resulta invariante local.

Por razones que se explicarán a continuación, la ausencia de esta simetría no debe ser vista como un aspecto oscuro de la teoría. La única dificultad que presenta radica en cuestiones prácticas, ya que un par de tetradas provenientes de la misma métrica vinculadas por una transformación de Lorentz, resultan ser inequivalentes a los ojos de la teoría. Mientras que la primer tetrada e^a mencionada es solución de las ecuaciones de movimiento, la segunda $e^{a'} = \Lambda(x)e^a$ no constituye en general una solución de las ecuaciones. A continuación se presentan dos ejemplos no triviales de tetradas soluciones de las teorías $f(T)$, junto al *modus operandi* realizado para su obtención. Estas soluciones, correspondientes a un vacío estático y esféricamente simétrico (cuya contraparte en RG es la métrica de Schwarzschild), y a un espacio-tiempo isótropo y homogéneo de sección espacial esférica (cuya contraparte en RG es el modelo de FRW con $K = 1$), muestran una estructura de campos dinámicos muy intrincada. Esta estructura está relacionada estrechamente con la falta de invariancia local (en general), de las teorías $f(T)$.

4.2.2. El frame de Schwarzschild

Las ecuaciones de campo de una teoría $f(T)$, como se mostró en la sección anterior, son

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) f_T + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T^\rho_{\mu\lambda} f_T + S_a^{\mu\nu} \partial_\mu T f_{TT} + \frac{1}{4} e_a^\nu f = 4\pi G \mathcal{T}_a^\nu. \quad (4.7)$$

En ellas se esconde una propiedad crucial en lo que respecta a la obtención de soluciones de vacío. Para captar su importancia, seguiremos la exposición desarrollada en [22].

Consideremos una dada solución de vacío $e_a^\nu(x)$ de la ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ . Esto significa que la tétrada $e_a^\nu(x)$ satisface las ecuaciones (4.7) con $f(T) = T - 2\Lambda$ y $\mathcal{T}_\mu^\nu = 0$, i.e., $e_a^\nu(x)$ satisface

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T^\rho_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} e_a^\nu (T - 2\Lambda) = 0. \quad (4.8)$$

Es importante notar que, a pesar que $e_a^\nu(x)$ constituye una solución de vacío, ese hecho no significa en general que el escalar de Weitzenböck T sea nulo para dicha solución (como lo sería el escalar de Ricci R en las mismas circunstancias). Se puede ver fácilmente este punto contrayendo la ecuación (4.8) con la tétrada inversa $e_\nu^a(x)$. En tal caso, se obtiene la ecuación escalar

$$e_\nu^a \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) = 2 e \Lambda, \quad (4.9)$$

la cual, en principio, no obliga al invariante T a ser nulo o constante para soluciones de vacío. Sin embargo, debido a la relación

$$T = -R + 2 e^{-1} \partial_\nu (e T_\sigma^{\sigma\nu}), \quad (4.10)$$

vemos que el escalar debe reducirse a una derivada total en este caso.

Dado que RG o su equivalente teleparalelo permiten efectuar transformaciones locales de Lorentz a una dada tétrada, nos podríamos preguntar si la solución en cuestión puede ser vista como un frame transformado $\bar{e}^a(x) = \Lambda_b^a(x) e^b(x)$ que conduzca a un invariante de Weitzenböck T constante, digamos $T[\bar{e}^a] = 2\bar{\Lambda}$. Por supuesto, la existencia de tal frame es independiente de las coordenadas elegidas, y no tiene efecto alguno sobre la métrica porque g se construye con la tétrada según $g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b$, relación que es claramente invariante local. De acuerdo a (4.10), estaríamos buscando una transformación de Lorentz $\Lambda_b^a(x)$ tal que

$$\bar{\Lambda} = e^{-1} \partial_\nu (e T_\sigma^{\sigma\nu}[\bar{e}^a]), \quad (4.11)$$

porque $R[\bar{e}^a] = R[e^a] = 0$ para soluciones de vacío, y $\bar{e} = e$. Supongamos que luego de

haber encontrado tal frame, lo reemplazamos en las ecuaciones de movimiento (4.7). Si $f_T(2\bar{\Lambda}) \neq 0$ el resultado es

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T^\rho_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} e_a^\nu \frac{f(2\bar{\Lambda})}{f_T(2\bar{\Lambda})} = 0. \quad (4.12)$$

Dado que $\bar{e}^a(x)$ es una solución de las ecuaciones de Einstein (4.8) con $T = 2\bar{\Lambda}$, entonces también resolverá las ecuaciones $f(T)$ en vacío con tal que

$$2(\bar{\Lambda} - \Lambda) = \frac{f(2\bar{\Lambda})}{f_T(2\bar{\Lambda})}. \quad (4.13)$$

De esta forma, hemos obtenido un resultado muy simple pero notablemente poderoso; si podemos encontrar en la teoría de Einstein el frame (localmente rotado) $\bar{e}^a(x)$ de forma tal que $T[\bar{e}^a] = 2\bar{\Lambda}$, entonces este frame especial también resolverá las ecuaciones de movimiento de la teoría $f(T)$ que verifiquen (4.13). Por ejemplo, una solución de vacío de RG con $\bar{\Lambda} = 0 = \Lambda$ también resolverá cualquier deformación ultravioleta de RG, es decir, aquella que verifique

$$f(T) = T + \mathcal{O}(T^2), \quad \text{i.e.,} \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (4.14)$$

En lo que sigue, sacaremos ventaja de esta propiedad para mostrar que la geometría de Schwarzschild emerge como solución de cualquier teoría de tipo $f(T)$ que cumpla las condiciones ultravioletas (4.14). Resulta relativamente fácil verificar la inaptitud de un cierto frame en el contexto de las teorías $f(T)$. Por ejemplo, el frame *ingenuo* dado por

$$\begin{aligned} e^0 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt, \\ e^1 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr, \\ e^2 &= r d\theta, \\ e^3 &= r \sin\theta d\phi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

el cual ciertamente conduce a la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\Omega^2, \quad (4.16)$$

no es una solución consistente de las ecuaciones dinámicas de las teorías $f(T)$. De hecho, la componente r - θ de la ecuación de movimiento (4.7), dada por

$$f_{TT} (16M^3 - 8M^2r - 2Mr^2 + r^3) = 0, \quad (4.17)$$

claramente no puede ser satisfecha excepto en el caso $f(T) = T - 2\Lambda$. Peor aún, si $f_{TT} \neq 0$ la ecuación (4.17) no es satisfecha ni siquiera si $M = 0$, lo cual indica que la tétrada (4.15) con $M = 0$ resulta insatisfactoria también para describir al espacio de Minkowski en teorías $f(T)$ arbitrarias.

Por supuesto, la paralelización del espacio de Minkowski está generada por la base Cartesiana $\{dx^a\}$. Por el contrario, el frame (4.15) genera círculos, los cuales ciertamente no son curvas autoparalelas del espacio plano. Sin embargo, este hecho no significa en modo alguno que no existe solución de Schwarzschild en las teorías $f(T)$, sino, en cambio, que el frame (4.15) no es correcto en lo que respecta a la descripción de dicho espacio-tiempo. De hecho, mostraremos ahora que el espacio-tiempo de Schwarzschild emerge como solución de vacío de cualquier teoría $f(T)$ que satisfaga las condiciones (4.14), aunque lo hace de una manera un tanto intrincada.

Para empezar la construcción, consideremos la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas

$$ds^2 = A(\rho)^2 dt^2 - B(\rho)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.18)$$

en donde las funciones A y B dependen de la coordenada radial $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, siendo

$$A(\rho) = \frac{2\rho - M}{2\rho + M}, \quad B(\rho) = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2. \quad (4.19)$$

La carta isotrópica cubre solamente la región exterior del espacio-tiempo de Schwarzschild, como resulta claro de la relación entre la coordenada ρ y la coordenada radial r usual en el gauge de Schwarzschild, relación que luce

$$\sqrt{r^2 - 2Mr} + r - M = 2\rho. \quad (4.20)$$

Introduciremos ahora el frame *asintótico*, el cual se supone que debe ser una buena aproximación al frame real (físico) en el infinito espacial, en donde el espacio-tiempo posee una estructura Minkowskiana. Este frame proviene de tomar la raíz cuadrada de la métrica (4.18), así que tenemos

$$\begin{aligned} e^0 &= A(\rho) dt, \\ e^1 &= B(\rho) dx, \\ e^2 &= B(\rho) dy, \\ e^3 &= B(\rho) dz. \end{aligned} \quad (4.21)$$

El frame (4.21), contrariamente al dado por (4.15), es particularmente útil como punto de partida porque captura el significado geométrico asintótico del proceso de paralelización, reflejado en el hecho de que, en el infinito espacial, tenemos el frame Minkowskiano

$e_\mu^a(\infty) = \delta_\mu^a$ que lleva a un tensor de torsión nulo. Sin embargo, el frame *asintótico* no es capaz tampoco de proveer una descripción global del espacio-tiempo de Schwarzschild, como puede ser fácilmente verificado al reemplazarlo en las ecuaciones de movimiento. De acuerdo a lo indicado por la ecuación (4.11), deberíamos buscar una transformación de Lorentz de tal forma que, luego de actuar en el frame (4.21), el invariante de Weitzenböck devenga nulo. Teniendo en cuenta esto, y el hecho que el invariante de Weitzenböck proveniente de la tétrada (4.21) involucra tanto a las funciones $A(\rho)$ y $B(\rho)$ como a sus primeras derivadas, concentraremos la búsqueda en un boost radial dependiente solamente de la coordenada ρ . Con las definiciones usuales

$$\gamma(\rho) = \left(1 - \beta^2(\rho)\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta(\rho) = v(\rho)/c, \quad (4.22)$$

encontramos que el boost radial más general obtenido a partir de (4.21) posee la estructura

$$\begin{aligned} \tilde{e}^0 &= A(\rho)\gamma(\rho)dt - B(\rho)\Pi_1[x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3], \\ \tilde{e}^1 &= -A(\rho)\Pi_1x_1dt + B(\rho)\left[(1 + \Pi_2x_1^2)dx_1 + \Pi_2x_1x_2dx_2 + \Pi_2x_1x_3dx_3\right], \\ \tilde{e}^2 &= -A(\rho)\Pi_1x_2dt + B(\rho)\left[\Pi_2x_1x_2dx_1 + (1 + \Pi_2x_2^2)dx_2 + \Pi_2x_2x_3dx_3\right], \\ \tilde{e}^3 &= -A(\rho)\Pi_1x_3dt + B(\rho)\left[\Pi_2x_1x_3dx_1 + \Pi_2x_2x_3dx_2 + (1 + \Pi_2x_3^2)dx_3\right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

en donde $\Pi_1 = \sqrt{\gamma^2(\rho) - 1}\rho$ y $\Pi_2 = (\gamma(\rho) - 1)/\rho^2$. La expresión del escalar de Weitzenböck correspondiente al frame boosteado (4.23) es bastante complicada, y no es necesario su escritura para los propósitos inmediatos. Sin embargo, se puede constatar fácilmente que con la forma (4.19) para las funciones $A(\rho)$ y $B(\rho)$, el invariante es nulo si y sólo si el parámetro del boost $\gamma(\rho)$ se elige de acuerdo a

$$\gamma(\rho) = \frac{4\rho^2 + M^2}{4\rho^2 - M^2}. \quad (4.24)$$

De hecho, las componentes no nulas de $T_{\lambda\mu\nu}$ y $S_{\lambda\mu\nu}$ en este caso son

$$\begin{aligned} T_{00\alpha} &= S_{00\alpha} = -\frac{M}{\rho^3} \frac{A(\rho)}{B(\rho)} x_\alpha \\ T_{\alpha 0\beta} &= 2S_{\alpha 0\beta} - \frac{M}{\rho^2} \delta_{\alpha\beta} = \frac{2M}{\rho^4} x_\alpha x_\beta - \frac{M}{\rho^2} \delta_{\alpha\beta} \\ T_{\alpha\alpha\beta} &= \frac{M}{\rho^3} \frac{B(\rho)}{A(\rho)} x_\beta \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned} \quad (4.25)$$

además de aquellas provenientes de la antisimetría (x_α se refiere a x, y, z); así, puede

verificarse que $T = S^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu}$ se anula.

Resulta evidente que el frame boosteado (4.23) se reduce a (4.21) asintóticamente, lo cual implica que la velocidad del boost tiende asintóticamente a cero. Además, conforme ρ se aproxima al horizonte del agujero negro ubicado en $\rho_h = M/2$, la velocidad del boost tiende a la de la luz.

Es importante remarcar que la expresión (4.23) no es válida en la región $r \leq 2M$, puesto que la carta isotrópica no cubre esa parte del espacio-tiempo. Si uno quisiese conocer la expresión del frame en esa región, debería cambiar coordenadas adecuadamente. Este hecho, por supuesto, no afectaría a la anulación del escalar de Weitzenböck. Por ejemplo, podríamos obtener la máxima extensión analítica del espacio-tiempo de Schwarzschild adoptando las coordenadas de Kruskal. En ese caso, tendríamos

$$\bar{e}_{\mu'}^a = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \bar{e}_\mu^a, \quad (4.26)$$

en donde $x^{\mu'}$ se refiere a la carta de Kruskal y x^μ a la isotrópica. Es importante notar, entonces, que $\bar{e}_{\mu'}^a$ constituiría el *mismo* frame pero en un sistema de coordenadas distinto.

La existencia del *frame de Schwarzschild* (4.23) automáticamente prueba que el espacio-tiempo de Schwarzschild es solución de vacío de cualquier teoría $f(T)$ ultravioleta (esto es, cuya función $f(T)$ satisface las condiciones (4.14)). Sin embargo, independientemente del hecho de que ambos frames (4.21) y (4.23) conducen a la misma métrica (4.18), lo cual constituye un hecho trivial en RG, el único¹ frame consistente en cuanto a la descripción del espacio-tiempo de Schwarzschild en el contexto de las teorías $f(T)$, es el *frame de Schwarzschild* (4.23).

4.2.3. El frame de FRW, Universo cerrado

En el siguiente ejemplo veremos el proceso de obtención del frame solución a la cosmología de Friedmann-Robertson-Walker con $K = 1$ en las teorías $f(T)$, como se expone en [23]. La métrica que describe la geometría del Universo de FRW cerrado es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\psi^2 + \sin(\psi)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (4.27)$$

donde ψ, θ, ϕ son coordenadas sobre la 3-esfera, y $a(t)$ es el factor de escala.

Uno aquí, como primera opción, podría proponer el siguiente frame (ingenuo) para

¹A menos de transformaciones del grupo remanente.

las ecuaciones dinámicas

$$\begin{aligned}
e^{0'} &= dt \\
e^{1'} &= a(t)d\psi \\
e^{2'} &= a(t)\sin(\psi)d\theta \\
e^{3'} &= a(t)\sin(\psi)\sin\theta d\phi.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Sin embargo, esta opción es incompatible con las ecuaciones de campo ya que este conjunto de tétradas no paraleliza correctamente la variedad. La manifestación de ello se ve en el escalar de Weitzenböck T resultante

$$T = 2[a^{-2}\cot^2(\psi) - 3H^2]. \tag{4.29}$$

El hecho de que posea dependencia explícita en ψ , rompe con la isotropía y homogeneidad del modelo FRW en cuestión, descartando así el frame propuesto como posible solución. Una confirmación de este argumento de simetría se obtiene al constatar la inconsistencia de las ecuaciones de movimiento.

Procedemos entonces en obtener una correcta paralelización del espacio-tiempo, utilizando la técnica detallada en [24]. Comenzamos utilizando el frame *ingenuo* (4.28) y aplicamos sobre él una transformación local de Lorentz apropiada. La transformación en cuestión consiste en en una rotación espacial a la tétrada $e^{1'}$, $e^{2'}$ y $e^{3'}$ con ángulos de Euler ψ, θ, ϕ , que resulta en el frame nuevo

$$e^a = \mathcal{R}^a_{a'} e^{a'}, \tag{4.30}$$

donde

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

y $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi)$, $\psi \in [0, \pi)$. De esta manera el frame resultante es

$$e^0 = dt, \quad e^1 = a(t) E^1, \quad e^2 = a(t) E^2, \quad e^3 = a(t) E^3 \tag{4.32}$$

donde,

$$\begin{aligned}
E^1 &= -c(\theta)d\psi + s(\psi)s(\theta)(c(\psi)d\theta - s(\psi)s(\theta)d\phi) \\
E^2 &= s(\theta)c(\phi)d\psi - s(\psi)[(s(\psi)s(\phi) - c(\psi)c(\theta)c(\phi))d\theta + \\
&\quad + (c(\psi)s(\phi) + s(\psi)c(\theta)c(\phi))s(\theta)d\phi] \\
E^3 &= -s(\theta)s(\phi)d\psi - s(\psi)[(s(\psi)c(\phi) + c(\psi)c(\theta)s(\phi))d\theta + \\
&\quad + (c(\psi)c(\phi) - s(\psi)c(\theta)s(\phi))s(\theta)d\phi]
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Vale la pena aclarar que, dado que los frames (4.28) y (4.32) están relacionados por una transformación de Lorentz, la métrica resultante de ambos coincide y será la presentada en (4.27).

El escalar T resultante del nuevo frame es entonces

$$T = 6(-a^{-2} - H^2), \tag{4.34}$$

que no posee inconsistencias en las simetrías de FRW que sí se observaban en el primer frame.

Puede verse en [23] que, luego de reemplazarse el frame resultante (4.32) en la ecuaciones de campo, se obtiene un conjunto de ecuaciones consistentes para el factor de escala $a(t)$. Naturalmente, la forma funcional del factor de escala reposará finalmente en el tipo de función $f(T)$ que se considere. Sin embargo, el frame (4.32) conduce a un sistema consistente para cualquier función $f(T)$.

4.3. El grupo remanente

Ambos ejemplos expuestos en la sección anterior fueron víctimas de que el frame diagonal de partida no era una correcta paralelización de la variedad en cuestión. Las transformaciones que se realizaron en ambos casos sobre los frames diagonales, fueron transformaciones de Lorentz apropiadas tal que los campos de tétradas resultantes sean solución de la teoría. Como ya fue mencionado, no todas las transformaciones a aplicar mantienen el carácter de solución de los frames, sin embargo existe lo que se denomina el *grupo remanente*, un subgrupo de transformaciones de Lorentz que preserva las ecuaciones de movimiento para las teorías $f(T)$. Este subgrupo del grupo de Lorentz actúa on shell, es decir, a nivel de las soluciones. La descripción del mismo y su importancia a la hora de las juntas de soluciones, serán discutidas en lo que sigue.

En la referencia [21], se muestra que la forma específica del término de superficie que aparece en (4.6), está dada por

$$d(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \eta^{de} \Lambda^c_{f'} d\Lambda^f_e). \quad (4.35)$$

Aquí, Λ^f_e se refiere a las matrices de Lorentz operando sobre la 1-forma e^a , \wedge es el producto wedge, y el operador d es la derivada exterior.

La expresión (4.35) nos enseña que al afectar a una cierta tétrada e^a con una transformación local, obtenemos una nueva $e^{a'} = \Lambda^{a'}_a e^a$ que conduce a un invariante T' que difiere del original T por un término de superficie sujeto al espacio-tiempo en consideración, y al tipo de transformación de Lorentz efectuada. El *grupo remanente* de un cierto espacio-tiempo e^a estará caracterizado, entonces, por aquellas transformaciones locales que anulen el término de superficie (4.35). Claramente, el grupo *global* de Lorentz es parte del grupo remanente de cualquier espacio dado por e^a . Sin embargo, lo fundamental es entender qué tipo de transformaciones *locales*, pueden ser efectuadas sobre una dada tétrada.

Para comprender más en profundidad este asunto, denotemos por $\mathcal{A}(e^a)$ al conjunto de transformaciones locales que conduzcan a la anulación del término (4.35), para una dada solución e^a . De esta forma, $\mathcal{A}(e^a)$ representa al conjunto de transformaciones de Lorentz admisibles por un dado espacio-tiempo, con lo cual es un conjunto definido on-shell. Debido al carácter no lineal de la expresión (4.35), el conjunto $\mathcal{A}(e^a)$ no será un grupo de Lie en general; de hecho, si Λ y Λ' pertenecen a $\mathcal{A}(e^a)$, entonces el producto $\Lambda \Lambda'$ no necesariamente pertenecerá $\mathcal{A}(e^a)$. Sin embargo, si tenemos un elemento de $\mathcal{A}(e^a)$, entonces la transformación inversa también estará en $\mathcal{A}(e^a)$. Esto es debido a que, como $\Lambda^c_{f'} \Lambda^f_e = \delta^c_e$, entonces podemos reemplazar en (4.35) el término $\Lambda^c_{f'} d\Lambda^f_e$, por $-\Lambda^f_e d\Lambda^c_{f'}$, sin afectar la anulación de la expresión.

A la luz de estos comentarios, resulta pertinente indagar bajo qué circunstancias el conjunto $\mathcal{A}(e^a)$ resulta un grupo de Lie. Para eso, escribamos las transformaciones de Lorentz como

$$\Lambda^a_{b'} = \exp \left[\frac{1}{2} \sigma^{gh}(x) (M_{gh})^a_{b'} \right], \quad (4.36)$$

en donde $\sigma^{cd}(x)$ representan los parámetros de la transformación, y M_{cd} son seis matrices generadoras del grupo de Lorentz. Los generadores M_{cd} satisfacen el álgebra

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac} + \eta_{ad} M_{bc}. \quad (4.37)$$

Las componentes de las matrices M_{cd} son

$$(M_{cd})^a_{b'} = \delta^a_c \eta_{db'} - \delta^a_d \eta_{cb'}. \quad (4.38)$$

En términos de los generadores de boosts $K_\alpha = M_{0\alpha}$ y rotaciones $J_\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} M^{\beta\gamma}$,

el álgebra (4.37) es

$$\begin{aligned} [J_\alpha, J_\beta] &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J^\gamma \\ [K_\alpha, K_\beta] &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J^\gamma \\ [K_\alpha, J_\beta] &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} K^\gamma. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para transformaciones infinitesimales, la expresión (4.36) toma la forma

$$\Lambda^a{}_{b'} = \delta^a{}_{b'} + \frac{1}{2} \sigma^{gh}(x) (M_{gh})^a{}_{b'} + O(\sigma^2). \quad (4.40)$$

En este caso obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda^c{}_{f'} d\Lambda^{f'}{}_e &\simeq -\frac{1}{2} d\sigma^{gh} (M_{gh})^c{}_e \\ &= -\frac{1}{2} d\sigma^{gh} (\delta_g^c \eta_{he} - \delta_h^c \eta_{ge}) = \eta_{ge} d\sigma^{gc}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

en donde hemos usado $\sigma^{gh} = -\sigma^{hg}$. De esta forma, la ecuación (4.35) resulta

$$d(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge d\sigma^{cd}) = 0, \quad (4.42)$$

o, equivalentemente,

$$\epsilon_{abcd} d(e^a \wedge e^b) \wedge d\sigma^{cd} = 0. \quad (4.43)$$

Como era de esperarse, la expresión (4.43) es lineal en σ^{cd} , lo cual significa que la composición de dos transformaciones locales infinitesimales pertenecientes a $\mathcal{A}(e^a)$, satisface la ec. (4.43) al orden más bajo en la derivada de sus parámetros.

Aquí resulta relevante clasificar a las soluciones de las ecuaciones de movimiento de acuerdo al número de 2-formas cerradas que involucran. Dado que la 2-forma $e^a \wedge e^b$ es un área, una dada solución e^a será llamada *n-tétrada de área cerrada* (en breve, *n-TAC*), si se satisface $d(e^a \wedge e^b) = 0$ para n de los diferentes pares $(a-b)$ ($0 \leq n \leq 6$). Para entender la importancia de esta clasificación, procederemos constructivamente, empezando por considerar un 1-TAC. Supongamos, por ejemplo, que $d(e^0 \wedge e^3) = 0$, lo que implica que el parámetro local σ^{12} en (4.43) puede ser elegido arbitrariamente sin atentar contra la anulación de la expresión. Entonces, obtenemos un subgrupo 1-dimensional de transformaciones infinitesimales, el subgrupo de rotaciones en torno a x^3 . Naturalmente, este razonamiento es aplicable a cualquier otra área cerrada también, por ejemplo, a $d(e^1 \wedge e^2) = 0$, si fuera el caso.

Es claro, entonces, que procediendo análogamente con *n-TAC*'s ($n > 1$), llegaremos finalmente a un máximo de generadores infinitesimales libres cuando $n = 6$. Este importante resultado indica que si e^a representa un 6-TAC, entonces tendremos

$$SO(3, 1)_{inf} \subset \mathcal{A}(e^a), \quad (4.44)$$

en donde $SO(3, 1)_{inf}$ representa el grupo local de Lorentz infinitesimal.

Resultados de este tipo pueden ser extendidos al caso de transformaciones locales generales, ya no infinitesimales. El lector está invitado a consultar la referencia [21] para ver detalles en esta dirección. Sin embargo, en la presente exposición nos referiremos a transformaciones infinitesimales solamente, puesto que son suficientes para los propósitos en consideración.

Ejemplos importantes de n -TAC's, y de sus grupos remanentes, son:

1. Espacio de Minkowski: quizás el ejemplo más importante, puesto que constituye el escenario geométrico en el cual transitamos en nuestra experiencia cotidiana. Un frame correcto, es decir, una paralelización del espacio de Minkowski, está dada por el frame Euclídeo $e^a = \delta^a_b dx^b$ (las x^b 's se refieren a $x^{0,\alpha}$, en donde x^α son coordenadas Cartesianas). Como la torsión asociada a este frame es idénticamente nula, el escalar de Weitzenböck también lo es, de forma que el frame Euclídeo es una solución de vacío de cualquier teoría $f(T)$ que sea una deformación suave de RG (ver [22]).

El frame Euclídeo constituye el mejor ejemplo (sino el único), de un 6-TAC. Esto significa que cualquier teoría $f(T)$ que esté caracterizada por una función suave en $T = 0$ no distingue localmente frames conectados por transformaciones de Lorentz infinitesimales. En otras palabras, la ausencia de gravedad en teorías de gravedad de tipo $f(T)$ se revela como una incapacidad en la selección de una paralelización preferencial a nivel local. Esto podría interpretarse como una realización del Principio de Equivalencia en las teorías $f(T)$.

El grupo remanente del espacio de Minkowski va mucho más allá del grupo de transformaciones infinitesimales de Lorentz, como fue establecido en la Ref. [21]. Si bien no nos sumergiremos en esta cuestión, sí es preciso mencionar que existen transformaciones locales con dependencia restringida de las coordenadas que pertenecen a $\mathcal{A}(Min)$. Una de ellas, que será importante al ejemplificar la problemática de la juntura en el capítulo siguiente, es el boost en el plano $t - x$ operando sobre la tétrada Euclídea, conduciendo al frame boosteado

$$\begin{aligned} e^0 &= \cosh(\theta(t))dt + \sinh(\theta(t))dx, \\ e^1 &= \sinh(\theta(t))dt + \cosh(\theta(t))dx, \\ e^2 &= dy, \\ e^3 &= dz. \end{aligned} \quad (4.45)$$

El parámetro del boost $\theta(t)$, no está ya limitado a ser una función infinitesimal del estilo $\theta(t) = \epsilon \vartheta(t)$, con $\epsilon \ll 1$ y $\vartheta(t)$ acotada. Sin embargo, está restringido a depender sólo del tiempo. Consideraciones de este estilo son válidas para boost en los otros planos, como así también, para rotaciones en torno a los tres ejes. Transformaciones locales más generales (con dependencia parcial en las coordenadas espaciales), también existen en $\mathcal{A}(Min)$ [21].

2. Cosmologías Bianchi de tipo I: Las métricas en cuestión representan espacio-tiempos homogéneos pero no isótropos, cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t) dx^2 - a_2^2(t) dy^2 - a_3^2(t) dz^2, \quad (4.46)$$

en donde se han usado coordenadas pseudo-euclídeas (t, x, y, z) , y $a_i(t)$ son los factores de escala asociados a las distintas direcciones espaciales. La topología de estos espacios es R^4 , así que una paralelización admisible está dada por la tétrada

$$e^0 = dt, \quad e^1 = a_1(t) dx, \quad e^2 = a_2(t) dy, \quad e^3 = a_3(t) dz. \quad (4.47)$$

Es fácil comprobar que $d(e^0 \wedge e^\alpha) = 0$, $\forall \alpha$, con lo cual la tétrada (4.47) es un 3-TAC. Entre las métricas de la forma (4.46), se encuentra el importante caso dado por $a_1 = a_2 = a_3 \equiv a$, correspondiente a una cosmología de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) isótropa y homogénea, de sección espacial plana. Dada la importancia cosmológica que estas métricas poseen, discutiremos con cierto detalle el grupo remanente asociado al frame

$$e^0 = dt, \quad e^1 = a(t) dx, \quad e^2 = a(t) dy, \quad e^3 = a(t) dz. \quad (4.48)$$

Debido a ser 3-TAC, es claro que el grupo remanente asociado a (4.48), contendrá tres subgrupos 1-dimensionales del grupo de Lorentz. De hecho, la ecuación (4.43) es verificada por cualquier rotación local $\sigma^{\beta\gamma}(x^\alpha)$ de la tétrada diagonal e^α , porque para cada par (0α) , tenemos un par $(\beta \gamma)$ (con estos últimos, distintos de α), habiendo tres de tales pares. Debido a esto, concluimos que $\mathcal{A}(e^\alpha)$ incluye los tres subgrupos 1-paramétricos de rotaciones en torno a un determinado eje.

Además de los subgrupos uniparamétricos mencionados, $\mathcal{A}(e^\alpha)$ contiene una estructura más rica. Notemos que $e^\alpha \wedge e^\beta$ no es cerrada para (4.48). Sin embargo, tenemos que

$$d(e^\alpha \wedge e^\beta) = 2\dot{a} dt \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (4.49)$$

Debido a esta relación, puede concluirse que el grupo remanente contendrá tam-

bién tres boosts $\sigma^{0\gamma}(t, x^\alpha, x^\beta)$ (notar que $\gamma \neq \alpha \neq \beta$). Esto se sigue del hecho que la 1-forma $d\sigma^{0\gamma}$ en la ec. (4.43) no contiene un término proporcional a dx^γ , de forma que el producto wedge $d(e^\alpha \wedge e^\beta) \wedge d\sigma^{0\gamma}$ es nulo. Entonces, para este 3-TAC particular, tenemos que $\mathcal{A}(e^a)$ no contiene sólo tres, sino seis generadores independientes $\sigma^{0\gamma}(t, x^\alpha, x^\beta)$ y $\sigma^{\beta\gamma}(x^\mu)$. Sin embargo, es importante notar que los tres subgrupos 1-paramétricos de boosts en una dirección dada (generados por $\sigma^{0\gamma}(t, x^\alpha, x^\beta)$), están limitados a tener una dependencia restringida en las coordenadas espacio-temporales x^μ . Por ejemplo, si consideráramos un boost en el plano $t - x$, tendríamos que el generador podría depender sólo de (t, y, z) . Para boosts en los otros planos, rigen consideraciones análogas.

Debido a lo recién expuesto, podemos reorganizar a los seis generadores mencionados en tres subgrupos abelianos 2-dimensionales con dependencia restringida en las coordenadas espacio-temporales. En concreto, los siguientes grupos abelianos 2-dimensionales estarán contenidos en $\mathcal{A}(e^a)$:

$$\begin{aligned} & \{K_x(t, y, z), J_x(x^\mu)\} \\ & \{K_y(t, x, z), J_y(x^\mu)\} \\ & \{K_z(t, x, y), J_z(x^\mu)\}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Capítulo 5

La Problemática de la Juntura

5.1. Juntura de tétradas

En el Capítulo 1 se describió como empalmar dos soluciones para la métrica del espacio-tiempo utilizando las condiciones de Israel. En el caso de que el campo dinámico de la teoría sean las tétradas e_{μ}^a , como en ETRG o en las teorías $f(T)$, la problemática de la juntura conlleva nuevas dificultades. No será sólo el hecho de que las coordenadas en las cuales escribamos los campos no son en general comparables, sino que en la mayoría de los casos el empalme tendrá éxito exclusivamente si se aplica una transformación del grupo remanente apropiada. Esto introduce la necesidad de conocer el grupo remanente de cada solución obtenida y, como se describió en (4.3), puede resultar en una tarea lejos de ser sencilla.

En este capítulo se presentan dos ejemplos de empalme de tétradas soluciones a las $f(T)$, el espacio de Minkowski y la cuerda de Gott. Por último se presenta la obtención de un *frame estelar*, el cual es un primer paso para la construcción de una solución global del espacio tiempo de una estrella. Habiendo ya obtenido también el *frame de Schwarzschild* (4.2.2), será parte de futuras contribuciones estudiar sus grupos remanentes para así concretar la juntura.

5.2. Un ejemplo muy descriptivo. Juntura en el espacio de Minkowski

Resulta interesante ilustrar la naturaleza del problema de juntura a nivel del campo de tétradas con un ejemplo muy sencillo. Para eso, consideremos el espacio de Minkowski que, como vimos oportunamente, está representado por el 6-TAC Euclídeo $e^0 = dt$, $e^1 = dx$, $e^2 = dy$, $e^3 = dz$. Este frame constituye una base global del espacio tangente, es decir, una paralelización del espacio de Minkowski. Sin embargo, como adelantamos en (4.3), existen muchos otros frames correctos para describir el espacio

de Minkowski, relacionados con el frame Euclídeo mediante una transformación perteneciente a $\mathcal{A}(Min)$. En lo que sigue, haremos uso de algunos de estos frames para tratar el problema de juntura de tétradas en dos hipersuperficies que separan al espacio de Minkowski en tres regiones.

Entonces, sea $Min = Min_1 \cup Min_2 \cup Min_3$, en donde

$$\begin{aligned} Min_1 &= \{(t, x, y, z) \in Min \mid t \geq 1\}, \\ Min_2 &= \{(t, x, y, z) \in Min \mid -1 < t < 1\}, \\ Min_3 &= \{(t, x, y, z) \in Min \mid t \leq -1\}. \end{aligned}$$

Estrictamente hablando, Min_1 y Min_3 serían subvariedades con borde del espacio de Minkowski, aunque esta sutileza no es importante para lo que se quiere ilustrar. Podríamos pensar, entonces, que tenemos tres regiones del espacio de Minkowski con campos de tétradas distintos que queremos empalmar para reconstruir el espacio total. La única restricción, es que los campos asociados a cada región deben ser frames correctos, en el sentido de que deben ser soluciones a las ecuaciones de movimiento de las teorías $f(T)$ en vacío, y con topología R^4 .

Por supuesto, este problema es trivial en RG, puesto que cualquiera sea el frame, la métrica será la de Minkowski en cada región, y entonces el empalme resulta automático. Sin embargo, en las teorías $f(T)$, los frames son no triviales, y aún teniendo tétradas correctas en cada región, no es claro que vayan a empalmar en forma suave, sobre las hipersuperficies de juntura. La suavidad sería necesaria, puesto que sobre la superficie de juntura no se exhibe ninguna distribución de materia que pueda forzar una discontinuidad en la derivada de la tétrada.

Por simplicidad, consideremos los siguientes campos de tétradas en las distintas regiones:

$$\text{Campo de tétradas} = \begin{cases} \text{en } Min_1, & e^a = \delta_b^a dx^a, \\ \text{en } Min_2, & \begin{cases} e^0 = \cosh(\theta_0)dt + \sinh(\theta_0)dx, \\ e^1 = \sinh(\theta_0)dt + \cosh(\theta_0)dx, \\ e^2 = dy, \\ e^3 = dz. \end{cases} \\ \text{en } Min_3, & e^a = \delta_b^a dx^a, \end{cases} \quad (5.1)$$

en donde θ_0 es una constante no nula. EL panorama es, entonces, que en Min_1 y Min_3 tenemos el frame Euclídeo, mientras que en Min_2 el espacio está descrito por un boost *global* en el plano (t, x) (Ver figura 5.1) en el plano $(t - x)$. Como mencionamos más

arriba, al nivel de RG, las tres porciones describen el mismo tensor métrico $e^a e^b \eta_{ab}$. Sin embargo, al nivel de la tétrada, tenemos tres regiones descritas por campos de 1-formas que no empalman en las hipersuperficies $t = \pm 1$, puesto que $\theta_0 \neq 0$, y entonces los límites de los respectivos campos en dichas superficies no están definidos. Esto significa que, a pesar de que cada tétrada es solución de las ecuaciones de movimiento de vacío de una teoría $f(T)$ suave, pero arbitraria (esto es así puesto que la tétrada en Min_2 es simplemente un transformación de Lorentz *global*, que es siempre simetría de la teoría), no podemos hablar de una solución global de Min . Es por eso que la técnica a utilizar en un problema de juntura, tendrá que ver con la libertad de efectuar transformaciones del grupo remanente, para torcer localmente la tétrada (cerca de la hipersuperficie de juntura), y efectuar así el empalme suave de los campos representativos de esta región.

Como discutimos oportunamente en 4.3, entre las tétradas permitidas para describir correctamente el espacio de Minkowski, se encuentran boosts locales del frame Euclídeo (Ver Ec. (4.45)). Para proceder con el empalme, es suficiente entonces considerar la siguiente tétrada,

$$\text{Campo de tétradas} = \begin{cases} \text{en } Min_1, & e^a = \delta_b^a dx^a, \\ \text{en } Min_2, & \begin{cases} e^0 = \cosh(\theta(t))dt + \sinh(\theta(t))dx, \\ e^1 = \sinh(\theta(t))dt + \cosh(\theta(t))dx, \\ e^2 = dy, \\ e^3 = dz. \end{cases} \\ \text{en } Min_3, & e^a = \delta_b^a dx^a, \end{cases} \quad (5.2)$$

que difiere de (5.1), sólo en la localidad del parámetro del boost θ_0 . Debido a que Min_2 está correctamente descrito por la tétrada boosteada con una función local $\theta(t)$ arbitraria, tenemos completa libertad para efectuar el empalme suave en $t = \pm 1$ simplemente eligiendo convenientemente $\theta(t)$. Básicamente, tenemos que encontrar funciones suaves que interpolen entre $\theta = \theta_0$ y $\theta = 0$, con derivada nula en $t = \pm 1$. Entre muchas, una de ellas podría ser

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{2}(1 + \cos(\pi t)). \quad (5.3)$$

La tétrada (5.2) con la función así obtenida, entonces, constituye una paralelización global del espacio de Minkowski, puesto que representa una base global, suave, y no nula en todo el espacio. Una imagen cualitativa de este proceso, se muestra en 5.1.

Normalmente, la juntura de tétradas tendrá que ser sobrellevada sobre hipersuperficies que separan espacios con simetrías muy dispares, no como el caso simple que estamos considerando. Aún así, vemos que el proceso es sumamente complejo, puesto que no se remite a efectuar cambios de coordenadas en ambos espacios, de forma tal que la hipersuperficie de juntura admita una descripción consistente en ambas coorde-

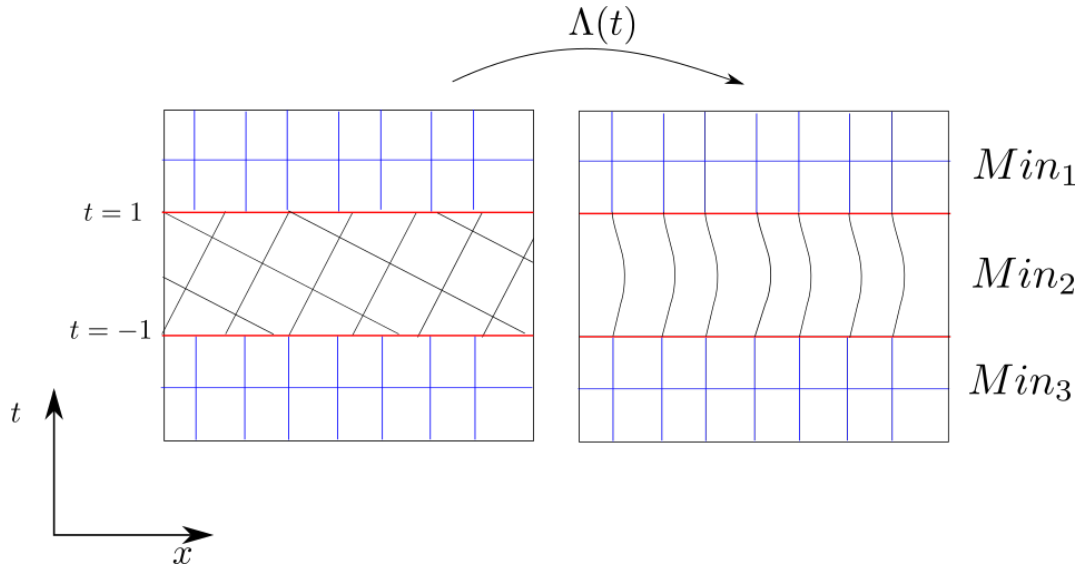


Figura 5.1: Diagrama de tres frames de Minkowski en el plano $(t-x)$. En la primera imagen se muestra como el frame en Min_2 no empalma de forma continua con los demás. En la segunda puede verse como luego de una transformación local de Lorentz la juntura se efectúa de forma continua y con primera derivada continua.

nadas. El proceso es más complejo porque involucra transformaciones de Lorentz que normalmente no están permitidas debido a la falta de invariancia local general de las teorías $f(T)$. Este ejemplo enseña, entonces, que la caracterización del grupo remanente en los espacios a juntar, resulta crucial.

5.3. La cuerda de Gott en teorías $f(T)$

En este apartado discutiremos el problema de juntura en la gravedad de tipo $f(T)$, análogo a la solución de Gott en RG (ver, 2.4). Para empezar, deberemos describir las soluciones correspondientes a ambas regiones (exterior e interior), pero en el contexto de las teorías $f(T)$. En general, este es un problema *per se*, puesto que involucra la obtención de nuevas soluciones que son deformaciones de aquellas dadas por RG. Sin embargo, y debido a la alta simetría del espacio-tiempo de Gott, las soluciones en ambas regiones no se ven modificadas. Pasaremos a mostrar esta última propiedad primero.

En el vacío exterior, la tétrada solución de RG es

$$\begin{aligned}
 e^0 &= dt, \\
 e^1 &= dr, \\
 e^2 &= r \cos \theta_M d\phi, \\
 e^3 &= dz,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

en donde $t, z \in (-\infty, \infty)$, $r \in [r_0 \frac{\sin \theta_M}{\cos \theta_M}, \infty)$, y $\phi \in [0, 2\pi)$. Es fácil verificar que el frame (5.4) es solución de cualquier teoría $f(T)$ ultravioleta. Una forma, es calcular el invariante de Weitzenböck T , que resulta nulo para esta solución. Entonces, utilizando el argumento desarrollado en la sección (4.2.2), es inmediato que la tetrada (5.4) resuelve las ecuaciones deformadas (4.7) en vacío. Otra forma, que en última instancia es una variante de la recién mencionada, es escribir explícitamente las ecuaciones. Las únicas ecuaciones no triviales son

$$f(T) = 0, \quad \frac{f(T) \cos \theta_M}{4r} = 0. \quad (5.5)$$

Evidentemente, estas ecuaciones se satisfacen automáticamente puesto que $T = 0$ para la solución, y $f(0) = 0$ por ser una deformación suave de la teoría de Einstein. Notemos, en cambio, que una teoría del tipo $f(T) = T + \alpha T^{-1}$ no verificará estas ecuaciones, y entonces el frame (5.4) no será una solución de vacío de la misma.

Para analizar la región interior, recordemos que la solución de Gott corresponde a un espacio-tiempo cuyo contenido material está descrito por el tensor energía momento $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\varepsilon, 0, 0, -\varepsilon)$, con $\varepsilon = 1/8\pi\rho_0^2$, siendo ρ_0 el radio del casquete esférico representativo de las secciones t, z constantes (notemos que las coordenadas interiores son (t, ρ, ϕ, z)). Para ilustrar una vez más la importancia del grupo remanente, consideremos el siguiente frame,

$$\begin{aligned} e^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4\rho^2}}} dt - \frac{JR \sin(\frac{\rho}{R})}{2M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4\rho^2}} \rho} d\phi, \\ e^1 &= d\rho, \\ e^2 &= \frac{-J}{2M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4\rho^2}} \rho} dt + \frac{R \sin(\frac{\rho}{R})}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4\rho^2}}} d\phi, \\ e^3 &= dz, \end{aligned} \quad (5.6)$$

con M, R y J constantes. Aquí M es representativa de la masa de la cuerda, R del valor de la coordenada radial en el evento de juntura, y J del momento angular de la cuerda. Tétradadas del estilo (5.6) fueron utilizadas en teorías de gravedad con estructura teleparalela más generales que las $f(T)$, como la llamada *gravedad determinantal de Born-Infeld* [25]. La relevancia de este frame, es que constituye un boost de un frame diagonal que, normalmente, no es solución de las ecuaciones deformadas en teorías generales. Debido a la simplicidad de las soluciones en consideración, es decir, a la vastedad de su grupo remanente, y a la particular estructura de las teorías $f(T)$, *ambos* frames serán soluciones de las ecuaciones de movimiento. Este hecho no trivial, sin embargo, nos permitirá elegir transformaciones del grupo remanente para sobrellevar

una juntura exitosa de soluciones. En lo que sigue, nos explayaremos en estas cuestiones.

Las ecuaciones de movimiento de las teorías $f(T)$, evaluadas en el frame (5.6), asumen la forma

$$\begin{aligned} f(T)' + \frac{1}{2}f(T) R^2 &= 1, \\ f(T) \csc\left(\frac{\rho}{R}\right) &= 0, \\ f(T) &= 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

siendo todas las demás idénticamente satisfechas. Aquí, las constantes M y J han desaparecido por completo, pues eran constantes de integración. A pesar de la aparente restricción en la función $f(T)$, las ecuaciones se satisfacen automáticamente puesto que, de nuevo, $T = 0$ para el frame (5.6). Dado que nos estamos concentrando en deformaciones suaves de RG en torno a $T = 0$, tenemos $f(0) = 0$ y $f(0)' = 1$, y el sistema es consistente.

Aún teniendo soluciones consistentes en las teorías $f(T)$ para las regiones exterior e interior, ecs. (5.4) y (5.6) respectivamente, no está claro que puedan empalmarse adecuadamente. De hecho, es fácil ver que no hay continuidad en el campo de tétradas sobre la hipersuperficie de juntura. Como se indicó en (2.4), ésta corresponde a evaluar $\rho = R \theta_M$ en la parte interior, y $r = R \sin(\theta_M)$ en la exterior. El resultado para la tétrada interior es

$$\begin{aligned} e^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4(R\theta_M)^2}}} dt - \frac{JR \sin \theta_M}{2M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4(R\theta_M)^2}} (R\theta_M)} d\phi, \\ e^2 &= \frac{-J}{2M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4(R\theta_M)^2}} (R\theta_M)} dt + \frac{R \sin \theta_M}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4(R\theta_M)^2}}} d\phi, \\ e^3 &= dz, \end{aligned} \tag{5.8}$$

y para el exterior,

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^2 &= R \sin \theta_M d\phi, \\ e^3 &= dz. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Es claro que los campos no son continuos sobre la hipersuperficie, excepto cuando $J = 0$. Esta imposición resulta justificada en el caso en cuestión, puesto que J se revela como una constante de integración que no codifica ningún grado de libertad adicional en la teoría. Sin embargo, en esquemas más generales [25], J es representativa de la

dinámica de grados de libertad extra provenientes de la ruptura de la invariancia local de Lorentz. Es por eso que, a pesar de que al nivel de las teorías $f(T)$ la elección $J = 0$ no conlleva ninguna pérdida de generalidad, resulta importante entender de qué forma procederíamos en una teoría más general, en donde J no pueda ser anulado sin perder información relevante.

En un contexto más general en el que $J \neq 0$, deberíamos encontrar una transformación del grupo remanente asociado al espacio descrito por (5.6), de forma tal de proceder al empalme. En el caso simple en cuestión, es fácil identificar dicha transformación. Consideremos

$$\Lambda_{a'}^a(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4 \rho^2}}} & 0 & \frac{-J}{2M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4 \rho^2}}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-J}{2M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4 \rho^2}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4M^4 \rho^2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Entonces podemos asegurar que la contracción $e^a = \Lambda_{a'}^a e^{a'}$, en donde $e^{a'}$ está dada por

$$\begin{aligned} e^{0'} &= dt, \\ e^{1'} &= d\rho, \\ e^{2'} &= R \sin(\rho/R) d\phi, \\ e^{3'} &= dz \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si $\Lambda_{a'}^a(\rho)$ fuese un elemento del grupo remanente, entonces su inversa $\Lambda_a^{a'}(\rho)$ también lo será, y podríamos concluir que el frame diagonal (5.11) se obtiene a partir del frame solución (5.6), vía una transformación del grupo remanente, y entonces constituye una solución tan lícita como la original. La importancia radica en que ahora la estructura diagonal de (5.11) permite resolver el problema de juntura. En efecto, sobre la superficie de juntura obtenemos ahora que, para ambos frames (5.4) y (5.11), se tiene

$$\begin{aligned} e^0 &= dt \\ e^2 &= R \sin \theta_M d\phi, \\ e^3 &= dz, \end{aligned} \quad (5.12)$$

y el problema está resuelto. Adicionalmente, el empalme de tétradas se realiza en forma suave, como cabíamos esperar del hecho de que no existe distribución de materia

localizada sobre la hipersuperficie de juntura. Concretamente, tenemos

$$\frac{d R \sin(\frac{\rho}{R})}{d\rho} \Big|_{\Sigma} = \cos \theta_M \quad \text{en el interior} \quad (5.13)$$

$$\frac{d(r \cos \theta_M)}{dr} = \cos \theta_M \quad \text{en el exterior.} \quad (5.14)$$

La transformación (5.10) (en realidad su inversa), juega un rol crucial en el empalme. Esta transformación es simplemente un boost en el plano $t - \phi$, esto es, tangente a los círculos $\rho = \text{constante}$, con velocidad $V = J/(2M^2\rho)$. Para mostrar que dicha transformación está en el grupo remanente, basta con mostrar que el frame (5.11) conduce a un invariante de Weitzenböck nulo, o, equivalentemente, que satisface las ecuaciones de movimiento para el contenido de materia propio de la cuerda. Esto resulta directo. Más aún, la caracterización del grupo remanente siguiendo las líneas de la sección (4.3) es también inmediata. Esto se sigue, debido a que el frame (5.11) es un 4-TAC. En efecto, las siguientes áreas son cerradas:

$$e^{0'} \wedge e^{1'}, \quad e^{0'} \wedge e^{3'}, \quad e^{1'} \wedge e^{2'}, \quad e^{1'} \wedge e^{3'}. \quad (5.15)$$

En particular, ya que $d(e^{1'} \wedge e^{3'}) = 0$, entonces disponemos de generadores libres σ^{02} , es decir, boosts en el plano $t - \phi$. Es por eso que los frames (5.6) y (5.11) se encuentran en pie de igualdad a la hora de describir el espacio-tiempo interior de Gott. Sin embargo, en lo que respecta al problema de juntura, es (5.11) quien resulta adecuado.

5.4. Un frame estelar

El problema original que inspiró este trabajo fue la juntura del frame de una estrella con el *frame de Schwarzschild* en el contexto de teorías teleparalelas $f(T)$. En este apartado nos dedicaremos a delinear los pasos dados en la obtención de un *frame estelar*, primera etapa en la construcción de una solución global en la teoría. La técnica utilizada está inspirada en la sección (4.2.2), dado que la solución de Schwarzschild y la estrella poseen la misma simetría. Sin embargo, el empalme no es directo. Así, queda pendiente el estudio del grupo remanente Schwarzschild para, finalmente, luego de aplicar una transformación de Lorentz apropiada del grupo remanente, concretar la juntura.

La correcta descripción de un modelo estelar consiste en determinar su densidad $\rho(\mathbf{r})$ y presión $P(\mathbf{r})$ en cada punto \mathbf{r} de la misma. Los modelos estelares más recientes modelan estas cantidades considerando la presión cuántica de los electrones y neutrones, perturbaciones anisotrópicas, momento angular e interacciones electromagnéticas.

Aquí buscaremos resolver el modelo estelar más sencillo tal que su resultado pueda ser expresado analíticamente.

En primer lugar, asumimos que el cuerpo posee una distribución de materia con simetría esférica, tal que todas las funciones que rijan la dinámica sólo dependan de la distancia a su centro. Luego, por simplicidad, diremos que la densidad ρ es constante¹, este modelo estelar es conocido como *solución interior de Schwarzschild*. Partiendo de estas suposiciones uno puede construir más de una solución para la métrica dentro de la estrella, dependiendo del tensor energía-impulso que se considere. Para un tratamiento completo del tema, puede consultarse la Ref. [26].

En Relatividad General, la métrica esféricamente simétrica solución de las ecuaciones de Einstein con una distribución de energía-impulso $\mathcal{T}_\mu^\nu = \text{diag}(\rho_0, -p, -p, -p)$ es

$$ds^2 = F(r)^2 dt^2 - G(r)^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned} G(r)^2 &= \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \\ F(r)^2 &= \frac{1}{4} \left(3\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

siendo r_0 el radio estelar y $R^2 = \frac{3}{8\pi\rho_0}$.

Con la intención de obtener un frame solución de las $f(T)$'s, comenzamos con un frame *ingenuo*

$$\begin{aligned} e^0 &= F(r) dt \\ e^1 &= G(r) dr \\ e^2 &= r d\theta \\ e^3 &= r \sin \theta d\phi. \end{aligned} \quad (5.18)$$

El escalar de *Weitzenböck* resultante para este frame es

$$T = \frac{-6r^4 + 8r^2(1 - a^2 + aR^2\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}) + 2(-1 + 4a^2)R^4}{r^4 R^2 + (-1 + 4a^2)r^2 R^4}, \quad (5.19)$$

con $a = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Habiendo obtenido el escalar T procedemos a ver la consistencia de las ecuaciones de movimiento. Para esto, sólo nos interesa una de ellas, a saber

$$\begin{aligned} -2f_{TT} \cot \theta [r^2 G(r) F'(r)^2 + F(r)^2 (G(r) + rG'(r)) + \\ + rF(r)(2rF'(r)G'(r) + G(r)(F'(r) - rF''(r)))] = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

¹Aunque aparente ser una simplificación muy fuerte, resulta ser una buena aproximación para el estudio de enanas blancas, ver [24.6] en [27].

Esta ecuación nos impone una condición para la teoría f , es decir que solo será válida para una teoría en donde su *lagrangiano* sea lineal en T , puesto que es fácil constatar que la expresión entre corchetes es no nula para las funciones definidas en (5.17). En consecuencia, el frame *ingenuo* propuesto no es solución para las teorías $f(T)$ en general, pero sí lo será para el ETRG.

Para poder construir un frame que dé lugar a ecuaciones de movimiento consistentes para $f \neq T$, partimos de la siguiente idea: el frame buscado debe cumplir que en el límite de largas distancias y densidad nula, dé lugar a una geometría asintóticamente plana. Sin embargo, en ese límite el frame radial no resulta correcto para la paralelización de Minkowski, dado que éste posee la topología de R^4 . Así, para poder avanzar en la búsqueda del *frame estelar*, nos es conveniente describir la geometría en coordenadas isotrópicas. Luego, el frame así escrito logrará exitosamente paralelizar Minkowski en ese límite. Procedamos entonces a escribir la métrica en esas coordenadas,

$$ds^2 = A(\rho)dt^2 - B(\rho)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.21)$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Las funciones $A(\rho)$ y $B(\rho)$ son

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\mathcal{R}^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} \right), \\ B(\rho) &= \frac{2\mathcal{R}}{1 + \rho^2}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

El frame *isotrópico* más inmediato de la métrica anterior es

$$\begin{aligned} e^t &= A(\rho) dt, \\ e^x &= B(\rho) dx, \\ e^y &= B(\rho) dy, \\ e^z &= B(\rho) dz. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nuevamente calculamos el escalar T , que resulta

$$T = \frac{(-1 + \rho^2)(1 - 10\rho^2 + \rho^4 + 2a(-1 + \rho^4))}{2\rho^2(-1 + \rho^2 + 2a(1 + \rho^2))R^2}, \quad (5.24)$$

con $a = \frac{3}{2}(1 - \frac{r_0^2}{\mathcal{R}^2})^{\frac{1}{2}}$.

En este caso el T se anula completamente al evaluarlo fuera de la estrella. Eso se debe a que el escalar resulta proporcional a $\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{8\pi\rho_0}{3}$, y la región exterior carece de densidad de energía. Aun así, este no será el frame correcto dado que falla en ser solución de las teorías $f(T)$ por manifestar inconsistencias en las ecuaciones de movimiento (las cuales no se presentan en el texto por la extensión de las mismas). En esta instancia

para encontrar un frame solución de las teorías $f(T)$, utilizaremos una propiedad de las ecuaciones de campo para funciones f que deforman en el régimen ultravioleta.

Las ecuaciones de campo son

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) f_T + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T^\rho_{\mu\lambda} f_T + S_a^{\mu\nu} \partial_\mu T f_{TT} + \frac{1}{4} e_a^\nu f = 4\pi G \mathcal{T}_a^\nu. \quad (5.25)$$

Si f es tal que deforma RG en el régimen ultravioleta y el escalar T es idénticamente nulo, entonces se cumple que:

$$f(0) = 0, \quad y \quad f'(0) = 1. \quad (5.26)$$

De esta forma, las ecuaciones de campo resultan

$$e^{-1} \partial_\mu (e S_a^{\mu\nu}) + e_a^\lambda S_\rho^{\nu\mu} T^\rho_{\mu\lambda} = 4\pi G \mathcal{T}_a^\nu. \quad (5.27)$$

En resumen, un campo de tétradas e_μ^a que resulte en un escalar $T = 0$ será solución de las $f(T)$'s ultravioletas, si la métrica asociada a las tétradas es solución de RG con ese tensor \mathcal{T}_ν^μ .

Haciendo uso de este resultado procedemos entonces a realizar un boost al frame *isotrópico* para que el escalar de *Weitzenböck* T se anule. El boost a realizar, dada la simetría del escalar, es en la dirección radial. Reescribimos entonces la base cartesiana en esféricas como

$$\begin{aligned} e^x &= c(\phi)s(\theta)e^\rho + c(\phi)c(\theta)e^\theta - s(\phi)e^\phi \\ e^y &= s(\phi)s(\theta)e^\rho + s(\phi)c(\theta)e^\theta + c(\phi)e^\phi \\ e^z &= c(\theta)e^\rho - s(\theta)e^\theta, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde $c \equiv \cos$, $s \equiv \sin$, $e^\rho = B(\rho) d\rho$, $e^\theta = B(\rho)\rho d\theta$ y $e^\phi = B(\rho)\rho \sin\theta d\phi$.

Realizamos ahora el boost radial, que consiste en

$$\begin{aligned} e^{t'} &= \cosh(b(\rho))e^t + \sinh(b(\rho))e^\rho \\ e^{\rho'} &= \sinh(b(\rho))e^t + \cosh(b(\rho))e^\rho, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde el parámetro del boost $b(\rho)$ será tal que el escalar T se anule.

Así el frame boosteado resulta:

$$\begin{aligned} e^{t'} &= \cosh(b(\rho))e^t + \sinh(b(\rho))e^\rho \\ e^{x'} &= c(\phi)s(\theta) (\sinh(b(\rho))e^t + \cosh(b(\rho))e^\rho) + c(\phi)c(\theta)e^\theta - s(\phi)e^\phi \\ e^{y'} &= s(\phi)s(\theta) (\sinh(b(\rho))e^t + \cosh(b(\rho))e^\rho) + s(\phi)c(\theta)e^\theta + c(\phi)e^\phi \\ e^{z'} &= c(\theta) (\sinh(b(\rho))e^t + \cosh(b(\rho))e^\rho) - s(\theta)e^\theta. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Si recalculamos T , obtenemos

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{\rho^2(-1 + \rho^2 + 2a(1 + \rho^2))} R^2 \times \\
& \times (-1 + 5\rho^2 - 5\rho^4 + \rho^6 + 2a(1 + \rho^2)(1 + \rho^4) + \\
& + (1 + \rho^2)(1 - 6\rho^2 + \rho^4 + 2a(-1 + \rho^4)) \cosh(b(\rho)) - \\
& - \rho(1 + \rho^2)^2(-1 + \rho^2 + 2a(1 + \rho^2)) \sinh(b(\rho)) \frac{db(\rho)}{d\rho}).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Igualando la expresión a cero, obtenemos esencialmente una ecuación diferencial para $\cosh(b(\rho))$, llámese $C(\rho)$, cuya solución es:

$$C(\rho) = \frac{\rho(-2 + a - (2 + a)\rho^4) + 3a(1 + \rho^2)^3 \arctan(\rho) - 2(1 + \rho^2)^3 k}{2\rho(1 + \rho^2)(-1 + \rho^2 + 2a(1 + \rho^2))} \tag{5.32}$$

donde k es una constante de integración.

El *frame estelar* resulta entonces

$$\begin{aligned}
e^{t'} &= C(\rho) e^t + \sqrt{1 + C(\rho)^2} e^\rho \\
e^{x'} &= c(\phi)s(\theta) \left(\sqrt{1 + C(\rho)^2} e^t + C(\rho) e^\rho \right) + c(\phi)c(\theta)e^\theta - s(\phi)e^\phi \\
e^{y'} &= s(\phi)s(\theta) \left(\sqrt{1 + C(\rho)^2} e^t + C(\rho) e^\rho \right) + s(\phi)c(\theta)e^\theta + c(\phi)e^\phi \\
e^{z'} &= c(\theta) \left(\sqrt{1 + C(\rho)^2} e^t + C(\rho) e^\rho \right) - s(\theta)e^\theta.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

En conclusión, hemos encontrado un *frame estelar* solución de las teorías $f(T)$ ultravioletas. La juntura de soluciones del *frame estelar* y el *frame de Schwarzschild*, a pesar de tener la misma simetría, no es nada trivial. Hará falta un estudio extensivo de su grupo remanente para poder finalmente construir una solución global del espacio-tiempo.

Conclusiones

En este trabajo se estudió la problemática de la juntura de soluciones en teorías de gravedad modificada con estructura teleparalela $f(T)$. En la primera parte del trabajo se hizo una breve reseña sobre Relatividad General y se desarrollaron las herramientas para formular las condiciones de juntura de Israel. En ellas los protagonistas son la *1^{era} y 2^{da} forma fundamental* de la hipersuperficie Σ , que divide al espacio-tiempo en cuestión. Para dejar en claro cómo hacer uso de estas condiciones se presentaron dos ejemplos. En primer lugar se realizó la juntura del espacio-tiempo formado por una cuerda cósmica y luego, se resolvió el empalme dinámico de un colapso gravitatorio en $2 + 1$ dimensiones espacio-temporales. Luego se procedió a describir el equivalente teleparalelo de Relatividad General con la motivación de explorar una nueva teoría de gravedad. Las deformaciones de la teoría de gravedad teleparalela se destacan en que las ecuaciones de movimiento son de segundo orden en derivadas de sus campos, las tétradas. Y también, permiten modificar soluciones para las cuales la traza del tensor energía-momento es nula, lo cual no ocurre en otras deformaciones, como en las teorías $f(R)$.

Durante el trabajo se hizo incapié en las simetrías ante transformaciones de Lorentz en RG, ETRG y las teorías modificadas $f(T)$, aspecto fundamental para atacar la problemática de juntura en el formalismo teleparalelo. En el caso de RG, al ser el ente dinámico la métrica, la teoría es completamente invariante ante transformaciones locales de Lorentz. En el espacio de Weitzenböck las transformaciones globales son una clara simetría de la teoría, sin embargo las autoparalelas de este espacio están condicionadas a la orientación de los campos. La consecuencia inevitable de esto, es la pérdida de la simetría local de Lorentz en las tétradas. Luego, se observa que en la acción del ETRG el escalar T resulta invariante ante estas transformaciones a menos de una derivada total. Finalmente, al realizar una deformación de la teoría del tipo $f(T)$ es notable cómo esa derivada participa en la dinámica de los campos rompiendo la simetría local. Es así como nace lo que se conoce como grupo remanente, un subgrupo de transformaciones locales que dejan invariante a las ecuaciones de movimiento para una dada geometría.

Con el propósito de exponer qué implica la pérdida de simetría local, se mostraron ejemplos de tétradas no triviales soluciones de las $f(T)$ junto a los pasos realizados

para su obtención. Las soluciones desarrolladas fueron la de un Universo cerrado tipo FRW, y la correspondiente al espacio-tiempo de Schwarzschild.

Una vez conocidas las soluciones en cada región de un espacio-tiempo, para poder concretar la juntura en teorías $f(T)$, es necesario saber cómo caracterizar el grupo remanente de los espacios en consideración. Se definió la clasificación de las tétradas de acuerdo a la cantidad de áreas cerradas que ellas involucran (n-TACs), y se describió el tipo de grupo remanente que ellas conllevan.

El aporte concreto del presente trabajo, fue explicar cómo encarar el proceso de empalme en estas teorías de gravedad modificada. Ello se muestra en los dos ejemplos del último capítulo, el primer caso es el empalme de distintos frames solución del espacio de Minkowski y el segundo consistió en la juntura de una cuerda cósmica. Por último se presenta la obtención de un *frame estelar* que, junto al *frame de Schwarzschild*, describirán el espacio-tiempo generado por una estrella de densidad constante. Es parte de futuros desarrollos estudiar el grupo remanente de Schwarzschild para concretar exitosamente el empalme.

Bibliografía

- [1] W. Israel, *Nuovo Cimento* **44B** (1966) 1.
- [2] Lovelock, *J. Math. Phys.* 12, 498 (1971).
- [3] S. Wilison and E. Gravanis, *Physics Letters B*, Volume 562, Issue 1-2, 2004.
- [4] J. Senovilla *Phys. Rev.* **D88** (2013).
- [5] R. Ferraro y F. Fiorini, *Phys. Rev.***D75** (2007).
- [6] W. Israel, *Phys. Lett.* **A24** (1967) 184.
- [7] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press (2004)
- [8] M. Blau, *Lecture Notes On General Relativity*, <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html> (2016)
- [9] A. Vilenkin y E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [10] J. R. Gott III, *ApJ.* **288** (1985) 422.
- [11] RB. Mann, *Phys. Rev.* **D47** (1993).
- [12] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Phys. Rev.* **D69** (1992).
- [13] J.R. Oppenheimer and H. Snyder, *Phys. Rev.* **56** (1939).
- [14] J. Maluf, *The teleparallel equivalent of general relativity. Annalen der Physik* 525,339 , 2013.
- [15] R. Weitzenböck, *Invarianten Theorie*, (Nordhoff, Groningen, 1923).
- [16] A. Einstein, *Riemannian Geometry with Maintaining the Notion of Distant Parallelism.* (1928); *Unified Field Theory based on Riemannian Metrics and distant Parallelism.* (1930) Traducción del alemán disponible en www.lrzmuemchen.de/aunzicker/ae1930.html.
- [17] R. Wald, *General Relativity.* The University of Chicago Press, 1984.

-
- [18] Gronwald, F., Hehl, F. On the gauge aspects of gravity. Proc. of the 14th Course of Cosmology and Gravitation, P.G Bergmann, V. de Sabatta and H.J. Tredere
- [19] R.P Abbott, *et al.* Phys. Rev. **116** (2016) 061102.
- [20] S.Hawking y G.F.R. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge University Press (1973).
- [21] R. Ferraro y F. Fiorini, *Phys. Rev.* **D91** (2015).
- [22] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Rev. **D84** (2011) 083518.
- [23] R. Ferraro and F. Fiorini, Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 03, 227 (2011).
- [24] R. Ferraro and F. Fiorini, Physics Letters B, Volume 702, Issue 1, 3, 2011.
- [25] R. Ferraro and F. Fiorini, Physics Letters B, Volume 692, Issue 3, 2010.
- [26] R. Tolman, Phys. Rev. **55** (1939).
- [27] J.B. Hartle, Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity. (Addison-Wesley, San Francisco, 2003).