

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**ASPECTOS DE INFORMACIÓN CUÁNTICA EN
TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS**

Raimel A. Medina Ramos

Dr. Gonzalo Torroba
Director

Miembros del Jurado

Dr. Horacio Casini (Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche)

Dr. César Fosco (Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche)

Dra. Carmen Núñez (Instituto de Astronomía y Física del Espacio; Departamento
de Física – FCEN-UBA)

Diciembre de 2018

Partículas y Campos.

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis abuelos, Aya, Papo, Zoila y Chiche.
A la memoria de un amigo, José Luis.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Índice de figuras	iv
Resumen	v
1. Introducción y motivación	1
2. Información Cuántica y Teoría Cuántica de Campos	6
2.1. Aspectos de Información Cuántica.	6
2.1.1. Operador densidad reducido. Valores medios de observables . . .	6
2.1.2. Entropía de von Neumann	7
2.1.3. Hamiltonianos modulares	10
2.2. Entropías Cuánticas Relativas de Renyi	10
3. QRRE en Teorías Cuánticas de Campos libres.	13
3.1. Fermiones libres	14
3.2. Bosones libres	15
3.3. Método de la resolvente	17
4. Modelo Kondo libre	19
4.0.1. Modelo Kondo	19
4.1. Una impureza fermiónica	20
4.1.1. Modelo Kondo libre. Versión en el continuo	20
4.1.2. Modelo Kondo libre. Versión en la red	23
4.1.3. Conclusiones Parciales	26
4.2. Dos impurezas fermiónicas	26
4.2.1. Versión en la red	26
5. Resultados	30
5.1. Fidelidad. Superficie de Cauchy a tiempo constante	31
5.1.1. Método Numérico.	31

5.1.2. Análisis cerca del punto fijo UV	34
5.1.3. Análisis cerca del punto fijo IR	36
5.2. QRRE sobre la línea nula	39
5.3. Modelo con dos impurezas fermiónicas. Comentarios	42
6. Restricciones sobre el flujo del grupo de renormalización.	43
6.1. Flujo del RG de teorías con bordes	43
6.1.1. Flujos del RG en dimensiones $d \geq 2$	47
7. Conclusiones	49
A. S_α para estados Gaussianos	51
A.1. Fermiones	51
A.2. Bosones	53
B. QRRE en el modelo Kondo libre	56
Bibliografía	59
Agradecimientos	63

Índice de figuras

1.1. Posibles trayectorias del RG entre dos puntos fijos, siguiendo [1]. Líneas rojas denotan trayectorias relevantes desde P_{UV} , mientras que las líneas azules están asociadas a deformaciones irrelevantes.	3
5.1. Gráfico de F vs mR para un valor de masa $m = 1/20$	33
5.2. Gráfico de $1 - F$ vs mR para un valor de masa $m = 1/1000$ fijo. Se muestra además el ajuste, sobre los resultados obtenidos, de la forma $1 - F \sim mR + mR \log(mR)$	36
5.3. Solapamiento entre los estados fundamentales $ \Phi(0)\rangle, \Phi(t)\rangle$ de la teoría finita en el continuo para $t^2 = m = 0,01$ y valores de $mN \in [70, 130]$. . .	38
5.4. QRREs $S_\alpha(\rho \sigma)$ para el flujo del RG en el modelo Kondo, formulado sobre el cono de luz. Mostramos diferentes valores de α , y el caso límite de $\log 2$ que se obtiene cuando $mR \gg 1$ y $\alpha \rightarrow 1$	41
5.5. S_α en el límite $mR \gg 1$, para diferentes valores de α	41
6.1. Distintas elecciones de la superficie de Cauchy Σ dentro del intervalo $[0, r)$. A medida que la superficie de Cauchy se aproxima al cono de luz, la contribución $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle \rightarrow 0$	45

Resumen

Las entropías relativas cuánticas de Renyi proporcionan una familia monoparamétrica de distancias entre matrices densidad, que generalizan la entropía relativa y la fidelidad. En esta Tesis, estudiamos estas medidas para flujos del grupo de renormalización en Teoría Cuántica de Campos. Derivamos expresiones explícitas en Teorías de Campos libres basándonos en el enfoque en tiempo real. Al utilizar las propiedades de monotonicidad, obtenemos nuevas desigualdades que deben satisfacerse por trayectorias consistentes del grupo de renormalización en Teoría de Campos. Al enfocarnos en el límite del cono de luz, mostramos que estas medidas, que caracterizan la trayectoria completa del RG, están limitadas por cantidades intrínsecas a los puntos fijos, como la entropía de borde o la carga central. Estas desigualdades desempeñan el papel de una segunda ley de la termodinámica, en el contexto de los flujos del grupo de renormalización. Finalmente, aplicamos estos resultados a un modelo Kondo simplificado, donde evaluamos explícitamente las entropías relativas de Renyi, trabajando tanto en una superficie de Cauchy a tiempo constante, como en una superficie de Cauchy que se acerca al cono de luz. Un resultado de esto es que la catástrofe de ortogonalidad de Anderson puede evitarse trabajando en una superficie de Cauchy que se acerca al cono de luz.

Abstract

Quantum Renyi relative entropies provide a one-parameter family of distances between density matrices, which generalizes the relative entropy and the fidelity. In this Thesis we study these measures for renormalization group flows in quantum field theory. We derive explicit expressions in free field theory based on the real time approach. Using monotonicity properties, we obtain new inequalities that need to be satisfied by consistent renormalization group trajectories in field theory. By focusing on the light-cone limit, we show that these measures, which characterize the full RG trajectory, are bounded by quantities intrinsic to the fixed points, such as the boundary entropy or the central charge. These inequalities play the role of a second law of thermodynamics, in the context of renormalization group flows. Finally, we apply these results to a tractable Kondo model, where we evaluate the Renyi relative entropies explicitly, working both on a constant time Cauchy surface, and on a Cauchy surface that approaches the light cone. An outcome of this is that Anderson's orthogonality catastrophe can be avoided by working on a Cauchy surface that approaches the light-cone.

Capítulo 1

Introducción y motivación

“Si tengo fe en que soy capaz de hacerlo, adquiriré seguramente la capacidad de realizarlo, aun sino la poseía al comenzar.”

— Mahatma Gandhi.

Entender una Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés) involucra la habilidad de predecir su comportamiento al examinarla a distintas escalas de energía, o equivalentemente, a distintas escalas de resolución espacial. Un papel fundamental en esto lo juegan las llamadas Teorías Conformes de Campos (CFTs por sus siglas en inglés). Estas son teorías que lucen exactamente igual a cualquier escala. Las CFT son claves para nuestra comprensión moderna de las teorías de campos. Tan es así que cualquier QFT que esté bien definida a todas las escalas energéticas debe comportarse como una CFT en el rango de energías altas, es decir, en el ultravioleta (UV).

En cierto sentido esto es obvio: a energías que son arbitrariamente grandes comparadas con todas las masas o cualquier escala intrínseca que nuestra teoría pueda poseer, el valor de estas escalas puede para todo efecto práctico tomarse como igual a cero, y de aquí se sigue que tendremos invariancia bajo reescalamientos. La única sutileza es que los acoplamientos de la teoría en general cambiarán conforme vamos a altas energías, y en lugar de aproximarse a valores constantes podrían volverse infinitos, posiblemente a energía finita. Pero esta opción la descartamos cuando insistimos en que nuestra teoría esté bien definida a todas las energías, es decir, que sea “completa en el UV”.

La definición más general de una QFT utiliza una CFT como punto de partida en el UV y le agrega términos que son despreciables a altas energías pero que se vuelven relevantes a bajas energías, es decir, en el infrarrojo (IR). El formalismo adecuado para analizar lo anterior es lo que se conoce como el Grupo de Renormalización (RG, del inglés *Renormalization Group*), y en ese lenguaje, lo que hemos dicho hasta ahora se resume en la siguiente frase: todas las QFT completas en el UV pueden entenderse como flujos del RG obtenidas como deformaciones relevantes de un punto fijo UV. Ahora

bien, ¿qué significa que una deformación sea relevante?. Para responder a la anterior pregunta, consideremos una perturbación a una CFT en dimensión $1 + 1$ añadiendo un término extra a la acción original,

$$S_{CFT} \rightarrow S' = S_{CFT} + \alpha \int d^2\sigma \mathcal{O}. \quad (1.1)$$

Aquí \mathcal{O} es un operador local de la teoría, mientras que α es algún coeficiente. Estas perturbaciones caen dentro de tres clases, dependiendo de la dimensión Δ de \mathcal{O} .

- $\Delta < 2$: En este caso, α tiene dimensión positiva: $[\alpha] = 2 - \Delta$. El parámetro adimensional $\tilde{\alpha} = \alpha/E^{[\alpha]}$, con E la escala de energía del proceso de interés, tiende a cero para E grande (UV) mientras que crece conforme la escala de energía es cada vez más baja (IR). Tales deformaciones son denominadas *relevantes* porque son importantes en el IR. El flujo del grupo de renormalización nos aparta de la CFT. Sólo dejamos de *fluir* cuando alcanzamos una nueva CFT.
- $\Delta = 2$: La constante α es adimensional. Tales deformaciones son denominadas marginales. La teoría deformada define una nueva CFT sólo a primer orden en α . Al tomar en cuenta las correcciones debido a $\alpha \neq 0$, el acoplamiento se hace relevante o irrelevante. A excepción de las teorías supersimétricas, ningún acoplamiento es "exactamente" marginal.
- $\Delta > 2$: La constante α posee dimensiones negativas. El parámetro adimensional $\tilde{\alpha} = \alpha E^{\Delta-2}$, es pequeño en el IR y grande en el UV. Estas deformaciones son denominadas *irrelevantes*. La física en el IR es aún descrita por la CFT original. Pero la física en el ultravioleta es alterada.

En este trabajo centraremos nuestra atención en ciertos aspectos no perturbativos del RG. Tal y como describimos anteriormente el RG da flujos o trayectorias en el espacio de acoplamientos $\{g_i\}$ como función de cierta escala de distancia o energía. En la Figura 1.1 se muestran dos puntos fijos P_{UV} y P_{IR} , flujos relevantes de P_{UV} a P_{IR} (en rojo), y flujos irrelevantes (en azul).

Hasta el momento, se ha establecido que el RG para Teorías Cuánticas de Campos relativistas y unitarias es irreversible en dos [2, 3], tres [4] y cuatro dimensiones espacio-temporales [5, 6]. Esto significa que uno puede asociar una cantidad intrínseca C a un punto fijo, y una condición necesaria para conectar dos puntos fijos por medio del RG es que

$$C_{UV} > C_{IR}. \quad (1.2)$$

Esto puede entenderse en términos de la entropía de entrelazamiento,

$$S(\rho_V) = -\text{Tr } \rho_V \log \rho_V \quad (1.3)$$

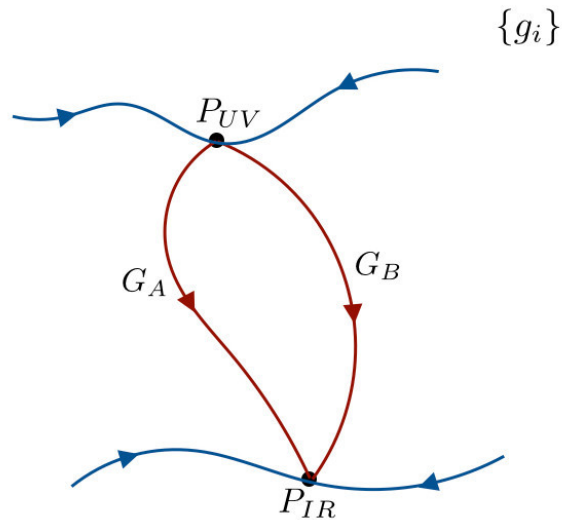


Figura 1.1: Posibles trayectorias del RG entre dos puntos fijos, siguiendo [1]. Líneas rojas denotan trayectorias relevantes desde P_{UV} , mientras que las líneas azules están asociadas a deformaciones irrelevantes.

donde

$$\rho_V = \text{Tr}_{\bar{V}} |0\rangle\langle 0| \quad (1.4)$$

es la matriz densidad del vacío obtenida al trazar sobre los grados de libertad en el complemento de la región V . La irreversibilidad del RG es una consecuencia de la unitariedad y subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento [3, 4, 6].¹

Estamos interesados en la siguiente interrogante: dados dos puntos fijos que satisfacen (1.2), cuáles flujos del RG entre ellos son posibles? En particular, nos interesaría establecer condiciones necesarias que deben ser satisfechas por trayectorias consistentes del RG en Teorías Cuánticas de Campos unitarias. Para esto, es natural analizar el RG en términos de Información Cuántica, en particular a través de distancias entre dos matrices densidad reducidas: σ_V , caracterizando el punto fijo UV, y ρ_V , asociado con la teoría que fluye con el RG. Una noción de distancia muy útil y central en este trabajo es la entropía relativa,

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho(\log \rho - \log \sigma), \quad (1.5)$$

que mide la distinguibilidad entre los dos estados. La entropía relativa es positiva y monótona ante el aumento de tamaño de la región. Basados en esto, en la referencia [7] los autores probaron la versión entrópica de la irreversibilidad de los flujos del RG para

¹Hasta el momento, no se conoce si el planteamiento es cierto para dimensiones del espacio-tiempo $d \geq 5$.

teorías con bordes, y en [8] los autores proveyeron una prueba alternativa del Teorema *c*. Otra noción de distancia es la versión cuántica de la fidelidad,

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\sigma^{1/2} \rho \sigma^{1/2}}, \quad (1.6)$$

la cual se reduce al solapamiento entre dos funciones de onda cuando los estados ρ y σ son puros. Tales solapamientos aparecen, por ejemplo, al evaluar la entropía de borde en términos de estados de bordes [9].

En este trabajo, analizaremos una familia de medidas de distancias conocidas como entropías cuánticas relativas de Renyi (QRRE),

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha. \quad (1.7)$$

Aunque otras definiciones de medidas de información existen en la literatura de Teoría de Información Cuántica (ver [10]), la principal motivación para estudiar (1.7) es que las S_α interpolan entre (1.5) y (1.6) cuando α varía entre 1 y 1/2. Este hecho, unido a las propiedades de monotonidad que satisfacen las S_α , nos posibilitará derivar nuevas condiciones necesarias para flujos consistentes del RG.

La dependencia no lineal de las $S_\alpha(\rho||\sigma)$ en ρ y σ hace los cálculos explícitos bastante difíciles, y hasta el momento no han habido muchos trabajos tratando de entender el contenido físico de estas medidas de información. Algunos trabajos previos incluyen [11], donde las S_α fueron evaluadas en CFTs en dimensión $d = 2$ usando el truco de réplica, y [12], donde se estudiaron las divergencias cuánticas de Renyi [10] para estados excitados de CFTs. Además, el trabajo [13] estudia divergencias cuánticas de Renyi a segundo orden en teoría de perturbaciones usando holografía.

En este trabajo vamos a estudiar las medidas de información S_α en Teorías Cuántica de Campos. Nos enfocamos en teorías con bordes donde el RG pasa solo en el borde. Estas teorías son más fáciles de estudiar que RGs en el bulk. El último queda como tema a abordar en el futuro. Se combinarán además técnicas y resultados de teorías libres, con análisis de teorías interactuantes.

La estructura de la Tesis es como sigue. En el Capítulo 2 damos un breve repaso de conceptos e ideas fundamentales de Información Cuántica que usaremos a lo largo del trabajo. También, introduciremos las S_α , que posteriormente calcularemos en el Capítulo 3 para Teorías de Campos libres usando métodos de tiempo real. Luego, en el Capítulo 4 presentamos y estudiamos el modelo Gaussiano que posteriormente utilizaremos como laboratorio para estudiar las QRRE. Los resultados obtenidos están ilustrados en el Capítulo 5. En particular, encontramos que la catástrofe de ortogonalidad de Anderson [14] puede ser evitada al calcular los solapamientos de los estados fundamentales sobre el límite del cono de luz; esto podría ser de interés para problemas

de impurezas más generales en la física de la materia condensada. Finalmente, en el Capítulo 6 consideramos consecuencias generales de las propiedades de monotonicidad de las S_α para flujos del RG. Al centrar nuestra atención en el límite del cono de luz estudiado en [7, 8], mostraremos que las S_α , que caracterizan la trayectoria completa del RG, están acotadas por cantidades intrínsecas a los puntos fijos, tales como las entropía de borde o la carga central.

Casi la totalidad de los resultados mostrados en esta Tesis están plasmados en la publicación [15]. El modelo Kondo libre, sobre el cual calculamos las QRRE, fue introducido en [7]. Por este motivo, el Capítulo 4 lo dedicamos a presentar dicho modelo, y a reproducir los cálculos más importantes, para los fines del presente trabajo, realizados en la publicación original.

Capítulo 2

Información Cuántica y Teoría Cuántica de Campos

“Jamás te ha sido dado un deseo sin que se te haya otorgado el poder de hacerlo realidad.”

— Richard Bach.

Una pregunta fundamental en Teoría de Información Cuántica está asociada a determinar cuando dos elementos de información son similares. Motivados por el planteamiento anterior, se ha definido una gran variedad de medidas de información [16], también conocidas como medidas estáticas, que cuantifican cuan cerca dos determinados estados cuánticos están. Ejemplos de este tipo de medidas de información son la entropía relativa, la distancia traza y la fidelidad. Desde el punto de vista de su uso y aplicaciones, las medidas de distancia mencionadas anteriormente juegan un rol importante en Teoría de Información Cuántica y Computación Cuántica y además, tienen una profunda conexión con el Entrelazamiento Cuántico, Caos Cuántico y Transiciones de Fase Cuánticas ([17], [18], [19]).

2.1. Aspectos de Información Cuántica.

Primeramente haremos una rápida revisión sobre algunos conceptos fundamentales que necesitaremos posteriormente.

2.1.1. Operador densidad reducido. Valores medios de observables

Consideremos un estado cuántico puro $|\psi\rangle$ de un sistema que está dividido en dos partes disjuntas A y B . El espacio total de Hilbert del sistema \mathcal{H} es el producto tensorial

del espacio de Hilbert de las partes, o sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Trazando sobre cada parte se tienen los operadores

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \rho_B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.1)$$

que satisfacen las propiedades estándares del operador densidad

$$\rho^\dagger = \rho, \quad \text{Tr} \rho = 1, \quad \rho^2 \leq \rho, \quad (2.2)$$

y por esta razón se conocen como operadores densidad reducidos. Cada uno de estos operadores permiten calcular valores de expectación de un dado observable \mathcal{O} con soporte sobre la porción del sistema correspondiente,

$$\langle \mathcal{O}_A \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}_A | \psi \rangle = \text{Tr}_{A \cup B} (\mathcal{O}_A |\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}_A (\mathcal{O}_A \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr} (\mathcal{O}_A \rho_A) \quad (2.3)$$

Es de gran interés el caso cuando la división de \mathcal{H} en \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B está asociada con una división del espacio físico, y cuando, el estado $|\psi\rangle$ puro de \mathcal{H} corresponde al estado de vacío $|0\rangle$ de una QFT que abarca todo el espacio físico. En este caso un punto de vista más general es necesario.

Supongamos que \mathcal{H} representa el espacio de Hilbert de una QFT que, por simplicidad la consideraremos regularizada y $\mathcal{H}_R \subset \mathcal{H}$, con R indicando una porción del espacio físico. Ahora consideremos un estado puro $|0\rangle \in \mathcal{H}$ y un elemento A del álgebra de operadores lineales que actúan sobre \mathcal{H}_R , o sea, $A \in L(\mathcal{H}_R)$. El operador reducido ρ_R de $|0\rangle$ está definido por: 1-) $\rho_R \in L(\mathcal{H}_R)$ y es un estado (hermítico, positivo y de traza unitaria), 2-) Reproduce todos los valores de expectación de $|0\rangle$ para los operadores que viven en $L(\mathcal{H}_R)$ o sea, $\text{Tr}(\rho_R \mathcal{O}) = \langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle \forall \mathcal{O} \in L(\mathcal{H}_R)$. La definición anterior coincide en el caso de descomposición del \mathcal{H} global como producto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{\bar{R}}$ con la operación de "trazar" por el complemento, $\rho_R = \text{Tr}_{\bar{R}} |0\rangle\langle 0|$.

2.1.2. Entropía de von Neumann

Existen muchas medidas de la impureza o pureza de un estado, y por ello, medidas del entrelazamiento del estado global, cuando este es puro. Una de las más usadas y que más aplicaciones encuentra es la entropía de von Neumann. Dado un estado ρ esta se define por

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i, \quad (2.4)$$

donde λ_i son los autovalores de la matriz ρ . Esta función da una medida de la distribución de los autovalores de la matriz ρ , es siempre no negativa, igual a cero para estados puros, e invariante ante transformaciones unitarias sobre el estado. Si el es-

pacio de Hilbert es de dimensión finita N , entonces, para cualquier estado ρ se tiene que $S(\rho) \leq \log N$. La igualdad solo se alcanza para los llamados estados máximamente entrelazados. La entropía de von Neumann tiene también la propiedad de ser aditiva para estados de la forma $\rho = \sum_k p_k \sigma_k^1 \otimes \sigma_k^2$, con $\sigma_k^1 \otimes \sigma_k^2$ matrices densidad de soporte disjuntos para distintos k . En general, cuando los soportes no son disjuntos, la entropía es una función convexa. Esta propiedad aditiva es clave para que la entropía de von Neumann sea un candidato adecuado para representar a la entropía termodinámica cuando el estado de la materia se representa por un estado cuántico. Muy relacionada con la entropía de von Neumann están las entropías de Renyi S_n , definidas por

$$S_n(\rho) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(\rho^n) \quad (2.5)$$

Las S_n comparten con la entropía de von Neumann las propiedades mencionadas arriba, excepto la de la aditividad, que solo vale para cuando la suma en k tiene un solo miembro. En el límite de $n \rightarrow 1$ es igual a la entropía de von Neumann:

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho) = S(\rho) \quad (2.6)$$

Esta propiedad es muy explotada para calcular $S(\rho)$ en ciertos contextos, donde se hace muy complicado el cálculo debido a la presencia del logaritmo. Como ejemplo de lo anterior está el método de réplicas para calcular $S(\rho)$ en Teorías Cuánticas de Campos. Se basa en calcular la Renyi y posteriormente tomar el límite. Otra propiedad importante que comparten la entropía de von Neumann y las entropías de Renyi es la siguiente. Dado un estado puro ρ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, la entropía del estado reducido a A , o a B , son iguales:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (2.7)$$

y lo mismo para las Renyi. Lo anterior es consecuencia del teorema de descomposición de Schmidt, que implica que los autovalores de ρ_A y ρ_B son iguales, salvo una cantidad, no necesariamente igual, de autovalores iguales a cero.

Otra cantidad fundamental, de la que se derivan propiedades sumamente útiles (incluyendo las de la entropía de von Neumann) es la Entropía Relativa. A diferencia de las anteriores, esta se define a partir de dos estados, ρ y σ , y sirve como una medida de la distancia estadística entre ellos. Está definida por

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr} \rho(\log \rho - \log \sigma) \quad (2.8)$$

siempre y cuando el soporte de σ incluya al de ρ , en caso contrario se define como infinito. Respecto de sus propiedades, lo primero que sale a relucir es que no es simétrica

en sus entradas. Puede ser útil pensar el estado σ como un estado de referencia con el que se va a comparar ρ , y dicha comparación no es simétrica, por lo que $S(\rho||\sigma)$ no es una distancia (en el sentido matemático) en el espacio de estados. Si el segundo estado es puro, la entropía relativa siempre será infinita, a no ser que el primer estado sea igual al segundo. La entropía relativa es siempre no negativa, igual a cero solo cuando ρ y σ son iguales e invariante ante transformaciones unitarias simultáneas sobre ambos estados. La entropía relativa es también aditiva ante combinaciones convexas de estados disjuntos, y en general, doblemente convexa. Tiene además la siguiente interpretación operacional. Dado el estado conocido de referencia σ , la probabilidad p de confundir a ρ con σ , a juzgar por los resultados de N mediciones experimentales efectuadas sobre ρ , tan bien elegidas como se quiera, dado que conozco σ , viene dada por

$$p \sim e^{-NS(\rho||\sigma)}, \quad (2.9)$$

para N grande. Por ejemplo, si σ es puro, en cuyo caso $S(\rho||\sigma) = \infty$ si $\rho \neq \sigma$, está claro que podemos reconocer eficientemente en unos pocos experimentos que ρ no es σ . La medición más eficiente para esto parece ser proyectar en σ . Este sentido operacional hace de la entropía relativa una medida de la distinguibilidad entre dos estados.

La entropía relativa tiene otra propiedad muy importante y de la que se derivan muchas de sus aplicaciones: su monotonicidad ante tomar subálgebras. O sea, dadas dos álgebras, una incluida dentro de la otra, $\tilde{V} \subset V$, y dos estados, ρ_V y σ_V de V , que se reducen a \tilde{V} como $\rho_{\tilde{V}}$ y $\sigma_{\tilde{V}}$, se tiene que

$$S(\rho_{\tilde{V}}||\sigma_{\tilde{V}}) \leq S(\rho_V||\sigma_V) \quad \text{para } \tilde{V} \subset V \quad (2.10)$$

Podemos interpretar (2.10) como que, al disminuir el álgebra de operadores tenemos menos elementos para distinguir a los estados ρ y σ . En otras palabras, con los operadores en V podemos realizar de forma más eficiente los experimentos y distinguir mejor los estados ρ y σ que haciendo experimentos solo con el subconjunto de operadores en \tilde{V} .

La entropía relativa, al igual que la entropía de von Neumann, se puede ver como un límite particular de una familia de funciones más generales. Para la entropía de von Neumann, teníamos que esta correspondía al límite $n \rightarrow 1$ en la entropía de Renyi. En el caso de la entropía relativa existe una familia de funciones, las entropías relativas de Renyi, que estudiaremos más adelante en 2.2 y que jugarán un papel fundamental en este trabajo.

2.1.3. Hamiltonianos modulares

Cualquier operador densidad puede escribirse de la forma

$$\rho = \frac{e^{-H}}{\text{Tr}(e^{-H})} \quad (2.11)$$

siendo H un operador autoadjunto. En el contexto de la teoría algebraica de campos H se conoce como Hamiltoniano modular.

Los Hamiltonianos modulares son objetos muy interesantes que codifican todas las propiedades de un estado reducido. Como una aplicación muy simple, que será útil más adelante en el trabajo, reescribamos la entropía relativa como

$$S(\rho||\sigma) = -\Delta S + \Delta\langle H_\sigma \rangle \quad (2.12)$$

con $H_\sigma = -\log \sigma$ el Hamiltoniano modular del estado σ ,

$$\Delta S = S(\rho) - S(\sigma) \quad (2.13)$$

es la diferencia entre la entropía de entrelazamiento de los estados y

$$\Delta\langle H_\sigma \rangle = \langle H_\sigma \rangle_\rho - \langle H_\sigma \rangle_\sigma \quad (2.14)$$

es la diferencia entre las energías modulares de los estados. La entropía relativa es la energía libre del estado ρ respecto del Hamiltoniano (modular de σ) a temperatura igual a uno. Esta separación de la entropía relativa en una parte de entropía y en una parte de energía modular resulta muy útil para abordar ciertos problemas (ver Capítulo 6).

2.2. Entropías Cuánticas Relativas de Renyi

Comencemos por definir entonces las Entropías Cuánticas Relativas de Renyi y posteriormente, enunciaremos algunas de sus propiedades más importantes.

Las QRRE se definen como [20, 21]

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha. \quad (2.15)$$

La definición anterior es válida para cualquier $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ y cualesquiera operadores densidad ρ, σ tales que ρ y σ no sean ortogonales. La condición de no-ortogonalidad es suficiente para asegurar que las S_α sean finitas cuando $\alpha < 1$. Las QRRE aparecen como una generalización natural de las entropías relativas de Renyi [22] que incluyen

la no conmutatividad cuántica de las matrices densidad involucradas.

En este trabajo centraremos nuestra atención principalmente en el rango $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$. En particular, los bordes de este intervalo están caracterizados por medidas de información cuánticas bien conocidas. Cuando $\alpha = 1/2$ tenemos la fidelidad,

$$S_{1/2}(\rho||\sigma) = -2 \log \text{Tr} \sqrt{\sigma^{1/2} \rho \sigma^{1/2}} = -2 \log F(\rho, \sigma), \quad (2.16)$$

donde $F(\rho, \sigma)$ denota la fidelidad cuántica. Otro límite interesante es el límite $\alpha \rightarrow 1$

$$S_1(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) = S(\rho||\sigma). \quad (2.17)$$

Aquí $S(\rho||\sigma)$ es la entropía cuántica relativa. Entonces, las QRRE aparecen, en el intervalo $\alpha \in [1/2, 1]$, como una interpolación entre la fidelidad cuántica y la entropía relativa cuántica. Este es uno de los motivos principales para considerar (2.15), por sobre otras formas alternativas tales como [10].

Para la fidelidad, una representación útil viene dada por el Teorema de Uhlmann[23], el cual establece que cuando $\dim \mathcal{H} < \infty$

$$F(\rho, \sigma) = \text{máx} |\langle \psi | \phi \rangle| \quad (2.18)$$

donde el máximo es sobre todas las purificaciones [24] $|\psi\rangle$ de ρ y $|\phi\rangle$ de σ . El resultado establecido por Uhlmann no provee una herramienta de cálculo para evaluar la fidelidad. Sin embargo, en la mayoría de los casos, propiedades de la fidelidad son mucho más fácil de probar a través de la expresión dada por Uhlmann. Por ejemplo, se vé fácilmente que la fidelidad es simétrica en sus entradas y que además está acotada entre 0 y 1, $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$. Si $\rho = \sigma$ es claro, de la expresión de Uhlmann que $F(\rho, \sigma) = 1$. Si $\rho \neq \sigma$ entonces $|\psi\rangle \neq |\phi\rangle$ para cualquier purificación $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ de ρ y σ respectivamente, de forma que $F(\rho, \sigma) < 1$. El límite inferior se verifica cuando ρ y σ tienen soporte sobre subespacios ortogonales. Intuitivamente, lo anterior se puede entender como que en esas condiciones ρ y σ son perfectamente distinguibles y por tanto debemos esperar que F alcance un valor mínimo en este punto.

Las QRRE también admiten representaciones en términos de cantidades de extremización. Por ejemplo, en [25] se mostró que

$$\text{Tr} \left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha = \min_{H \geq 0} \left(\alpha \text{Tr}(H\rho) - (\alpha - 1) \text{Tr} \left(H^{1/2} \sigma^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} H^{1/2} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right) \quad (2.19)$$

para $0 < \alpha < 1$; el mínimo debería ser remplazado por el máximo para $\alpha > 1$. Una representación similar es derivada en [20]. Estas representaciones se encuentran en la base de las propiedades de monoticidad que ahora revisaremos.

Las S_α son funciones monótonas crecientes en α [20, 25, 26]

$$\frac{d}{d\alpha} S_\alpha(\rho||\sigma) \geq 0. \quad (2.20)$$

Tanto la distancia inducida por la fidelidad $S_{\frac{1}{2}}$, como la entropía relativa S_1 son positivas, y iguales a cero sólo cuando $\rho = \sigma$. Con lo anterior, vemos entonces que la ecuación (2.20) da las siguientes mismas propiedades para las S_α ,

$$S_\alpha(\rho||\sigma) \geq 0 \quad , \quad S_\alpha(\rho||\sigma) = 0 \quad \text{for } \rho = \sigma. \quad (2.21)$$

Al igual que discutimos para la entropía relativa, las QRRE son monótonas al aumentar el tamaño del álgebra. Recordando, si consideramos dos regiones $A \subset \tilde{A}$, entonces

$$S_\alpha(\rho_A||\sigma_A) \leq S_\alpha(\rho_{\tilde{A}}||\sigma_{\tilde{A}}) \quad (2.22)$$

para $\alpha \in [1/2, 1) \cup (1, \infty)$. Este resultado usa (2.19); ver por ejemplo [25].

Capítulo 3

QRRE en Teorías Cuánticas de Campos libres.

“La forma más efectiva de hacerlo, es hacerlo.”

— Amelia Earhart.

En este capítulo calcularemos las QRRE en el caso de Teoría Cuántica de Campos libres. Estas son los modelos más simples posibles en teoría de campos, y debido a esto proveen un lugar natural para entender las S_α . Además de su simplicidad, los modelos libres proveen una configuración interesante para las medidas de información cuántica, donde se pueden reconocer propiedades de teorías cuánticas de campos más generales. Los estados Gaussianos también juegan un papel importante en teoría de información cuántica, óptica cuántica y física atómica, ver por ejemplo [27, 28] para más información.

Trabajaremos en tiempo real, relacionando los correladores Gaussianos en una superficie de Cauchy fija con la matriz densidad. Con el método de tiempo real se pretende calcular directamente la matriz densidad reducida correspondiente a un estado global de vacío en el espacio de Minkowski. Se parte de una versión discreta de la Teoría Cuántica de Campos sobre una red y eventualmente se toma el límite continuo, para más información ver [29]. Este enfoque es útil también para cálculos en la red, y los resultados obtenidos serán aplicados a un modelo libre de juguete con el que trabajaremos en el resto de este trabajo. Los resultados de esta sección son válidos para estados Gaussianos, que tienen una aplicabilidad mayor que las Teorías Cuánticas de Campos libres.

3.1. Fermiones libres

Consideremos dos teorías de campos de fermiones, con el mismo contenido de campos, pero con diferentes Hamiltonianos. Nos restringiremos a las teorías libres, o sea, a Hamiltonianos cuadráticos en los campos, que conducen a estados fundamentales Gaussianos. En la presente derivación trabajamos a temperatura cero y a potencial químico nulo, pero no requerimos invariancia de Poincaré. Denotemos los dos Hamiltonianos en la red por

$$H = \sum_{ij} M_{ij} \psi_i^\dagger \psi_j, \quad H' = \sum_{ij} M'_{ij} \psi_i^\dagger \psi_j. \quad (3.1)$$

En el caso estándar, estos Hamiltonianos surgen al discretizar las teorías de interés sobre una superficie de Cauchy a tiempo constante. En nuestro caso estaremos también interesados en superficies de Cauchy más generales. En particular, en teorías relativistas a continuación, las superficies de Cauchy se aproximarán al límite del cono de luz.

Las matrices densidad reducidas son denotadas por σ_V y ρ_V , respectivamente. Estas se obtienen trazando sobre los fermiones en los sitios en el complemento del conjunto V . Nuestro objetivo es calcular las $S_\alpha(\rho||\sigma)$.¹

Los modos fermiónicos obedecen $\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}$. Las únicas funciones de correlación de dos puntos en la superficie de Cauchy están dadas por la distribución de Fermi-Dirac a temperatura cero,

$$\langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle = C_{ij}, \quad \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle = \delta_{ij} - C_{ji} \quad (3.2)$$

con $C = \Theta(-M)$. Una expresión similar vale para la otra teoría, con $C' = \Theta(-M')$.

Consistentemente con el Teorema de Wick, la matriz densidad reducida viene dada por un estado Gaussiano [29, 30]

$$\rho_V = K e^{-\mathcal{H}_V}, \quad \mathcal{H}_V = \sum_{ij \in V} H_{Vij} \psi_i^\dagger \psi_j \quad (3.3)$$

donde \mathcal{H}_V , conocido como Hamiltoniano modular, está fijado en términos de los correladores al requerir que $\text{Tr}(\rho \psi_i^\dagger \psi_j) = C_{ij}$. El resultado que se obtiene es

$$H_V = -\log(C^{-1} - 1). \quad (3.4)$$

La constante de normalización $K = 1/\det(1 + e^{-H_V})$.

En la búsqueda de una expresión explícita para las QRRE son fundamentales 2 propiedades. En primer lugar, para un estado Gaussiano ρ , la potencia ρ^α es también un estado gaussiano, con Hamiltoniano modular αH_{Vij} . En segundo lugar, debido al álgebra de operadores de creación y destrucción, se puede ver que el producto de dos estados Gaussianos diferentes es también un estado Gaussiano, cuyo Hamiltoniano

¹En adelante, siempre que no lleve a confusiones, eliminaremos el subíndice ‘ V ’.

modular puede obtenerse en término de los Hamiltonianos modulares de los estados iniciales por medio de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH).

Para ver esto, es conveniente introducir los operadores fermiónicos de Majorana $w_I = (\psi_j + \psi_j^\dagger, i(\psi_j - \psi_j^\dagger))$, y reescribir la matriz densidad reducida como

$$\rho \propto \exp \left(-\frac{i}{4} \sum_{IJ \in V} G_{IJ} w_I w_J \right), \quad (3.5)$$

donde la matriz G es real y antisimétrica. Usando entonces que $\{w_I, w_J\} = 2\delta_{IJ}$ obtenemos que [31]

$$e^{\frac{i}{4} w^T R_1 w} e^{\frac{i}{4} w^T R_2 w} = e^{\frac{i}{4} w^T R w}, \quad e^{R_1} e^{R_2} = e^R. \quad (3.6)$$

Esto nos permite calcular productos de matrices densidad Gaussianas, que es lo que necesitamos para evaluar las S_α . Este método fue usado en [32] para calcular la fidelidad, y un enfoque similar es presentado en el Apéndice para el cálculo de las S_α . Mostramos sólo el resultado final

$$\begin{aligned} S_\alpha(\rho||\sigma) &= -\text{Tr} \log(1 - C) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{Tr} \log(1 - C') \\ &\quad - \frac{1}{1 - \alpha} \text{Tr} \log \left[1 + \left(\left(\frac{C}{1 - C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \frac{C'}{1 - C} \left(\frac{C}{1 - C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vale recordar que C es el correlador asociado con σ , mientras C' es el asociado con ρ .

3.2. Bosones libres

Por completitud, enfoquémosnos ahora en el caso de bosones libres. El Hamiltoniano de la red es de la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \pi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} \phi_i \phi_j, \quad (3.8)$$

donde ϕ_i y π_j obedecen las relaciones canónicas de conmutación $[\phi_i, \pi_j] = i\delta_{ij}$. Consideremos dos Hamiltonianos diferentes, con núcleos cuadráticos K y K' , y evaluaremos las $S_\alpha(\rho||\sigma)$ para sus correspondientes matrices densidad reducidas. Las Entropías relativas de Renyi para estados bosónicos fueron evaluadas también en [33].

Las funciones de dos puntos sobre la superficie de Cauchy están parametrizadas como

$$\begin{aligned} \langle \phi_i \phi_j \rangle &= X_{ij}, & \langle \pi_i \pi_j \rangle &= P_{ij} \\ \langle \phi_i \pi_j \rangle &= \langle \pi_j \phi_i \rangle^* = \frac{i}{2} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

con

$$X_{ij} = \frac{1}{2}(K^{-\frac{1}{2}})_{ij}, \quad P_{ij} = \frac{1}{2}(K^{1/2})_{ij}. \quad (3.10)$$

Ver e.g. [29] para una revisión de estos puntos. Las ecuaciones en (3.9) implican que las matrices X y P son reales, Hermíticas y definidas positivas. Posteriormente, introducimos entonces

$$C = \sqrt{XP}, \quad (3.11)$$

los autovalores de C^2 son mayores o iguales que $1/4$.

Consistentemente con el Teorema de Wick, la matriz densidad reducida viene dada por un estado Gaussiano de la siguiente forma general

$$\rho_V \propto \exp \left(- \sum_{i,j \in V} (M_{ij} \phi_i \phi_j + N_{ij} \pi_i \pi_j) \right). \quad (3.12)$$

Esta matriz densidad reducida puede diagonalizarse mediante una transformación de Bogoliubov, que permite relacionar M and N con los correladores (3.9). Las expresiones explícitas pueden encontrarse en [29].

Ahora bien, en pos de calcular las QRREs, es conveniente introducir las variables $Q_I = (\phi_j, \pi_j)$, que satisfacen $[Q_I, Q_J] = i\Omega_{IJ}$, donde $\Omega = i\sigma_2 \otimes \mathbf{1}$ es la matriz simpléctica. En esta parametrización la matriz densidad reducida tiene la forma

$$\rho_V \propto \exp \left(- \frac{1}{2} Q^T G Q \right), \quad (3.13)$$

donde G es real y simétrica, y sus bloques están determinados por M y N en (3.12). Productos de estados Gaussianos vienen determinados por [31]

$$e^{-\frac{1}{2}Q^T G_1 Q} e^{-\frac{1}{2}Q^T G_2 Q} = e^{-\frac{1}{2}Q^T G Q}, \quad e^{-i\Omega G_1} e^{-i\Omega G_2} = e^{-i\Omega G}. \quad (3.14)$$

Este método fue usado en [34] para calcular la fidelidad para el caso bosónico.

Usando estas propiedades, en el Apéndice evaluaremos las S_α , obteniendo

$$\begin{aligned} S_\alpha(\rho||\sigma) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(\frac{1}{4} - C^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left(\frac{1}{4} - C'^2 \right) \\ &+ \frac{1/2}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left(\left(T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} T' T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde T viene dado por la siguiente expresión

$$T = \begin{pmatrix} \frac{C^2 + \frac{1}{4}}{C^2 - \frac{1}{4}} & i \frac{C^2}{C^2 - \frac{1}{4}} P^{-1} \\ -i P \frac{1}{C^2 - \frac{1}{4}} & P \frac{C^2 + \frac{1}{4}}{C^2 - \frac{1}{4}} P^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

(Vale recordar nuevamente que C es el correlador asociado a σ , mientras que C' es el asociado a ρ .) Las potencias restantes no triviales de T y T' pueden calcularse explícitamente, pero las expresiones finales en término de los correladores iniciales (X, P, X', P') son muy complicadas y no serán presentadas aquí. Estas complicaciones provienen del hecho de que, a diferencia del caso fermiónico, aquí las matrices T no son diagonal en bloques, y dependen tanto de P (ó X) como de C .

3.3. Método de la resolvente

La ecuación (3.7) provee una expresión cerrada para las S_α en función de los correladores fermiónicos C y C' . En pos de calcular potencias no triviales de los operadores anteriores, es conveniente usar sus resolventes.

Dado un operador M se define su resolvente como

$$R(M, z) = \text{Tr} \left(\frac{1}{M - z} + \frac{1}{z} \right). \quad (3.17)$$

Añadimos el término extra $1/z$ respecto a la definición estándar con el objetivo de lograr convergencia para valores de z grandes. En este caso la adición del término extra se justifica por el hecho de que, en todas las expresiones que siguen, este término estará multiplicado por funciones que se anulan en $z = 0$.

Los correladores C y C' tienen autovalores en el rango $(0, 1)$. Para un dado autovalor λ ,

$$\int_1^\infty d\beta \left(\frac{1}{\lambda - \beta} + \frac{1}{\beta} \right) = \log(1 - \lambda), \quad (3.18)$$

y así

$$\text{Tr} \log(1 - C) = \int_1^\infty d\beta R(C, \beta). \quad (3.19)$$

Posteriormente, centramos nuestra atención en una matriz mucho más complicada

$$M \equiv \left(\frac{C}{1 - C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \frac{C'}{1 - C'} \left(\frac{C}{1 - C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}, \quad (3.20)$$

y necesitamos calcular $\text{Tr} \log(1 + M^\alpha)$. La matriz M posee autovalores positivos. Para un dado autovalor λ , tenemos

$$\log(1 + \lambda^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z - \lambda} - \frac{1}{z} \right) \log(1 + z^\alpha) \quad (3.21)$$

donde \mathcal{C} es un contorno que se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de λ (el contorno no contiene a $z = 0$). La integral del término proporcional a $1/z$ es cero, pero lo añadimos con el objetivo de tener un integrando integrable para

valores grandes de z . Elegimos que el corte de rama de $\log(1 + z^\alpha)$ se encuentre en $z > 0$. Podemos entonces deformar el contorno \mathcal{C} para que ahora corra en el intervalo $(-\infty, 0)$, obteniendo el siguiente resultado

$$\log(1 + \lambda^\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\beta \left(\frac{1}{\lambda + \beta} - \frac{1}{\beta} \right) [\log(1 + \beta^\alpha e^{i\pi\alpha}) - \log(1 + \beta^\alpha e^{-i\pi\alpha})] . \quad (3.22)$$

Por tanto,

$$\text{Tr} \log(1 + M^\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\beta R(M, -\beta) [\log(1 + \beta^\alpha e^{i\pi\alpha}) - \log(1 + \beta^\alpha e^{-i\pi\alpha})] . \quad (3.23)$$

Finalmente, usando (3.19) y (3.23), las entropías relativas de Renyi (3.7) vienen dadas por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} S_\alpha(\rho||\sigma) = & - \int_1^\infty d\beta \left(R(C, \beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha} R(C', \beta) \right) \\ & + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{d\beta}{2\pi i} R(M, -\beta) [\log(1 + \beta^\alpha e^{i\pi\alpha}) - \log(1 + \beta^\alpha e^{-i\pi\alpha})] . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Esta es nuestra fórmula final para las S_α cuando consideramos estados Gaussianos en general. En particular, en el Capítulo 5 aplicaremos estos resultados al caso de un fermión de Dirac acoplado a una impureza de Kondo, que experimenta un flujo del RG. Aplicando (3.24) al modelo Kondo libre, identificaremos C con el correlador fermiónico en el UV ($m = 0$), y C' con el correlador correspondiente a la teoría con RG no nulo (es decir $m \neq 0$). En el Capítulo 5, evaluaremos la fidelidad $F = e^{-\frac{1}{2}S_{1/2}}$ cuando consideramos una superficie de Cauchy a tiempo constante. Luego, evaluaremos las S_α , con $\alpha \in [1/2, 1]$, pero esta vez cuando la superficie de Cauchy coincide con el límite del cono de luz. En ambos casos, restringiremos los correladores a un intervalo $x \in (0, R)$. Esto corresponde a una matriz densidad reducida que se obtiene de integrar los grados de libertad en $x \in (R, \infty)$.

Capítulo 4

Modelo Kondo libre

“El éxito consiste en ir de fracaso en fracaso sin perder el entusiasmo.”

— Winston Churchill.

Las impurezas cuánticas y defectos juegan un papel fundamental en diferentes áreas de la física teórica abarcando desde teoría de cuerdas hasta la física de la materia condensada. Como ejemplo, encontramos el estudio de materiales fuertemente correlacionados. Un método realista para abordar problemas relacionados con estos materiales es el Campo Medio Dinámico (DMFT por sus siglas en inglés). En este método, se mapea el problema de estudio en la red, a un problema de impurezas auxiliar. Ambos problemas están ligados a través de relaciones de autoconsistencias, dadas por la igualdad de las funciones de correlación dinámicas locales.

Para comprender las posibles QFTs con defectos y su dinámica, un paso fundamental es clasificar las condiciones de borde que preservan alguna invariancia conforme de las CFTs en el *bulk*, junto con los flujos del RG entre distintas condiciones de borde.

La situación mejor entendida corresponde a CFTs en dos dimensiones con bordes conformes, que condujo al desarrollo de las Teorías de Campos Conformes con bordes (BCFT). Los aspectos principales del resto de la Tesis se enfocarán en estos sistemas con bordes y su RG. En particular, estudiaremos teorías libres con bordes a través de un modelo Gaussiano relativista introducido y estudiado en [7]. A pesar de su simplicidad, este modelo conduce a flujos del RG no triviales, sirviéndonos de esta forma como laboratorio para probar nuestras ideas.

4.0.1. Modelo Kondo

La gran mayoría de los mecanismos que contribuyen a la resistividad de los metales, $\rho(T)$, dan que $\rho(T) \rightarrow 0$, cuando $T \rightarrow 0$ (fonones ó interacción electrón-electrón), ó dan $\rho(T) \rightarrow \text{const}$, cuando $T \rightarrow 0$ (impurezas no magnéticas). Sin embargo, metales que

contienen impurezas magnéticas muestran un comportamiento tal que $\rho(T)$ aumenta cuando $T \rightarrow 0$. Esto fue explicado por Kondo en 1964 usando a través del siguiente Hamiltoniano:

$$H = \sum_{\vec{k}, \alpha} \psi_{\vec{k}}^{\dagger \alpha} \psi_{\vec{k}}^{\alpha} \epsilon(k) + \lambda \vec{S} \cdot \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \psi_{\vec{k}}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi_{\vec{k}'}, \quad (4.1)$$

donde los $\psi_{\vec{k}, \alpha}$ corresponden a operadores de destrucción de electrones de conducción (con momento \vec{k} y espín α), y \vec{S} representa el espín de la impureza magnética. El término de interacción representa la interacción del espín de la impureza con el espín del electrón en $\vec{x} = 0$.

Encarar el anterior problema, tal y como está definido, implica llevar a cabo cálculos no perturbativos para un sistema mecánico-cuántico interactuante con un continuo de excitaciones que abarcan un amplio espectro de energías. En particular, en esta Tesis nos centraremos en una versión simplificada del sistema descrito por (4.1). A pesar de ser libre, la versión simplificada conserva aspectos importantes del RG entre distintas condiciones de borde, constituyendo así el lugar ideal donde probar nuestras ideas.

En la subsección 4.1.1 introduciremos y discutiremos el modelo Gaussiano en el cual basaremos el resto del trabajo. Esta parte de la Tesis sigue el trabajo realizado en [7]

4.1. Una impureza fermiónica

4.1.1. Modelo Kondo libre. Versión en el continuo

Consideremos entonces un fermión de Dirac bidimensional viviendo en $x_1 \geq 0$, que interactúa con una impureza fermiónica de Majorana en $x_1 = 0$. La acción asociada a este sistema es

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dx_1 \left(-i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \frac{i}{2}\delta(x_1)\left[\bar{\chi}\gamma^0\partial_0\chi + m^{1/2}(\bar{\psi}\chi - \bar{\chi}\psi)\right] \right). \quad (4.2)$$

Analizando las dimensiones de escaleo vemos que $[\psi] = 1/2$, $[\chi] = 0$, y entonces $[m] = 1$ y tenemos una perturbación relevante en la frontera. Es importante aclarar que χ es un grado de libertad mecánico-cuántico (vive en dimensión $0 + 1$) y por tanto escalea diferente a los fermiones del bulk. La acción anterior es la más general posible que respete las simetrías de la teoría y donde sólo se consideraron los términos con los acoplamientos más relevantes. Para esclarecer el comentario anterior, supongamos que dentro de la parte de la acción que sólo vive en el borde añadimos un término de la forma $\delta(x_1)\frac{\lambda}{\beta!}(\bar{\chi}\psi)^{\beta} + c.c$, este término es sin duda alguna invariante de Lorentz y analizando las dimensiones de escaleo se tiene que $[\lambda] = \frac{2-\beta}{2}$. Vemos entonces que para $\beta > 2$ el acoplamiento es irrelevante y lo podemos despreciar a la hora de hacer el flujo

de grupo de renormalización hacia el infrarojo. En el caso de $\beta = 2$ el acoplamiento λ es marginal, y el comportamiento en UV y IR está completamente determinado por las fluctuaciones cuánticas y no puede inferirse del simple análisis dimensional. Este término es menos relevante que el término cuadrático que hemos incluido, y por tanto no lo consideraremos. Sin embargo, aparece en los modelos de Kondo interactuantes [35].

Posteriormente, con el objetivo de analizar los efectos de la perturbación, expresamos la acción en componentes y para ello elegimos la siguiente representación

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_+^* \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Trabajamos en la signatura $(-+)$. Respecto a las quiralidades en la base definida anteriormente, vemos que $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z$ y por tanto, ψ_+^* y ψ_- son las dos quiralidades en dicha base. Finalmente, la acción resultante es:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dx_1 \left(i\psi_+(\partial_0 - \partial_1)\psi_+^* + i\psi_-(\partial_0 + \partial_1)\psi_- + \delta(x_1) \left[i\eta^*\partial_0\eta - \frac{i}{2}m^{1/2}\eta^*(\psi_+ + \psi_-) + c.c \right] \right). \quad (4.4)$$

La acción es invariante ante conjugación de carga. No es difícil corroborar que en dos dimensiones la conjugación de carga actúa sobre un fermión de Dirac como $\psi_C(x) = \gamma^1\psi^*(x)$ ó $\psi_C(x) = \gamma^5\gamma^1\psi^*(x)$. En componentes, pensando a la función de onda fermiónica como $\psi = (\psi_+, \psi_-)$, lo anterior nos da $\psi_+ \rightarrow \pm\psi_-$, o sea, ante la conjugación de carga las dos componentes fermiónicas se intercambian. La impureza fermiónica χ satisface la condición de Majorana $\chi^* = \chi_C$. Con lo anterior y la forma particular de la acción en componentes (4.1.1) es directo verificar la invariancia de S ante conjugación de carga.

Analicemos ahora los límites de energía. En el ultravioleta el término de borde masivo es despreciable frente al término de borde cinético, y debido a esto, tenemos efectivamente un fermión mecánico-cuántico libre desacoplado del sistema del bulk. Puesto que el bulk vive en el semiespacio $x_1 \geq 0$ es necesario imponer condiciones de borde que aseguren que el término de borde se anule al tomar la variación de la acción:

$$S_{UV} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dx_1 \left(-i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \right) + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left(\bar{\chi}\gamma^0\partial_0\chi \right), \quad (4.5)$$

$$\delta S_{UV}^{borde} = \int dx_0 i \left(\psi_+^* \delta\psi - \psi_- \delta\psi_-^* \right) \Big|_{x_1=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_+(x_0, 0) = e^{2\pi i\nu} \psi_-(x_0, 0). \quad (4.6)$$

Ahora bien, dentro del conjunto completo de condiciones de borde consistentes (4.6) eligiremos aquellas que preserven la simetría ante conjugación de carga, o sea sólo son admisibles $\nu = 0$ y $\nu = 1/2$. En particular, elegimos $\nu = 0$ de forma tal que para el ultravioleta la condición de borde se lee $\psi_+(x_0, 0) = \psi_-(x_0, 0)$.

En el infrarrojo profundo es posible ignorar el término cinético de la impureza, tratándolo como un multiplicador de Lagrange que impone

$$S_{IR} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dx_1 \left(i\psi_+(\partial_0 - \partial_1)\psi_+^* + i\psi_-(\partial_0 + \partial_1)\psi_-^* \right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left(-\frac{i}{2}m^{1/2}\eta^*(\psi_+ + \psi_-) + c.c. \right), \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta S_{IR}}{\delta \eta^*} = 0 \Rightarrow \psi_+(x_0, 0) = -\psi_-(x_0, 0).$$

Concluimos entonces que el modelo de Kondo libre da un flujo del grupo de renormalización entre las condiciones de frontera $'+' y '-'$.

Es también posible entender y analizar la dinámica de la impureza integrando sobre los fermiones del bulk. Extremizando la acción original (4.2) respecto de los fermiones en el bulk se obtiene

$$i(\partial_0 + \partial_1)\psi_+^* = -\frac{i}{2}m^{1/2}\eta, \quad i(\partial_0 - \partial_1)\psi_- = -\frac{i}{2}m^{1/2}\eta^*. \quad (4.8)$$

Si ahora invertimos (4.8) usando la función de Green de los operadores diferenciales obtenemos

$$\psi_+^*(x_0, x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 G_+(x_0 - x'_0, x_1) \frac{i}{2}m^{1/2}\eta(x'_0, 0), \quad (4.9)$$

$$\psi_-(x_0, x_1) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 G_-(x_0 - x'_0, x_1) \frac{i}{2}m^{1/2}\eta^*(x'_0, 0),$$

donde, $G_{\pm} = (i(\partial_0 \pm \partial_1))^{-1}$ son los propagadores quirales. Con esto, la acción efectiva, donde se han integrado los fermiones del bulk se obtiene evaluando (4.9) en (4.2), o sea $S[\psi'_+, \psi'_-, \eta] = S_{ef}[\eta]$

$$S_{ef} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \eta^* \partial_0 \eta + \frac{m}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 (\eta^*(x_0)G_+(x_0 - x'_0, 0)\eta(x'_0) + \eta(x_0)G_-(x_0 - x'_0, 0)\eta^*(x'_0)). \quad (4.10)$$

Para pequeñas diferencias de tiempo (UV), el primer término en (4.10) predomina y por tanto $\dim(\eta)=0$; su propagador es simplemente una constante. A diferencias de tiempo grandes (IR), la dinámica viene dominada por la contribución de los fermiones del bulk. Puesto que $G_{\pm}(t, 0) \propto 1/t$, que no es más que la transformada de Fourier de

$\Theta(p_0)$, obtenemos un grado de libertad mecánico cuántico con $\dim(\eta) = 1/2$ y

$$\langle \eta(x_0)\eta(x'_0) \rangle \sim \int dp_0 e^{-ip_0(x_0-x'_0)} \frac{\Theta(p_0)}{m} \propto \frac{1}{m(x_0-x'_0)}. \quad (4.11)$$

Otra forma de llegar al resultado anterior es analizando las dimensiones de escaleo para χ en la acción original (4.2). Las dimensiones de escaleo vienen determinadas por el término dominante en (4.2), que para el IR corresponde al término de masa. Haciendo las cuentas se obtiene que $\dim(\eta) = 1/2$.

4.1.2. Modelo Kondo libre. Versión en la red

En pos de calcular ciertas cantidades físicas en las secciones que siguen, pongamos la teoría anterior sobre la red. Debido al problema de la duplicación fermiónica (del inglés *fermion doubling*)¹, es suficiente considerar un fermión del bulk de una componente interactuando con la impureza. El paso al discreto lo podemos hacer sustituyendo la integral sobre la variable espacial x_1 por una sumatoria sobre todos los sitios de la red "pesados" por el espaciado a de la red y por último, cambiando la derivada respecto a la variable espacial por una diferencia centrada. Por ejemplo $\bar{\psi}\partial_1\psi \rightarrow \psi_j^* \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2a} = \frac{1}{2a}(\psi_j^*\psi_{j+1} - \psi_{j+1}^*\psi_j)$, vemos que producto de haber discretizado el operador derivada aparece un término de *hopping* a primeros vecinos, o sea, que liga sitios adyacentes de la red. Finalmente el Lagrangiano de la teoría sobre la red es:

$$L_{red} = a \sum_{j=0}^{\infty} (i\psi_j^* \partial_0 \psi_j - \frac{i}{2a}(\psi_j^* \psi_{j+1} - \psi_{j+1}^* \psi_j)) + i\eta^* \partial_0 \eta - \frac{i}{2} m^{1/2} (\eta^* \psi_0 + c.c.). \quad (4.12)$$

Tomando el espaciado de la red $a = 1$, el kernel del Hamiltoniano $H = \Psi^\dagger M \Psi$ se lee

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}m^{1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{i}{2}m^{1/2} & 0 & i/2 & 0 & \cdots \\ 0 & -i/2 & 0 & i/2 & \cdots \\ 0 & 0 & -i/2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

El primer sitio corresponde a la impureza. Para $m = 1$ tenemos una red con un sitio extra y ninguna impureza, o sea el grado de libertad mecánico cuántico corresponde a un modo discretizado del bulk, es imposible diferenciarlo del resto. Para $m = 0$ la impureza se desacopla del sistema de la red. Lo último se observaba también de mirar

¹El problema del *fermion doubling* hace su aparición al tratar, ingenuamente, de poner campos fermiónicos sobre una red. Consiste en la aparición de estados adicionales, tales que uno termina teniendo 2^d partículas fermiónicas, con d el número de dimensiones discretas, para cada fermión original.

la acción de la teoría en el continuo, donde al analizar el límite en el UV ($m \rightarrow 0$) vimos que el término de borde de la acción sólo tenía la dinámica de la impureza que, no afectaba la dinámica de los fermiones del bulk, quedando entonces desacoplados completamente la impureza fermiónica de los fermiones del bulk. Para poder determinar la relación del modelo discreto con la teoría en el continuo es necesario estudiar el espectro de la teoría (4.12). Primero, sobre las convenciones usadas, consideramos a η asociado a una red con un sitio extra en $j = -1$, o sea nos construimos $\Psi_j = (\eta, \psi_{j \geq 0})$ y buscamos los autovalores de

$$M_{ij}\Psi_j(k) = E(k)\Psi_i(k) \quad (4.14)$$

Para $j \geq 1$ las soluciones a (4.14) son combinaciones de ondas incidentes y salientes

$$\Psi_j(k) = a_k e^{ikj} + b_k (-1)^j e^{-ikj}, \quad E(k) = -\sin k. \quad (4.15)$$

Aunque no vamos a demostrar como encontrar las soluciones de (4.14) (ver [7]) podemos ver que como la interacción es a primeros vecinos, sucede que al elegir un dado sitio $j \geq 1$, que supongamos posee paridad par $j = 2n$, entonces, interaccionan con él los sitios $j - 1$ y $j + 1$ que obviamente poseen paridad impar. Luego, para $j \geq 1$ vemos de (4.14) que

$$E(k)\Psi_j = -\frac{\Psi_{j+1} - \Psi_{j-1}}{2i}. \quad (4.16)$$

Suponiendo soluciones de la forma $\Psi_j(k) = a_k^j e^{ikj} + b_k^j e^{-ikj}$ donde ahora los coeficientes en la expansión en ondas planas dependen del sitio en cuestión y sustituyendo en (4.16), vemos que la solución (4.15) sale directamente como una clara opción.

Ahora bien, las condiciones de frontera eligen una combinación específica del momento k y $\pi - k$, con energías degeneradas. Por tanto, los autovectores distintos son aquellos con $-\pi/2 \leq k \leq \pi/2$, $E = -\sin k$. No podemos olvidarnos del otro grado de libertad en $j = -1$, diferente del resto. Es de esperar que Ψ_{-1} no sea de la forma dada en (4.15). Evaluando (4.14) para $i = -1$ tenemos

$$\eta = \Psi_{-1} = -\frac{i m^{1/2}}{2 \sin k} \psi_0. \quad (4.17)$$

Pero también se tiene que $M_{0j}\Psi_j = -\sin k \psi_0$ y por tanto

$$\frac{i}{2} \psi_1 = \left(\frac{m}{4 \sin k} - \sin k \right) \psi_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b_k}{a_k} = R(k) = -\frac{1 - m - e^{-2ik}}{1 - m - e^{2ik}}. \quad (4.18)$$

Lo anterior nos da el coeficiente de reflexión en la pared, relacionando los modos *left* y *right*. En el UV, donde $m \rightarrow 0$ se tiene que $R_{UV}(k) = e^{-2ik}$. Al tomar el límite al continuo el resultado anterior tiende a $R_{UV}(k) = 1$. Por el otro lado, en el IR donde

$m \rightarrow \infty$ se tiene que $R_{IR}(k) = -1$. Los resultados anteriores en función del coeficiente de reflexión $R(k)$ constituyen la versión en la red del RG entre las condiciones '+' y '-'.

En términos de los operadores de aniquilación \hat{f}_k de los modos con momento definido k (y por tanto energía definida) tenemos que

$$\hat{\psi}_j = \sum_k \psi_j(k) \hat{f}_k. \quad (4.19)$$

Aquí, $\psi_j(k)$ viene dado por (4.15). De (4.15), vemos que la solución Ψ_j contiene ambas quiralidades, *left* y *right*. Para poder aislarlas definimos para $j = 0, 2, 4, \dots = 2n$, los siguientes operadores fermiónicos canónicos independientes

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_+(j) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\psi}_j + \hat{\psi}_{j+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \left(a_k e^{ikj} (1 + e^{ik}) + b_k e^{-ikj} (1 - e^{-ik}) \right) \hat{f}_k, \\ \hat{\psi}_-(j) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_{j+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \left(a_k e^{ikj} (1 - e^{ik}) + b_k e^{-ikj} (1 + e^{-ik}) \right) \hat{f}_k. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Al tomar el límite al continuo $\hat{\psi}_+$ seleccionará solamente la primera componente de los modos y $\hat{\psi}_-$ la segunda. Luego, recuperando el parámetro de red en los parámetros (anteriormente $a = 1$) $k \rightarrow ka$, $m \rightarrow ma$ y considerando $x = 2aj$ vemos que al tomar el límite $a \rightarrow 0$ y normalizando propiamente los modos se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_+(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} e^{-ik(t-x)} \hat{f}_k, \\ \hat{\psi}_-(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} e^{-ik(t+x)} R(k) \hat{f}_k, \end{aligned} \quad (4.21)$$

con $\{\hat{f}_k, \hat{f}_{k'}^\dagger\} = \delta(k - k')$ y k con dominio ahora sobre todos los reales. El estado de vacío se define de forma tal que $\hat{f}_k|0\rangle = 0$ para $k > 0$ y $\hat{f}_k^\dagger|0\rangle = 0$ para $k < 0$.

En el límite al continuo, obtenemos para el coeficiente de reflexión (4.18)

$$R(k) \simeq -\frac{1 - m - (1 - 2ik)}{1 - m - (1 + 2ik)} \Rightarrow R(k) = \frac{1 + i\frac{m}{2k}}{1 - i\frac{m}{2k}} = e^{i2\delta(m/k)}. \quad (4.22)$$

Respecto a las propiedades del coeficiente de reflexión, vemos que $R(k) = R^*(-k)$ reflejando la simetría ante conjugación de carga de la teoría. Por último, el campo de la impureza (4.17) en el continuo tiene la siguiente forma

$$\eta(E) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \frac{m^{1/2}}{k} (1 + R(k)) \hat{f}_k \quad (4.23)$$

4.1.3. Conclusiones Parciales

Hasta aquí hemos visto que el modelo analizado en la sección 4.1.2 ilustra de forma simple la discusión realizada en la sección 4.1.1 acerca de los modos quirales *left* y *right* y además, el efecto de la frontera sobre los modos *right* que se manifiesta a través de la presencia de un coeficiente de reflexión para los mismos. Finalmente, vemos que a través de la dependencia en momento del coeficiente de reflexión tenemos un flujo del grupo de renormalización en la frontera, donde para grandes valores de momento (UV) $R(k) = 1$ implicando que $\psi_+(x_0, 0) = \psi_-(x_0, 0)$ y, en el límite opuesto (IR) $R(k) = -1$ que asociamos con $\psi_+(x_0, 0) = -\psi_-(x_0, 0)$.

4.2. Dos impurezas fermiónicas

Consideremos ahora la generalización del modelo al caso de dos impurezas fermiónicas. Respecto al caso de una impureza, añadimos otra impureza en $x_1 = 0$ acoplada a la impureza que se tenía inicialmente. La acción correspondiente a esta teoría es la siguiente

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dx_1 \left(-i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\delta(x_1)\left[\bar{\chi}\gamma^0\partial_0\chi + m^{1/2}(\bar{\psi}\chi - \bar{\chi}\psi)\right] \right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dx_1 \frac{i}{2}\delta(x_1)\left[\bar{\lambda}\gamma^0\partial_0\lambda + \tilde{m}(\bar{\chi}\lambda + hc)\right]. \quad (4.24)$$

Analizando las dimensiones de escaleo vemos que $[\chi] = 0$. Recordando del análisis previo de una impureza que $[\lambda] = 0$, vemos finalmente que $\tilde{m} = 1$ y por tanto, tenemos una perturbación relevante en la frontera.

Posteriormente, pasemos rápidamente a estudiar la teoría descrita por (4.24) en la red.

4.2.1. Versión en la red

De la misma forma que se hizo para la acción (4.2) discretizamos la teoría descrita por la acción (4.24). Finalmente, el Lagrangiano de la teoría sobre la red es:

$$L_{red} = a \sum_{j=0}^{\infty} \left(i\psi_j^*\partial_0\psi_j - \frac{i}{2a}(\psi_j^*\psi_{j+1} - \psi_{j+1}^*\psi_j) \right) + i\eta_2^*\partial_0\eta_2 - \frac{i}{2}m^{1/2}(\eta_2^*\psi_0 + c.c.) + i\eta_1^*\partial_0\eta_1 - \frac{i}{2}\tilde{m}(\eta_1^*\eta_2 + c.c.). \quad (4.25)$$

Tomando el espaciado de la red $a = 1$, el kernel del Hamiltoniano $H = \Psi^\dagger M \Psi$ se

lee

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}\tilde{m} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{i}{2}\tilde{m} & 0 & \frac{i}{2}m^{1/2} & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{i}{2}m^{1/2} & 0 & i/2 & \cdots \\ 0 & 0 & -i/2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Pensando a η_1 y η_2 como asociados a puntos extras de la red con $j = -1$ y $j = -2$ respectivamente, nos construimos $\Psi_j = (\eta_1, \eta_2, \psi_{j \geq 0})$. Nuestro interés es entonces resolver el problema de autovalores $M_{ij}\Psi_j = E(k)\Psi_i$. Mirando los sitios $j \geq 1$, las soluciones son nuevamente combinaciones lineales de ondas planas,

$$\Psi_j(k) = a_k e^{ikj} + b_k (-1)^j e^{-ikj} \quad (4.27)$$

con autovalores $E(k) = -\sin(k)$. A diferencia del caso de una sola impureza ahora tenemos dos grados de libertad diferentes en $j = -1, -2$ que no son de la forma (4.27).

Para $i = -2$ tenemos que

$$\eta_1 = -\frac{i}{2} \frac{\tilde{m}}{\sin(k)} \eta_2. \quad (4.28)$$

Para $i = -1$ tenemos contribución del sitio $j = -2$ y del sitio $j = 0$

$$-\frac{i}{2}\tilde{m}\eta_1 + \frac{i}{2}m^{1/2}\psi_0 = -\sin(k)\eta_2, \quad (4.29)$$

$$\frac{i}{2}m^{1/2}\psi_0 = \left(\frac{1}{4} \frac{\tilde{m}^2}{\sin(k)} - \sin(k)\right)\eta_2. \quad (4.30)$$

Para $i = 0$ tenemos contribuciones de los sitios $j = -1$ y $j = 1$

$$-\frac{i}{2}m^{1/2}\eta_2 + \frac{i}{2}\psi_1 = -\sin(k)\psi_0, \quad (4.31)$$

$$\frac{i}{2}\psi_1 = \left(-\frac{m}{4} \frac{1}{\frac{\tilde{m}^2}{4\sin(k)} - \sin(k)} - \sin(k)\right)\psi_0. \quad (4.32)$$

Luego, utilizando los desarrollos en ondas planas de las ψ_j 's nos queda que

$$a_k \left(e^{-ik} - (e^{ik} - e^{-ik}) \frac{m}{\tilde{m}^2 - 4\sin(k)^2} \right) = b_k \left(e^{ik} + (e^{ik} - e^{-ik}) \frac{m}{\tilde{m}^2 - 4\sin(k)^2} \right). \quad (4.33)$$

Algo que podemos hacer hasta acá es verificar que si tomamos $\tilde{m} = 0$ y el límite al continuo (el último por comodidad) recuperamos el resultado obtenido en el caso de una impureza para el coeficiente de reflexión $R(k) = \frac{1+i\frac{m}{2k}}{1-i\frac{m}{2k}}$. Tomando el límite al

continuo en (4.33) llegamos a la siguiente expresión para el coeficiente de reflexión

$$R(k)_{2imp} = b_k/a_k = \frac{1 - 2ik \frac{m}{\tilde{m}^2 - 4k^2}}{1 + 2ik \frac{m}{\tilde{m}^2 - 4k^2}}. \quad (4.34)$$

Trabajamos a potencial químico nulo, y para esto, requerimos que se satisfaga la siguiente relación entre los acoplamientos $2\tilde{m} < m$. Respecto a las propiedades del coeficiente de reflexión, vemos nuevamente que $R(k) = R^*(-k)$, de acuerdo con la simetría ante conjugación de carga de la teoría.

Para cuantizar la teoría usamos, al igual que en el caso de una impureza, los operadores de destrucción \hat{f}_k de los modos de energía definida (4.19). Las expresiones para $\hat{\psi}_j$ son idénticas a las que encontramos en el caso de una impureza. Calculemos entonces los campos de las impurezas. Definimos por comodidad

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \hat{a}_k & \text{si } k > 0 \\ \hat{b}_k & \text{si } k < 0 \end{cases}, \quad (4.35)$$

donde los operadores \hat{a}_k y \hat{b}_k satisfacen las relaciones de anticonmutación canónicas. El estado de vacío queda determinado entonces por $\hat{a}_k|0\rangle = \hat{b}_k|0\rangle = 0$.

De (4.28) y (4.30) tenemos que

$$\eta_1(k) = -\frac{i}{2} \frac{\tilde{m}}{k} \eta_2, \quad \eta_2 = -\frac{i}{2} \frac{4m^{1/2}k}{4k^2 - \tilde{m}^2} (1 + R(k)). \quad (4.36)$$

Con lo anterior, los operadores de campos de las dos impurezas $\hat{\eta}_1$ y $\hat{\eta}_2$ quedan completamente determinados a menos de una constante de normalización.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1 &= -\tilde{m}m^{1/2}N_1 \int_0^\infty dk \frac{1}{4k^2 - \tilde{m}^2} [(1 + R(k))\hat{a}_k + (1 + R^*(k))\hat{b}_k^\dagger], \\ \hat{\eta}_2 &= -2im^{1/2}N_2 \int_0^\infty dk \frac{k}{4k^2 - \tilde{m}^2} [(1 + R(k))\hat{a}_k + (1 + R^*(k))\hat{b}_k^\dagger]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Las constantes de normalización las obtenemos de imponer que se satisfaga $\langle \hat{\eta}_1 \hat{\eta}_1^\dagger \rangle = \langle \hat{\eta}_2 \hat{\eta}_2^\dagger \rangle = 1/2$, de forma consecuente con la simetría ante conjugación de carga (o simetría electrón-hueco). Dejando a un lado las manipulaciones algebraicas tenemos que el resultado final es

$$N_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\tilde{m}}{m} \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}}, \quad (4.38)$$

$$N_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\tilde{m}}{m} \left(\sqrt{2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}} \right), \quad (4.39)$$

con $x = \frac{m}{2\tilde{m}}$.

En el caso de una impureza fermiónica vimos que el flujo del RG venía determinado a través de la dependencia en momento del coeficiente de reflexión. En el UV teníamos $R(k) = 1$, mientras que en el IR encontramos que $R(k) = -1$. Ahora bien, qué sucede en el caso de dos impurezas fermiónicas descrito en la red por (4.25). De la expresión (4.34) vemos que cuando $\tilde{m} = 0$ recuperamos, tal y como dijimos antes, el caso de una impureza. Consideremos ahora que $m, \tilde{m} \neq 0$, y tales que satisfen la condición $m > 2\tilde{m}$. Entonces, en el límite $k \rightarrow 0$ el coeficiente de reflexión da $R_{2imp}(k) = 1$, y en $k \rightarrow \infty$ da $R_{2imp}(k) = 1$. De esta forma, vemos que para el caso de dos impurezas el punto IR no es inyectivo. El UV, parametrizado por $R_{2imp}(k) = -1$ se alcanza en el límite $k = \tilde{m}/2$. Con esto, vemos que tanto el modelo con una impureza fermiónica como aquel con dos impurezas fermiónicas dan un flujo del RG entre los mismos puntos fijos, pero a través de distintas trayectorias en el espacio de acoplamientos, asociadas a distintas deformaciones relevantes. En particular, en el caso de dos impurezas el flujo del RG vendrá determinado por el parámetro adimensional m/\tilde{m} .

Capítulo 5

Resultados

“Si hemos hecho lo mejor que pudimos hacer, ya hemos triunfado.”

— Wynn Davis.

Como comentamos al comienzo, nuestro objetivo primario es utilizar herramientas y métodos de la Teoría de Información Cuántica para describir flujos del RG en teorías con bordes. En particular, comentamos que como laboratorio para nuestro trabajo usaríamos un modelo Gaussiano relativista (ver Capítulo 4). Empezaremos estudiando la fidelidad $F(\rho, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}S_{1/2}(\rho||\sigma)}$, donde σ corresponde a un estado arbitrario de referencia (en nuestro caso estará relacionado al punto fijo UV de una BCFT) y ρ es la matriz densidad para el sistema con un flujo relevante del RG. La posibilidad más simple es usar matrices densidades reducidas para intervalos sobre la línea real. Exploramos esto en 5.1, encontrando que la fidelidad tiende a cero y por tanto, la correspondiente medida de distancia asociada $S_{1/2}$ diverge. De esta forma, usando la monotonicidad de las QRRE en α concluimos que $S_\alpha \rightarrow \infty$ sobre la línea real, o sea, las S_α distinguen demasiado los diferentes estados. Vale comentar además que las propiedades de monotonicidad de las S_α no permiten probar el Teorema g cuando cuantizamos el sistema en una superficie de Cauchy a tiempo constante (ver [7]).

Posteriormente, motivados por el descubrimiento en [7] consideramos lo que sucede al cuantizar el sistema en una superficie de Cauchy sobre el cono de luz. En este caso, calculamos la familia de funciones S_α con $\alpha \in [1/2, 1]$, encontrando resultados finitos, y diferentes para distintos valores de α .

5.1. Fidelidad. Superficie de Cauchy a tiempo constante

Necesitamos calcular primeramente los correladores fermiónicos a tiempos iguales C y C' . C' es el correlador para una masa arbitraria, mientras que C corresponde con el caso particular $m = 0$. La forma en la que obtendremos los correladores es partiendo de la propia definición y para ello utilizaremos las autofunciones (4.19).

El Lagrangiano de la red se puede expresar de la siguiente forma

$$L_{red} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \psi_i^\dagger K_{ij} \psi_j, \quad K_{ij} = (\delta_{ij} k_0 + M_{ij}), \quad (5.1)$$

donde, se entiende que índices repetidos se suman y además, la matriz \mathbb{M} es tal que los estados de momento definido la diagonalizan. El correlador C_{ij} es simplemente $C_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \psi_i^\dagger K_{ij}^{-1} \psi_j$. Si ahora introducimos la identidad utilizando la completitud de los estados de momento definidos se puede ver que

$$C_{ij} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dk \Theta(-k) \psi_i^\dagger(k) \psi_j(k) = - \int_0^{-\pi/2} \frac{dk}{2\pi} \psi_i^\dagger(k) \psi_j(k), \quad (5.2)$$

donde, se usó que a $t = 0$ en el espacio de momentos el correlador es un proyector sobre estados de energía negativa [29].

La expresión para la fidelidad (ver 3.7) la mostramos aquí para mayor claridad

$$F(C, C') = \sqrt{\det C \det C'} \det \left[\mathbb{1} + \sqrt{\sqrt{\frac{C}{1-C}} \frac{C'}{1-C'} \sqrt{\frac{C}{1-C}}} \right]. \quad (5.3)$$

Recapitulando, tenemos que al aplicar (5.3) al modelo de Kondo libre, identificaremos C con el correlador fermiónico en el ultravioleta ($m = 0$), y C' con el correlador correspondiente a la teoría con RG no nulo (es decir, $m \neq 0$). En lo que sigue, evaluaremos esta cantidad restringiendo los correladores a un intervalo $x \in (0, R)$. Esto corresponde a una matriz densidad reducida que se obtiene de integrar los grados de libertad en $x \in (R, \infty)$.

De esta manera, la fidelidad nos permitirá estudiar el RG en términos de la distancia cuántica entre los estados de vacío de la teoría UV y la teoría perturbada. La interpolación entre el UV y el IR se logrará incrementando la longitud R del intervalo.

5.1.1. Método Numérico.

Para llevar a cabo el cálculo numérico se utilizó un programa numérico computacional. El mismo se puede dividir en ciertas ‘*etapas*’, las cuales describiremos brevemente.

Primeramente, a partir de la expresión del correlador en función de las autofunciones (4.19) calculamos los elementos de las matrices de correlación C y C' a comparar. Análogamente a la descripción realizada en 4.1.2 asociamos el sitio 1 a la impureza η mientras que los fermiones del bulk los asociábamos a los sitios $j > 1$. Con la anterior asignación, es fácil reconocer que esquemáticamente la estructura de C es como sigue:

$$C = \begin{pmatrix} \langle \eta \eta^\dagger \rangle & \langle \eta \psi_j^\dagger \rangle \\ \langle \eta \psi_i^\dagger \rangle^* & \langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

En el UV , $m = 0$ y la impureza queda desacoplada de los fermiones del bulk y además, el propagador para η tal y como dedujimos en 4.1.1 es simplemente una constante.

Luego de llenar las matrices de correladores sólo resta calcular la fidelidad a través de la expresión (5.3). Ahora bien, $C|_{t=0}$ en el espacio de momentos es un proyector sobre los autoestados de energía positiva y por tanto, sus autovalores yacen en el intervalo $[0, 1]$. De (5.3) vemos que existen términos de la forma $\sqrt{\frac{C}{1-C}}$ los cuales, como es de esperar, poseen autovalores tanto muy pequeños como también muy grandes. Por ejemplo, para matrices de tamaño 40×40 los mayores autovalores son del orden $\sim 10^{62}$ mientras que los menores $\sim 10^{-64}$. Con esto en mente vemos que es necesario usar una precisión alta¹ a la hora de llevar a cabo los cálculos numéricos. El hecho de necesitar precisiones tan grandes para poder obtener resultados consistentes y finitos para F , trae consigo un alto costo computacional, mayor para tamaños más grandes. Particularmente el tamaño más grande con el que pudimos trabajar fue de 230 sitios.

Como ya comentamos queremos calcular y estudiar la Fidelidad F para el modelo Kondo libre y extrapolar los resultados de la teoría regularizada (sobre la red) a la teoría original en el continuo descrita en 4.1.1. Una forma de tender hacia dicho límite es, considerando el espaciado de la red $a = 1$ tal como hicimos en la descripción discreta del modelo y luego tender $\tilde{m} = ma \rightarrow 0$ y $r = R/a \rightarrow \infty$ pero con la condición de que $\tilde{m}r = mR = \text{const}$ donde, \tilde{m} y r son parámetros adimensionales y m , R la masa y la longitud del intervalo, respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos describir el procedimiento seguido de la forma siguiente

1. Elegimos un valor de masa m y del producto mR fijo.
2. Posteriormente tomamos el límite al continuo $(\tilde{m}, r = \frac{mR}{\tilde{m}}) \rightarrow (0, \infty)$. Para cada una de estas iteraciones obtenemos un valor de $F_{discreto}(mR)$.
3. Extrapolamos los puntos obtenidos en el paso anterior a un único valor en el continuo $F_{continuo}(mR)$.²

¹Se realizó un ajuste en función del tamaño N de la matriz para el cual se obtenían resultados finitos para la fidelidad y se observó que la precisión necesaria para esto escaleaba como $10^{\alpha N}$ donde $\alpha \sim 1$. Adoptamos para todos los cálculos realizados $\alpha = 5$.

²Los únicos parámetros libres de la teoría son a, m y R . Al tomar el límite al continuo y obtener de

4. Elegimos un nuevo valor para el producto mR con el mismo valor de masa que tomamos en 1. De vuelta al punto 2.

En la Figura 5.1 se muestra la curva obtenida para la fidelidad para una masa $m = 1/20$ y valores de mR desde $1/8$ hasta 60.

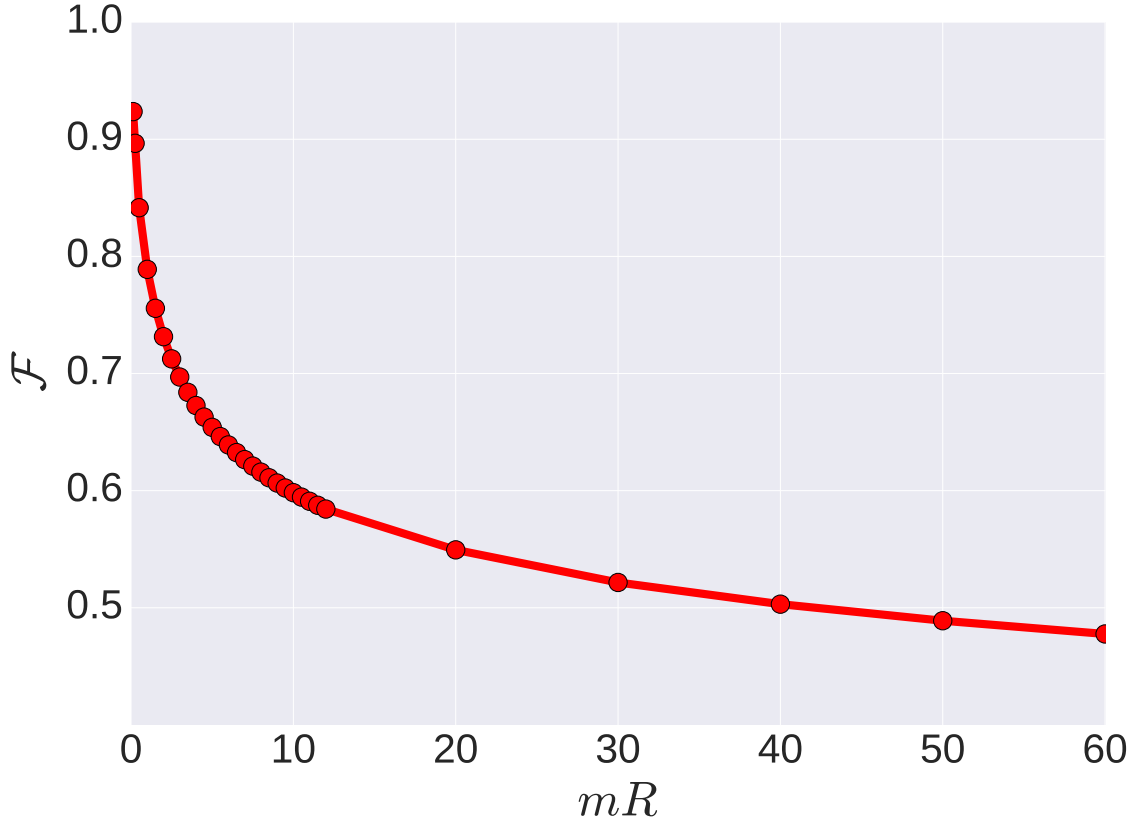


Figura 5.1: Gráfico de F vs mR para un valor de masa $m = 1/20$.

Se observa claramente que F es una magnitud monótona decreciente y además finita. Si la fidelidad es decreciente, entonces la medida de distancia asociada a ella $S_{1/2}(mR) = -2 \log F(mR)$ crece con la longitud del intervalo. En un principio, hasta los puntos donde fuimos capaces explorar, el crecimiento de la medida de distancia $S_{1/2}$ con la longitud del intervalo es lento. Con esto en mente aplicamos un enfoque alternativo para explorar el comportamiento de la fidelidad, y por tanto $S_{1/2}$, en el límite IR ($mR \rightarrow \infty$). En cuanto a la monotonicidad de F observada en la Figura 5.1, vemos que está en correspondencia con la propiedad de F de ser monótona ante operaciones cuánticas que preservan la traza. En este caso la operación cuántica corresponde a elegir un intervalo R y trazar sobre todos los grados de libertad fuera de él. Al aumentar la longitud del intervalo R lo que hacemos es aumentar el tamaño del álgebra.

aquí un único valor finito de F demostramos que esta magnitud no puede depender del espaciado a de la red. Por tanto quedan únicamente los parámetros R y m y, como F es una magnitud adimensional sólo es posible que dependa de los mismos a través del producto mR

5.1.2. Análisis cerca del punto fijo UV

Ahora, analizando perturbativamente la fidelidad en el UV, estudiaremos cual es la dependencia de F con la constante de acoplamiento λ introducida en 4.2, $\lambda \sim m^{1/2}$. Para esto supongamos que σ es el estado cuántico que caracteriza al sistema en el punto fijo UV, T_0 , mientras que ρ caracteriza a la anterior teoría perturbada por un operador relevante \mathcal{O} en la frontera, T_1 . La perturbación anterior viene caracterizada por el parámetro λ . Supongamos que la perturbación es lo suficientemente pequeña, lo que se logra tomando m pequeño, como para considerar que $\rho = \sigma + \delta\sigma$. La fidelidad para estos dos estados cuánticos viene dada entonces por

$$F = \text{Tr} \sqrt{\rho^{1/2} \sigma \rho^{1/2}} = 1 - \frac{1}{8} \text{Tr}(\delta\sigma \sigma^{-1} \delta\sigma) + \dots \quad (5.5)$$

donde se tuvo en cuenta que de las condiciones $\text{Tr} \sigma = 1$ y $\text{Tr} \rho = 1$ sigue que $\text{Tr} \delta\sigma = 0$. Consideremos el desarrollo perturbativo de ρ en el formalismo de integrales de camino. Para esto utilizaremos el formalismo de tiempo Euclídeo que describiremos brevemente siguiendo el procedimiento de [29].

Sea un campo fermiónico $\psi(\vec{x}, t)$, y tomemos la base formada por autovectores del operador de campo a tiempo $t = 0$ como $\psi(\vec{x}, 0)|\alpha\rangle = \alpha(\vec{x})|\alpha\rangle$, donde α es cualquier función real del espacio. La funcional de onda del vacío es:

$$\Psi(\alpha) = \langle 0|\alpha\rangle = N^{-1/2} \int_{\psi(\vec{x}, -\infty)=0}^{\psi(\vec{x}, 0)=\alpha(\vec{x})} D\psi D\bar{\psi} e^{-S_E(\psi, \bar{\psi})}. \quad (5.6)$$

En orden de seleccionar el estado de vacío, la integral funcional es la mitad inferior del espacio y con tiempo Euclídeo. $S_E(\psi, \bar{\psi})$ es la acción Euclídea y $N^{-1/2}$ es la constante de normalización. La matriz densidad de vacío en esta base es $\rho(\alpha, \alpha') = \langle \alpha|0\rangle \langle 0|\alpha'\rangle = \Psi(\alpha)^* \Psi(\alpha')$. En pos de trazar sobre los grados de libertad en \bar{R} , el conjunto complementario a R , consideramos funciones $\alpha = \chi \otimes \alpha_R$, $\alpha' = \chi \otimes \alpha'_R$, que coinciden en \bar{R} y sumar sobre todas las funciones χ posibles. Puesto que los campos fermiónicos anticonmutan a tiempos iguales, la integral funcional y las condiciones de borde están en términos de variables de Grassmann. Para representar la traza usando integrales funcionales tenemos que sumar sobre elementos antidiagonales. Usando (5.6) tenemos que

$$\rho_R(\alpha_R, \alpha'_R) = \int D\chi \Psi(-\chi \otimes \alpha_R)^* \Psi(\chi \otimes \alpha'_R). \quad (5.7)$$

Ahora todas las variables involucradas son tipo Grassmann. El signo menos se conoce del cálculo de la función de partición térmica para fermiones y requiere condiciones antiperiódicas de contorno. Realizando el cambio de variables $\psi \rightarrow -\psi$ en el plano medio superior podemos expresar, finalmente, la matriz densidad reducida de la siguiente

forma

$$\rho_R(\alpha_R, \alpha'_R) = \int_{\psi(\vec{x}, 0^-) = \alpha'_R(\vec{x}), \vec{x} \in R}^{\psi(\vec{x}, 0^+) = -\alpha_R(\vec{x}), \vec{x} \in R} D\psi D\bar{\psi} e^{-S_E(\psi, \bar{\psi})}. \quad (5.8)$$

Volviendo al desarrollo perturbativo para la fidelidad, si consideramos que $S_E(\Phi, \bar{\Phi}) = S_E^0(\Phi, \bar{\Phi}) + \lambda \int dx_E^0 \mathcal{O}(\Phi, \bar{\Phi})$, con $\Phi = (\chi, \psi)$ y $\lambda \mathcal{O} = \frac{i}{2} m^{1/2} (\bar{\psi} \chi - \bar{\chi} \psi)$ (4.2) tenemos que:

$$\rho_R(\alpha_R, \alpha'_R) = \int_{\Phi(\vec{x}, 0^-) = \alpha'_R(\vec{x}), \vec{x} \in R}^{\Phi(\vec{x}, 0^+) = -\alpha_R(\vec{x}), \vec{x} \in R} D\Phi D\bar{\Phi} e^{-S_E^0(\Phi, \bar{\Phi})} \left(1 + \lambda \int dx_E^0 \mathcal{O}(\Phi, \bar{\Phi}) + \dots \right), \quad (5.9)$$

$$\rho_R(\alpha_R, \alpha'_R) = \sigma_R(\alpha_R, \alpha'_R) + \delta\sigma_R(\alpha_R, \alpha'_R), \quad (5.10)$$

con $\delta\sigma_R(\alpha_R, \alpha'_R) = \lambda \int dx_E^0 \int D\Phi D\bar{\Phi} e^{-S_E^0(\Phi, \bar{\Phi})} \mathcal{O}(\Phi, \bar{\Phi})$ a primer orden no trivial en el desarrollo perturbativo. De lo anterior y de (5.5) vemos que cerca del punto fijo UV

$$F \sim 1 - mR, \quad (5.11)$$

o sea, $1 - F$ crece linealmente con mR cerca del punto fijo UV. El estudio en el UV de F permite determinar la dimensión del operador que induce el flujo del RG. Vale aclarar que el análisis anterior no constituye un cálculo perturbativo preciso, o sea, no calculamos los correladores en la expansión (5.5). Básicamente mostramos, por análisis dimensional, que el término subdominante en la expansión perturbativa de la fidelidad para valores $mR \ll 1$ es lineal en mR . Ahora bien, esto no excluye que aparezcan términos de la forma $mR(c_1 + c_2 \log mR)$, que están permitidos en lo que al análisis dimensional se refiere. El término $\log mR$ podría aparecer, en particular, si la integral correspondiente a los correladores en la expansión perturbativa tuviese una divergencia infrarroja.

Para comparar el análisis anterior con los resultados numéricos hicimos un "zoom" cerca de la región de interés de estudio. Para esto seteamos la masa $m = 1/1000$ y nos movimos en el rango de $mR = [0,01; 0,1]$ a través del procedimiento descrito en (5.1.1).

En la Figura 5.2 se muestran los resultados obtenidos con el cálculo numérico para $1 - F$ junto al ajuste de los datos anteriores considerando que la dependencia de $1 - F$ es de la forma $mR(a + b \log(mR)) + c$. En particular, vemos que los datos (línea roja) 'coinciden' con el ajuste logarítmico (línea azul) al punto que ambas curvas aparecen superpuestas en la Figura 5.2, observándose solamente la curva asociada al ajuste.

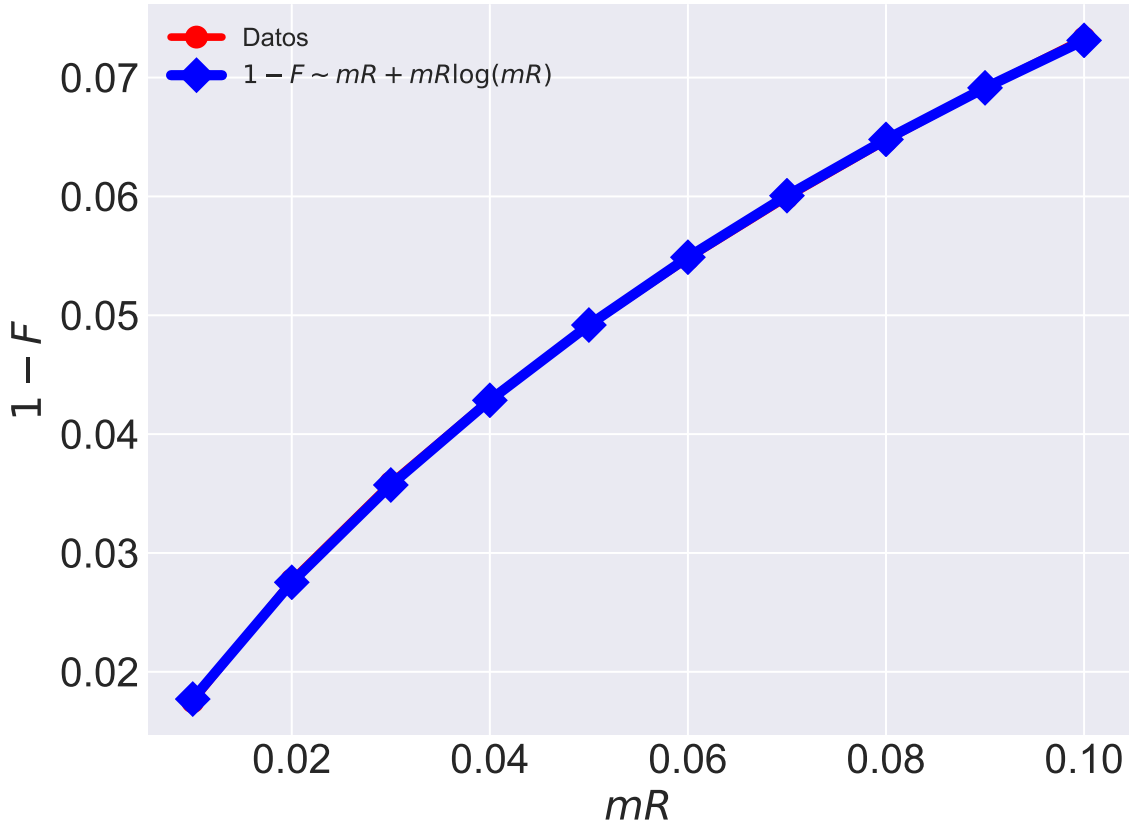


Figura 5.2: Gráfico de $1 - F$ vs mR para un valor de masa $m = 1/1000$ fijo. Se muestra además el ajuste, sobre los resultados obtenidos, de la forma $1 - F \sim mR + mR \log(mR)$.

Concluimos de esta forma que la dependencia cerca del UV de $1 - F$ con el parámetro mR no es lineal, sino que es de la forma $1 - F \sim mR(a + b \log mR)$. Para entender la corrección logarítmica, sería necesario un cálculo más preciso de las correcciones perturbativas. No nos enfocaremos en esto, ya que nuestro objetivo final será formular la teoría sobre superficies de Cauchy nulas.

5.1.3. Análisis cerca del punto fijo IR

Cerca del punto fijo en el IR el intervalo $R \rightarrow \infty$, y por tanto el estado cuántico correspondiente ρ es un estado puro y corresponde además con el estado fundamental de la teoría en este límite. Es fácil ver que la fidelidad entre dos estados cuánticos ρ, σ toma la siguiente forma cuando los estados correspondientes son puros

$$F(\rho, \sigma) = F(\psi, \phi) = |\langle \psi | \phi \rangle|. \quad (5.12)$$

Luego, suponiendo que $|\Phi_0\rangle$ es el estado fundamental de la teoría T_0 y $|\Phi_1\rangle$ el estado fundamental de la teoría T_1 tenemos que $F(\rho_0, \rho_1) = \lim_{IR} |\langle \Phi_0 | \Phi_1 \rangle|$. ¿Cómo hacemos para calcular el solapamiento entre los estados fundamentales de las dos teorías? Para

responder la pregunta anterior escribamos el Hamiltoniano correspondiente a (4.12) utilizando operadores de creación y destrucción fermiónicos sobre la red $\hat{f}_i^\dagger, \hat{f}_i$ pero, con la peculiaridad de que en vez de considerar una red semi-infinita tomamos una cadena finita con N sitios

$$\mathcal{H}_{red}^{Finito} = \sum_{j=0}^N \left(\hat{f}_{j+1}^\dagger \hat{f}_j + \hat{f}_j^\dagger \hat{f}_{j+1} \right) + t(\hat{f}_0^\dagger \hat{f}_{-1} + \hat{f}_{-1}^\dagger \hat{f}_0), \quad (5.13)$$

con $t = m^{1/2}$ el *hopping* entre el primer sitio de la red y la impureza.

Ahora bien, $\mathcal{H}_{red}^{Finito}$ corresponde a un problema de *tight-binding* con enlace a primeros vecinos donde, a la cadena inicial con sitios $i = 0, \dots, N$ se le acopló por un extremo $i = -1$ una impureza enlazada al sitio $i = 0$ con un *hopping* $t = m^{1/2}$ distinto del *hopping* entre los demás sitios de la red, que por simplicidad elegimos igual a 1. La solución al problema anterior es fácil de encontrar numéricamente y, puesto que el $\mathcal{H}_{red}^{Finito}$ es cuadrático en los operadores fermiónicos el estado fundamental es simplemente el estado de vacío semi-lleno, o sea en la base de autoestados $|k\rangle$ corresponde a $|\Phi(t)\rangle = \prod_{k/E(k)<0} \hat{f}_k^\dagger |0\rangle$. Supongamos que consideramos dos teorías distintas, asociadas a 2 valores distintos del parámetro de *hopping* $t_0 = 0, t_1 = t$. Si ahora queremos calcular el solapamiento entre los estados fundamentales de las anteriores teorías, es necesario hacerlo sobre la base de sitios donde tiene sentido el cálculo en cuestión, o sea es necesario rotar los autoestados $|k(t)\rangle$ a la base de sitios $|i\rangle$. Ahora bien, ¿dónde entra esta discusión en nuestra búsqueda de F en el IR? La respuesta a esto reside en que si consideramos el solapamiento entre los dos estados fundamentales $|\Phi(t_0)\rangle, |\Phi(t_1)\rangle \in \mathcal{H}_{red}^{Finito}$ en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ este coincide en valor con la fidelidad entre los estados cuánticos ρ, σ asociados a las teorías T_1, T_0 respectivamente cuando consideramos el límite en el IR.

La expresión que determina el solapamiento entre los dos estados fundamentales de $\mathcal{H}_{red}^{Finito}$ es la siguiente:

$$\langle \Phi(t_0) | \Phi(t_1) \rangle = \langle 0 | \prod_{E(k)<0} \hat{f}'_k \hat{f}_k^\dagger | 0 \rangle, \quad \hat{f}_k^\dagger = \sum_{i=1}^N \alpha_i^k \hat{f}_i^\dagger, \quad \hat{f}'_k = \sum_{j=1}^N \beta_j^k \hat{f}_j. \quad (5.14)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de anticonmutación que verifican los operadores $\hat{f}_i, \hat{f}_j^\dagger$, y el hecho de que estamos tomando valor medio sobre el estado de vacío, la expresión deseada es sencilla de encontrar

$$\langle \Phi(t_0) | \Phi(t_1) \rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_g} \beta_{i_1}^{k_1} \alpha_{i_1}^{k_1} \beta_{i_2}^{k_2} \alpha_{i_2}^{k_2} \dots \beta_{i_g}^{k_g} \alpha_{i_g}^{k_g}, \quad (5.15)$$

donde, el índice g corresponde a la cantidad de k 's que verifican la condición $E(k) < 0$.

En la Figura 5.3 se muestran los resultados obtenidos para un valor fijo de $m = t^2 = 0,01$ y valores de mN en el intervalo $[70, 130]$.

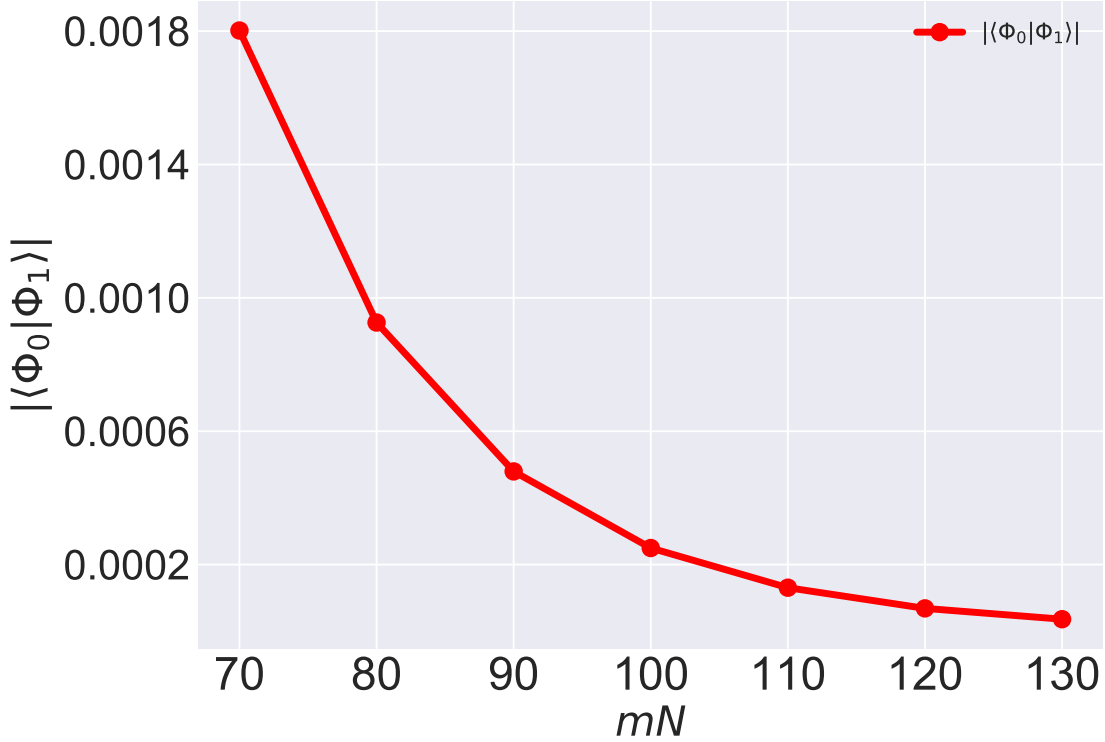


Figura 5.3: Solapamiento entre los estados fundamentales $|\Phi(0)\rangle, |\Phi(t)\rangle$ de la teoría finita en el continuo para $t^2 = m = 0,01$ y valores de $mN \in [70, 130]$.

Se observa que conforme tomamos el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ el valor del solapamiento entre los dos estados fundamentales tiende a cero y en base a esto, tal y como comentamos anteriormente, podemos asegurar que en el IR $F = 0$ y consecuentemente, la medida de distancia asociada a la fidelidad $S_{1/2}(mR \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ es divergente. De la condición de monotonidad de las S_α respecto del parámetro α y del hecho de que S_1 también diverge sobre la superficie de Cauchy a tiempo constante [7], vemos entonces que todas las S_α son divergentes. Mostramos además que los dos estados fundamentales de las teorías que comparamos son ortogonales en el IR, son perfectamente distinguibles. Esto es consistente con el teorema de ortogonalidad de Anderson ([36], [37]), que muestra que dos estados fundamentales del sistema electrónico perturbado por diferentes operadores locales son ortogonales en el límite $n \rightarrow \infty$ o $w \rightarrow 0$, donde n es el número total de electrones y w la energía de los electrones de conducción.

Posteriormente, pasaremos a estudiar las QRRE S_α para el modelo Kondo libre cuando la superficie de Cauchy corresponde con el cono de luz.

5.2. QRRE sobre la línea nula

Con la motivación de obtener resultados finitos que caractericen al grupo de renormalización, consideremos ahora el modelo Kondo sobre segmentos nulos. Cuantizamos la teoría en la superficie $x^- = x^0 - x^1 = \text{const}$. En este modelo quirral, las funciones de dos puntos no triviales sobre la línea nula son las mismas que en la teoría sin impureza debido a que sólo una quiralidad contribuye.

Podemos hacer los cálculos directamente sobre la línea nula en el límite continuo ³. Los correladores para el intervalo nulo tienen la forma de un kernel

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \langle \eta \psi_+^\dagger(x) \rangle \\ \langle \eta \psi_+^\dagger(y) \rangle^* & C_0(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

donde hemos usado que $\langle \eta \eta^\dagger \rangle = 1/2$, y $C_0(x, y) = \langle \psi_+(x) \psi_+^\dagger(y) \rangle$ coincide con el correspondiente correlador en el modelo de Dirac libre sin impureza. La impureza establece correladores con el campo sin cambiar el correlador que el campo quirral establece consigo mismo en el *bulk* sin impureza.

El correlador de η y ψ_+ se obtiene de (4.21) y (4.23),

$$\langle \eta \psi_+^\dagger(x) \rangle = \int_0^\infty dk \left(-\frac{i}{2} \frac{m^{1/2}}{k} \right) (1 + R(k)) e^{-ikx} = \frac{im^{1/2}}{2\pi} e^{mx/2} Ei(-mx/2), \quad (5.17)$$

donde $Ei(x)$ es la función exponencial integral $Ei(x) = -\int_{-x}^\infty dt e^{-t}/t$.

El kernel $C_0(x, y)$ en un intervalo $(0, R)$ puede diagonalizarse, con autofunciones y autovalores

$$\int_0^R dy C_0(x, y) \psi_s(y) = \lambda_s \psi_s(x) \quad (5.18)$$

donde

$$\lambda_s = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\pi s))$$

$$\psi_s(x) = \frac{R^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}(x(R-x))^{1/2}} e^{-i \log(x/(R-x))} \quad (5.19)$$

Las autofunciones están normalizadas respecto al parámetro $s \in (-\infty, \infty)$

$$\int_0^R dx \psi_s(x) \psi_{s'}^*(x) = \delta(s - s') \quad (5.20)$$

³El paso a la línea nula está hecho con detalle en [7]. Solamente comentaremos y mostraremos las expresiones finales.

Usando esta base podemos reescribir el correlador de la siguiente forma

$$C(mR) = \begin{pmatrix} 1/2 & a(s, mR) \\ a^*(s, mR) & \text{diag}(\lambda_s) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

donde

$$a(s, mR) = \int_0^R dx \psi_s(x) \langle \eta \psi_+^\dagger(x) \rangle = \int_0^{mR} dz \frac{i(mR)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{z/2} \text{Ei}(-z/2)}{z^{1/2}(mR-z)^{1/2}} e^{-is \log(\frac{z}{mR-z})} \quad (5.22)$$

Recordemos que, en todas estas expresiones $-\infty < s < \infty$.⁴

Con el objetivo de calcular las QRRE, tenemos que evaluar las resolventes definidas en (3.24). Esto requiere calcular inversas y potencias de los correladores. La matriz densidad σ corresponde con el correlador (5.21) con $m = 0$ (este es el punto fijo UV), mientras que para ρ tenemos que considerar un valor arbitrario para m . Los cálculos son largos pero directos, y los detalles de los pasos seguidos se muestran en el Apéndice B. La expresión final para las QRRE es

$$\begin{aligned} S_\alpha(\rho||\sigma) = & -\frac{\alpha}{1-\alpha} \log 2 + \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty d\beta \frac{\alpha \beta^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{1 + 2\beta^\alpha \cos(\pi\alpha) + \beta^{2\alpha}} \left\{ -\log(\beta + 1) \right. \\ & \left. + \log \left[(\beta - 1) \left(\frac{1}{2} + \int ds |a(s)|^2 \left(\frac{\cosh^2(\pi s)}{1 - e^{-2\pi s/\alpha} \beta} - \frac{2}{1 + \tanh \pi s} \right) \right) + 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

En la Figura 5.4 mostramos el resultado de evaluar numéricamente (5.23) para distintos valores de $1/2 \leq \alpha < 1$. Tal como predijimos de las propiedades generales de las QRRE, las curvas son monótonas crecientes mientras aumentamos el tamaño de la región mR . También, observamos la monotonicidad en α , con $S_\alpha < S_{\alpha'}$ para $\alpha < \alpha'$ y para todos los valores de $mR > 0$. En el caso límite $mR \rightarrow 0$, todas las S_α colapsan a cero, consistentemente con $S_\alpha(\rho||\rho) = 0$. Estas curvas proveen medidas de distancia entre los estados σ y ρ a lo largo del RG, con $mR \rightarrow 0$ correspondiendo con el UV (altas energías), mientras que $mR \rightarrow \infty$ se acerca al límite IR.

Finalmente, evaluemos ahora el límite $mR \gg 1$. En este límite, la integral para los $a(s)$ se aproxima a

$$a(s) \approx e^{is \log mR} \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dz \frac{1}{z^{1/2+is}} e^{z/2} \text{Ei}(-z/2). \quad (5.24)$$

El prefactor $e^{is \log mR}$ no aparece en ninguna de las expresiones, puesto que la única

⁴Para ser precisos, aquí s no contiene al 0. Este valor está tomado en cuenta por el primer elemento de la matriz, puesto que $\lambda_0 = 1/2$. De igual forma, $a(s, mR)$ siempre aparecerá dentro de integrales, y subrayando la contribución de $s = 0$ no cambia los resultados en lo absoluto.

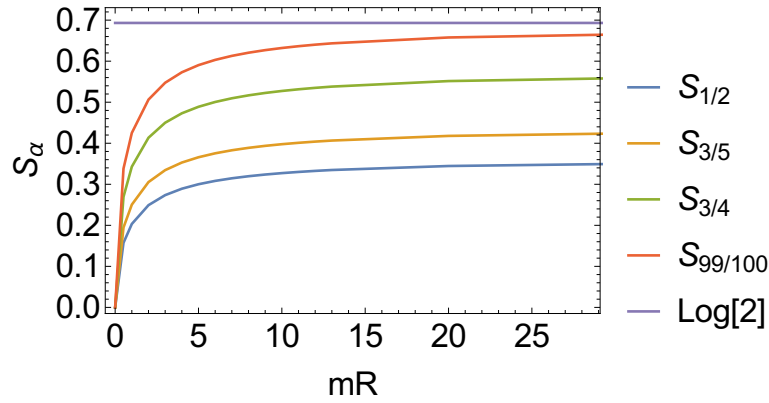


Figura 5.4: QRREs $S_\alpha(\rho||\sigma)$ para el flujo del RG en el modelo Kondo, formulado sobre el cono de luz. Mostramos diferentes valores de α , y el caso límite de $\log 2$ que se obtiene cuando $mR \gg 1$ y $\alpha \rightarrow 1$.

contribución de $a(s)$ es a través de $|a|^2$. La integral la podemos realizar de forma analítica, obteniendo finalmente

$$|a(s)|^2 = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^3(\pi s). \quad (5.25)$$

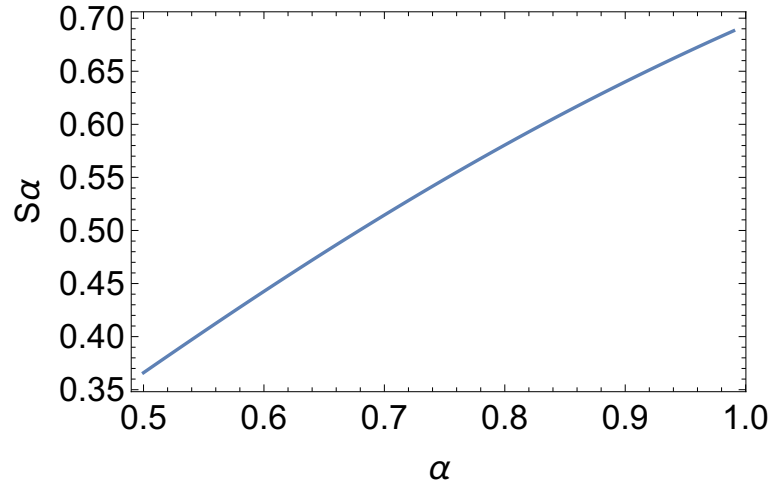


Figura 5.5: S_α en el límite $mR \gg 1$, para diferentes valores de α .

La Figura 5.5 muestra los resultados para S_α cuando $mR \gg 1$. Particularmente, encontramos que estas distancias tienden a un valor final diferente para cada valor de α . Para $\alpha = 1$ se recupera el resultado $\log(g_{UV}/g_{IR}) = \log 2$ para el cambio en la entropía de la impureza [7]. Finalmente, para $\alpha = 1/2$, $e^{-S_{1/2}}$ mide el solapamiento entre las funcionales de onda con y sin perturbación. Obtenemos entonces un resultado finito sobre la superficie de Cauchy nula, proveyendo una manera de evitar la catástrofe de ortogonalidad de Anderson para estos sistemas.

5.3. Modelo con dos impurezas fermiónicas. Comentarios

Una pregunta muy interesante que podemos hacernos es si las S_α son sensibles a la trayectoria del RG entre dos puntos fijos determinados. Es aquí donde entra la versión de modelo Kondo libre con dos impurezas fermiónicas. En particular, vimos que tanto la versión con una impureza como la versión con dos impurezas dan flujos del RG entre los mismos puntos fijos, caracterizados por las condiciones de frontera ‘+’ y ‘-’ entre las componentes *left* y *right* del campo fermiónico del bulk. Estos flujos del RG están asociados a distintas trayectorias en el espacio de acoplamientos, debido a que la deformación relevante que dispara el flujo del RG en cada caso es distinta. Con esto, una forma de responder a la pregunta de si las S_α son sensibles o no a la trayectoria del RG es calculando $S_\alpha(mR \rightarrow \infty)|_{2imp}$ y posteriormente, comparar los resultados con los correspondientes al del modelo con una impureza (Figura 5.5).

Este cálculo queda pendiente como trabajo a futuro.

Capítulo 6

Restricciones sobre el flujo del grupo de renormalización.

“Un hombre no es otra cosa que el producto de sus pensamientos, en lo que piensa es en lo que se convierte.”

— Mahatma Gandhi.

En esta sección analizaremos brevemente algunas implicaciones generales sobre los flujos del grupo de renormalización de las propiedades de monotonicidad de las $S_\alpha(\rho||\sigma)$.

Para matrices densidad reducidas en una región de tamaño típico R , y para un flujo relevante determinado por una escala de energía m , las entropías relativas de Renyi dependerán de la combinación adimensional mR . Las S_α definen entonces de esta manera una ‘distancia’ que caracteriza el RG. El límite $mR \ll 1$ corresponde con el UV, donde la deformación relevante fluye hacia cero y $\rho \rightarrow \sigma$; en este caso, $S_\alpha \rightarrow 0$. Usando (2.22), tenemos entonces que S_α aumenta con mR , señalando una mayor capacidad de distinción entre los dos estados. El límite $mR \gg 1$ parametriza el IR, donde ρ se aproxima a la matriz densidad del otro punto fijo. El flujo del RG será genéricamente no perturbativo, y las S_α serán entonces sensitivas a la trayectoria completa seguida para ir desde el UV al IR. La otra propiedad que jugará un papel fundamental es (2.20), que implica que las $\alpha < 1$ están limitadas por arriba por la entropía relativa S_1 ,

$$S_\alpha(\rho||\sigma) \leq S(\rho||\sigma) \ , \ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1. \quad (6.1)$$

6.1. Flujo del RG de teorías con bordes

Partimos de una CFT definida en $x_1 > 0$ con una frontera en $x_1 = 0$ la cual preserva la mitad de las simetrías conformes, o sea, una BCFT. En general, la frontera puede admitir grados de libertad localizados que se acoplarán a los campos en la teoría del

bulk. La teoría en el UV , que denotamos por $BCFT_{UV}$, es entonces perturbada por un conjunto de operadores locales relevantes en la frontera,

$$S = S_{BCFT_{UV}} + \int dx_0 \lambda_i \phi_i(x_0). \quad (6.2)$$

Esta perturbación puede combinar operadores del bulk (evaluados en $x_1 = 0$) y/o grados de libertad mecánico-cuánticos de la impureza. La perturbación dispara un flujo del RG en la frontera que, asumimos termina en una nueva $BCFT$ que denotamos como $BCFT_{IR}$.

Una $BCFT$ viene caracterizada por la cantidad numérica g que, intuitivamente, mide el número de grados de libertad N_{dof} que están localizados en la frontera. La cantidad intrínseca g puede ser obtenida cómo la parte de la entropía térmica que es independiente del tamaño del sistema [38],

$$S = \frac{c\pi L}{3\beta} + \log g. \quad (6.3)$$

La cantidad $\log g$, también conocida como entropía de borde, disminuye a lo largo del flujo del RG para teorías con borde [38, 39], $\log g_{UV} > \log g_{IR}$, un resultado conocido como Teorema g . La entropía de borde puede obtenerse también de la entropía de entrelazamiento de un intervalo $x_1 \in [0, R)$ [40],

$$S(r) = \frac{c}{6} \log \frac{R}{\epsilon} + c_0 + \log g, \quad (6.4)$$

con ϵ un cut-off ultravioleta y c_0 una constante que determina la contribución del ‘*bulk*’ y que desaparece al tomar la diferencia $\log g_{UV} - \log g_{IR}$.

Sea σ la matriz densidad de la $BCFT_{UV}$ reducida al intervalo $x_1 \in [0, R)$, y ρ la cantidad correspondiente a la teoría (6.2) con un flujo del RG no trivial. Si introducimos el Hamiltoniano modular $\mathcal{H} = -\log \sigma$, podemos escribir la entropía relativa como,

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) = \Delta\langle \mathcal{H} \rangle - \Delta S, \quad (6.5)$$

donde $\Delta\langle \mathcal{H} \rangle = \text{Tr}((\rho - \sigma)\mathcal{H})$, y $\Delta S = S(\rho) - S(\sigma)$. Puesto que la entropía relativa contiene una parte correspondiente a la diferencia entre las entropías de entrelazado de las dos teorías, esta será sensible a los cambios de la entropía de borde $\log(g(R)/g_{UV})$. Sin embargo, sucede que en general el cambio en el Hamiltoniano modular es el término dominante en la entropía relativa, con $\Delta\langle \mathcal{H} \rangle \propto R$.

Una conexión directa entre la entropía relativa y el cambio de la entropía de borde se obtiene al cuantizar sobre una superficie de Cauchy Σ que se aproxima al cono de luz [7]. Esto se ilustra en la Figura 6.1. Sabemos que ΔS es independiente de la

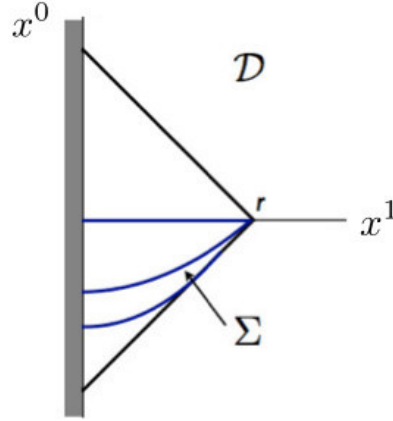


Figura 6.1: Distintas elecciones de la superficie de Cauchy Σ dentro del intervalo $[0, r)$. A medida que la superficie de Cauchy se aproxima al cono de luz, la contribución $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle \rightarrow 0$.

elección de la superficie de Cauchy, pero $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle$ depende de Σ debido a que las dos matrices densidad involucradas evolucionan con diferentes operadores unitarios. En el límite del cono de luz, $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle \rightarrow 0$ (ver [7]), y por tanto

$$S(\rho||\sigma) = \log \frac{g_{UV}}{g(R)}. \quad (6.6)$$

Usando entonces la positividad de la entropía relativa tenemos que $g(R)$ decrece monótonamente bajo el flujo del RG de teorías con bordes, estableciendo así el Teorema g entrópico [7],

$$\log g_{UV} - \log g_{IR} \geq 0. \quad (6.7)$$

En la configuración actual, donde analizamos el flujo del RG para teorías con borde y con la elección de la superficie de Cauchy sobre el cono de luz, la desigualdad (6.1) nos da

$$S_\alpha(\rho||\sigma) \leq \log \frac{g_{UV}}{g(R)} \quad (6.8)$$

para una región $x_1 \in [0, R)$ con uno de sus extremos en la frontera. En particular, en el límite IR $mR \gg 1$, con m la escala de masa asociada con el RG,

$$\lim_{mR \gg 1} S_\alpha(\rho||\sigma) \leq \log \frac{g_{UV}}{g_{IR}}. \quad (6.9)$$

El miembro derecho de esta desigualdad es finito y depende sólo de los puntos fijos UV y IR, y no en la trayectoria específica del RG que los conecta. Vale destacar que esto es una consecuencia de tomar el límite del cono de luz, de forma tal que

$S(\rho||\sigma) = -\Delta S$ depende sólo de los puntos fijos al tomar el límite $mR \rightarrow \infty$. Por otro lado, esta simplificación no tiene lugar para $\alpha < 1$, y esperamos entonces que el miembro izquierdo dependa de la trayectoria del RG.

La ecuación (6.9) impone entonces una restricción a todas las posibles trayectorias del RG que conectan dos BCFTs. El límite superior $\log(g_{UV}/g_{IR}) = -\Delta S$ depende sólo de cantidades intrínsecas de los puntos fijos. Desde el punto de vista de la termodinámica, la ecuación (6.9) se asemeja a la Segunda Ley de la Termodinámica $\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T}$. La entropía térmica es una función de estado, mientras que el calor transferido depende del proceso particular. En el presente contexto, la “función de estado” corresponde con la entropía de borde, la cual depende sólo de las propiedades del punto fijo, mientras que las QRRE, al igual que el calor transferido, es sensible a la trayectoria específica seguida en el espacio de acoplamientos. Una diferencia fundamental entre el caso termodinámico con el caso cuántico es que, en el primer caso existen procesos adiabáticos no triviales sin transferencia de calor; sin embargo, en el caso cuántico no son posibles “flujos del RG adiabáticos”. En otras palabras, $\log g_{UV} - \log g_{IR}$ es siempre estrictamente positivo. Esto sigue del hecho de que $\log g_{UV} - \log g_{IR}$ es la entropía relativa, la cual se anula para $\rho = \sigma$. Pero, en el caso en que las dos matrices densidad coincidan, tenemos que todos los correladores son iguales, y consecuentemente no tiene lugar ningún flujo del RG.¹

Finalmente, vale comentar que para $mR \gg 1$, esperamos que la fidelidad tienda al solapamiento de las correspondientes funcionales de onda de vacío. La desigualdad (6.9) para $\alpha = 1/2$ conduce entonces a

$$-2 \log |\langle \Psi_\rho | \Psi_\sigma \rangle| \leq \log \frac{g_{UV}}{g_{IR}}. \quad (6.10)$$

Las funcionales de onda están definidas en el pasado (o futuro) infinito nulo. El miembro derecho finito implica que existe un solapamiento no nulo $|\langle \Psi_\rho | \Psi_\sigma \rangle| \neq 0$. Esto es, sin duda alguna, un resultado muy interesante, el cual nos provee de una forma de evitar la catástrofe de ortogonalidad de Anderson en sistemas relativistas. El resultado encontrado por Anderson [14] afirma que, bajo leves suposiciones, la función de onda del estado fundamental de un sistema fermiónico de muchos cuerpos $|\Psi'\rangle$ en presencia de una perturbación local es ortogonal al estado fundamental sin perturbar, $|\langle \Psi | \Psi' \rangle| = 0$. De hecho, si trabajásemos en una superficie de Cauchy a tiempo constante, esperamos el mismo resultado para $|\langle \Psi_\rho | \Psi_\sigma \rangle|$ en flujos del RG para teorías con bordes más generales que el que hemos estamos considerando. Sin embargo, la ortogonalidad es evitada al tomar el límite del cono de luz. El solapamiento finito está garantizado por el hecho

¹Esto es también una consecuencia del resultado obtenido en [39], donde se relaciona $\log(g_{UV}/g_{IR})$ a una integral de una función de dos puntos de la traza del tensor de energía-momento. Esta función de dos puntos se anula si y sólo si la traza se anula como operador, y en dicho caso no existe flujo del RG alguno.

de que la entropía relativa es finita en este límite, implicando entonces que en el límite del cono de luz ambas teorías son menos distinguibles. Sería interesante entender otras consecuencias de este resultado.

6.1.1. Flujos del RG en dimensiones $d \geq 2$

Consideremos ahora flujos del RG en dimensión d del espacio-tiempo, donde los puntos fijos –denotados por CFT_{UV} y CFT_{IR} – corresponden con CFT unitarias invariantes de Poincaré. Estos flujos se producen al prender deformaciones relevantes en CFT_{UV} ,

$$S = S_{CFT_{UV}} + \int d^d x g \mathcal{O} \ , \ \Delta_{\mathcal{O}} \leq d, \quad (6.11)$$

con $\Delta_{\mathcal{O}}$ la dimensión de escaleo de \mathcal{O} en el punto fijo UV. La construcción del cono de luz expuesta de manera resumida en la sección anterior ha sido extendida al presente caso en [8], y ahora nos dedicaremos a examinar las implicaciones de (6.1).

Nuevamente introducimos dos matrices densidad reducidas σ y ρ , asociadas a la esfera $r \leq R$; σ corresponde a la CFT_{UV} , mientras que ρ corresponde a la teoría descrita por (6.11). Cada una de las matrices densidad se obtiene partiendo del estado de vacío $|0\rangle\langle 0|$ de la teoría correspondiente, y posteriormente trazando sobre los grados de libertad que se encuentran en el complemento de la esfera. Ambas teorías poseen el mismo contenido operatorial, pero evolucionan con distintos Hamiltonianos. Las QRREs $S_{\alpha}(\rho_V || \sigma_V)$ proveen medidas de distancia para el RG. Podemos evaluar las $S_{\alpha}(\rho_V || \sigma_V)$ sobre diferentes superficies de Cauchy dentro del dominio causal de dependencia en V (Figura 6.1), y nos centraremos en aquellas superficies que se acercan al cono de luz.

Centrémosnos primeramente en dimensión espacio-temporal $d = 2$. En el trabajo [8] se mostró que la contribución del Hamiltoniano modular a la entropía relativa se anula en el límite del cono de luz, como sucedió para flujos del RG de teorías con bordes. Sea que denotamos por m la escala de masa característica de (6.11), la entropía relativa en el límite de largas distancias $R \gg 1/m$ tiene la forma siguiente [8]

$$S(\rho || \sigma) = -\Delta S \approx \frac{c_{UV} - c_{IR}}{3} \log(mR), \quad (6.12)$$

donde c es la carga central de la CFT. De esta forma, usando la positividad de la entropía relativa tenemos una prueba alternativa del Teorema c , $c_{UV} \geq c_{IR}$.² Combinando esto con (6.1), encontramos las siguientes restricciones sobre trayectorias del RG:

$$\lim_{mR \gg 1} S_{\alpha}(\rho || \sigma) \leq \frac{c_{UV} - c_{IR}}{3} \log(mR). \quad (6.13)$$

²La primera prueba de este teorema fue dada por Zamolodchikov, basándose en correladores locales de QFTs [2].

De forma similar a (6.9), tenemos aquí una función de la trayectoria acotada por encima por una cantidad que es intrínseca a los puntos fijos. Concluimos con esto que las distancias $S_\alpha(\rho||\sigma)$ pueden crecer a lo sumo logarítmicamente a grandes distancias, y con un coeficiente que es más pequeño que $(c_{UV} - c_{IR})/3$.

En dimensiones mayores, la entropía relativa en el límite del cono de luz viene dominada por el término de área μ_{d-2} en la entropía de entrelazado,

$$S(R) = \mu_{d-2} R^{d-2} + \dots \quad (6.14)$$

(Vale notar que para $d = 2$, la carga central c aparece también como el término de área dominante.) Para deformaciones relevantes con dimensión $\Delta_{\mathcal{O}} < (d + 2)/2$, la contribución del Hamiltoniano modular a la entropía relativa se anula, y [8]

$$S(\rho||\sigma) \approx (\mu_{UV} - \mu_{IR}) R^{d-2} \quad (6.15)$$

en el límite $mR \gg 1$. De esta forma, arrivamos a la siguiente condición

$$\lim_{mR \gg 1} S_\alpha(\rho||\sigma) \leq (\mu_{UV} - \mu_{IR}) R^{d-2}. \quad (6.16)$$

A diferencia de los casos anteriores, $\mu_{UV} - \mu_{IR}$ no corresponde con una combinación de cantidades intrínsecas. Sin embargo, sigue siendo un objeto interesante en Teorías Cuánticas de Campos. Viene dado por una integral del correlador del tensor de energía-impulso [41, 42]

$$\mu_{UV} - \mu_{IR} = -\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle, \quad (6.17)$$

donde Θ es la traza del tensor de energía-impulso. Esta cantidad es finita cuando $\Delta_{\mathcal{O}} < (d + 2)/2$, y depende de la trayectoria del RG.³ También, es proporcional a la renormalización de la constante de Newton debido a los grados de libertad del campo en el espacio plano.

³Por ejemplo, podemos deformar un bosón ó fermión libre por un término de masa y con esto evaluar (6.17). El resultado depende del parámetro de masa, el cual no es intrínseco al punto fijo libre.

Capítulo 7

Conclusiones

“Creo firmemente que un hombre sólo da lo mejor de sí cuando hace cosas que disfruta de verdad.”

— Jack Nicklaus.

En este trabajo estudiamos las Entropías Cuánticas Relativas de Renyi para flujos del RG en Teoría Cuántica de Campos. Estas medidas proveen distancias características que caracterizan nuevos aspectos del RG. Presentamos expresiones explícitas para las QRREs en teorías de campos libres, enfocándonos en particular en sistemas fermiónicos. En este caso, estudiamos un modelo Kondo relativista 4.1.1 previamente introducido en [7], que posee la particularidad de ser gaussiano y aún así conducir a un flujo no trivial de RG, expresado en el flujo de las condiciones de frontera '+' y '-' para los fermiones del bulk. Para este modelo, evaluamos numéricamente las S_α . Mientras que los resultados obtenidos sobre la línea real son divergentes, los resultados en el límite del cono de luz son finitos. Los resultados sobre el límite del cono de luz muestran la irreversibilidad del RG, y esperamos que dependan de la trayectoria seguida en el espacio de acoplamientos. Además, los resultados finitos sobre el límite del cono de luz, proveen una vía de evitar la catástrofe de ortogonalidad de Anderson para el modelo de estudio.

Usando propiedades de las S_α , obtuvimos restricciones que necesita obedecer toda trayectoria consistente del RG. Estas condiciones son más fuertes (restrictivas) para flujos del RG en teorías con borde y para flujos en dimensión espacio-temporal $d = 2$ mostramos que las S_α están acotadas por arriba por diferencias de cantidades intrínsecas a los puntos fijos (entropía de la impureza ó carga central). En dimensiones mayores, la cota viene dada por el término de área en la entropía de entrelazamiento, la cual mide también la renormalización de la constante de Newton. Para flujos del RG en teorías con bordes, y flujos en dos dimensiones espacio-temporales, estas condiciones se asemejan a la Segunda ley de la termodinámica. Esto apunta hacia la naturaleza termodinámica del RG, y sería interesante explorar esta analogía aún más.

Nuestro análisis sugiere varias direcciones a seguir. En primer lugar, sería interesante conocer si las QRRE poseen una dependencia no trivial ante diferentes trayectorias del RG. En esta línea, el próximo paso a seguir sería repetir los cálculos numéricos, que realizamos para un impureza fermiónica, en el caso de dos impurezas fermiónicas discutido en la Sección 4.2. De forma más general, sería útil encontrar una condición más directa entre una dada trayectoria del RG y las S_α . El rango $\alpha > 1$, no acotado por la entropía relativa, puede también proveer información no trivial acerca del RG. Además, sería interesante estudiar flujos del RG para distintas dimensiones y con defectos de diferente codimensión. Finalmente, sería importante desarrollar herramientas para evaluar estas distancias para teorías conformes más generales y sus flujos del RG.

Apéndice A

S_α para estados Gaussianos

“Es durante nuestros momentos más oscuros cuando debemos centrarnos para ver la luz.”

— Aristóteles.

En este apéndice mostramos los cálculos explícitos de $S_\alpha(\rho||\sigma)$ para estados Gaussianos. Para los fines de este trabajo, estos estados aparecen como matrices densidades reducidas del vacío de Teorías Cuánticas de Campos libres, pero también pueden surgir en contextos más generales, donde los Hamiltonianos no sean cuadráticos.

A.1. Fermiones

En esta sección centramos nuestra atención en estados fermiónicos Gaussianos, y derivamos (3.7). Un procedimiento similar fue usado para la fidelidad en [32].

Consideremos un sistema de modos fermiónicos ψ_i, ψ_j^\dagger descriptos por un conjunto de operadores de Majorana $w_I = (\psi_j + \psi_j^\dagger, i(\psi_j - \psi_j^\dagger))$. En términos de estas variables, la función de correlación de dos puntos es $\mathcal{C}_{IJ} = \frac{1}{2}\langle[w_I, w_J]\rangle$. La matriz compleja \mathcal{C} es imaginaria y antisimétrica. Ahora, consideremos un estado fermiónicos Gaussiano escrito en la siguiente forma

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{i}{4} \sum_{IJ} G_{IJ} w_I w_J \right), \quad (\text{A.1})$$

con G real and antisimétrico. Es posible, entonces, llevar a G a su forma canónica por medio de una matriz ortogonal O

$$G = O^T \bigoplus_{k=1} \begin{pmatrix} 0 & g_k \\ -g_k & 0 \end{pmatrix} O, \quad (\text{A.2})$$

donde $\pm ig_k$ son los autovalores de G . Ahora, sea $r_I = \sum_K Q_{IK} w_K$ los nuevos operadores

de Majorana. En esta nueva base, encontramos la siguiente expresión para el estado ρ

$$\rho = \frac{1}{Z} \prod_{k=1} \left(\cosh \left(\frac{g_k}{2} \right) - i \sinh \left(\frac{g_k}{2} \right) r_{2k-1} r_{2k} \right). \quad (\text{A.3})$$

El valor de la constante de normalización Z queda fijado al requerir que $\text{Tr } \rho = 1$,

$$\text{Tr } \rho = 1 \Rightarrow Z = \sqrt{\det \left[2 \cosh \left(i \frac{G}{2} \right) \right]}, \quad (\text{A.4})$$

donde usamos que los autovalores de iG son $\pm g_k$. G y la matriz de correlación están relacionados por

$$\mathcal{C} = -\frac{4i}{Z} \frac{\partial Z}{\partial G} = \tanh \left(\frac{iG}{2} \right). \quad (\text{A.5})$$

Evaluemos ahora las $S_\alpha(\rho||\sigma)$ para estados de la forma (A.1). Recordando que (3.6), se sigue que

$$\left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \propto \exp \left(\frac{\alpha}{4} \sum_{IJ} \log \left(e^{-i\frac{1-\alpha}{2\alpha} G} e^{-iG'} e^{-i\frac{1-\alpha}{2\alpha} G} \right)_{IJ} w_I w_J \right). \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, usando (A.6), (3.6) y (A.4) encontramos para las QRRE

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \frac{\det \left[\cosh \left(\frac{\alpha}{2} \log \left(e^{-i\frac{1-\alpha}{2\alpha} G} e^{-iG'} e^{-i\frac{1-\alpha}{2\alpha} G} \right) \right) \right]^{1/2}}{\left(\sqrt{\det \left[\cosh \left(i \frac{G}{2} \right) \right]} \right)^{1-\alpha} \left(\sqrt{\det \left[\cosh \left(i \frac{G'}{2} \right) \right]} \right)^\alpha}. \quad (\text{A.7})$$

Con el objetivo de expresar las QRRE como función de los correladores fermiónicos definimos la siguiente parametrización, conveniente para lo que sigue

$$T = e^{iG}, \quad \mathcal{C} = \frac{T-1}{T+1}, \quad T^T = T^{-1}, \quad T^\dagger = T, \quad (\text{A.8})$$

en términos de la cual

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\det \left[1 + \left(T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} T' T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \right]^{1/2}}{\left(\sqrt{\det[1+T]} \right)^{1-\alpha} \left(\sqrt{\det[1+T']} \right)^\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Por último, tomamos en cuenta que estamos interesados en aquellos modelos con simetría ante conjugación de carga, que fija $\text{Re}(C_{ij}) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$. La matriz \mathcal{C} se escribe entonces

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2\text{Im}(C) & 0 \\ 0 & 2\text{Im}(C) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Usando (A.10) y (A.9) llegamos a nuestro resultado final.

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\text{Tr} \log(1 - C) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{Tr} \log(1 - C') \quad (\text{A.11})$$

$$- \frac{1}{1 - \alpha} \text{Tr} \log \left[1 + \left(\left(\frac{C}{1 - C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \frac{C'}{1 - C} \left(\frac{C}{1 - C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \right].$$

A.2. Bosones

Para bosones, consideremos estados Gaussianos de la forma

$$\rho_V \propto \exp \left(- \sum_{i,j \in V} (M_{ij} \phi_i \phi_j + N_{ij} \pi_i \pi_j) \right), \quad (\text{A.12})$$

sin términos de la forma $\phi\pi$. Esto aparece naturalmente en sistemas con invariancia ante inversión temporal. Teorías Cuánticas de Campos libres bosónicas de la forma discutida en la Sección 3.2 constituyen un caso especial; ver (3.12).

Llevando a cabo una transformación de Bogoliubov de la misma forma que en in [29], se obtiene

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2} Q^T G Q}, \quad (\text{A.13})$$

donde $Q_I = (\phi_j, \pi_j)$ y

$$G = S \text{diag}(\epsilon, \epsilon) S^T, \quad (\text{A.14})$$

con S una matriz simpléctica, o sea $S^T \Omega S = \Omega$.¹ Es útil también introducir la matriz de covarianza

$$V_{IJ} = \frac{1}{2} \langle \{Q_I, Q_J\} \rangle_\rho = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

La transformación de Bogoliubov que diagonaliza a G también diagonaliza a V ,

$$V = S' \text{diag}(\nu, \nu) S'^T, \quad (\text{A.16})$$

donde $\{\nu_k\}$ son los autovalores de la matriz de correlación $C = \sqrt{X P}$, y las matrices en (A.14) y (A.16) están relacionadas mediante $S' = \Omega S$. Además, los autovalores correspondientes obedecen

$$\nu_k(\epsilon_k) = \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\epsilon_k}{2} \right). \quad (\text{A.17})$$

Esto se puede ver de igual manera del estudio de un solo modo bosónico. Puesto que G y $\Omega V \Omega$ son diagonalizadas por la misma matriz simpléctica S (pues $S' = \Omega S$), la

¹Esta última expresión se conoce como forma normal de Williamson para la matriz G . Esta diagonalización se aplica a cualquier matriz real, cuadrada y definida positiva.

ecuación (A.17) puede escribirse como una identidad matricial

$$V = \frac{1}{2} \coth \left(\frac{i\Omega G}{2} \right) i\Omega. \quad (\text{A.18})$$

Ver también [34] para una derivación en término de acciones simplécticas.

Ahora, concentrémosnos en el factor de normalización en (A.13),

$$Z = \text{Tr} e^{-\frac{1}{2}Q^T G Q}. \quad (\text{A.19})$$

Cuando G es diagonal (o sea, V es diagonal) entonces

$$Z = \prod_i \left(\frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i(\nu)}{2}} - e^{-\frac{\epsilon_i(\nu)}{2}}} \right) = \prod_i \sqrt{\nu_i^2 - 1/4} = \det \left[V_D + \frac{i\Omega}{2} \right]^{1/2}, \quad (\text{A.20})$$

donde $V_D = \text{diag}(\nu, \nu)$. Esto es invariante ante la transformación simpléctica (A.16), y entonces en el caso más general no diagonal

$$Z = \det \left[V + \frac{i\Omega}{2} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.21})$$

Es también posible escribir Z en la siguiente

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\det[2 \sinh(\frac{i\Omega G}{2}) i\Omega]}}. \quad (\text{A.22})$$

Nos encontramos listos ahora para calcular las QRRE. En términos de las variables Q variables, y tomando en cuenta los factores de normalización,

$$\text{Tr} \left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha = \frac{\text{Tr} \left(e^{-\frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{2\alpha} Q^T G Q} e^{-\frac{1}{2} Q^T G' Q} e^{-\frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{2\alpha} Q^T G Q} \right)^\alpha}{\det[2 \sinh(\frac{i\Omega G}{2}) i\Omega]^{-\frac{1-\alpha}{2}} \det[2 \sinh(\frac{i\Omega G'}{2}) i\Omega]^{-\frac{\alpha}{2}}}. \quad (\text{A.23})$$

El producto de estados Gaussianos en (A.23) se realiza usando (3.14), conduciendo a una expresión de la forma $\text{Tr} e^{-\frac{1}{2}Q^T G'' Q}$ con

$$i\Omega G'' = \alpha \log e^{i \frac{1-\alpha}{2\alpha} \Omega G} e^{i\Omega G'} e^{i \frac{1-\alpha}{2\alpha} \Omega G}. \quad (\text{A.24})$$

Esta última traza es nuevamente una función de partición de la forma (A.19), y puede ser evaluada en términos de (A.22) y la correspondiente matriz G'' . Juntando todos estos resultados arriamos a

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\det[\sinh(\frac{i\Omega G}{2}) i\Omega]^{-\frac{1-\alpha}{2}} \det[\sinh(\frac{i\Omega G'}{2}) i\Omega]^{-\frac{\alpha}{2}}}{\det \left[\sinh \left(\frac{\alpha}{2} \log e^{i \frac{\Omega G}{2}} e^{i G'} e^{i \frac{\Omega G}{2}} \right) i\Omega \right]^{1/2}}. \quad (\text{A.25})$$

Es conveniente introducir la parametrización $T = e^{i\Omega G}$, y reescribir

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\det [T-1]^{\frac{1-\alpha}{2}} \det [T'-1]^{\frac{\alpha}{2}}}{\det \left[(T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} T' T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^\alpha - 1 \right]^{1/2}}. \quad (\text{A.26})$$

Usando las relaciones (A.18) y la definición de T encontramos

$$\det [T-1] = \frac{1}{\det [Vi\Omega - \frac{1}{2}]} = \frac{1}{\det [\frac{1}{4} - C^2]}. \quad (\text{A.27})$$

Solo resta simplificar el término que contiene potencias no triviales de T , $(T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} T' T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^\alpha$. Para este propósito estudiemos la estructura de las matrices T . Usando nuevamente (A.18) y $T = e^{i\Omega G}$ encontramos que

$$T = \frac{V + \frac{i\Omega}{2}}{V - \frac{i\Omega}{2}} = \begin{pmatrix} X & i/2 \\ -i/2 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -i/2 \\ i/2 & P \end{pmatrix}^{-1}. \quad (\text{A.28})$$

Calculando la inversa de la matriz y tomando los productos matriciales obtenemos

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} X & i/2 \\ -i/2 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \frac{1}{C^2 - \frac{1}{4}} & \frac{i}{2} P \frac{1}{C^2 - \frac{1}{4}} P^{-1} \\ -\frac{i}{2} \frac{1}{C^2 - \frac{1}{4}} & P^{-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{C^2 - \frac{1}{4}} P^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{C^2 + \frac{1}{4}}{C^2 - \frac{1}{4}} & i \frac{C^2}{C^2 - \frac{1}{4}} P^{-1} \\ -i P \frac{1}{C^2 - \frac{1}{4}} & P \frac{C^2 + \frac{1}{4}}{C^2 - \frac{1}{4}} P^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Sustituyendo (A.27) en (A.26) arrivamos al resultado deseado para las S_α ,

$$\begin{aligned} S_\alpha(\rho||\sigma) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(\frac{1}{4} - C^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left(\frac{1}{4} - C'^2 \right) \\ &\quad + \frac{1/2}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left(\left(T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} T' T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha - 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde T viene dado por (A.29). Notemos que el resultado depende no solamente de C , sino también de P (o X).

Apéndice B

QRRE en el modelo Kondo libre

“El poder de la imaginación nos hace infinitos.”

— John Muir.

En este Apéndice daremos algunos detalles de los cálculos de las resolventes y de las S_α para nuestro modelo Kondo sobre la línea nula.

Escribamos el correlador (5.16) en notación tensorial

$$C'_{mn} = \lambda_m \delta_{mn} + u_m a_n^* + a_m u_n. \quad (\text{B.1})$$

Aquí $u_m = \delta_{m0}$, y los índices $m, n = -\infty, \dots, \infty$ (incluyendo 0). Notamos las siguientes propiedades

$$u^2 = 1, \quad u \cdot a = 0, \quad u \cdot \lambda = 1/2. \quad (\text{B.2})$$

La matriz inversa la escribimos de la siguiente forma

$$(C'^{-1})_{mn} = \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\lambda \cdot u} \right) u_m u_n - \gamma^{-1} \left(u_m \frac{a_n^*}{\lambda_n} + u_n \frac{a_m}{\lambda_m} \right) + \lambda_m^{-1} \delta_{mn} + \gamma^{-1} \frac{a_m a_n^*}{\lambda_m \lambda_n}, \quad (\text{B.3})$$

donde hemos definido

$$\gamma \equiv \lambda \cdot u - \sum_n \frac{|a_n|^2}{\lambda_n}. \quad (\text{B.4})$$

Esta inversa puede obtenerse al proponer una combinación lineal de tensores de rango dos y luego fijano los coeficientes de forma tal que $C^{-1}C = \mathbf{1}$. Con este resultado, calculamos la resolvente invirtiendo $C' - \beta$, encontramos

$$R(C', \beta) = \frac{1}{(\lambda - \beta) \cdot u - \sum_n \frac{|a_n|^2}{\lambda_n - \beta}} \left(1 + \sum_m \frac{|a_m|^2}{(\lambda_m - \beta)^2} \right) - \frac{1}{(\lambda - \beta) \cdot u} + \sum_m \left(\frac{1}{\lambda_m - \beta} + \frac{1}{\beta} \right). \quad (\text{B.5})$$

Donde todas las sumas deben ser entendidas cómo integrales. Notamos que $(C)_{mn} = \lambda_m \delta_{mn}$.

Ahora nos enfocamos en el cálculo análogo para la matriz M

$$M = \left(\frac{C}{1-C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \frac{1}{1-C'} \left(\frac{C}{1-C} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} - \left(\frac{C}{1-C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (\text{B.6})$$

y su resolvente. Calculando $(1-C')^{-1}$ usando (B.3), tenemos que

$$(M - \beta)_{pq} = (\gamma^{-1} - 2) u_p u_q + \gamma^{-1} (u_p \tilde{a}_q^* + u_q \tilde{a}_p) + \left(\left(\frac{\lambda_p}{1-\lambda_p} \right)^{1/\alpha} - \beta \right) \delta_{pq} + \gamma^{-1} \tilde{a}_p \tilde{a}_q^*. \quad (\text{B.7})$$

Aquí hemos definido

$$\tilde{a}_p \equiv \left(\frac{\lambda_p}{1-\lambda_p} \right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \frac{a_p}{1-\lambda_p}. \quad (\text{B.8})$$

También usamos el hecho de que γ es invariante bajo $\lambda_n \rightarrow 1 - \lambda_n$, usando las expresiones explícitas para λ_n y a_n . Durante los cálculos ciertos factores de la forma $\lambda \cdot u / (1 - \lambda \cdot u)$ se simplificaron a 1 y para ver esto basta recordar que $\lambda \cdot u = 1/2$.

Procedemos de la misma forma, proponiendo una inversa

$$(M - \beta)^{-1}_{qn} = \left(\left(\frac{\lambda_p}{1-\lambda_p} \right)^{1/\alpha} - \beta \right)^{-1} \delta_{qn} + \bar{\alpha} u_q u_n + \bar{\beta} (u_q f_n \tilde{a}_n^* + u_n f_q \tilde{a}_q) + \eta f_q \tilde{a}_q f_n \tilde{a}_n^* \quad (\text{B.9})$$

y fijando los coeficientes. El resultado es

$$\begin{aligned} f_p &= \left(\left(\frac{\lambda_p}{1-\lambda_p} \right)^{1/\alpha} - \beta \right)^{-1} \\ \bar{\alpha} &= \frac{1}{\beta - 1} - \frac{\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2}{(\beta + 1)(\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2) - 1} \\ \bar{\beta} &= \frac{1}{(\beta + 1)(\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2) - 1} \\ \eta &= -\frac{\beta + 1}{(\beta + 1)(\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2) - 1}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

La traza de la inversa puede evaluarse ahora fácilmente y da

$$\text{Tr} \frac{1}{M - \beta} = \sum_n \left(\left(\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \right)^{1/\alpha} - \beta \right)^{-1} + \bar{\alpha} + \eta \sum_n f_n^2 |\tilde{a}_n|^2, \quad (\text{B.11})$$

usando $u^2 = 1$ y $u \cdot \tilde{a} = 0$. Juntando todo lo que tenemos,

$$R(M, \beta) = \int ds \left(\frac{1}{e^{2\pi s/\alpha} - \beta} + \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{1-\beta} - \frac{\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2 + (\beta + 1) \sum_n f_n^2 |\tilde{a}_n|^2}{(\beta + 1)(\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2) - 1} \quad (\text{B.12})$$

con

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{2} - \int ds \frac{|a(s)|^2}{1 + \frac{\tanh \pi s}{2}} \\
\sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2 &= 4 \int ds \frac{\cosh^2(\pi s)}{1 - e^{-2\pi s/\alpha} \beta} |a(s)|^2 \\
\sum_n f_n^2 |\tilde{a}_n|^2 &= 4 \int ds \frac{\cosh^2(\pi s)}{(e^{\pi s/\alpha} - e^{-\pi s/\alpha} \beta)^2} |a(s)|^2.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Es claro que para $mR = 0$, $S_\alpha(C||C) = 0$. De esta forma, podemos substraer la parte con $mR = 0$ de la expresión correspondiente a mR finito, término a término, y esto hará que las integrales sean explícitamente finitas. El resultado final es

$$\begin{aligned}
S_\alpha(\rho||\sigma) &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \int_1^\infty d\beta \left(\frac{1}{1/2 - \beta - \int \frac{|a_s|^2}{\lambda_s - \beta}} \left(1 + \int \frac{|a_s|^2}{(\lambda_s - \beta)^2} \right) - \frac{1}{1/2 - \beta} \right) \\
&\quad - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty d\beta \frac{\text{Im} \log(1 + \beta^\alpha e^{i\pi\alpha})}{\pi} \left(\frac{1}{1+\beta} + \frac{\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2 + (-\beta + 1) \sum_n f_n^2 |\tilde{a}_n|^2}{(-\beta + 1)(\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2) - 1} \right).
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Las sumas (integrales) de \tilde{a} en la última línea deben ser evaluadas en $-\beta$.

Usamos ahora que

$$\partial_\beta \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2 = - \sum_n f_n^2 |\tilde{a}_n|^2, \tag{B.15}$$

para poder integrar por partes en (B.14). El resultado es

$$\begin{aligned}
S_\alpha(\rho||\sigma) &= \frac{1}{\pi} \frac{-1}{1-\alpha} \int_0^\infty d\beta \frac{\alpha \beta^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{1 + 2\beta^\alpha \cos(\pi\alpha) + \beta^{2\alpha}} \left\{ \log(1 + \beta) \right. \\
&\quad \left. - \log \left((-1 + \beta) \left(\gamma + \sum_n f_n |\tilde{a}_n|^2 \right) + 1 \right) \right\} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \log 2.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Luego de cambiar las sumas formales por sus integrales en el límite continuo, esta es la expresión (5.23) que aparece en el texto principal.

Bibliografía

- [1] Wilson, K. G., Kogut, J. B. The Renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, **12**, 75–200, 1974. [iv](#), [3](#)
- [2] Zamolodchikov, A. B. Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.*, **43**, 730–732, 1986. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.43,565(1986)]. [2](#), [47](#)
- [3] Casini, H., Huerta, M. A Finite entanglement entropy and the c-theorem. *Phys. Lett.*, **B600**, 142–150, 2004. [2](#), [3](#)
- [4] Casini, H., Huerta, M. On the RG running of the entanglement entropy of a circle. *Phys. Rev.*, **D85**, 125016, 2012. [2](#), [3](#)
- [5] Komargodski, Z., Schwimmer, A. On Renormalization Group Flows in Four Dimensions. *JHEP*, **12**, 099, 2011. [2](#)
- [6] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Markov Property of the Conformal Field Theory Vacuum and the a Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **118** (26), 261602, 2017. [2](#), [3](#)
- [7] Casini, H., Landea, I. S., Torroba, G. The g-theorem and quantum information theory. *JHEP*, **10**, 140, 2016. [3](#), [5](#), [19](#), [20](#), [24](#), [30](#), [38](#), [39](#), [41](#), [44](#), [45](#), [49](#)
- [8] Casini, H., Teste, E., Torroba, G. Relative entropy and the RG flow. *JHEP*, **03**, 089, 2017. [4](#), [5](#), [47](#), [48](#)
- [9] Cardy, J. L. Boundary conformal field theory, 2004. [4](#)
- [10] Petz, D. Quasi-entropies for finite quantum systems. *Reports on mathematical physics*, **23** (1), 57–65, 1986. [4](#), [11](#)
- [11] Lashkari, N. Relative Entropies in Conformal Field Theory. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 051602, 2014. [4](#)
- [12] Bernamonti, A., Galli, F., Myers, R. C., Oppenheim, J. Holographic second laws of black hole thermodynamics, 2018. [4](#)

- [13] May, A., Hijano, E. The holographic entropy zoo, 2018. 4
- [14] Anderson, P. W. Infrared catastrophe in fermi gases with local scattering potentials. *Physical Review Letters*, **18** (24), 1049, 1967. 4, 46
- [15] Casini, H., Medina, R., Landea, I. S., Torroba, G. Renyi relative entropies and renormalization group flows. *Journal of High Energy Physics*, **2018** (9), 166, Sep 2018. URL [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2018\)166](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2018)166). 5
- [16] Audenaert, K. M. R. Comparisons between quantum state distinguishability measures. *ArXiv e-prints*, jul. 2012. 6
- [17] Giorda, P., Zanardi, P. Quantum chaos and operator fidelity metric. *Phys. Rev. E*, **81**, 017203, Jan 2010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.017203>. 6
- [18] Lu, X.-M., Sun, Z., Wang, X., Zanardi, P. Operator fidelity susceptibility, decoherence, and quantum criticality. *Phys. Rev. A*, **78**, 032309, Sep 2008. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.032309>. 6
- [19] Wang, X., Sun, Z., Wang, Z. D. Operator fidelity susceptibility: An indicator of quantum criticality. *Phys. Rev. A*, **79**, 012105, Jan 2009. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.012105>. 6
- [20] Müller-Lennert, M., Dupuis, F., Szehr, O., Fehr, S., Tomamichel, M. On quantum rényi entropies: A new generalization and some properties. *Journal of Mathematical Physics*, **54** (12), 122203, 2013. 10, 11, 12
- [21] Wilde, M. M., Winter, A., Yang, D. Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and hadamard channels via a sandwiched rényi relative entropy. *Communications in Mathematical Physics*, **331** (2), 593–622, 2014. 10
- [22] Rényi, A. On measures of entropy and information. Inf. téc., HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES Budapest Hungary, 1961. 10
- [23] Uhlmann, A. The “transition probability” in the state space of a*-algebra. *Reports on Mathematical Physics*, **9** (2), 273–279, 1976. 11
- [24] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. 10^a ed^{ón}. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2011. 11
- [25] Frank, R. L., Lieb, E. H. Monotonicity of a relative renyi entropy. *Journal of Mathematical Physics*, **54** (12), 122201, 2013. URL <https://doi.org/10.1063/1.4838835>. 11, 12

- [26] Beigi, S. Sandwiched rényi divergence satisfies data processing inequality. *Journal of Mathematical Physics*, **54** (12), 122202, 2013. [12](#)
- [27] Weedbrook, C., Pirandola, S., Garcia-Patron, R., Cerf, N. J., Ralph, T. C., Shapiro, J. H., *et al.* Gaussian quantum information. *Rev. Mod. Phys.*, **84**, 621–669, May 2012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.621>. [13](#)
- [28] Serafini, A. Quantum Continuous Variables: A Primer of Theoretical Methods. CRC Press, 2017. [13](#)
- [29] Casini, H., Huerta, M. Entanglement entropy in free quantum field theory. *J. Phys.*, **A42**, 504007, 2009. [13](#), [14](#), [16](#), [31](#), [34](#), [53](#)
- [30] Peschel, I. Calculation of reduced density matrices from correlation functions. *Journal of Physics A Mathematical General*, **36**, L205–L208, abr. 2003. [14](#)
- [31] Balian, R., Brezin, E. Nonunitary Bogoliubov transformations and extension of Wick's theorem. *Nuovo Cimento B Serie*, **64**, 37–55, nov. 1969. [15](#), [16](#)
- [32] Banchi, L., Giorda, P., Zanardi, P. Quantum information-geometry of dissipative quantum phase transitions. *Physical Review E*, **89** (2), 022102, 2014. [15](#), [51](#)
- [33] Seshadreesan, K. P., Lami, L., Wilde, M. M. Rényi relative entropies of quantum Gaussian states, 2017. [15](#)
- [34] Banchi, L., Braunstein, S. L., Pirandola, S. Quantum fidelity for arbitrary gaussian states. *Physical review letters*, **115** (26), 260501, 2015. [16](#), [54](#)
- [35] Affleck, I. Conformal field theory approach to the Kondo effect. *Acta Phys. Polon.*, **B26**, 1869–1932, 1995. [21](#)
- [36] Anderson, P. W. Ground state of a magnetic impurity in a metal. *Phys. Rev.*, **164**, 352–359, Dec 1967. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.164.352>. [38](#)
- [37] Anderson, P. W. Infrared catastrophe in fermi gases with local scattering potentials. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 1049–1051, Jun 1967. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.18.1049>. [38](#)
- [38] Affleck, I., Ludwig, A. W. W. Universal noninteger 'ground state degeneracy' in critical quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 161–164, 1991. [44](#)
- [39] Friedan, D., Konechny, A. On the boundary entropy of one-dimensional quantum systems at low temperature. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 030402, 2004. [44](#), [46](#)

-
- [40] Calabrese, P., Cardy, J. Entanglement entropy and conformal field theory. *J. Phys.*, **A42**, 504005, 2009. [44](#)
- [41] Casini, H., Mazzitelli, F. D., Teste, E. Area terms in entanglement entropy. *Phys. Rev.*, **D91** (10), 104035, 2015. [48](#)
- [42] Casini, H., Teste, E., Torroba, G. Holographic RG flows, entanglement entropy and the sum rule. *JHEP*, **03**, 033, 2016. [48](#)

Agradecimientos

A las puertas de terminar este largo viaje que comenzó hace ya más de tres años, tengo una enorme deuda de gratitud con demasiadas personas. Quisiera dedicarles unas palabras a aquellos que de una forma u otra han impactado en mí, ya sea profesionalmente, en lo personal, o en ambas maneras.

En primer lugar, quiero agradecer de todo corazón a mi Director, Gonzalo Torroba. Por haber aceptado mi petición de trabajar con él, por haberme enseñado todo lo que está reflejado en este trabajo, por su vocación de enseñanza, y su pasión contagiosa por la física. Siempre en la completa disposición de ayudar y con una paciencia que puede superar los límites del entendimiento. Sin él este trabajo no sería posible.

Quiero también agradecer a todos los profesores y autoridades del Instituto Balseiro. Realmente pasé buenos e inolvidables momentos durante mi estancia en el Instituto, momentos que contribuyeron a mi formación como profesional y como persona. En particular, quiero agradecer a Roberto Trinchero, Marina Huerta, Horacio Casini, Gerardo Aldazabal, Alejandro Kolton, Javier Curiale, Sebastian Bustingorry y Leandro Da Rold.

A la Argentina, por haberme brindado la posibilidad de recibir una educación pública, gratuita y de calidad.

A mis compañeros de aula, de oficina y a aquellas personas que tengo el placer de llamar amigos. A todos ellos, gracias!

Al Fresco, por ayudarme innumerables veces con el manejo de la computadora y siempre en la más completa disposición.

No puedo dejar de mencionar a las profesoras de inglés Nancy, Moni y María y a las chicas de la oficina de alumnos, Victoria y Vanesa. Gracias por su apoyo invaluable e incondicional.

A William, mi compañero y amigo en esta travesía que comenzó hace ya tres años y medios. Lo logramos!!

A Duca, Marcelo(el padrino) y (la tía) Lidia. Por brindarme el apoyo, amor, la comprensión y calidez de una familia estando tan lejos de mi hogar. Realmente, muchas gracias.

A mis padres, Raúl y Laritza. La formación de cualquier persona comienza en la familia, y no tengo dudas que sin ellos nunca hubiera podido salir adelante. A ellos

les estoy eterna y enteramente agradecido. Espero con este logro, haber retribuido un poco a todo el esfuerzo y sacrificio que han hecho por mí.

A Riguito, mi hermano. Por brindarme infinidad de sonrisas.

Y por último, a mi esposa, Yunet, por acompañarme y apoyarme en todo momento. Gracias por todo amor.