

T.M.
(043)53
2021
K 953

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**TEORÍAS FERMIÓNICAS EN VARIEDADES CON
SINGULARIDADES**

Martin Kuffer
Licenciando

Dr. Fosco, César Daniel
Director

Miembros del Jurado
Dr. R. C. Trincheró (Instituto Balseiro)
Dr. F. D. Mazzitelli (Instituto Balseiro)
Dr. L. E. Oxman (Universidad Federal Fluminense)

2 de Febrero de 2021

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

INVENTARIO: 24150
21.07.2021
Biblioteca Leo Falicov

A mis xadres, Sandra y Jimmy,
por regalarme el mundo y el placer de conocerlo.
A mis hermanas, Gina y Julieta,
por acompañarme en él.
Y a Delfina, por darle color.

Índice de símbolos

Acción: \mathcal{S}

Acción Efectiva: Γ

Conjugación Compleja: \cdot^* o $\bar{\cdot}$

Delta de Dirac: $\delta(x)$

Delta de Kronecker: $\delta_{\mu\nu}$

Derivada Funcional: $\frac{\delta}{\delta f(x)}$

Derivada Parcial: $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ o ∂_μ

Derivada Total: $\frac{d}{dx}$

Determinante: \det

Función de Partición: \mathcal{Z}

Igual por Definición: \equiv

Integral con Extremos: \int_a^b

Integral Formal o Impropia: \int

Lagrangiano: \mathcal{L}

Logaritmo Natural: \ln

Matriz u Operador Identidad: $\mathbb{1}$

Potencial Termodinámico: \mathcal{W}

Traza: tr

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Fundamentos Teóricos	1
1.1. Integral de Caminos en Mecánica Cuántica	2
1.1.1. Evolución Temporal	2
1.1.2. Definición de la Integral de Caminos	2
1.1.3. Rotación de Wick y Tiempo Euclídeo	4
1.1.4. Función de Partición	5
1.1.5. Función de Partición de Sistemas de Dos Niveles	6
2. Métodos Funcionales en Teoría Cuántica de Campos	9
2.1. Integral de Caminos en Teoría Cuántica de Campos	10
2.1.1. Generalización a Infinitos Grados de Libertad	10
2.1.2. El Campo Escalar Real	10
2.1.3. Fermiones de Dirac	11
2.2. Función de Partición \mathcal{Z} : Funcional Generatriz de Correladores Tempo- ralmente Ordenados	12
2.2.1. Funciones de Green en Espacio de Coordenadas	12
2.2.2. Funciones de Green en espacio de Momentos	13
2.2.3. Funciones de Partición de Teorías Libres	14
2.2.4. Desarrollo Perturbativo	15
2.2.5. Desarrollo Perturbativo en Espacio de Momentos	17
2.3. Potencial Termodinámico \mathcal{W} : Funcional Generador de Contribuciones Conectadas	17

2.3.1.	Diagramas Conectados y Desconectados	17
2.3.2.	Contribuciones Conectadas	17
2.3.3.	Potencial Termodinámico	18
2.3.4.	Funciones de Green Conectadas	19
2.3.5.	Funciones de Green Conectadas en Espacio de Momentos	19
2.4.	Acción Efectiva Γ : Funcional Generatriz de Vértices Propios	20
2.4.1.	Desarrollo Semiclásico	20
2.4.2.	Construcción de la Acción Efectiva	22
2.4.3.	Aplicación: Energía de Interacción Estática entre Fuentes	23
2.4.4.	Vértices Propios	24
2.4.5.	Vértices Propios en Espacio de Momentos	26
3.	Teorías Fermiónicas con Paredes de Dominio	29
3.1.	Teorías Fermiónicas en un <i>Background</i>	30
3.1.1.	Acoplamiento de un Campo Fermiónico a un <i>Background</i>	30
3.1.2.	Desarrollo en Modos	31
3.2.	Ejemplos de Sistemas con Paredes de Dominio	34
3.2.1.	Paredes de Dominio	34
3.2.2.	El Modelo tanh	34
3.2.3.	Escalón en la masa	35
3.2.4.	Doble Escalón: un Sistema sin Modos Cero	36
3.3.	Demostración de Existencia de Modos Cero y Localizados	38
3.3.1.	Existencia de Modos Cero	38
3.3.2.	Existencia de Modos Localizados	39
4.	Acoplamiento de los Modos Cero al Campo Electromagnético	41
4.1.	Acoplamiento de Fermiones al Campo Electromagnético	41
4.1.1.	Término de Interacción	41
4.1.2.	Fermiones en 2+1 Dimensiones	43
4.2.	Corriente Inducida en los Modos Cero	43
4.2.1.	Contribución a la Acción Efectiva de los Modos Cero: el Modelo de Schwinger	43
4.2.2.	Solución del Modelo de Schwinger: la Anomalía Quiral	44
5.	El teorema de Gelfand-Yaglom	47
5.1.	Teorema de Gelfand-Yaglom	47
5.2.	Aplicación a Paredes Planas	49

6. Paredes de Ancho 0	51
6.1. Paredes y Antiparedes	51
6.2. Una sola pared	52
6.3. Pared - Antipared	53
6.4. Energía de Interacción entre Dos Sistemas	54
6.5. Pared-Antipared-Pared	54
6.6. Un Algoritmo para Calcular Acciones Efectivas Sustraídas de Paredes Planas	56
6.6.1. Separación en Diagramas	56
6.6.2. La Contribución de un Diagrama	56
6.6.3. Recuperando los Resultados Anteriores Usando el Algoritmo	59
6.6.4. Programando este Algoritmo y Utilizándolo	60
7. Sistemas con Ordenamiento no Trivial	65
7.1. Paredes Planas con Ancho Finito	65
7.1.1. Una Mejor Fórmula Para \mathcal{U}	65
7.1.2. Aplicación a Paredes de Ancho Finito	67
7.1.3. Pared Lineal	68
7.2. Paredes Cilíndricas	70
7.2.1. Otra Generalización de Gelfand-Yaglom	70
7.2.2. Separar Variables en el Problema de Paredes Cilíndricas	70
7.2.3. $\mathcal{U}^{(0)}$ en Coordenadas Cilíndricas	73
7.2.4. Una Pared Cilíndrica Delgada	74
7.2.5. Aproximación Para el Problema con $R \rightarrow \infty$	74
8. Correcciones de la Acción de Heisenberg-Euler	77
8.1. Fermiones No Masivos Acoplados al Campo Electromagnético en Dimensión Par	77
8.2. La Acción de A	79
8.2.1. La Acción de Heisenberg-Euler	79
8.2.2. Correcciones a la Acción de Heisenberg-Euler	79
8.2.3. Definiciones para el Desarrollo	80
8.2.4. Desarrollo a Primer Orden	81
8.2.5. Desarrollo a Segundo Orden	81
8.3. Conclusiones	86
A. Conceptos Matemáticos	89
A.1. Integrales Gaussianas	89
A.2. Estructuras Complejas	90
A.2.1. Definición	90

A.2.2. Integrales Gaussianas con Estructuras Complejas	91
A.3. Variables de Grassman	92
A.3.1. Definición y Propiedades Generales	92
A.3.2. Diferenciación e Integración en Álgebras de Grassman	93
A.3.3. Conjugación Compleja de Variables de Grassman	94
A.3.4. Integrales Gaussianas con Variables de Grassman	95
Bibliografía	97

Índice de figuras

6.1. Diagrama que representa una contribución a la acción efectiva de cuatro paredes.	57
6.2. Forma del diagrama de la contribución principal a distancias entre paredes grandes o k_{\parallel}^2 grande de las acciones efectivas.	58
6.3. Diagramas que contribuyen a la acción efectiva de un sistema pared-antipared.	59
6.4. Diagramas que contribuyen a la acción efectiva de un sistema pared-antipared-pared.	60

Resumen

En este trabajo, se estudió el efecto de paredes de dominio en el *background* de sistemas fermiónicos descritos por campos de Dirac. Primeramente, se introducen los conceptos generales de teoría de campos e integrales de caminos necesarios para comprender el trabajo. Luego, se estudian sistemas fermiónicos en presencia de un *background* no trivial: se introduce el concepto de una pared de dominio y se muestran ejemplos de como estas pueden llevar a grados de libertad localizados sobre ellas. Se prueban también resultados generales acerca de la existencia de estados localizados y estados de masa cero en sistemas planos. Luego, se generaliza la teoría presentada sobre sistemas planos a casos con un campo electromagnético externo y se calcula la corriente inducida sobre los modos de masa cero utilizando la solución del modelo de Schwinger con la anomalía quiral. También presentamos un método de reducción dimensional basado en la fórmula de Gelfand-Yaglom para calcular la acción efectiva de sistemas en un *background*. Desarrollamos un método gráfico para calcular las acciones efectivas de paredes planas de ancho cero, y estudiamos modelos de paredes anchas. También mostramos como se puede aplicar el método a sistemas con simetría cilíndrica. Finalmente nos dedicamos a estudiar correcciones a la acción de Heisenberg-Euler a temperatura finita y mostramos una posible interpretación empleando paredes de dominio.

Palabras clave: TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS, TEORÍAS FERMIÓNICAS EN UN *BACKGROUND*, MODOS CERO, PAREDES DE DOMINIO, FORMULA DE GELFAND-YAGLOM, ACCIÓN EFECTIVA DE HEISENBERG-EULER

Abstract

In this work, the effect of domain walls in the background of fermionic systems described by Dirac fields has been studied. First, the general concepts of quantum field theory and path integrals necessary for understanding our work are presented. Then, fermionic systems in the presence of a non trivial background are studied: the concept of a domain wall is presented and examples of how they can lead to localized degrees of freedom are showed. General results about the existence of localized states and states without mass are proved. The theory is then generalized to cases with an external electromagnetic field and the current induced over the zero mass modes is calculated using the solution for the Schwinger model with the quiral anomaly. We also present a dimensional reduction method based on the Gelfand-Yaglom formula to calculate the effective action of systems in a background. We developed a graphic method to calculate the effective actions of planar walls of either zero or finite width. We also showed how to apply the method to systems with cylindrical symmetry. Finally, we studied corrections to the Heisenberg-Euler action at finite temperature and showed how it may be interpreted in terms of to domain walls.

Keywords: QUANTUM FIELD THEORY, FERMIONIC THEORIES IN A BACKGROUND, ZERO MODES, DOMAIN WALLS, GELFAND-YAGLOM FORMULA, HEISENBERG-EULER EFFECTIVE ACTION

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

“The philosophical question before us is, when we make an observation of our track in the past, does the result of our observation become real in the same sense that the final state would be defined if an outside observer were to make the observation?”

— Richard P. Feynman

El objetivo de este trabajo es estudiar la respuesta de sistemas fermiónicos, en presencia de singularidades. Se consideraron sistemas de fermiones en los que su masa depende de la posición, y se estudió la formación de modos localizados sobre las regiones donde la masa se hace cero. Se probaron resultados generales sobre la formación de modos no masivos, y se calculó la corriente que se forma en estos cuando se introduce un campo electromagnético externo. También se desarrolló un método de reducción dimensional para calcular cantidades físicas de este tipo de sistemas y se estudió como reaccionan estos ante un campo de gauge casi constante. En los primeros capítulos se introducirán los conceptos de teoría de campos e integrales de camino necesarios para el desarrollo del trabajo. ¹

En este capítulo se introducirán los conceptos necesarios para entender la formulación de integral de caminos de la teoría cuántica de campos. Se presentará el formalismo de integral de caminos en mecánica cuántica no relativista, que en el capítulo siguiente será generalizado para campos. Primero, se definirá la evolución temporal de un sistema cuántico (1.1.1), y se lo expresará en términos de integrales de camino (1.1.2). Luego se introducirá la continuación analítica del tiempo al plano complejo (1.1.3), y se relacionará a la evolución temporal con la función de partición del sistema en el ensamble canónico (1.1.4). Finalmente, se generalizarán los conceptos a sistemas de dos niveles utilizando variables de Grassman (1.1.5), sentando las bases mecánico cuánticas

¹En el apéndice A pueden encontrarse conceptos matemáticos centrales: el cálculo de integrales gaussianas y la definición de variables de Grassman.

para estudiar teorías de fermiones.

1.1. Integral de Caminos en Mecánica Cuántica

1.1.1. Evolución Temporal

En este trabajo, se utilizará la formulación de integral de caminos de la mecánica cuántica. Si bien para problemas de mecánica cuántica no relativista esta resulta de ser la más simple, en teoría cuántica de campos resulta una herramienta sumamente útil.

En la visión de Schrödinger de la mecánica cuántica, la ecuación que describe la evolución temporal de un estado es la ecuación de Schrödinger

$$\partial_t |\psi(t)\rangle = -iH |\psi(t)\rangle , \quad (1.1)$$

donde $|\psi\rangle$ es un vector de estado normalizado en un espacio de Hilbert que describa un sistema físico, y H es el operador Hamiltoniano del sistema considerado. La solución general del problema puede ser escrita como $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi\rangle$, donde $|\psi\rangle \equiv |\psi(t_0)\rangle$ y $U(t, t_0)$ es el operador evolución temporal del sistema. Se lo define como el operador tal que

$$\partial_t U(t, \bar{t}) = -iH(t)U(t, \bar{t}) , \quad (1.2a)$$

$$U(t, t) = \mathbf{1} . \quad (1.2b)$$

Es útil expresar este operador en la base posición. Si x es el conjunto de coordenadas de las N partículas del sistema, se define

$$U(x, t; x', t') = \langle x | U(t, t') | x' \rangle . \quad (1.3)$$

1.1.2. Definición de la Integral de Caminos

Un punto de partida para el formalismo de la integral de caminos consiste en expresar el operador U como una integral sobre infinitas variables. Es posible hacer esto gracias a una propiedad del operador U , llamada la propiedad de semigrupo:

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) . \quad (1.4)$$

Esta propiedad se puede escribir en coordenadas como

$$U(x_2, t_1; x_0, t_0) = \int d^N x_1 U(x_2, t_1; x_1, t_1) U(x_1, t_1; x_0, t_0) , \quad (1.5)$$

donde d es la dimensión del espacio y N el número de partículas del sistema que se está describiendo. Esta propiedad se puede interpretar como que es lo mismo evolucionar el estado inicial de un sistema primero desde t_0 hasta t_1 , y luego desde t_1 hasta t_2 , que directamente desde t_0 hasta t_2 .

Utilizando esta expresión, se puede escribir el operador U como producto de evoluciones temporales entre tiempos infinitesimalmente cerca.

$$U(t_f, t_0) = \prod_{k=1}^M U(t_0 + k \Delta t, t_0 + (k-1) \Delta t) = \prod_{k=1}^M U_k, \quad (1.6)$$

donde $\Delta t \equiv \frac{t_f - t_0}{M}$ y $U_k \equiv U(t_0 + k \Delta t, t_0 + (k-1) \Delta t)$. Además, se define $t_k = t_0 + k \Delta t$. Entonces $U_k = U(t_k, t_{k-1})$. Es importante notar que la productoria tiene un orden bien definido, pues los operadores U_k no conmutan necesariamente entre sí. Entonces $U(t_f, t_0) = U_M U_{M-1} \dots U_2 U_1 \neq U_1 \dots U_M$.

Desarrollando cada uno de los operadores de la productoria a orden 1 en Δt y utilizando (1.2a), se obtiene

$$U_k \cong \mathbb{1} - iH \Delta t. \quad (1.7)$$

Considerando Hamiltonianos de la forma $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x, t)$, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ se puede escribir

$$U_k = \mathbb{1} - iH \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) = e^{-i \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Delta t} e^{-iV(x, t_k) \Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (1.8)$$

Expresando esto en coordenadas e introduciendo una identidad $\mathbb{1} = \int d^{Nd} p |p\rangle \langle p|$, con $|p\rangle \equiv \int \frac{d^{Nd} x}{(2\pi)^{Nd/2}} e^{ipx} |x\rangle$, se obtiene

$$\langle x | U_k | x' \rangle = \langle x | e^{-i \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Delta t} \int d^d p |p\rangle \langle p| e^{-iV(x, t_k) \Delta t} |x' \rangle. \quad (1.9)$$

Simplificando, resulta

$$\langle x | U_k | x' \rangle = e^{-iV(x', t_k) \Delta t} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^{Nd}} e^{-i \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Delta t - ip(x' - x)}. \quad (1.10)$$

Esta es una integral Gaussiana. Si bien su convergencia no está bien definida, se le puede dar sentido utilizando teoría de distribuciones, o considerándola como límite de integrales Gaussianas bien definidas, ya que la parte real del exponente es cero. Entonces, utilizando (A.2), se obtiene

$$\langle x | U_k | x' \rangle = \left(\frac{-im}{2\pi \Delta t} \right)^{Nd/2} e^{i \Delta t \left[m/2 \left(\frac{x-x'}{\Delta t} \right)^2 - V(x', t_k) \right]}. \quad (1.11)$$

Reemplazando en (1.6),

$$U(x_f, t_f; x_0, t_0) = \left(\frac{-im}{2\pi\Delta t} \right)^{\frac{(M-1)Nd}{2}} \int \prod_{k=1}^{M-1} dx_k \quad (1.12)$$

$$e^{i \sum_{j=1}^M \Delta t \left[m/2 \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} \right)^2 - V(x_{j-1}, t_{j-1}) \right]}.$$

Finalmente, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, se define $\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} \equiv \dot{x}(t)$. Y con la notación $\mathcal{D}x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{-im}{2\pi\Delta t} \right)^{\frac{(M-1)Nd}{2}} \prod_{k=1}^{M-1} dx_k$, se obtiene

$$U(x_f, t_f; x_0, t_0) = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{i\mathcal{S}[x]}, \quad (1.13)$$

con condiciones de contorno de forma que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_f) = x_f$ para todos los caminos sobre los que se integra, y en donde

$$\mathcal{S}[x] \equiv \int_{t_0}^{t_f} dt L(\dot{x}, x, t) = \int_{t_0}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t) \right). \quad (1.14)$$

Más generalmente, se pueden escribir los elementos de matriz de U como

$$\langle \psi | U(t_f, t_0) | \phi \rangle = \int \mathcal{D}x \psi(x(t_f)) e^{i\mathcal{S}[x]} \phi(x(t_0)), \quad (1.15)$$

donde ahora no hay condiciones de borde fijas y $\mathcal{D}x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{-im}{2\pi\Delta t} \right)^{\frac{(M-1)Nd}{2}} \prod_{k=0}^M dx_k$. Notar que en (1.13) los extremos del camino están fijos, mientras que en (1.15) están integrados, de forma que en los aproximantes de $\mathcal{D}x$, en (1.15) aparecen los diferenciales del camino en los extremos mientras que en (1.13) no.

Por otro lado, es importante recalcar que (1.15) representa una formulación completa de la mecánica cuántica, ya que toda la información de la evolución temporal de un sistema está en U . Al formular la mecánica cuántica con integrales de camino, el objeto central es la acción, o el Lagrangiano, en lugar del Hamiltoniano como en las visiones de Schrödinger y Heisenberg. Esto permite, al igual que en las teorías clásicas de campos, expresar a las teorías cuánticas de campos de manera explícitamente covariante.

1.1.3. Rotación de Wick y Tiempo Euclídeo

Observando el proceso que fue necesario para llegar a (1.11), uno puede ver algunas dificultades para obtener resultados de la integral de caminos. En particular, fue necesario darle sentido a (1.10), pues la integral no converge en el sentido usual. Una manera de hacer esto es considerar un Δt complejo, $\Delta t = -i\Delta t_e \in i\mathbb{R}$, de forma

que la integral es convergente, y luego obtener el resultado de la integral continuando analíticamente el resultado como función de Δt_e . Observando ahora (1.13), uno puede ver que estos problemas de convergencia aparecen también en la integral de caminos, pues $|e^{-i\mathcal{S}[x]}|^2 = e^{-i\mathcal{S}[x]}e^{i\mathcal{S}[x]} = 1$. Entonces, el integrando de la integral de caminos es puramente oscilante, no tiende a cero cuando el camino tiende a infinito y la integral no converge en el sentido usual. Es necesario entonces encontrar una manera de darle sentido a esta integral para poder obtener resultados físicos en esta formulación.

Una de las formas de hacer esto es, de la misma manera en que para (1.10), considerar que el tiempo es una variable compleja, resolver la integral donde converja, y finalmente continuar analíticamente el resultado de vuelta a la recta real. Es decir, considerar al tiempo como una variable puramente imaginaria $t = -it_e$, con $t_e \in \mathbb{R}$ el llamado tiempo imaginario o euclídeo. Como en este trabajo se trabajó casi exclusivamente en tiempo euclídeo, se suprimirá el subíndice e . En este caso, la integral de caminos para el operador evolución temporal queda [1]

$$U(x_f, t_f; x_0, t_0) = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{-\mathcal{S}_e[x]}, \quad (1.16)$$

con

$$\mathcal{S}_e[x] \equiv \int_{t_0}^{t_f} dt L_e(\dot{x}, x, t) = \int_{t_0}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x, t) \right), \quad (1.17)$$

la acción euclídea, y donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt_e}$. Al proceso de continuar analíticamente la ecuación de Schrödinger, y U , para tiempos complejos y considerar tiempos puramente imaginarios se lo denomina rotación de Wick [1]. De aquí en adelante, salvo si se aclara, se trabajará en tiempo imaginario.

1.1.4. Función de Partición

Será de interés calcular la traza del operador U . Para ver por qué, es útil evaluar U para un Hamiltoniano independiente del tiempo. Como H no depende del tiempo, $U(t_f, t_i) = U(t_f - t_i)$. Y más aún,

$$U(t) \equiv U(t, 0) = e^{-Ht}. \quad (1.18)$$

Entonces su traza es

$$\text{tr}[U(t)] = \text{tr}[e^{-Ht}] = \sum_n e^{-E_n t} \equiv \mathcal{Z}(t), \quad (1.19)$$

donde se expandió la traza en autoestados de H designados por n . Se observa que la traza del operador evolución temporal en tiempo imaginario es la función de partición $\mathcal{Z}(t)$ del sistema a temperatura $1/t$ (salvo por factores de \hbar y k_b , que en este trabajo

se toman iguales a 1). También se puede observar que en el límite $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Z}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-E_0 t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | U(t) | 0 \rangle, \quad (1.20)$$

de forma que para calcular la función de partición a temperatura 0, alcanza con conocer la evolución temporal en tiempo imaginario del estado fundamental $|0\rangle$.

Es posible expresar \mathcal{Z} en términos de integrales de camino. Si en lugar de expandir la traza en autoestados de H , se lo hace en los autoestados de posición, se obtiene

$$\mathcal{Z}(t) = \text{tr}[U(t)] = \int dx \langle x | U(t) | x \rangle = \int dx \int_{x(0)=x}^{x(t)=x} \mathcal{D}x e^{-S[x]}. \quad (1.21)$$

Ahora, como integrar sobre todos los caminos que comienzan y terminan en x , seguido de integrar sobre todo x es lo mismo que integrar sobre todos los caminos que comienzan y terminan en el mismo punto, podemos expresar \mathcal{Z} como una integral de caminos con condiciones periódicas de contorno.

$$\mathcal{Z}(t) = \int_{x(0)=x(t)} \mathcal{D}x e^{-S[x]}. \quad (1.22)$$

En particular, para temperatura cero ($t \rightarrow \infty$), se pierden las condiciones de contorno y se obtiene

$$\mathcal{Z}(t \rightarrow \infty) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x]}. \quad (1.23)$$

Entonces, combinando (1.20) y (1.23), se obtiene

$$\langle 0 | U(t \rightarrow \infty) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S[x]}. \quad (1.24)$$

1.1.5. Función de Partición de Sistemas de Dos Niveles

Es posible generalizar el formalismo de integral de caminos para conjuntos de sistemas de dos niveles. Esto es importante porque es lo que permite estudiar campos fermiónicos utilizando integrales de camino. El formalismo necesario para hacer esto es llamado el formalismo holomorfo. El formalismo holomorfo no será explicado aquí, se pueden encontrar más detalles en [2], pero se enunciarán resultados necesarios para tratar las integrales de caminos fermiónicas.

Si se tiene un sistema de dos niveles $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, se representan a los estados como variables de Grassman. Para más detalles sobre las variables de Grassman y como se definen su integración y diferenciación, consultar A.3. Se define $|\uparrow\rangle = 1$ y $|\downarrow\rangle = \theta$. De manera análoga, se define $\langle\uparrow| = 1$ y $\langle\downarrow| = \bar{\theta}$. Un estado mezcla entonces se escribe como

[2]

$$f_0 |\uparrow\rangle + f_1 |\downarrow\rangle = f_0 + f_1 \theta = f(\theta). \quad (1.25a)$$

$$\langle \uparrow | f_0^* + \langle \downarrow | f_1^* = f_0^* + f_1^* \bar{\theta} = \overline{f(\theta)}. \quad (1.25b)$$

El producto interno entre estados $|f\rangle = f_0 + f_1 \theta$ y $|g\rangle = g_0 + g_1 \theta$ se escribe como [2]

$$\langle f | g \rangle = f_0^* g_0 + f_1^* g_1 = \int d\theta d\bar{\theta} e^{\bar{\theta}\theta} g(\theta) \overline{f(\theta)}. \quad (1.26)$$

Si se considera el conjunto de N sistemas de dos niveles, se hace lo mismo. Si el sistema l tiene estados $|\uparrow\rangle_l$ y $|\downarrow\rangle_l$, se representan por 1 y θ_l . Y el producto entre kets de sistemas distintos se representa como el producto de las funciones. Entonces si hay dos sistemas, $(f_0 |\uparrow\rangle_1 + f_1 |\downarrow\rangle_1) (g_0 |\uparrow\rangle_2 + g_1 |\downarrow\rangle_2) = (f_0 + f_1 \theta_1) (g_0 + g_1 \theta_2) = f(\theta_1) g(\theta_2)$. El producto interno para un conjunto de N subsistemas se escribe

$$\langle f | g \rangle = \int \left(\prod_{l=1}^N d\theta_l d\bar{\theta}_l \right) e^{\bar{\theta}_l \theta_l} g(\theta) \overline{f(\theta)}. \quad (1.27)$$

Más aún, un operador \mathcal{O} puede escribirse en término de sus “elementos de matriz” $\langle \theta | \mathcal{O} | \bar{\theta} \rangle$ como [2]

$$[\mathcal{O}f](\theta) = \int \left(\prod_{l=1}^N d\theta'_l d\bar{\theta}'_l \right) \langle \theta | \mathcal{O} | \bar{\theta}' \rangle e^{\bar{\theta}'_l \theta'_l} f(\theta'), \quad (1.28)$$

y su traza como [1]

$$\text{tr}[\mathcal{O}] = \int \prod_l d\bar{\theta}_l d\theta_l e^{-\bar{\theta}_l \theta_l} \langle \theta | \mathcal{O} | \bar{\theta} \rangle. \quad (1.29)$$

La evolución temporal de un sistema de este tipo puede escribirse como la integral de caminos [2]

$$\langle \theta_f | U(t_f, t_0) | \bar{\theta}_0 \rangle = \int_{\bar{\theta}(t_0)=\bar{\theta}_0}^{\theta(t_f)=\theta_f} \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{D}\bar{\theta}(t) e^{-\bar{\theta}_0^l \theta_0^l} e^{-S[\theta, \bar{\theta}]}. \quad (1.30)$$

Entonces, también es posible expresar la función de partición en términos de integrales de camino [2]:

$$\mathcal{Z}(t) \equiv \text{tr}[U(t)] = \int_{\theta(0)=-\theta(t)}^{\bar{\theta}(0)=-\bar{\theta}(t)} \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\bar{\theta} e^{-S[\bar{\theta}, \theta]}, \quad (1.31)$$

con la diferencia que al tratar con variables de Grassman se deben imponer condiciones

de antisimetría sobre los caminos. Nuevamente, si se toma $t \rightarrow \infty$, se pierde la condición de borde [2].

$$\mathcal{Z}(t \rightarrow \infty) = \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\bar{\theta} e^{-S[\bar{\theta}, \theta]}, \quad (1.32)$$

Capítulo 2

Métodos Funcionales en Teoría Cuántica de Campos

“Like the silicon chips of more recent years, the Feynman diagram was bringing computation to the masses.”

— Julian Schwinger

En este capítulo, se introducirán los métodos utilizados para obtener resultados con el formalismo de integrales de caminos en teoría cuántica de campos.

En la sección 2.1 se introduce el formalismo de integrales de caminos y se presentan ejemplos de campos y como tratarlos. Primero se generaliza el propagador en tiempo euclídeo para infinitos grados de libertad (2.1.1), y luego se lo utiliza para expresar los propagadores del campo escalar (2.1.2) y del campo de Dirac (2.1.3).

En la sección 2.2 se presenta el primer funcional de interés, $\mathcal{Z}[J]$, y sus derivadas funcionales, las funciones de Green. Primero se introduce el concepto de ordenamiento temporal y de función de Green (2.2.1) y se introduce a $\mathcal{Z}[J]$ como su funcional generatriz. También se define su expresión en espacio de momentos (2.2.2). Luego se calculan estas cantidades para teorías libres (2.2.3), y se presenta su desarrollo perturbativo, tanto en espacio de coordenadas (2.2.4) como en espacio de momentos (2.2.5), y su representación en término de diagramas de Feynman.

En la sección 2.3 se introduce el siguiente funcional de interés, $\mathcal{W}[J]$. Primero se discuten los conceptos de diagramas conectados y desconectados (2.3.1), y en base a eso se definen las contribuciones conectadas (2.3.2). Luego, se introduce a $\mathcal{W}[J]$ como la funcional generatriz de las contribuciones conectadas (2.3.3). Finalmente, se definen las funciones de Green conectadas en espacio de coordenadas (2.3.4) y de momentos (2.3.4).

En la sección 2.4 se introduce el último funcional a estudiar, la acción efectiva $\Gamma[\phi]$. Primero (2.4.1) se calcula la expansión semiclásica de \mathcal{Z} , y se muestra que a primer

orden en esta sólo contribuyen diagramas sin *loops*. Luego (2.4.2), se utiliza esto para motivar la construcción de la acción efectiva, y se muestra que es la transformada de Legendre de \mathcal{W} . Como un ejemplo, se utiliza el formalismo desarrollado para calcular la energía de interacción a través de un campo escalar entre fuentes puntuales estáticas (2.4.3), y se discute brevemente el resultado obtenido. Finalmente, se introducen los vértices propios y se muestra su relación con las funciones de Green conectadas, tanto en espacio de coordenadas (2.4.4) como en espacio de momentos (2.4.5).

2.1. Integral de Caminos en Teoría Cuántica de Campos

2.1.1. Generalización a Infinitos Grados de Libertad

Una teoría clásica de campos es la generalización de la mecánica clásica a infinitos grados de libertad. En una teoría de campos, a cada punto del espacio le corresponden uno o más grados de libertad $\phi(x)$. A esta función ϕ se la llama el campo. La dinámica queda caracterizada por un Lagrangiano o, equivalentemente, una acción. Se considerarán acciones de la forma

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}[\partial_\mu \phi, \phi, x], \quad (2.1)$$

donde \mathcal{L} es el Lagrangiano de la teoría y d es la dimensión del espaciotiempo. Esta es a lo sumo cuadrática en $\partial_\mu \phi$ y contiene toda la información de la teoría.

Al estudiar teorías cuánticas de campos, se utilizará la integral de caminos para obtener información sobre su dinámica. En esta sección se definirán los Lagrangianos de los fermiones de Dirac y del campo escalar real. Además, se introducirán las integrales de caminos asociados a estos campos y se hará la rotación de Wick para trabajar en tiempo euclídeo.

2.1.2. El Campo Escalar Real

La teoría de campos más simple es la del campo escalar real. El campo $\phi(x)$ es un escalar de Lorentz, es decir, tiene una sólo componente y no transforma ante rotaciones y *boosts* de Lorentz. El Lagrangiano de la teoría es [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi), \quad (2.2)$$

$V(\phi)$ un potencial. En particular, a la parte cuadrática del potencial en torno a un mínimo se la llama una masa. La ecuación de movimiento clásica en tiempo real del

campo se obtiene de extremar la acción y es

$$\square\phi(x) + \frac{dV(\phi(x))}{d\phi(x)} = 0, \quad (2.3)$$

con $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

Generalizando la integral funcional para esta teoría, es posible escribir el propagador como [1]

$$U = \int \mathcal{D}\phi |\phi\rangle e^{iS[\phi]} \langle\phi|. \quad (2.4)$$

2.1.3. Fermiones de Dirac

Para representar a fermiones de Dirac, es necesario utilizar variables de Grassman. El campo de dirac $\psi(x)$ es un campo espinorial, es decir, a cada punto del espacio le asocia un espinor [1]. En 2 y 3 dimensiones espaciotemporales, los espinores tienen 2 componentes [1], entonces $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. Además, el conjugado complejo de ψ es $\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}$. El Lagrangiano de Dirac en tiempo euclídeo es [1]

$$\mathcal{L}_D = -\bar{\psi}(\gamma^u \partial_\mu + m)\psi, \quad (2.5)$$

γ^μ las matrices gamma euclídeas, definidas por $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. En particular, en 3 dimensiones espaciotemporales, en la representación adecuada las matrices gamma son las matrices de pauli: $\gamma_0 = \sigma_3$ y $\gamma_j = \sigma_j$ [1]. Además, se utiliza la notación $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$. De extremar esta acción se obtiene la ecuación de Dirac para un fermión de masa m .

De manera análoga al caso discreto, es posible describir la dinámica del campo de Dirac utilizando la representación holomorfa. Entonces

$$\langle\psi_f| U(t_f, t_0) |\bar{\psi}_0\rangle = \int_{\bar{\psi}(t_0)=\bar{\psi}_0}^{\psi(t_f)=\psi_f} \mathcal{D}\psi(t) \mathcal{D}\bar{\psi}(t) e^{-\int d^{d-1}x \bar{\psi}_0(x)\psi_0(x)} e^{-S[\psi, \bar{\psi}]}. \quad (2.6)$$

Finalmente, el acople minimal entre un campo de Dirac y un campo escalar real es un término de la forma $g\bar{\psi}\phi\psi$. Se puede ver que si ϕ es constante, el nuevo término es simplemente un término de masa. Entonces, el acople de un campo fermiónico cuántico a un *background*, es decir un campo escalar clásico, genera un término de masa que depende de la posición. Esto se utilizará en este trabajo para introducir singularidades a sistemas de fermiones.

2.2. Función de Partición \mathcal{Z} : Funcional Generatriz de Correladores Temporalmente Ordenados

2.2.1. Funciones de Green en Espacio de Coordenadas

Si se tiene una teoría cuántica con campos ϕ_j , se define el ordenamiento temporal de dos operadores como [1]

$$T\phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n) = (-1)^s \phi_{j_{l_1}}(x_{l_1}) \dots \phi_{j_{l_n}}(x_{l_n}), \quad (2.7)$$

donde s es el número de campos fermiónicos que hay que conmutar entre sí para pasar del producto de operadores como está escrito dentro del operador T al producto temporalmente ordenado.

La función de Green de n puntos, o correlador temporalmente ordenado, se define como [2]

$$G_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n) | 0 \rangle, \quad (2.8)$$

donde $|0\rangle$ es el vacío (el estado fundamental de la teoría). La teoría de campos queda completamente definida por estas funciones, y son equivalentes a conocer las secciones eficaces de scattering de las partículas asociadas a los campos ϕ [1]. Escribiendo explícitamente los operadores evolución temporal y suponiendo $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots \geq x_n^0$

$$G_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | U(+\infty, x_1^0) \phi_{j_1}(x_1) U(x_1^0, x_2^0) \dots \phi_{j_n}(x_n) U(x_n^0, -\infty) | 0 \rangle. \quad (2.9)$$

De igual forma que antes, esto puede expresarse como

$$G_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \text{tr} [U(+\infty, x_1^0) \phi_{j_1}(x_1) U(x_1^0, x_2^0) \dots \phi_{j_n}(x_n) U(x_n^0, -\infty)]. \quad (2.10)$$

Lo que permite expresarlo en usando integrales de caminos, reemplazando los operadores U por su expresión en términos de estas, usando que los brackets que aparecen entre propagadores establecen condiciones de continuidad para la integral, y que los los kets $|\phi\rangle$ son autoestados de los operadores $\phi_j(x_j)$.

$$G_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n) e^{-S[\phi]} \equiv \langle \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n) \rangle, \quad (2.11)$$

donde se definió el valor medio $\langle \cdot \rangle$ de un producto de campos. Lo importante de esta ecuación es que permite expresar las funciones de Green en términos de integrales de camino. Notar que adentro de la integral ya no aparecen operadores, sino solamente funciones de las variables de integración. Usando el mismo truco que para obtener el teorema de Wick (A.7), se puede agregar una fuente J y diferenciar funcionalmente

respecto a ella.

$$G_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J_{j_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{j_n}(x_n)} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J\phi} \Big|_{J=0}, \quad (2.12)$$

donde $J\phi = \int d^d x J_i(x)\phi_i(x)$. Finalmente, introduciendo la función de partición $\mathcal{Z}[J]$ como

$$\mathcal{Z}[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J\phi}, \quad (2.13)$$

y utilizando que en tiempo real cambiar el propagador por una fase global no cambia ningún observable físico, se obtiene

$$G_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{Z}[0]^{-1} \frac{\delta}{\delta J_{j_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{j_n}(x_n)} \mathcal{Z}[J] \Big|_{J=0}. \quad (2.14)$$

Notar que este desarrollo se hizo suponiendo $x_1^0 \geq \cdots \geq x_n^0$. Sin embargo, si ϕ_i y ϕ_j son variables de Grassman, o sea campos fermiónicos, $\frac{\delta}{\delta\phi_i(x_i)} \frac{\delta}{\delta\phi_j(x_j)} = -\frac{\delta}{\delta\phi_j(x_j)} \frac{\delta}{\delta\phi_i(x_i)}$. Y si ϕ_i es un campo bosónico, o sea un complejo o real, y ϕ_j es bosónico o fermiónico, $\frac{\delta}{\delta\phi_i(x_i)} \frac{\delta}{\delta\phi_j(x_j)} = \frac{\delta}{\delta\phi_j(x_j)} \frac{\delta}{\delta\phi_i(x_i)}$. Entonces, al cambiar el orden de las derivadas funcionales aparece el mismo factor $(-1)^s$ de conmutar campos fermiónicos entre sí que en el ordenamiento temporal. De forma que (2.14) vale sin imponer ninguna condición sobre x_1^0, \dots, x_n^0 .

Entonces, de conocer $\mathcal{Z}[J]$, es posible calcular las funciones de Green de los campos en diferenciando funcionalmente con respecto a la fuente J . La función de partición con una fuente es la funcional generatriz de las funciones de Green. De forma que $\mathcal{Z}[J]$ contiene toda la información sobre una teoría de campos. En las secciones siguientes se introducirán la generalización de estos conceptos a espacio de momentos, y se mostrarán otras cantidades derivadas de $\mathcal{Z}[J]$, que también contienen toda la información sobre la teoría pero son más fáciles de trabajar e interpretar físicamente.

2.2.2. Funciones de Green en espacio de Momentos

Muchas de las teorías de campos de interés tienen invariancia ante traslaciones, entonces es útil expresar los resultados en espacio de momentos. Se define la transformada de Fourier $\tilde{\phi}$ de un campo ϕ como

$$\phi(x) = \int d^d p e^{ipx} \tilde{\phi}(p). \quad (2.15)$$

Y se define la función de Green en espacio de momentos, teniendo en cuenta la conservación del impulso lineal, como

$$(2\pi)^d \delta\left(\sum p_k\right) \tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int \left(\prod_k d^d x_k e^{i x_k p_k} \right) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.16)$$

2.2.3. Funciones de Partición de Teorías Libres

Se dirá que una teoría es libre o no interactuante cuando su acción sea a lo sumo cuadrática en los campos. El Lagrangiano libre más general posible invariante ante traslaciones para un campo escalar es, salvo por redefinición de los campos,

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2). \quad (2.17)$$

Para esta teoría la función de partición es

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\int d^d x -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi(x)^2) + J(x)\phi(x)}. \quad (2.18)$$

Como esta es una integral Gaussiana (A.1), se puede resolver aplicando (A.2). Se obtiene

$$\mathcal{Z}[J] = \left(\det \frac{-\partial_\mu \partial^\mu + m^2}{2\pi} \right)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} J \Delta J}, \quad (2.19)$$

donde $J \Delta J = \int d^d x d^d y J(x) \Delta(x, y) J(y)$, y Δ es la inversa de $(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$

$$(-\partial_{x\mu} \partial_x^\mu + m^2) \Delta(x, y) = \delta^d(x - y). \quad (2.20)$$

Δ puede escribirse explícitamente como

$$\Delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2}. \quad (2.21)$$

Finalmente, utilizando que se puede elegir $\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle = 1$ y, por ende $\mathcal{Z}[0] = 1$,

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\frac{1}{2} J \Delta J}. \quad (2.22)$$

El Lagrangiano invariante ante traslaciones más general posible para fermiones de Dirac es

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x). \quad (2.23)$$

Para esta teoría la función de partición es

$$\mathcal{Z}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}, \quad (2.24)$$

donde $\bar{\psi}(\gamma^u \partial_\mu + m)\psi = \int d^d x \bar{\psi}(x)(\gamma^u \partial_\mu + m)\psi(x)$. Esto también es una integral Gaussiana. De igual forma que antes, aplicando que se puede elegir $\langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle = 1$ y usando (A.25) se obtiene

$$\mathcal{Z}[\bar{\eta}, \eta] = \det(\not{\partial} + m) e^{-\bar{\eta} \Delta_F \eta} = e^{-\bar{\eta} \Delta_F \eta}, \quad (2.25)$$

con Δ_F el propagador fermiónico

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{-ip(x-y)} \frac{m - i\not{p}}{p^2 + m^2}. \quad (2.26)$$

2.2.4. Desarrollo Perturbativo

Las teorías no interactuantes son de las pocas teorías posibles de resolver analíticamente. Sin embargo, en aquellas teorías en las que las interacciones son débiles, es posible hacer un desarrollo perturbativo de $\mathcal{Z}[J]$. Considerar una teoría con una acción de la forma

$$\mathcal{S}[\phi] = \mathcal{S}_0[\phi] + V_I[\phi], \quad (2.27)$$

donde V_I es el potencial de interacción, que contiene sólo términos de orden cúbico o superior en los campos, y \mathcal{S}_0 la acción de un campo libre. En este caso, ϕ es un campo de n componentes ϕ_j bosónicas y/o fermiónicas. Es posible hacer un desarrollo perturbativo de la función de partición, expresando $e^{-V_I[\phi]} = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} V_I[\phi]^k$. Si esta suma converge, es posible expresar a la función de partición como [1]

$$\mathcal{Z}[J] = e^{-V_I[\frac{\delta}{\delta J}]} \mathcal{Z}_0[J], \quad (2.28)$$

donde $\mathcal{Z}_0[J]$ es la función de partición de la teoría libre (con $V_I = 0$), y $e^{-V_I[\frac{\delta}{\delta J}]}$ significa expandir la exponencial $e^{-V_I[\varphi]}$ en su serie de potencias, y después reemplazar $\varphi_j(x) = \frac{\delta}{\delta J_j(x)}$. Si V_I es un polinomio, al hacer esta expansión, se obtienen valores medios Gaussianos de productos de campos, definidos como [1]

$$\langle \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n) \rangle_{0,J} \equiv \int \mathcal{D}\phi \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n) e^{-\mathcal{S}_0[\phi] + J\phi}. \quad (2.29)$$

En los desarrollos perturbativos, ocurre también que se integra sobre los valores sobre los que se evalúan los campos internos. Por ejemplo, para un campo escalar con interacción $V_I[\phi] = \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \phi(x)^3$, la primer corrección a la función de Green de 3 patas $G^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$ es

$$-\frac{\lambda}{6} \int d^d x \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x)^3 \rangle_0 = -\lambda \int d^d x \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3), \quad (2.30)$$

donde $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x)^3 \rangle_0 = \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x)^3 \rangle_{0,J=0}$ es el valor medio de los campos en la teoría libre sin fuentes. Para representar estas contribuciones se utilizan los diagramas de Feynman. En un diagrama de Feynman hay 2 tipos de componentes: líneas y vértices. Una línea representa un propagador, y un vértice representa una aplicación del potencial de interacción y una integral sobre la posición dónde se aplica. Más aún, se utilizan líneas distintas para representar distintos tipos de partículas. Los propagadores de fermiones se representan como \longrightarrow , los de vectores, por ejemplo el campo electromagnético, como $\sim\sim\sim$ y los de escalares como \cdots . Entonces, la contribución anterior puede escribirse como

$$-\lambda \int d^d x \Delta(x, x_1)\Delta(x, x_2)\Delta(x, x_3) = \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \lambda \\ \diagdown \\ x_3 \\ \vdots \\ x_1 \end{array} \quad (2.31)$$

En la expansión de $\mathcal{Z}[J]$, el término de menor orden que aparece es

$$-\frac{\lambda}{6} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \mathcal{Z}_0[J] = -\frac{\lambda}{6} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 e^{1/2 J\Delta J}. \quad (2.32)$$

Si calculamos

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 e^{1/2 J\Delta J} = ((\Delta J)(x))^3 + 3\Delta(x, x)(\Delta J)(x) e^{1/2 J\Delta J}, \quad (2.33)$$

donde $(\Delta J)(x) = \int d^d y \Delta(x, y)J(y)$. La contribución a primer orden se expresa en términos de diagramas de Feynman como

$$e^{1/2 J\Delta J} \left[\begin{array}{c} J \times \quad \lambda \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ J \end{array} + 3 \begin{array}{c} \times \\ \vdots \\ \lambda \\ \circ \end{array} \right]. \quad (2.34)$$

Notar que entre el primer diagrama y el segundo hay una diferencia. En el segundo hay un lazo, o *loop*. Se hablará más adelante con más detalle de los *loops*, pero se introduce la siguiente nomenclatura: se dirá que un desarrollo es a nivel árbol sólo contiene diagramas sin ningún *loop*, y que es a n *loops* si contiene diagramas con n *loops* o menos.

2.2.5. Desarrollo Perturbativo en Espacio de Momentos

De la misma manera, es posible hacer el desarrollo perturbativo para las funciones de Green en espacio de momentos. Los diagramas de Feynman en espacio de momentos representan cuentas diferentes. Las líneas representan propagadores evaluados en momentos, con el momento de la línea, y los vértices interacciones con la imposición de la conservación del impulso lineal. Entonces

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{p_1} \\
 \text{---} \bullet \\
 \nwarrow p_2 \\
 \nearrow p_3
 \end{array}
 \end{array}
 = (2\pi)^d \delta(p_1 + p_2 + p_3) \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3), \quad (2.35)$$

donde $\tilde{\Delta}(p)$ es el propagador de la teoría libre en espacio de momentos.

2.3. Potencial Termodinámico \mathcal{W} : Funcional Generador de Contribuciones Conectadas

2.3.1. Diagramas Conectados y Desconectados

Al calcular funciones de Green, también aparecen contribuciones con diagramas como

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 x_2 \\
 \diagup \\
 \bullet \\
 \diagdown \\
 x_3
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_1 \text{ ---} \\
 x_4 \text{ ---} \text{---} x_5
 \end{array}
 = \left(\Delta(x_5, x_4) \right) \left(\int dx \Delta(x_1, x) \Delta(x_2, x) \Delta(x_3, x) \right), \quad (2.36)$$

que aparece para la función de Green de 5 patas. Se puede ver que el diagrama consiste de dos regiones que no están conectadas por vértices o líneas. Se dirá que un diagrama es desconectado cuando esto ocurre, y conectado cuando no. También se puede ver que la contribución de este diagrama es el producto de las contribuciones de sus subdiagramas conectados. Esto es así en general [1], por lo que los diagramas desconectados tienen información redundante. Entonces, es útil encontrar una cantidad que dependa sólo de diagramas conectados.

2.3.2. Contribuciones Conectadas

Si bien hablar de diagramas conectados y desconectados funciona, solo es posible hacerlo al desarrollar perturbativamente la teoría. Para obtener resultados no perturbativos es necesario introducir las contribuciones conectadas a los valores medios. Se

define la contribución conectada de un valor medio como

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_c \equiv \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \dots \phi_n \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \dots \phi_n \rangle - \dots, \quad (2.37)$$

donde se introdujo la notación $\phi_l = \phi_{j_l}(x_l)$. Es decir, para obtener la contribución conectada del valor medio de un producto de campos, a este se le restan todas las formas de agrupar los mismos campos en dos o más valores medios. Por ejemplo, la contribución conectada de un producto de dos campos es

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c \equiv \langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle. \quad (2.38)$$

Y para un producto de tres campos es

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle_c = \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \rangle - \langle \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \phi_1 \rangle. \quad (2.39)$$

Se puede mostrar [1] que al desarrollar perturbativamente las contribuciones conectadas, sólo aparecen diagramas conectados. Entonces, estas generalizan no perturbativamente el concepto perturbativo de un diagrama conectado .

En la teoría libre, no hay interacciones. Entonces, en los diagramas de Feynmann no hay vértices, solamente hay propagadores. Esto se representa en términos de las contribuciones conectadas, como

$$\langle \phi \rangle_c = 0 \quad (2.40a)$$

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle_c = \Delta_{i,j}(x, y) \quad (2.40b)$$

$$\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle_c = 0 \quad \forall n > 2, \quad (2.40c)$$

donde $\Delta_{i,j}(x, y)$ es el propagador de la teoría.

2.3.3. Potencial Termodinámico

la funcional \mathcal{Z} se obtuvo de buscar una funcional generatriz de las funciones de Green. Entonces, para encontrar una funcional generatriz de las contribuciones conectadas, se define

$$\mathcal{W}[J] \equiv \ln(\mathcal{Z}[J]) . \quad (2.41)$$

Como para una teoría libre de bosones $\mathcal{W}[J] = \frac{1}{2} J \Delta J$, $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_c = \frac{\delta}{\delta J_1} \dots \frac{\delta}{\delta J_n} \mathcal{W}[J]|_{J=0}$. Por otro lado, para una teoría fermiónica libre, $\mathcal{W}[\bar{\eta}, \eta] = -\bar{\eta} \Delta_F \eta$, entonces $\langle \psi_1 \bar{\psi}_1 \dots \psi_n \bar{\psi}_n \rangle_c = (-1)^n \frac{\delta}{\delta \eta_1} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_1} \dots \frac{\delta}{\delta \eta_n} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_n} \mathcal{W}[\bar{\eta}, \eta]|_{\bar{\eta}=\eta=0}$. De forma de que es posible calcular las contribuciones conectadas directamente de \mathcal{W} derivando con respecto a la fuente [1]. Con el cuidado de que la fuente de un campo fermiónico $\bar{\psi}$ es $-\eta$.

Esto no sólo vale para teorías libres, sino que vale no perturbativamente para

cualquier teoría de campos [1], y en el desarrollo perturbativo de \mathcal{W} sólo aparecen diagramas de Feynman conectados [1]. En general

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_c = \frac{\delta}{\delta J_1} \dots \frac{\delta}{\delta J_n} \mathcal{W}[J] \Big|_{J=0}. \quad (2.42)$$

2.3.4. Funciones de Green Conectadas

Definiendo las funciones de Green conectadas como

$$W_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \phi_{j_1}(x_1), \dots, \phi_{j_n}(x_n) \rangle_c, \quad (2.43)$$

se obtiene [1]

$$\mathcal{W}[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \int d^d x_1 \dots d^d x_n W_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J_{j_1}(x_1) \dots J_{j_n}(x_n). \quad (2.44)$$

Cabe recalcar que el propagador de una teoría interactuante es la función de Green conectada de dos puntos $W^{(2)}$.

Finalmente, se puede notar que \mathcal{W} juega un rol análogo al de un potencial termodinámico, si se interpreta a \mathcal{Z} como una función de partición. Igual que en el caso termodinámico, \mathcal{W} es extensivo mientras que \mathcal{Z} , no.

2.3.5. Funciones de Green Conectadas en Espacio de Momentos

De igual forma que con las funciones de Green, se definen las transformadas de Fourier de las funciones de Green conectadas como

$$(2\pi)^d \delta\left(\sum p_k\right) \widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int \left(\prod_k d^d x_k e^{i x_k p_k} \right) W^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.45)$$

Invirtiendo la transformada de Fourier, se puede escribir la función de dos puntos como

$$W^{(2)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ip(x-y)} \widetilde{W}^{(2)}(-p, p), \quad (2.46)$$

lo que dice que el propagador de la teoría en espacio de momentos es $\widetilde{W}^{(2)}(-p, p) \equiv \widetilde{W}^{(2)}(p)$.

2.4. Acción Efectiva Γ : Funcional Generatriz de Vértices Propios

2.4.1. Desarrollo Semiclásico

A veces es útil estudiar el comportamiento de teorías en un desarrollo en el límite clásico. Esto se consigue haciendo un desarrollo en potencias de \hbar de la integral funcional.

En el límite $\hbar \rightarrow 0$, es posible expresar la función de partición de manera simple en términos del campo clásico. El campo clásico se define como aquel que cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi_j(x)}[\phi_{cl}(J)] = J(x). \quad (2.47)$$

Se puede suponer sin perder generalidad que $\mathcal{S}[0] = 0$ y $W^{(1)} = \phi_{cl}(J=0) = 0$, pues si no alcanza con transformar $\phi \rightarrow \phi - \phi_{cl}(J=0)$.

A orden cero en \hbar se obtiene

$$\mathcal{Z}[J] \sim \mathcal{Z}_0[J] \equiv e^{-\mathcal{S}_{cl} + J\phi}, \quad (2.48)$$

donde se definió $\mathcal{Z}_0[J]$.

Entonces, a orden cero en \hbar se obtiene

$$\mathcal{W}[J] \sim \mathcal{W}_0[J] \equiv -\mathcal{S}_{cl} + J\phi. \quad (2.49)$$

Escribiendo la acción nuevamente como $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + V_I$, y definiendo K como

$$\mathcal{S}_0[\phi] \equiv \phi K \phi = \int d^d x d^d y \phi(x) K(x, y) \phi(y), \quad (2.50)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben

$$K\phi_{cl} + \frac{\delta V_I[\phi_{cl}]}{\delta \phi} = J. \quad (2.51)$$

Dado que $K\Delta = 1$, pues Δ es el propagador de la teoría libre, esta ecuación puede resolverse iterativamente como

$$\phi_{cl} = \Delta J - \Delta \frac{\delta V_I[\phi_{cl}]}{\delta \phi} = \Delta J - \Delta \frac{\delta V_I[\Delta J - \Delta \frac{\delta V_I[\phi_{cl}]}{\delta \phi}]}{\delta \phi} = \Delta J - \Delta \frac{\delta V_I[\Delta J]}{\delta \phi} + \dots \quad (2.52)$$

Por ejemplo, para la teoría con $V_I[\phi] = \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \phi(x)^3$, se obtiene

$$\phi_{cl}(x) = x \text{-----} \times J - x \text{-----} \begin{array}{c} \nearrow \lambda \\ \times J \\ \searrow \lambda \\ \times J \end{array} + \dots \quad (2.53)$$

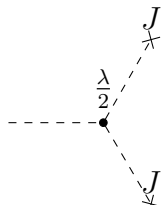
Expandiendo al siguiente orden,

$$\phi_{cl} = \Delta J - \Delta \frac{\delta V_I[\Delta J]}{\delta \phi} + \Delta \frac{\delta^2 V_I[\Delta J]}{\delta J^2} \Delta \frac{\delta V_I[\Delta J]}{\delta \phi} + \dots \quad (2.54)$$

o, en diagramas de Feynman para la teoría ϕ^3 ,

$$\phi_{cl}(x) = x \text{-----} \times J - x \text{-----} \begin{array}{c} \nearrow \lambda \\ \times J \\ \searrow \lambda \\ \times J \end{array} + x \text{-----} \begin{array}{c} \nearrow \lambda \\ \times J \\ \searrow \lambda \\ \times J \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \lambda \\ \times J \\ \searrow \lambda \\ \times J \end{array} + \dots \quad (2.55)$$

Se observa que agregar más órdenes en V_I agrega vértices a los diagramas que aparecen en el desarrollo. Pero siempre van a provenir de desarrollar V_I o sus derivadas en Taylor cerca de ΔJ . El efecto de esto en los diagramas es reemplazar $\text{-----} \times J$ por

 en todos los lugares posibles. Esto hace que se generen todos los diagramas

árbol posibles, pero ningún diagrama con *loops*. Entonces, hacer el desarrollo a orden 0 en \hbar es hacer el desarrollo a nivel árbol de ϕ_{cl} y evaluar la acción en ϕ_{cl} . Más aún, tomando derivadas funcionales de \mathcal{Z} y \mathcal{W} pueden obtenerse todos los observables de la teoría, entre ellos las secciones efectivas de *scattering* y las funciones de Green (conectadas y no). Tomar la derivada funcional $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ sobre \mathcal{W} o sus derivadas equivale a reemplazar $J(x)$ por x en todos los lugares posibles de los diagramas que aparecen

en el desarrollo. Por ejemplo,

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} x \text{---} \lambda \begin{array}{c} \times J \\ \lambda/2 \\ \times J \end{array} = x \text{---} \lambda \begin{array}{c} y \\ \lambda/2 \\ \times J \end{array} + x \text{---} \lambda \begin{array}{c} \times J \\ \lambda \\ \times J \end{array} \text{---} y. \quad (2.56)$$

Es decir que estas acciones no agregarán *loops* a los desarrollos. Entonces hacer el desarrollo perturbativo a orden 0 en \hbar de observables es hacer el desarrollo perturbativo considerando solamente diagramas nivel árbol.

2.4.2. Construcción de la Acción Efectiva

Al hacer el desarrollo de la función de partición en \hbar a orden 0, se obtiene entonces $\mathcal{Z}[J] = e^{-S[\phi_{cl}] + J\phi_{cl}}$, con $\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi}|_{\phi_{cl}} = J$. Y al hacer el desarrollo de todos los observables, se obtiene que hay que considerar solamente los diagramas de Feynman sin *loops*. Entonces, se podría buscar escribir la función de partición para una teoría dada en términos de una acción efectiva como

$$\mathcal{Z}[J] = e^{-\Gamma[\phi] + J\phi}, \quad (2.57a)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = J, \quad (2.57b)$$

con Γ la acción efectiva. Como $\mathcal{Z}[J] = e^{\mathcal{W}[J]}$, de (2.57a) se ve que

$$\mathcal{W}[J] + \Gamma[\phi] = J\phi. \quad (2.58)$$

De esto y (2.57b), se ve que \mathcal{W} y Γ son transformadas de Legendre. Entonces, se puede definir la acción efectiva como

$$\Gamma[\phi] \equiv J\phi - \mathcal{W}[J], \quad \text{con} \quad (2.59a)$$

$$J = \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi}. \quad (2.59b)$$

De igual forma que con \mathcal{W} , como es posible reconstruir $\mathcal{Z}[J]$ de la acción efectiva, esta contiene toda la información de la teoría. Sin embargo, la acción efectiva es más fácil de interpretar que la función de partición y el potencial termodinámico, como se verá más adelante. Como $\mathcal{Z}[J] = e^{-\Gamma[\phi] + J\phi}$, si se trata a Γ como la acción de la teoría, y se hace el desarrollo a nivel árbol, se obtendrá la misma función de partición. Y como

la función de partición determina todos los observables, se puede calcular cualquiera de ellos desarrollando a nivel árbol la teoría, pero utilizando $\Gamma[\phi]$ en lugar de $\mathcal{S}[\phi]$.

2.4.3. Aplicación: Energía de Interacción Estática entre Fuentes

Ya se vio que a temperatura finita, pero en el límite de bajas temperaturas, $\mathcal{Z}[J = 0] = e^{-\beta E_0}$, con E_0 la energía fundamental de la teoría considerada. Entonces, imponerle un regulador temporal T a la teoría (es decir, considerar que las integrales sobre el tiempo corren entre $-T/2$ y $T/2$ en lugar de sobre todo tiempo) es lo mismo que tomar temperatura finita. Entonces, con este regulador $\mathcal{Z}[0] = e^{-TE_0}$. Hasta ahora se consideró sólo el caso $\mathcal{Z}[0] = 0$, equivalente a $E_0 = 0$. Pero dejando $\mathcal{Z}[0]$ arbitrario, se ve que $TE_0 = -\ln[\mathcal{Z}[0]] = \Gamma[0]$. Entonces, imponiendo un regulador temporal sobre la teoría y luego haciéndolo tender a infinito, se ve que $E_0 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma[0]}{T}$. Es decir, del valor de la acción efectiva para campo cero se puede obtener la energía de vacío de la teoría. De la misma forma, si se tiene una fuente J que no depende del tiempo, la energía de los campos en presencia de esa fuente es $E(J) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma[\phi] - J\phi}{T}$, con $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)} = J(x)$.

Considerando ahora el campo escalar real libre en 4 dimensiones espaciotemporales, la acción efectiva es

$$\Gamma[\phi] = \frac{1}{2}\phi[m^2 - \partial^2]\phi. \quad (2.60)$$

Entonces, el campo generado por una fuente es

$$\phi = \Delta J, \quad (2.61)$$

donde $\Delta = [m^2 - \partial^2]^{-1}$. Entonces

$$\Gamma[\phi] - J\phi = -\frac{1}{2}J\Delta J = -\frac{1}{2}\phi J. \quad (2.62)$$

Usando esto, es posible calcular la energía inducida en los campos por dos fuentes puntuales estáticas. Si $J(x) = q_1\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$, donde $x = (x_0, \mathbf{x})$,

$$(m^2 - \partial^2)\phi(x) = q_1\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2). \quad (2.63)$$

Se puede suponer que ϕ no depende del tiempo, pues las fuentes tampoco dependen. Entonces

$$(m^2 - \nabla^2)\phi(x) = q_1\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2). \quad (2.64)$$

Para resolver esta ecuación es necesario calcular la función de Green para el opera-

donde $m^2 - \nabla^2$, $G(\mathbf{x})$. La solución de esta ecuación es

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (2.65)$$

Entonces,

$$\phi(x) = q_1 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) = q_1 \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} + q_2 \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|}. \quad (2.66)$$

Entonces, la energía del campo queda

$$-E = \frac{1}{2T} \int dt d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int dt \left[\frac{q_1^2 + q_2^2}{2} G(0) + q_1 q_2 G(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) \right]. \quad (2.67)$$

Se observa un problema: $G(0)$ diverge. Pero sólo aparecen en términos de autointeracción. Para deshacerse de esos, es útil calcular $E_{\text{int}} = E - E_1 - E_2$, donde E_i es la energía inducida en el campo por una sola carga puntual de carga q_i . Restando eso e introduciendo el regulador temporal $\int dt = T$,

$$E_{\text{int}} = -q_1 q_2 G(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) = -\frac{q_1 q_2 e^{-m|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}}{4\pi|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}. \quad (2.68)$$

Hay varias cosas interesantes para interpretar de este resultado. Por un lado, se obtuvo sólo de considerar campos cuánticos acoplados a una fuente estática en tiempo euclídeo. Por otro lado, el cálculo fue simple sólo porque la acción era cuadrática en los campos, por lo que uno podría esperar que al agregar términos de interacción al Lagrangiano aparezcan correcciones cuánticas. Para teorías libres, el resultado es el mismo que corresponde a una teoría clásica de campos. También se observa que la forma funcional de la energía de interacción es igual que para un campo electromagnético, pero con la diferencia de que la fuerza es atractiva para cargas iguales y repulsiva para cargas opuestas. Este fenómeno está relacionado con el spin del campo, y es la razón por la cual el campo gravitatorio es atractiva (pues la masa de las partículas físicas es siempre definida positiva).

2.4.4. Vértices Propios

Se definen los vértices propios $\Gamma_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ de una teoría como los vértices generados por Γ interpretada como una acción. Es decir,

$$\Gamma_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\delta}{\delta\phi_{j_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi_{j_n}(x_n)} \Gamma[\phi] \Big|_{\phi=0} \quad (2.69)$$

Igual que antes, se puede suponer sin perder generalidad que $\phi[J = 0] = 0$. Entonces, evaluar algo en $J = 0$ es lo mismo que evaluarlo en $\phi = 0$. Suponiendo esto, vale que $\langle \phi \rangle = \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J} |_{J=0} = \phi[J = 0] = 0$ y $0 = J|_{J=0} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} |_{\phi=0}$.

Entonces, se puede desarrollar Γ como

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \Gamma_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_n}(x_n). \quad (2.70)$$

Como se pueden obtener los valores exactos de la teoría desarrollando a nivel árbol en términos de Γ , la función de Green de dos puntos depende sólo de la parte libre de Γ , es decir, de $\Gamma^{(2)}$:

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle_c = \langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle = \left[\Gamma^{(2)-1} \right]_{ij}(x, y). \quad (2.71)$$

Se define a S , el “propagador” asociado a la parte libre de Γ , como

$$S = W^{(2)} = \left[\Gamma^{(2)-1} \right], \quad (2.72)$$

y se lo representa diagramáticamente como

$$S(x, y) = \left[\Gamma^{(2)-1} \right](x, y) = x \text{ --- } \textcircled{\text{---}} \text{ --- } y, \quad (2.73)$$

donde las líneas entrantes o salientes van a depender del tipo de partícula que se propague.

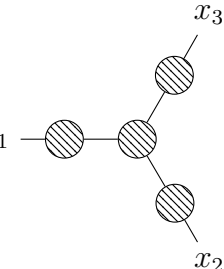
Por otro lado, los vértices propios de más de dos patas se representan de la siguiente forma:

$$\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \text{ --- } \textcircled{\text{---}} \begin{matrix} \nearrow x_2 \\ \searrow x_3 \end{matrix}, \quad (2.74a)$$

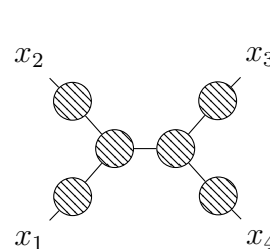
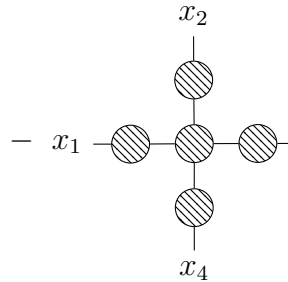
$$\Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \text{ --- } \textcircled{\text{---}} \begin{matrix} \uparrow x_2 \\ \downarrow x_4 \\ \rightarrow x_3 \end{matrix}, \quad (2.74b)$$

y así.

Entonces, se pueden expresar las funciones de Green conectadas expandiendo a nivel árbol. Por ejemplo, la función de 3 patas es

$$\begin{aligned}
W^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= - \text{Diagram} \\
&= - \int d^d y_1 d^d y_2 d^d y_3 S(x_1, y_1) S(x_2, y_2) S(x_3, y_3) \Gamma^{(3)}(y_1, y_2, y_3).
\end{aligned} \tag{2.75}$$


Y la función de 4 patas es

$$\begin{aligned}
W^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \dots \\
&= \int \left(\prod_{i=1}^4 d^d y_i S(x_i, y_i) \right) d^d z_1 d^d z_2 S(z_1, z_2) \Gamma^{(3)}(y_1, y_2, z_1) \Gamma^{(3)}(y_3, y_4, z_2) - \\
&\quad - \int \left(\prod_{i=1}^4 d^d y_i S(x_i, y_i) \right) \Gamma^{(4)}(y_1, y_2, y_3, y_4) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.76}$$



donde ... representa permutar los x_i .

2.4.5. Vértices Propios en Espacio de Momentos

Nuevamente, se definen las transformadas de Fourier de los vértices propios como

$$(2\pi)^d \delta \left(\sum p_k \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int \left(\prod_k d^d x_k e^{i x_k p_k} \right) \Gamma(x_1, \dots, x_n). \tag{2.77}$$

Invirtiendo la transformada de Fourier, se puede escribir $\Gamma^{(2)}$ como

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ip(x-y)} \tilde{\Gamma}^{(2)}(-p, p). \tag{2.78}$$

Definiendo $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \equiv \tilde{\Gamma}^{(2)}(-p, p)$. En espacio de momentos, la expresión de las funciones de Green conectadas $\tilde{W}^{(n)}$ en términos de los vértices propios $\tilde{\Gamma}^{(m)}$ se convierten en expresiones puramente algebraicas [1]. Se expresan de manera análoga en términos

de diagramas de Feynman. En particular, $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = [\tilde{W}^{(2)}(p)]^{-1}$. Utilizando esto las funciones de Green conectadas pueden expresarse de manera más simple. Por ejemplo, comparando con (2.75), la de tres patas queda

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= - \text{Diagrama} \\
 &= - \tilde{W}^{(2)}(p_1) \tilde{W}^{(2)}(p_2) \tilde{W}^{(2)}(p_3) \tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) (2\pi)^d \delta(p_1 + p_2 + p_3).
 \end{aligned}
 \tag{2.79}$$

Capítulo 3

Teorías Fermiónicas con Paredes de Dominio

“Young man, if I could remember the names of these particles, I would have been a botanist.”

— Enrico Fermi

El objetivo de este trabajo es estudiar teorías fermiónicas en presencia de un *background*.

En la sección 3.1 se introducen los conceptos necesarios para entender a estas teorías. Primero (3.1.1) se introduce un término a la acción que representa la interacción de un campo fermiónico con un campo escalar sin dinámica y se expresan las funcionales generatrices para la teoría obtenida. Luego (3.1.2) se define un operador \mathbb{K} que simplifica el cálculo de la acción efectiva y se introduce un desarrollo en modos de ese operador. A partir de este, aparece la presencia de modos especiales llamados modos cero, un tipo de estado localizado en una pared.

En la sección 3.2, primero (3.2.1) se introduce el concepto de paredes de dominio. Luego se muestran distintos ejemplos de sistemas con paredes, y se ve que las paredes pueden generar la aparición de modos cero y modos localizados en general. En particular, se muestra un modelo de una pared “suave” (3.2.2) y se prueba que aparece un modo cero. Se analiza también un modelo de una pared “dura” (3.2.3) y se muestra que existe un modo cero, y que no hay otro modo localizado. Para finalizar, se muestra un sistema sin modos cero (3.2.4), y se dan argumentos de por qué deberían existir modos localizados bajo ciertas condiciones.

En la sección 3.3 se prueban resultados generales sobre la existencia de modos cero y localizados. Primero (3.3.1) se prueba una condición suficiente para que haya modos cero, y otra para que no los haya. Luego (3.3.2), se muestra un método variacional que sirve para probar la existencia de modos localizados. Se muestra una manera de

simplificarlo bajo ciertas condiciones, y se lo aplica para probar la existencia de modos localizados en dos tipos de teoría sin modos 0, una de ellas la teoría estudiada en 3.2.4.

3.1. Teorías Fermiónicas en un *Background*

3.1.1. Acoplamiento de un Campo Fermiónico a un *Background*

La forma más simple de acoplar un campo escalar a uno fermiónico es mediante un término de la forma $\bar{\psi}\phi\psi$. Esto es equivalente a introducir una masa dependiente de la posición para el campo fermiónico. Entonces, la acción de Dirac para un campo fermiónico en un *background* se escribe como

$$\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}] = - \int d^d x \bar{\psi}(x) [\not{\partial} + m(x)] \psi(x) = -\bar{\psi} [\not{\partial} + m] \psi. \quad (3.1)$$

Entonces, la función de partición resulta

$$\mathcal{Z}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\bar{\psi}[\not{\partial} + m]\psi + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi}}. \quad (3.2)$$

Si bien la teoría está acoplada a un *background*, el lagrangiano es cuadrático en los campos, pues $m(x)$ no tiene dinámica (es decir, esta fijo). Entonces, se pueden utilizar las fórmulas obtenidas para las teorías libres. Sin embargo, para estudiar los efectos del *background*, hay que usar el mismo factor de normalización para todas las \mathcal{Z} , de forma que es posible elegir $\mathcal{Z}[J = 0] = 1$ para algún m , pero no siempre si se desea comparar la energía de vacío como función de m . Se puede encontrar más sobre teorías fermiónicas en un *background* en [3]. Por lo tanto, la función de partición para fermiones en un *background* es

$$\mathcal{Z}[\bar{\eta}, \eta] = \det [\not{\partial} + m] e^{-\bar{\eta}[\not{\partial} + m]^{-1}\eta}. \quad (3.3)$$

Y se puede elegir, por ejemplo $\det \not{\partial} + m_0 = 1$, para alguna masa m_0 .

Entonces, el potencial termodinámico es

$$\mathcal{W}[\bar{\eta}, \eta] = \text{tr} \ln [\not{\partial} + m] - \bar{\eta} [\not{\partial} + m]^{-1} \eta, \quad (3.4)$$

donde se usó $\ln \det A = \text{tr} \ln A$. A partir de esto es posible calcular la acción efectiva. Se obtiene

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}] = -\bar{\psi}[\not{\partial} + m]\psi - \text{tr} \ln [\not{\partial} + m]. \quad (3.5)$$

de forma que para entender la teoría es necesario entender en profundidad el operador $F = \not{\partial} + m$.

3.1.2. Desarrollo en Modos

Para simplificar el cálculo del determinante, se define $\mathbb{K} \equiv F^\dagger F$ y $\tilde{\mathbb{K}} \equiv F F^\dagger$. Estos operadores son hermíticos. Además, $\det(\mathbb{K}) = \det(\tilde{\mathbb{K}}) = \det(F) \det(F^\dagger) = \det(F)(\det F)^* = |\det(F)|^2$. Como el Lagrangiano no tiene dependencia temporal, $Z[J] = e^{-E_0 T}$: la acción efectiva sin fuentes es real y proporcional a la energía de vacío. Entonces, para calcular el determinante de F alcanza con calcular el de \mathbb{K} . Para ello, se introduce una base que diagonalice \mathbb{K} .

$$\mathbb{K}\phi_n = \lambda_n \phi_n. \quad (3.6)$$

Para simplificar el desarrollo, se introduce una notación de bra kets sobre el espacio de funciones: se nota el producto interno entre funciones como

$$(f|g) = \int d^d x f^*(x)g(x). \quad (3.7)$$

Se extiende esta notación de manera análoga a la de bras y kets. De forma que

$$F|n) = \lambda_n |n). \quad (3.8)$$

Es importante recalcar que estos “kets” no representan estados de un espacio de Hilbert físico, sino de las funciones cuadrado integrables sobre el espaciotiempo euclídeo. Entonces, es posible escribir

$$\ln \det \mathbb{K} = \text{tr} \ln \mathbb{K} = \sum_n (n| \ln \mathbb{K} |n) = \sum_n (n|n) \ln \lambda_n, \quad (3.9)$$

donde la suma representa una suma o una integral dependiendo de si el espectro es continuo o discreto, y $(n|n)$ será 1 para espectros discretos, pero para los espectros continuos agregará factores infinitos que deberán ser regularizados e interpretados apropiadamente.

Para los casos en que la masa depende solamente de una de las coordenadas espacial, es posible simplificar más el cálculo de $\det \mathbb{K}$. Esto corresponde a que las singularidades generadas por m sean planas. Para este desarrollo se supone $m(x) = m(x_d)$. Se define $A_{\parallel} \equiv (A_0, A_1)$, y $\mathcal{A}_{\parallel} \equiv \gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 = A_{\parallel \mu} \gamma_{\parallel}^{\mu}$. También se definen los proyectores $P_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \gamma_d}{2} = P_{\pm}^{\dagger}$. Entonces, se puede escribir F como

$$\begin{aligned} F &= \gamma_d \partial_d + \not{\partial}_{\parallel} + m(x_d) + \frac{1}{2} [\partial_d + \gamma_d (\not{\partial}_{\parallel} + m(x_d)) - \partial_d - \gamma_d (\not{\partial}_{\parallel} + m(x_d))] = \\ &= \frac{1 + \gamma_d}{2} (\partial_d + \not{\partial}_{\parallel} + m(x_d)) + \frac{1 - \gamma_d}{2} (-\partial_d + \not{\partial}_{\parallel} + m(x_d)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Definiendo $a \equiv \partial_d + m(x_d)$ y $a^\dagger = -\partial_d + m(x_d)$, se puede escribir F como

$$F = P_+ (a + \not{\partial}_\parallel) + P_- (a^\dagger + \not{\partial}_\parallel) . \quad (3.11)$$

Entonces,

$$F^\dagger = (a^\dagger - \not{\partial}_\parallel) P_+ + (a - \not{\partial}_\parallel) P_- . \quad (3.12)$$

Juntando estas ecuaciones y utilizando que $P_\pm^2 = P_\pm$ y $P_\pm P_\mp = 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = D^\dagger D &= [(a^\dagger - \not{\partial}_\parallel) P_+ + (a - \not{\partial}_\parallel) P_-] [P_+ (a + \not{\partial}_\parallel) + P_- (a^\dagger + \not{\partial}_\parallel)] = \\ &= (a^\dagger - \not{\partial}_\parallel) P_+ (a + \not{\partial}_\parallel) + (a - \not{\partial}_\parallel) P_- (a^\dagger + \not{\partial}_\parallel) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora, como en índices espinoriales $a \propto \mathbb{1}$, $P_\pm a = a P_\pm$ y $P_\pm a^\dagger = a^\dagger P_\pm$. Pero también $\{\gamma^2, \gamma_\parallel^\mu\} = 0$, entonces $P_\pm \not{\partial}_\parallel = \not{\partial}_\parallel P_\mp$. Utilizando esto, es posible expresar \mathbb{K} como

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= (a^\dagger - \not{\partial}_\parallel) P_+ (a + \not{\partial}_\parallel) + (a - \not{\partial}_\parallel) P_- (a^\dagger + \not{\partial}_\parallel) = \\ &= (a^\dagger - \not{\partial}_\parallel) (a P_+ + \not{\partial}_\parallel P_-) + (a - \not{\partial}_\parallel) (a^\dagger P_- + \not{\partial}_\parallel P_+) = \\ &= (a^\dagger a - \not{\partial}_\parallel a + a \not{\partial}_\parallel - \not{\partial}_\parallel \not{\partial}_\parallel) P_+ + (a^\dagger \not{\partial}_\parallel - \not{\partial}_\parallel \not{\partial}_\parallel + a a^\dagger - \not{\partial}_\parallel a^\dagger) P_- = \\ &= (a^\dagger a - \partial_\parallel^2) P_+ + (a a^\dagger - \partial_\parallel^2) P_- , \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde para llegar a la última igualdad se utilizó que $\not{A}\not{A} = A^2$, y que como $a \propto \mathbb{1}$ en índices espinoriales y depende solo de x_d , conmuta con $\not{\partial}_\parallel$. De manera completamente análoga, se puede obtener

$$\tilde{\mathbb{K}} = (a a^\dagger - \partial_\parallel^2) P_+ + (a^\dagger a - \partial_\parallel^2) P_- . \quad (3.15)$$

Entonces, se pueden expresar \mathbb{K} y $\tilde{\mathbb{K}}$ de forma diagonal en los autoespacios de γ^2 . Esto permite calcular

$$\ln \det \mathbb{K} = \text{tr} \ln (a a^\dagger - \partial_\parallel^2) + \text{tr} \ln (a^\dagger a - \partial_\parallel^2) , \quad (3.16)$$

donde las trazas están calculadas sólo en términos espaciales. Más aún, estos operadores se pueden simplificar aún más separando variables. Las autofunciones de cualquiera de estos se puede expresar como

$$\phi_{n,k_\parallel}(x) = \phi_n(x_d) e^{i k_\parallel x_\parallel} , \quad (3.17)$$

con, por ejemplo,

$$a a^\dagger \phi_n(x_d) = \lambda_n \phi_n(x_d) , \quad (3.18)$$

y, entonces,

$$(aa^\dagger - \partial_{\parallel}^2) \phi_n(x_d) e^{ik_{\parallel}x_{\parallel}} = (\lambda_n + k^2) \phi_n(x_d) e^{ik_{\parallel}x_{\parallel}}. \quad (3.19)$$

Estas autofunciones serán autoestados del operador si y sólo si son normalizables, pues para que una autofunción sea un autoestado debe estar en el espacio de Hilbert.

Más aún, es posible expresar los operadores diferenciales a diagonalizar como

$$aa^\dagger = (\partial_d + m(x_d)) (-\partial_d + m(x_d)) = -\partial_d^2 + m'(x_d) + m^2(x_d), \quad (3.20a)$$

$$a^\dagger a = (-\partial_d + m(x_d)) (\partial_d + m(x_d)) = -\partial_d^2 - m'(x_d) + m^2(x_d), \quad (3.20b)$$

donde $m'(x_d) = \frac{dm}{dx_d}$. Notar que las ecuaciones para los autoestados de estos operadores son la ecuación de Schrödinger con un potencial $V(x_d) = \pm m'(x_d) + m^2(x_d)$.

Finalmente, dado ϕ_n autoestado de aa^\dagger

$$a^\dagger aa^\dagger \phi_n = a^\dagger (aa^\dagger) \phi_n = a^\dagger \lambda_n \phi_n = \lambda (a^\dagger \phi_n), \quad (3.21)$$

entonces $(a^\dagger \phi_n)$ es un autoestado de $a^\dagger a$, si es distinto de cero. Ocurre lo mismo con autoestados de $a^\dagger a$, pero cambiando $a^\dagger \phi_n$ por $a \phi_n$. Lo que dice esto es que, salvo por autoestados de autovalor 0, los dos operadores tienen el mismo espectro. Los modos que son anulados por a o a^\dagger , llamados modos cero, son de particular interés. Se puede encontrar más información sobre los modos cero y su importancia en [4]. Como ecuación diferencial, la condición que cumplen los modos cero para a y a^\dagger es, respectivamente,

$$\partial_d \phi(x_d) = -m(x_d) \phi(x_d), \quad \text{o} \quad (3.22a)$$

$$\partial_d \phi(x_d) = m(x_d) \phi(x_d). \quad (3.22b)$$

Es decir,

$$\partial_d \ln \phi(x_d) = -m(x_d), \quad \text{o} \quad (3.23a)$$

$$\partial_d \ln \phi(x_d) = m(x_d). \quad (3.23b)$$

Un resultado importante es que los modos cero de a se pueden asociar a autoestados de \mathbb{K} . Dado ϕ_n un autoestado de a , si ψ_+ es un autoestado de γ_d de autovalor 1,

$$\mathbb{K} \phi_n e^{ik_{\parallel}x_{\parallel}} \psi_+ = (a^\dagger a - \partial_{\parallel}^2) P_+ \phi_n e^{ik_{\parallel}x_{\parallel}} \psi_+ = k_{\parallel}^2 \phi_n e^{ik_{\parallel}x_{\parallel}} \psi_+. \quad (3.24)$$

De manera lo mismo ocurre con los modos cero de a^\dagger , pero ahí los autoestados de \mathbb{K} son autoestados de γ^2 con autovalor negativo. En ambos casos, el autovalor de \mathbb{K} corresponde a la relación de dispersión de una partícula sin masa en una sola dimensión

espacial. En estas teorías, la matriz γ^2 es el operador quiralidad. Entonces, la contribución de los modos cero se reduce a la de una teoría de fermiones sin masa de quiralidad definida. A los fermiones de quiralidad positiva se los llama *right* y a los de quiralidad negativa, *left*.

En la siguiente sección se utilizará este formalismo para dos ejemplos. En uno se calculará el espectro completo de un sistema, mientras que en el otro solamente se mostrará la existencia de modos cero. En ambos casos se verá que se podrá asociar la existencia de modos cero a una singularidad.

3.2. Ejemplos de Sistemas con Paredes de Dominio

3.2.1. Paredes de Dominio

Para un sistema de fermiones acoplado a un campo escalar, puede ocurrir que el campo escalar no tenga siempre el mismo signo. En ese caso, el espacio queda separado en regiones conexas, llamadas dominios, en las que el campo tiene signo constante. A los bordes que separan estos dominios entre sí, compuestos por los puntos en los que el campo escalar cambia de signo, se los llama paredes de dominio. Intuitivamente, se puede esperar que en estos puntos pasen cosas interesantes: para la ecuación de Dirac, en las regiones de masa positiva las soluciones de partículas constituirán la rama de energía positiva, y las de antipartículas las de energía negativa. En las regiones de masa negativa pasa lo opuesto. Entonces, en las paredes de dominio ocurre un intercambio en lo que significa el vacío. En las regiones de masa positiva, como siempre, el vacío puede ser interpretado como un mar de fermiones ocupando los estados asociados, en campos, a las antipartículas. Sin embargo, en las de masa negativa, los fermiones ocuparán los estados asociados a partículas, y en las paredes de dominio ocurrirá la transición entre un mar y otro. Posibles realizaciones físicas de estas paredes de dominio ocurren en el grafeno [5], donde los electrones se describen en términos de fermiones de Dirac en $2 + 1$ dimensiones [6].

3.2.2. El Modelo tanh

Una forma de modelar una pared de dominio suave es proponiendo $m(x_d) = m_0 + \frac{\Delta m}{2} \tanh(\Lambda x_d)$, con $\Lambda > 0$. El modelo describe una transición suave entre $m^< \equiv m_0 - \frac{\Delta m}{2}$ y $m^> \equiv m_0 + \frac{\Delta m}{2}$. La principal ventaja de este modelo es que el modo cero puede calcularse analíticamente. Como

$$\tanh(\Lambda x_d) = \frac{\sinh(\Lambda x_d)}{\cosh(\Lambda x_d)} = \frac{\partial_d \cosh(\Lambda x_d)}{\Lambda \cosh(\Lambda x_d)} = \partial_d \left[\frac{1}{\Lambda} \ln \cosh(\Lambda x_d) \right], \quad (3.25)$$

utilizando (3.23a), se obtiene

$$\partial_d \ln \phi(x_d) = \partial_d \ln [\cosh(\Lambda x_d)]^{-\frac{\Delta m}{2\Lambda}} - m_0 x_d. \quad (3.26)$$

Entonces, $\phi(x_d) = \cosh^{-\frac{\Delta m}{2\Lambda}}(\Lambda x_d) e^{-m_0 x_d}$ está en el núcleo de a .

Para ver bajo qué condiciones esta función es normalizable, se puede analizar su comportamiento asintótico. Como $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \cosh(t) = 1/2e^{|t|}$,

$$\lim_{x_d \rightarrow \pm\infty} \phi(x_d) = 1/2 e^{-(m_0 \pm \Delta m/2)x_d}. \quad (3.27)$$

Entonces, esta función es normalizable y hay un modo cero de a si y sólo si $m^< < 0$ y $m^> > 0$. El modo 0 decae exponencialmente con x_d , por lo que puede interpretarse como un modo localizado.

Hacer la cuenta para los modos cero de a^\dagger es análogo, y se obtiene como resultado $\phi(x_d) = \cosh^{\frac{\Delta m}{2\Lambda}}(\Lambda x_d) e^{m_0 x_d}$, que es normalizable si y solo si $m^< > 0$ y $m^> < 0$. Entonces siempre que se m cambie de signo (es decir, que haya una pared de dominio) se forma un modo 0. Este estado decae exponencialmente para $x \rightarrow \infty$, por lo que se lo puede considerar un modo localizado en torno a $x_d = 0$. Entonces, como se mostró antes, el autovalor de \mathbb{K} de un estado asociado a este modo es k_{\parallel}^2 , el mismo resultado que se obtiene para una teoría de fermiones de masa 0 en una dimensión espacial. Y, entonces, la contribución de los modos cero se reduce a la de una teoría de fermiones sin masa de quiralidad definida. La quiralidad es positiva (fermiones *right*) si $\Delta m > 0$ y negativa (fermiones *left*) si $\Delta m < 0$.

3.2.3. Escalón en la masa

En esta sección, se considerará un caso particular del modelo anterior, su límite $\Lambda \rightarrow \infty$. En estas condiciones, se mostrará que el único modo localizado que sobrevive es el modo 0.

En este caso, $m(x_d) = m_0 + \frac{\Delta m}{2} \text{Sg}(x_d) = m^< \Theta(-x_d) + m^> \Theta(x_d)$, con Θ la función Θ de Heaviside. La ecuación (3.20b) queda

$$a^\dagger a = -\partial_d^2 - \Delta m \delta(x_d) + m(x_d)^2. \quad (3.28)$$

Entonces, un autoestado de $a^\dagger a$ de autovalor λ cumple la ecuación de Schrödinger con un potencial $-\Delta m \delta(x_d) + m(x_d)^2$.

$$(-\partial_d^2 - \Delta m \delta(x_d)) \phi(x_d) = (\lambda - m(x_d)^2) \phi(x_d). \quad (3.29)$$

Entonces, los modos localizados pueden escribirse, salvo por un factor de normalización,

como $\phi(x) = e^{k^< x_d} \Theta(-x_d) + e^{-k^> x_d} \Theta(x_d)$, con $k^> = \sqrt{(m^>)^2 - \lambda}$ y $k^< = \sqrt{(m^<)^2 - \lambda}$. Esto asegura que ϕ sea autofunción para todo $x_d \neq 0$. Para asegurarse de que (3.29) valga en $x = 0$, hay que imponer la condición de discontinuidad

$$\left. \frac{d\phi}{dx_d} \right|_{0^-} - \left. \frac{d\phi}{dx_d} \right|_{0^+} = \Delta m \phi(0) = \Delta m. \quad (3.30)$$

Escribiendo esto en términos de $k^>$ y $k^<$,

$$k^> + k^< = \Delta m. \quad (3.31)$$

Además, de la definición de estos se obtiene

$$(k^>)^2 - (k^<)^2 = (m^>)^2 - (m^<)^2. \quad (3.32)$$

Entonces, de estas dos ecuaciones se puede despejar

$$k^> - k^< = \frac{(m^>)^2 - (m^<)^2}{\Delta m} = \frac{(m^> + m^<)(m^> - m^<)}{\Delta m} = (m^>) + (m^<) = 2m_0. \quad (3.33)$$

Despejando,

$$k^< = m_0 - \frac{\Delta m}{2} = -m^<, \quad (3.34a)$$

$$k^> = m_0 + \frac{\Delta m}{2} = m^>. \quad (3.34b)$$

Este resultado es un estado normalizable si y sólo si $m^< < 0$ y $m^> > 0$. En ese caso, $\lambda = 0$, y el único modo localizado que se forma es el modo 0. Si no, no hay modos localizados.

Mediante un proceso análogo, se puede probar que aa^\dagger tiene un modo 0 si y sólo si $m^< > 0$ y $m^> < 0$, y que no hay otro estado localizado posible.

3.2.4. Doble Escalón: un Sistema sin Modos Cero

Hasta ahora se han presentado resultados de sistemas con una sola pared. Ahora se mostrarán resultados para el sistema más simple con más de una pared. Se considerará que

$$m(x_d) = \begin{cases} m_0 & \text{si } x_d < 0 \\ -m_0 & \text{si } 0 < x_d < L, \\ m_0 & \text{si } x_d > L \end{cases}, \quad (3.35)$$

con $L > 0$. Se supondrá $m_0 > 0$. El caso $m_0 < 0$ es análogo, intercambiando los modos *right* por los *left*. De (3.23) se ve que no se pueden construir modos 0 ni para a ni para

a^\dagger , pues la solución a la ecuación crece exponencialmente cuando $x \rightarrow$. Esto puede resultar en un principio contraintuitivo, porque uno esperaría recuperar el modo 0 de una sola pared en el límite $L \rightarrow \infty$. Para entender que pasó con los modos cero, hay que estudiar los modos localizados masivos de la teoría. Si bien (3.20) puede resolverse para encontrar una ecuación de cuantización analíticamente, requiere resolver un sistema de ecuaciones de 5×5 y no es necesario para entender lo que ocurre con los modos cero. Para hacer esto, se estudiará el caso $L \rightarrow \infty$ perturbativamente en $m_0 L$.

Para este sistema, (3.20) queda

$$aa^\dagger = -\partial_d^2 - 2m_0 [\delta(x_d) - \delta(x_d - L)] + m_0^2, \quad (3.36a)$$

$$a^\dagger a = -\partial_d^2 + 2m_0 [\delta(x_d) - \delta(x_d - L)] + m_0^2. \quad (3.36b)$$

Como una ecuación se transforma en la otra con la transformación $x_d \rightarrow L - x_d$, solo se analizará la primera.

El límite, $L \rightarrow \infty$, que permite ver cómo se recuperan los modos 0, puede obtenerse mediante teoría de perturbaciones. Tomando $2m_0\delta(x_d - L)$ como una perturbación, el operador sin perturbar es $-\partial_d^2 - 2m_0\delta(x_d)$. Ya se mostró que este operador tiene un sólo modo localizado, de autovalor $\lambda^{(0)} = 0$. Este es $\phi^{(0)}(x_d) = \sqrt{m_0} e^{-m_0 x_d}$. A orden 1 en perturbaciones, la corrección al autovalor es

$$\lambda^{(1)} = \int dx m_0 e^{-2m_0 x_d} 2m_0 \delta(x_d - L) = 2m_0^2 e^{-2m_0 L}. \quad (3.37)$$

Entonces, a primer orden en perturbaciones, la relación de dispersión que aparece en \mathbb{K} es $k_{\parallel}^2 + 2m_0^2 e^{-2m_0 L}$, de forma que el resultado obtenido es el asociado a una teoría con una relación de dispersión masiva con masa $\sqrt{2}m_0 e^{-m_0 L}$. Es decir, por interacción con la segunda pared, el modo 0 localizado en la primer pared gana masa. Además, si $L \rightarrow \infty$, $2m_0 \delta(x_d - L) \rightarrow 0$ como distribución, y la corrección a todo orden perturbativo se anula. Uno esperaría que como el efecto de $2m_0\delta(x_d - L)$ tiende a cero cuando $L \rightarrow \infty$, para L suficientemente grande la serie perturbativa converga. Entonces, lo que uno puede pensar es que lo que ocurrirá es que nunca habrá verdaderos modos 0 en este modelo, pero para L suficientemente grande, habrá modos localizados. Más adelante, en 3.3.2, se demostrará que este es el caso. La masa asociada a esos modos tenderá a cero cuando $L \rightarrow \infty$, de forma de recuperar el resultado de una sola pared.

3.3. Demostración de Existencia de Modos Cero y Localizados

En la sección anterior se vieron distintos ejemplos de casos en los cuales se formaban modos cero y localizados. Ahora se demostrarán dos resultados que permiten asegurar la existencia de estos modos.

3.3.1. Existencia de Modos Cero

Se demostrará que bajo ciertas condiciones existe un modo 0 para a . Las hipótesis de este resultado son:

1. $m(x_d)$ es integrable. Es decir, $\int_0^{x_2} dz m(z)$ está bien definida para todo x_d . Es decir, m no puede ser una función patológica o tener divergencias no integrables.
2. m es definida positiva para $x \rightarrow +\infty$ y definida negativa para $x \rightarrow -\infty$. Formalmente, existen $y, M > 0$ tal que si $x_d \geq y$, entonces $m(x_d) > M$; y si $x_d \leq -y$, entonces $m(x_d) < -M$. Esta condición quiere decir que para $|x_d|$ suficientemente grande, m tiene el signo apropiado y se mantiene alejado de 0.

Para probar esto, se comienza con la ecuación para el modo 0 de a . Bajo la primer hipótesis del resultado, la ecuación (3.23a) tiene siempre una sola solución como ecuación diferencial, salvo por un factor multiplicativo: $\phi(x_d) = \exp\left(-\int_0^{x_2} dz m(z)\right)$. Para que esta sea un modo 0 falta ver que sea normalizable. Para eso hay que acotar $\int dx_d \phi^2(x_d) = \int dx_d e^{-2\int_0^{x_2} dz m(z)}$. Para esto, se definen

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{-y} dx_d \phi^2(x_d), \quad (3.38a)$$

$$I_2 \equiv \int_{-y}^y dx_d \phi^2(x_d), \quad (3.38b)$$

$$I_3 \equiv \int_y^{\infty} dx_d \phi^2(x_d). \quad (3.38c)$$

Como m es integrable, $I_2 < \infty$. Para probar que I_1 e I_3 son finitos hay que usar la segunda hipótesis. Como $\int_0^{x_2} dz m(z) = \int_0^y dz m(z) + \int_y^{x_2} dz m(z)$, $\phi^2(x_d) = \exp\left(-2\int_0^{x_2} dz m(z)\right) = \phi^2(y) \exp\left(-2\int_y^{x_2} dz m(z)\right)$. Pero entonces, por la segunda hipótesis, si $x_d > y$, $\phi^2(x_d) \leq \phi^2(y) e^{-2M(x_d-y)}$. Entonces $I_3 \leq \phi^2(y) \int_y^{+\infty} dx_d e^{-2M(x_d-y)} < \infty$. I_3 converge. De manera análoga se prueba que I_1 también converge. Como $\int dx_d \phi^2(x_d) = I_1 + I_2 + I_3$, la función es normalizable y hay un modo 0 para a .

Por argumentos análogos se muestra que bajo las mismas condiciones no hay modo 0 para a^\dagger . También se prueba de esta forma que si los signos de la masa son al revés, es decir que m es definida positiva para $x_d \rightarrow -\infty$ y definida negativa para $x_d \rightarrow \infty$, a^\dagger

tiene un modo 0 y a , no. También es posible probar de esta forma que si la masa tiene el mismo signo en $+\infty$ y $-\infty$, nunca se forma un modo 0, incluso cuando hay paredes de dominio.

3.3.2. Existencia de Modos Localizados

Para demostrar la existencia de modos localizados, se utilizará una variante del método variacional de mecánica cuántica. Se considerarán teorías tales que $\lim_{x_d \rightarrow +\infty} m(x_d) = m^> \neq 0$ y $\lim_{x_d \rightarrow -\infty} m(x_d) = m^< \neq 0$. Se define $m_0 \equiv \min(|m^>|, |m^<|)$. Bajo estas condiciones es posible aplicar el siguiente método. Dado un estado $|f_\sigma\rangle$ normalizado, si $(f_\sigma | a^\dagger a | f_\sigma) < m_0^2$, debe haber al menos un autoestado de $a^\dagger a$ con autovalor $\lambda < m_0^2$. Pero como $\lim_{x_d \rightarrow \pm\infty} m(x_d)$ converge, para $x_d \rightarrow \infty$, $a^\dagger a = -\partial_d^2 + m^2(x_d)$. Entonces, si hay un autoestado de autovalor menor a m_0 , debe decaer exponencialmente y, entonces, ser un estado localizado. Para simplificar el cálculo, se puede utilizar que $(f_\sigma | \mathbb{K} | f_\sigma) < m_0^2$ es equivalente a $(f_\sigma | a^\dagger a - m_0^2 | f_\sigma) < 0$. Pero como el lado derecho de la desigualdad es cero, el resultado sale directamente de $(f_\sigma | a^\dagger a - m_0^2 | f_\sigma) < 0$ para $|f_\sigma\rangle$ normalizable, pero no necesariamente normalizado.

Para los casos en que $\lim_{x \rightarrow -\infty} m^2(x_d) = \lim_{x \rightarrow -\infty} m^2(x_d) = m_0^2$, es útil considerar como $f_\sigma(x) \equiv (x | f_\sigma) = e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$, con $\sigma > 0$. Entonces,

$$(f_\sigma | a^\dagger a - m_0^2 | f_\sigma) = - (f_\sigma | \partial_d^2 | f_\sigma) - \int dx_d m'(x_d) f_\sigma^2(x_d) + \int dx_d [m^2(x_d) - m_0^2] f_\sigma^2(x_d). \quad (3.39)$$

Ahora, tomando el límite $\sigma \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int dx_d m'(x_d) f_\sigma^2(x_d) = \int dx_d m'(x_d) = m(+\infty) - m(-\infty), \text{ y} \quad (3.40a)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int dx_d [m^2(x_d) - m_0^2] f_\sigma^2(x_d) = \int dx_d [m^2(x_d) - m_0^2]. \quad (3.40b)$$

Falta el primer término, que se puede hacer con transformada de Fourier utilizando el Teorema de Wick para variables reales

$$- (f_\sigma | \partial_d^2 | f_\sigma) = \int dp p^2 \sigma e^{-\frac{p^2 \sigma^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \sigma \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

Entonces, si $m(-\infty) - m(+\infty) + \int dx_d [m^2(x_d) - m_0^2] < 0$, $a^\dagger a$ tiene un modo localizado. De manera análoga se prueba que si $m(+\infty) - m(-\infty) + \int dx_d [m^2(x_d) - m_0^2] < 0$, aa^\dagger tiene uno.

Por ejemplo para una teoría con $m(x_d) = m_0 \Theta(|x| - a) + m_1 \Theta(a - |x|)$ se puede probar que si $m_1^2 < m_0^2$ siempre hay un modo localizado tanto para $a^\dagger a$ como para aa^\dagger .

Otro ejemplo en donde es útil utilizar el método variacional es el doble escalón uti-

lizado en 3.2.4. Eligiendo como $(x|f) = \sqrt{\frac{1}{L}} \cos \left[\frac{\pi x}{2L} \right] \Theta(L - |x|)$, el estado fundamental de un pozo infinito de ancho $2L$ centrado en 0. Como es el estado fundamental de un pozo infinito, ya se sabe que $-(f|\partial_d^2|f) = \frac{\pi^2}{4L^2}$. Es fácil calcular los otros dos términos necesarios. Como $m(x_d)^2 - m_0^2 = 0$, el último término no aparece. Y del término con m' sólo aparece la δ centrada en cero. Entonces,

$$(f|aa^\dagger|f) = \frac{\pi^2}{4L^2} - \frac{2m_0}{L}. \quad (3.42)$$

Si $L > \frac{\pi^2}{8m_0}$, aa^\dagger tiene un modo localizado. Como ya se probó antes, no hay ningún modo cero. Entonces, aplicándole a al modo localizado de aa^\dagger es posible construir un modo localizado para $a^\dagger a$. Se recupera el resultado obtenido perturbativamente, que para L grande se forman modos localizados.

Capítulo 4

Acoplamiento de los Modos Cero al Campo Electromagnético

“The worthwhile problems are the ones you can really solve or help solve, the ones you can really contribute something to. ... No problem is too small or too trivial if we can really do something about it.”

— Richard P. Feynman

En este capítulo se calcula la contribución de los modos cero a la corriente electromagnética de vacío en presencia de un campo eléctrico en la dirección de la pared.

En la sección 4.1 se hace un análisis general de fermiones acoplados a un campo de gauge. Primero (4.1.1) se presenta el término que se agrega a la acción para representar a un campo electromagnético externo y luego (4.1.2) se muestra como el desarrollo hecho en el capítulo anterior se generaliza a este caso.

Y en la sección 4.2 se calcula la corriente generada por los modos cero. Primero (4.2.1) se muestra como la acción efectiva se separa en términos de los modos cero y del resto, y como eso implica que pueden encontrarse corrientes separadas. Y luego (4.2.2) se utiliza el resultado del modelo de Schwinger utilizando la anomalía quiral para calcular la corriente inducida en los modos cero.

4.1. Acoplamiento de Fermiones al Campo Electromagnético

4.1.1. Término de Interacción

Para estudiar el efecto que tiene el campo electromagnético sobre un sistema de fermiones, es necesario agregar un término de acoplamiento a la acción. Este término

se escribe utilizando el cuadrivector corriente $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ y el potencial cuadrivector $A^\mu = (\Phi_e, \mathbf{A})$, donde ρ es la densidad de carga electromagnética, \mathbf{j} es el vector corriente electromagnética, Φ el potencial electrostático y \mathbf{A} es el potencial vector. La corriente electromagnética de un campo fermiónico es

$$j^\mu(x) = -ie\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad (4.1)$$

donde e es la carga de los fermiones.

El término de interacción que se agrega al Lagrangiano es $A_\mu j^\mu$. De forma que la acción queda

$$\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, A] = - \int d^d x \bar{\psi}(x) [\not{\partial} + ie\not{A} + m(x)] \psi(x). \quad (4.2)$$

Una manera de escribir esto es utilizando la derivada covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$. De forma que

$$\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, A] = - \int d^d x \bar{\psi}(x) [\not{D} + m(x)] \psi(x). \quad (4.3)$$

Es de interés calcular la corriente electromagnética inducida por un campo. Para eso se utiliza que

$$\langle j^\mu(x) \rangle = \{ \mathcal{Z}[A] \}^{-1} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} j^\mu(x) e^{-\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}, \quad (4.4)$$

con $\mathcal{Z}[A, \bar{\eta}, \eta] \equiv \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}$ la función de partición en presencia de un campo electromagnético y $\mathcal{Z}[A] \equiv \mathcal{Z}[A, \bar{\eta} = 0, \eta = 0]$. Como $\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, A] = j^\mu$,

$$\langle j^\mu(x) \rangle = - \{ \mathcal{Z}[A] \}^{-1} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathcal{Z}[A, \bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = - \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \ln \mathcal{Z}[A]. \quad (4.5)$$

Como para $\eta = \bar{\eta} = 0$, $\mathcal{Z} = e^{-\Gamma[A]}$,

$$\langle j^\mu(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \Gamma[A]. \quad (4.6)$$

Lo cual tiene sentido, porque ya se vio que para obtener los valores medios de derivadas de la acción, alcanza con derivar la acción efectiva.

Algo importante de destacar es que si $\Gamma[A] = \Gamma_1[A] + \Gamma_2[A]$, la corriente podrá escribirse como $j^\mu(x) = j_1^\mu(x) + j_2^\mu(x)$, con $j_k^\mu(x) = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \Gamma_k[A]$. En particular, si Γ_1 es la contribución a la acción efectiva de los modos cero, se puede hablar de la corriente inducida en los modos cero, y la corriente total será esa sumada a la inducida sobre los otros modos del sistema.

4.1.2. Fermiones en 2+1 Dimensiones

Se considerará ahora un campo fermiónico en $2 + 1$ dimensiones, en presencia de un *background* y el campo electromagnético. La acción es (4.3). De manera análoga a antes, pero utilizando la derivada covariante, se definen $F \equiv \not{D} + m(x)$ y $\mathbb{K} = F^\dagger F$. También, si m depende sólo de x_2 , $a \equiv D_2 + m(x_2)$ y $a^\dagger = -D_2 + m(x_2)$. Donde para calcular a^\dagger se usa que A es real. \mathbb{K} puede desarrollarse igual que antes, y se obtiene

$$\mathbb{K} = [a^\dagger a - D_{\parallel}^2 + ieF_{2\mu}\gamma^\mu] P_+ + [aa^\dagger - D_{\parallel}^2 - ieF_{2\mu}\gamma^\mu] P_-, \quad (4.7)$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de campo electromagnético. La presencia del $F_{2\mu}$ impide hacer lo mismo que antes para deshacerse de los índices espinoriales. La fuerza electromagnética ejercida sobre una partícula clásica de cuádrivector velocidad η^μ es $F_{\mu\nu}\eta^\nu$, entonces es posible interpretar a $F_{2\mu}$ como una medida de cuánta fuerza electromagnética se ejercerá en la dirección 2. Para calcular la corriente inducida por un campo eléctrico en la dirección 1, se puede suponer $F_{2\mu} = 0$. En ese caso,

$$\mathbb{K} = [a^\dagger a - D_{\parallel}^2] P_+ + [aa^\dagger - D_{\parallel}^2] P_-. \quad (4.8)$$

Esta ecuación es igual a (3.14), pero reemplazando ∂ por D . Más aún, eligiendo el gauge $A_2 = 0$, $a = \partial_2 + m(x_2)$ y $a^\dagger = -\partial_2 + m(x_2)$. Las ecuaciones para los modos 0 son las mismas que en la usencia de campo electromagnético, y la condición $F_{2\mu} = 0$ es equivalente a $\partial_2 A_\mu = 0$. Entonces A no depende de x_2 , y el problema queda desacoplado.

Como, en este gauge, ni a ni a^\dagger dependen de A . Se formarán los mismos estados en la dirección 2. En particular, se formarán los mismos modos cero.

4.2. Corriente Inducida en los Modos Cero

4.2.1. Contribución a la Acción Efectiva de los Modos Cero: el Modelo de Schwinger

Como los modos cero son autoestados de \mathbb{K} , se puede escribir $\det \mathbb{K} = (\det \mathbb{K}_0)(\det \mathbb{K}_1)$, donde \mathbb{K}_0 es la restricción de \mathbb{K} a los modos cero y \mathbb{K}_1 , la restricción a los demás modos. Entonces,

$$\mathcal{Z}[A] = (\det \mathbb{K}_0)^{1/2} (\det \mathbb{K}_1)^{1/2}, \quad (4.9)$$

donde se utilizó que para sistemas independientes del tiempo $\mathcal{Z} = e^{-E_0 T}$ es real. Pero entonces,

$$\Gamma[A] = -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \mathbb{K}_0 - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \mathbb{K}_1 = \Gamma_0[A] + \Gamma_1[A]. \quad (4.10)$$

Entonces, tiene sentido calcular la corriente inducida sobre los modos 0. Ya se mostró que los modos cero de \mathbb{K} serán $\phi_0(x_2)e^{ik_{\parallel}x_{\parallel}}$, con $\phi_0(x_2)$ el modo cero de a o a^{\dagger} . Entonces es fácil ver que

$$\det \mathbb{K}_0 = \det (-D_{\parallel}^2), \quad (4.11)$$

donde el determinante está tomado sobre todas las funciones escalares de x_{\parallel} . Esto puede expresarse en términos de fermiones como

$$\det(\mathbb{K}_0)^2 = \det(-D^2) = \det(-\mathcal{D}_{\parallel}^2) = (\det \mathcal{D}_{\parallel})^2, \quad (4.12)$$

donde todos los determinantes salvo el primero están tomados sobre todos los espinores funciones de x_{\parallel} . Como los espinores tienen dos componentes, aparece un cuadrado en el primer determinante, que está tomado sobre las funciones escalares. Pero entonces

$$\det \mathbb{K}_0 = \det \mathcal{D}_{\parallel} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int d^2x \bar{\psi}(x) \mathcal{D}_{\parallel} \psi(x)} \equiv \mathcal{Z}_s[A]. \quad (4.13)$$

Es posible calcular el determinante de \mathbb{K}_0 estudiando una teoría de fermiones no masivos en 1+1 dimensiones acoplados a un campo electromagnético. Este modelo es el modelo de Schwinger y puede resolverse analíticamente utilizando la anomalía quirral [7].

4.2.2. Solución del Modelo de Schwinger: la Anomalía Quiral

La acción del Modelo de Schwinger con un campo electromagnético externo es

$$\mathcal{S}_s = - \int d^2x_{\parallel} \bar{\psi}(x_{\parallel}) \mathcal{D}_{\parallel} \psi(x_{\parallel}). \quad (4.14)$$

Esta acción es invariante ante las transformaciones de gauge y ante la transformación quirral $\psi \rightarrow e^{-e\gamma^2\alpha(x_{\parallel})}\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-e\gamma^2\alpha(x_{\parallel})}$, $A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + e\epsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\alpha(x_{\parallel})$. Además, $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ es invariante ante la transformación de gauge, pero no frente a la transformación quirral [7, 8]. Es posible aprovechar esto para resolver el modelo.

El campo A más general posible es $A_{\mu} = -\partial_{\mu}\chi(x_{\parallel}) - \epsilon_{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi(x_{\parallel})$. Mediante una transformación de Gauge es posible escribirlo como $A_{\mu} = -\epsilon_{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi(x_{\parallel})$ [7]. Esto equivale a elegir el gauge $\partial_{\parallel}^{\mu}A_{\mu} = 0$. Haciendo una transformación quirral sólo sobre los fermiones y aprovechando la anomalía es posible expresar la función de partición como

$$\mathcal{Z}[A] = \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' e^{-\bar{\psi}' \mathcal{D} \psi' - \frac{e^2}{2\pi} (\partial_{\mu}\varphi)^2}, \quad (4.15)$$

por lo que la acción efectiva del modelo de Schwinger es

$$\Gamma_s[\psi, \bar{\psi}, A] = -\bar{\psi}' \mathcal{D} \psi' - \frac{e^2}{2\pi} (\partial_{\mu}\varphi)^2 - \text{tr} \ln \mathcal{D}. \quad (4.16)$$

Como $A_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \varphi$, $\partial_\nu \varphi = \epsilon_{\nu\mu} A^\mu$, $(\partial_\mu \varphi)^2 = A^\mu \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\rho\nu} A_\rho = A^2$

$$\Gamma_s[\psi, \bar{\psi}, A] = -\bar{\psi}' \not{\partial} \psi' - \frac{e^2}{2\pi} A^2 - \text{tr} \ln \not{\partial}. \quad (4.17)$$

Entonces, la contribución de los modos cero a la acción efectiva es

$$\Gamma_0[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}' \not{\partial} \psi' + \frac{e^2}{2\pi} A^2 + \text{tr} \ln \not{\partial} \right]. \quad (4.18)$$

Entonces, se puede calcular la corriente inducida en los modos cero utilizando (4.6)

$$\langle j^\mu(x) \rangle = -\frac{e^2}{2\pi} A^\mu. \quad (4.19)$$

Las unidades de esto son correctas, pues en 1 + 1 dimensiones, A^μ es adimensional¹. Entonces, e tiene dimensiones de masa. Por lo tanto, $\int d^2x_{\parallel} j^\mu A_\mu$ es adimensional, como debe ser para una contribución a la acción.

¹Esto se ve de la acción electromagnética libre

Capítulo 5

El teorema de Gelfand-Yaglom

“The older I get, the more I believe that at the bottom of most deep mathematical problems there is a combinatorial problem.”

— Israel Gelfand

En este capítulo, se introduce una generalización del teorema de Gelfand-Yaglom, y se ka utiliza para aplicar un esquema de reducción dimensional con respecto a la coordenada de la que depende la masa en problemas de paredes de dominio. Usando esta técnica, el problema de calcular la acción efectiva se reduce a calcular un operador análogo a uno de evolución temporal en mecánica cuántica. Obtuvimos una fórmula para este operador, que se generaliza de distintas formas.

5.1. Teorema de Gelfand-Yaglom

El teorema de Gelfand-Yaglom facilita el cálculo de determinantes de operadores de la forma

$$\mathbb{K} = -\frac{d^2}{dx^2}\mathbb{1} + \mathbb{H}(x), \quad (5.1)$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad de $N \times N$, y $\mathbb{H}(x)$ es una matriz de $N \times N$ que depende del escalar x , y se asume que el operador actúa sobre funciones de x con condiciones de contorno de Dirichlet en $x = \pm\frac{L}{2}$ (al final se toma $L \rightarrow \infty$ y $N \rightarrow \infty$).

El determinante de este operador por lo general diverge, por lo que se suele calcular el cociente entre su determinante y el de un operador de referencia

$$\mathbb{K}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}\mathbb{1} + \mathbb{H}_0(x). \quad (5.2)$$

Se suele tomar $\mathbb{H}_0(x)$ constante, pero no es necesario hacerlo. El teorema de Gelfand-

Yaglom dice entonces que [9]

$$\frac{\det \mathbb{K}}{\det \mathbb{K}_0} = \frac{\det \mathbb{D}(x)}{\det \mathbb{D}_0(x)} \Big|_{x=\frac{L}{2}}, \quad (5.3)$$

donde \mathbb{D} y \mathbb{D}_0 cumplen

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{1} + \mathbb{H}(x) \right] \mathbb{D}(x) = 0, \quad (5.4a)$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{1} + \mathbb{H}_0(x) \right] \mathbb{D}_0(x) = 0, \quad (5.4b)$$

con condiciones iniciales

$$\mathbb{D} \left(-\frac{L}{2} \right) = 0, \quad (5.5a)$$

$$\frac{d\mathbb{D}}{dx} \left(-\frac{L}{2} \right) = \mathbf{1}, \quad (5.5b)$$

y condiciones iniciales idénticas para \mathbb{D}_0 . El teorema de Gelfand-Yaglom permite entonces convertir un problema de calcular determinantes funcionales en uno de resolver ecuaciones diferenciales y evaluar determinantes matriciales. El teorema de Gelfand-Yaglom puede generalizarse para condiciones de contorno distintas, y este cambio se ve reflejado en las condiciones iniciales que cumple la ecuación diferencial. Nosotros no haremos esto, pues la dependencia en las condiciones de contorno se pierde al tomar $L \rightarrow \infty$.

El teorema de Gelfand-Yaglom es formulado generalmente para \mathbb{H} una matriz finita. Sin embargo, como en la formulación de integrales de camino uno siempre supone que se trabajan con aproximaciones discretas que tienden a un continuo, también podemos aplicar el teorema cuando \mathbb{H} es un operador. Esta generalización y parte de los resultados alcanzados ya habían sido obtenidos y parcialmente publicados en [10]

Entonces, si estudiamos un operador de la forma:

$$\mathbb{K}(x) = -\partial^2 + V(x), \quad (5.6)$$

podemos usar $x_{\parallel} \equiv (x^1, \dots, x^{d-1})$ y $\partial_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial x_{\parallel}}$ y definiendo $V_{x_d}(x_{\parallel}) \equiv V(x)$ para escribir

$$\mathbb{K}(x) = -\partial_d^2 - \partial_{\parallel}^2 + V_{x_d}(x_{\parallel}). \quad (5.7)$$

Entonces, definiendo $\mathbb{H}(x_d) = -\partial_{\parallel}^2 + V_{x_d}(x_{\parallel})$, obtenemos

$$\mathbb{K}(x) = -\partial_d^2 + \mathbb{H}(x) \quad (5.8)$$

y podemos aplicar el teorema para efectuar una reducción dimensional sobre el problema.

Para hacer esto hay que resolver la ecuación diferencial operatorial

$$\mathbb{K}(x)\mathbb{D}(x) = 0. \quad (5.9)$$

Esto también puede escribirse como

$$\partial_d^2 \mathbb{D}(x) = \mathbb{H}(x_d)\mathbb{D}(x). \quad (5.10)$$

Para resolver esta ecuación hacemos una reducción de orden introduciendo al vector de operadores $\Psi(x_d) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x_d) \\ \Psi_2(x_d) \end{pmatrix}$ que cumple

$$\partial_d \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{H}(x_d) & 0 \end{pmatrix} \Psi \equiv \mathcal{H}(x_d)\Psi. \quad (5.11)$$

De forma que entonces podemos escribir el determinante en términos del “operador evolución”

$$\mathcal{U}(b, a) = \mathcal{P}e^{\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d)}, \quad (5.12)$$

donde \mathcal{P} indica el *path ordering*.

Cuando \mathbb{H} no depende de x_d , esto se reduce a

$$\cosh(L_d \sqrt{\mathbb{H}}) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} + \frac{\sinh(L_d \sqrt{\mathbb{H}})}{\sqrt{\mathbb{H}}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{H} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Entonces, si $\mathcal{U}^{(0)}$ es el operador evolución correspondiente a \mathbb{H}_0 y escribimos $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^{(L_d/2, -L_d/2)}$,

$$\frac{\det \mathbb{K}}{\det \mathbb{K}_0} = \frac{\det \mathcal{U}_{12}}{\det \mathcal{U}_{12}^{(0)}}. \quad (5.14)$$

5.2. Aplicación a Paredes Planas

Si consideramos casos en los que la masa dependa sólo de la coordenada x_d , el operador \mathbb{H} es

$$\mathbb{H}(x_d) = -\partial_{\parallel}^2 + m^2(x_d) - \gamma^d m'(x_d). \quad (5.15)$$

En lo que sigue consideremos $\mathbb{H}_0 = -\partial_{\parallel}^2 + m_0^2$. Si consideramos que la masa sólo varía en un intervalo $(-l/2, l/2)$ y que $m(x_d) = m_0$ fuera de él,

$$\mathcal{U}^{(L_d/2, -L_d/2)} = \mathcal{U}^{(0)(L_d/2, l/2)} \mathcal{U}^{(l/2, -l/2)} \mathcal{U}^{(0)(-l/2, -L_d/2)}, \quad (5.16)$$

que expandiendo y quedándose sólo con el término que más rápido diverge con $L_d \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\mathcal{U}^{(L_d/2, -L_d/2)} \sim \frac{1}{4} e^{\frac{L_d-l}{2}\sqrt{\mathbb{H}_0}} \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \mathcal{U} \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) e^{\frac{L_d-l}{2}\sqrt{\mathbb{H}_0}}, \quad (5.17)$$

con $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^{(l_d/2, -l_d/2)}$, mientras que para $\mathcal{U}^{(0)}$ se obtiene

$$\mathcal{U}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbb{H}_0}} e^{L_d\sqrt{\mathbb{H}_0}}, \quad (5.18)$$

de forma que

$$\frac{\det \mathcal{U}_{12}}{\det \mathcal{U}_{12}^{(0)}} = \det \left(e^{-l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \det (\Omega_{11}), \quad (5.19)$$

donde

$$\Omega_{11} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \tilde{\mathcal{U}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right), \quad (5.20)$$

y en general definimos Ω como la matrix de \mathcal{U} en base $\left\{ \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right), \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{-\mathbb{H}_0}} \right) \right\}$, cuya base dual es $\left\{ \frac{1}{2} \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right), \frac{1}{2} \left(\mathbf{1}, \frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \right\}$.

Esto se justifica aún más porque

$$\mathcal{U}^{(0)}(b, a) = \frac{1}{2} \left[e^{(b-a)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \otimes \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) + e^{-(b-a)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \left(\frac{\mathbf{1}}{-\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \otimes \left(\mathbf{1}, \frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \right], \quad (5.21)$$

de forma que

$$\Omega^{(0)}(b-a) = \begin{pmatrix} e^{(b-a)\sqrt{\mathbb{H}_0}} & 0 \\ 0 & e^{-(b-a)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Esta notación va a permitir calcular las acciones efectivas de paredes más fácilmente.

Capítulo 6

Paredes de Ancho 0

“Science may be described as the art of systematic oversimplification.”

— Karl Popper

En este capítulo, se utiliza el teorema de Gelfand-Yaglom para calcular las acciones efectivas de distintos sistemas. En 6.2 se calcula la acción efectiva de una pared, en 6.3, la acción de dos; en 6.4, la de dos sistemas arbitrarios y en 6.5, la de tres paredes. Luego, en 6.6, se presenta un algoritmo para calcular la acción efectiva de un número arbitrario de paredes.

6.1. Paredes y Antiparedes

El modelo más simple de paredes de dominio son las paredes de ancho 0. Estos son *backgrounds* tales que $|m(x_d)| = m_0$ para casi todo x , y hay posiciones en las que salta discontinuamente entre m_0 y $-m_0$.

La pared corresponde a un salto entre $-m_0$ y m_0 , y la antipared como un salto entre m_0 y $-m_0$ (en ambos casos al incrementar x_d). Podemos calcular fácilmente el operador evolución asociada a ellas, pues para ellas

$$\mathbb{H}(x_d) = -\partial_{\parallel}^2 + m_0^2 \mp 2m_0\gamma^d\delta(x_d), \quad (6.1)$$

donde posicionamos a la pared en $x_d = 0$, y $\mp = -$ para la pared y $+$ para la antipared. Como $|m(x_d)| = m_0$ en todo punto salvo 0, $l = 0$ y

$$T_{\pm} \equiv \mathcal{U}(0^+, 0^-) = \mathcal{P}e^{\int_0^+ dx_d \mathcal{H}(x_d)} = \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mp 2m_0\gamma^d & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \mp 2m_0\gamma^d & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Entonces, Ω para una pared plana es

$$\Omega^\pm \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{1} \mp \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} & \mp \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \\ \pm \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} & \mathbb{1} \pm \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Por lo tanto, calculando productos de $\Omega^{(0)}$ y Ω^\pm se puede calcular la acción efectiva de cualquier *background* de paredes planas.

6.2. Una sola pared

Si $m(x_d) = m_0 \text{Sg}(x_d)$, $\Omega = \Omega^+$,

$$e^{-2\Gamma} = \det \Omega_{11} = \det \left[\mathbb{1} + \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right]. \quad (6.4)$$

Entonces, despejando y utilizando que $\text{tr} \ln = \ln \det$,

$$\Gamma = \frac{-1}{2} \text{tr} \left[\ln \left(\mathbb{1} + \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \right] \quad (6.5)$$

Expandiendo la traza funcional y utilizando que los autovalores de γ^d son 1 y -1 ; y sus autoespacios son de igual dimensión

$$\Gamma = \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{4} \text{tr} \{ \mathbb{1}_{\text{spin}} \} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \ln \left(1 - \frac{1}{1 + (k/m_0)^2} \right), \quad (6.6)$$

donde T es un *cutoff* temporal, L_n es el *cutoff* de la coordenada n y $\mathbb{1}_{\text{spin}}$ es la identidad sobre los índices de spin, cuya traza es el número de índices de Dirac que depende sólo de la dimensión.

Tomando coordenadas cilíndricas y haciendo el cambio de variables $u = \frac{k}{m_0}$, esto se puede escribir como

$$\Gamma = \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr} \{ \mathbb{1}_{\text{spin}} \} \frac{m_0^d}{\Gamma \left(\frac{d-1}{2} \right)} \int_0^\infty du u^{d-2} \ln \left(1 - \frac{1}{1 + u^2} \right), \quad (6.7)$$

donde Γ es la función gamma de Euler. Esta integral es divergente siempre excepto para $d = 2$. Es decir, las paredes de dominio tienen energía infinita, salvo para paredes en $1 + 1$.

La acción efectiva de una antipared es la misma.

6.3. Pared - Antipared

Otro modelo que uno puede considerar es el de una pared y una antipared. Para este modelo, uno toma

$$m(x_d) = \begin{cases} m_0 & \text{si } |x_d| < l \\ -m_0 & \text{si } |x_d| > l \end{cases}, \quad (6.8)$$

donde l es la distancia entre las paredes y coincide con lo que llamamos l anteriormente. Entonces,

$$\Omega = \Omega^+ \Omega^{(0)}(l) \Omega^-, \quad (6.9)$$

lo que implica que

$$\Omega_{11} = e^{l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{11}^+ \Omega_{11}^- + e^{-l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{12}^+ \Omega_{21}^- = e^{l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \left[\mathbf{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} + e^{-2l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \right], \quad (6.10)$$

entonces,

$$\begin{aligned} e^{-2\Gamma} &= \det \left[\mathbf{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} + e^{-2l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \right] = \\ &= \det \left[\mathbf{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \right] \det \left[\mathbf{1} + \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0 - m_0^2} e^{-2l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Sabemos que esta acción efectiva va a dar divergente, porque la de las paredes individuales diverge. La energía de interacción entre ellas es finita. Para ver esto, definimos

$$e^{-2\Gamma_\infty} \equiv \lim_{l \rightarrow \infty} e^{-2\Gamma} = \det \left[\mathbf{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \right]. \quad (6.12)$$

Es interesante notar que como $\det \left[\mathbf{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \right] = \det \left[\mathbf{1} - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right] \det \left[\mathbf{1} + \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right]$, Γ_∞ es la suma entre las acciones efectivas de una pared y una antipared, por lo que la energía de interacción entre ellas en infinito es nula. Para ver la energía de interacción a distancia finita, calculamos $\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma - \Gamma_\infty$

$$e^{-2\tilde{\Gamma}} = \det \left[\mathbf{1} + \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0 - m_0^2} e^{-2l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right]. \quad (6.13)$$

La acción efectiva queda entonces

$$\tilde{\Gamma} = \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty du u^{d-2} \ln \left[1 + \frac{1}{u^2} e^{-2\lambda\sqrt{u^2+1}} \right], \quad (6.14)$$

donde $\lambda = lm_0$ es la distancia de las paredes en unidades de $1/m_0$. Esta expresión da finita para todo d , porque para $u \rightarrow \infty$, $\tilde{\Gamma} \sim \int du u^{d-4} e^{-2\lambda\sqrt{u^2+1}} < \infty$; y para $u \rightarrow 0$ la función solo es singular en $d = 2$, donde la singularidad es de tipo $\int du \ln(1/u^2)$, que es

integrable.

6.4. Energía de Interacción entre Dos Sistemas

El resultado anterior puede generalizarse fácilmente al caso en que las singularidades no son paredes. Podemos considerar entonces dos sistemas con matrices $\Omega^{1,2}$ asociadas. Si suponemos que tienen anchos $\epsilon_{1,2}$ y están a distancia l , la acción efectiva queda

$$e^{-2\Gamma} = \det \left[e^{-(\epsilon_1 + \epsilon_2)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \left(\Omega_{11}^1 \Omega_{11}^2 + e^{-2l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{12}^1 \Omega_{21}^2 \right) \right]. \quad (6.15)$$

Nuevamente, podemos definir la acción a distancia infinita por

$$e^{-2\Gamma_\infty} = \det \left[e^{-(\epsilon_1 + \epsilon_2)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{11}^1 \Omega_{11}^2 \right] = \det \left[e^{-\epsilon_1\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{11}^1 \right] \det \left[e^{-\epsilon_2\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{11}^2 \right]. \quad (6.16)$$

Lo que muestra que la energía de interacción a distancia infinita es cero. Además, la acción efectiva sustraída $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_\infty$ cumple

$$e^{-2\tilde{\Gamma}} = \det \left[\mathbb{1} + e^{-2l\sqrt{\mathbb{H}_0}} \frac{\Omega_{12}^1 \Omega_{21}^2}{\Omega_{11}^1 \Omega_{11}^2} \right]. \quad (6.17)$$

Entonces, definiendo $q_l^1(u) = \frac{\Omega_{12}^1}{\Omega_{11}^1}$ y $q_r^2(u) = \frac{\Omega_{21}^2}{\Omega_{11}^2}$, en donde se debe reemplazar $\partial_{||}^2$ por u^2 , la acción efectiva sustraída queda

$$\tilde{\Gamma} = \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr} \{ \mathbb{1}_{\text{spin}} \} \frac{m_0^d}{\Gamma \left(\frac{d-1}{2} \right)} \int_0^\infty du u^{d-2} \ln \left[1 + q_l^1(u) q_r^2(u) e^{-2\lambda\sqrt{u^2+1}} \right]. \quad (6.18)$$

Esto prueba que para cualquier par de sistemas, la energía de interacción decae exponencialmente cuando están separados por distancias grandes.

6.5. Pared-Antipared-Pared

Como último ejemplo de un sistema de paredes planas sin ancho, estudiamos un sistema de una pared, una antipared a distancia a de la primer pared y una segunda pared a distancia b de la primer pared. Entonces,

$$\Omega = \Omega^+ \Omega^{(0)}(a) \Omega^- \Omega^{(0)}(b) \Omega^+. \quad (6.19)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Omega_{11} = & e^{(a+b)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{11}^+ \Omega_{11}^- \Omega_{11}^+ + e^{(a-b)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{11}^+ \Omega_{12}^- \Omega_{21}^+ + \\ & + e^{(b-a)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{12}^+ \Omega_{21}^- \Omega_{11}^+ + e^{-(a+b)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{12}^+ \Omega_{22}^- \Omega_{21}^+ \end{aligned} \quad (6.20)$$

De forma de que hay que calcular cuatro términos

$$\begin{aligned}\Omega_{11}^+ \Omega_{11}^- \Omega_{11}^+ &= \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \left(1 + \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \left(1 - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}\right)\end{aligned}\quad (6.21a)$$

$$\Omega_{11}^+ \Omega_{12}^- \Omega_{21}^+ = \Omega_{12}^+ \Omega_{21}^- \Omega_{11}^+ = -\Omega_{12}^+ \Omega_{22}^- \Omega_{21}^+ = \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{H_0}}\right)\quad (6.21b)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Omega &= e^{(a+b)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \left(1 - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}\right) + \\ &+ \left[2 \cosh\left((b-a)\sqrt{\mathbb{H}_0}\right) - e^{-(a+b)\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right] \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right).\end{aligned}\quad (6.22)$$

Entonces, la acción efectiva queda

$$\begin{aligned}e^{-2\Gamma} &= \det \left\{ \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \left(1 - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}\right) + \right. \\ &\left. + \left[e^{-2a\sqrt{\mathbb{H}_0}} + e^{-2b\sqrt{\mathbb{H}_0}} - e^{-(a+b)\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right] \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} \left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \right\}.\end{aligned}\quad (6.23)$$

Esta acción, como ya podríamos esperar, diverge. Pero podemos hacer lo mismo que para el caso de dos paredes y restar la acción efectiva para $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $\Gamma_\infty = -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[\left(1 - \frac{m_0 \gamma^d}{\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \left(1 - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}\right) \right]$. Esta acción es nuevamente la suma de la acción efectiva de las tres paredes por separado, lo que muestra que la energía de interacción en infinito sigue siendo cero, incluso un modelo con modos ceros como este. Podemos además $\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma - \Gamma_\infty$

$$e^{-2\tilde{\Gamma}} = \det \left[\mathbb{1} + \left(e^{-2a\sqrt{\mathbb{H}_0}} + e^{-2b\sqrt{\mathbb{H}_0}} - e^{-(a+b)\sqrt{\mathbb{H}_0}}\right) \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0 - m_0^2} \right].\quad (6.24)$$

Finalmente, la acción efectiva sustraída para este modelo queda

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr} \{ \mathbb{1}_{\text{spin}} \} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty du u^{d-2} \\ &\ln \left[1 + \frac{1}{u^2} \left(e^{-2\alpha\sqrt{u^2+1}} + e^{-2\beta\sqrt{u^2+1}} - e^{-2(\alpha+\beta)\sqrt{u^2+1}} \right) \right],\end{aligned}\quad (6.25)$$

donde $\alpha = m_0 a$ y $\beta = m_0 b$ son a y b expresados en unidades de $1/m_0$. Al igual que en el caso de dos paredes, esta acción es siempre finita.

6.6. Un Algoritmo para Calcular Acciones Efectivas Sustraídas de Paredes Planas

6.6.1. Separación en Diagramas

Las cuentas que se hicieron hasta ahora pueden generalizarse a cualquier problema de N paredes planas. Si se tiene un sistema de N paredes planas, posicionadas en $l_i = \lambda_i/m_0$, para calcular la acción efectiva hay que calcular $\Omega = \Omega^+ \Omega^{(0)}(\lambda_2 - \lambda_1) \dots \Omega^{(0)}(\lambda_N - \lambda_{N-1}) \Omega^\pm$, donde \pm es $+$ si N es impar, y $-$ si es par. Para calcular el determinante, sólo hace falta saber Ω_{11} , que se puede escribir como

$$\Omega_{11} = \sum_{S_i=1,2; i=1,\dots,N-1} \Omega_{1,S_1}^+ e^{(-1)^{S_1-1}(\lambda_2-\lambda_1)\sqrt{\mathbb{H}_0/m_0^2}} \Omega_{S_1,S_2}^- e^{(-1)^{S_2-1}(\lambda_3-\lambda_2)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \dots e^{(-1)^{S_{N-1}-1}(\lambda_N-\lambda_{N-1})\sqrt{\mathbb{H}_0/m_0^2}} \Omega_{S_{N-1},1}^\pm. \quad (6.26)$$

Hay que calcular una suma de términos. Cada término queda determinado por los valores de cada S_i .

Estos términos pueden representarse diagramáticamente: cada diagrama consiste de una curva formada por líneas rectas verticales y horizontales. La curva atraviesa líneas verticales en posiciones marcadas como S_1, S_2 , etc. a una altura “alta” o una “baja”. Si la curva cruza a la posición S_i “alta”, eso representa $S_i = 2$, y si la cruza “baja”, $S_i = 1$. Por ejemplo, diagrama correspondiente al término $\Omega_{1,2}^+ e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{2,1}^- e^{(\lambda_3-\lambda_2)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{1,2}^+ e^{-(\lambda_4-\lambda_3)\sqrt{\mathbb{H}_0}} \Omega_{2,1}^-$ de un sistema de 4 paredes se muestra en la figura 6.1.

6.6.2. La Contribución de un Diagrama

Para calcular las acciones efectivas, hay que relacionar la forma de cada diagrama con el valor de su contribución. Para hacer esto es útil calcular el valor de ciertos productos que aparecen en ellas.

$$\Omega_{11}^\pm \Omega_{11}^\mp = \mathbb{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}, \quad (6.27a)$$

$$\Omega_{22}^\pm \Omega_{22}^\mp = \mathbb{1} - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}, \quad (6.27b)$$

$$\Omega_{12}^\pm \Omega_{21}^\mp = \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}, \quad (6.27c)$$

$$\Omega_{22}^- \Omega_{21}^+ = -\Omega_{21}^- \Omega_{11}^+, \quad (6.27d)$$

$$\Omega_{22}^+ \Omega_{21}^- = -\Omega_{21}^+ \Omega_{11}^-. \quad (6.27e)$$

Basándose en estos resultados, se puede llegar a una fórmula cerrada para la contri-

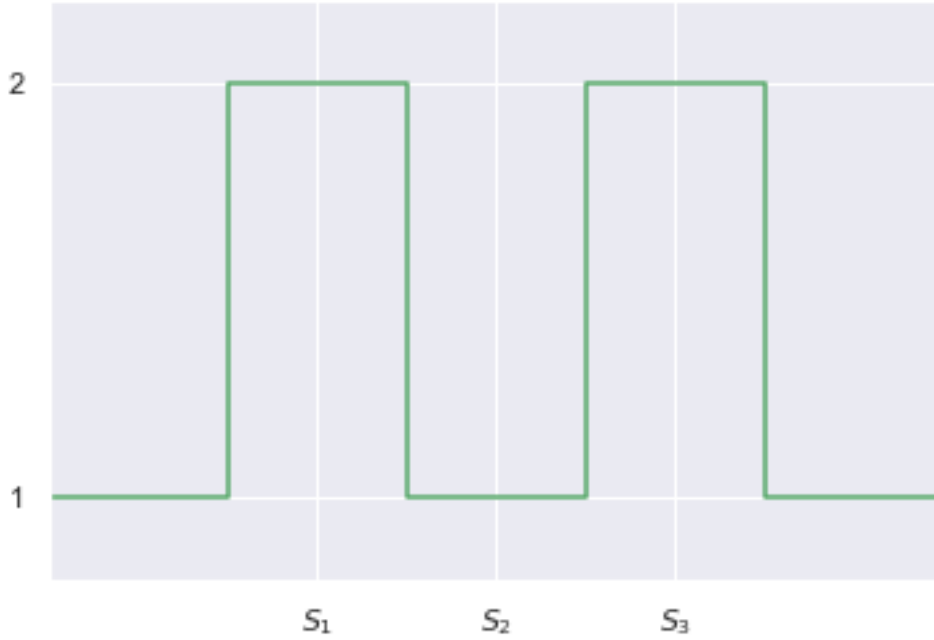


Figura 6.1: Diagrama que representa una contribución a la acción efectiva de cuatro paredes.

bución de un diagrama. Empecemos por notar que (6.27a), (6.27b) y (6.27c) nos dicen que $\Omega_{ij}^{\pm}\Omega_{ji}^{\mp}$ conmutan con γ^d , y por ende Ω^{\pm} , para todo i, j . Entonces,

$$\Omega_{12}^{\pm}(\Omega_{22}^{\mp}\Omega_{22}^{\pm})^n\Omega_{21}^{\mp} = \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}(\Omega_{11}^{\pm}\Omega_{11}^{\mp})^n, \quad (6.28a)$$

$$\Omega_{12}^{\pm}(\Omega_{22}^{\mp}\Omega_{22}^{\pm})^n\Omega_{22}^{\mp}\Omega_{21}^{\pm} = -\frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}(\Omega_{11}^{\pm}\Omega_{11}^{\mp})^n\Omega_{11}^{\pm}. \quad (6.28b)$$

Esto aparece en la contribución de un diagrama cuando en él la curva pasa de 1 a 2, cruza $2n - 1$ o $2n$ (respectivamente) líneas en 2, y luego vuelve a 1. En base a esto definimos el *signo* de un diagrama. Lo definimos en base a un número: el número de líneas verticales que cruza el diagrama menos el número de rectas verticales en la curva sobre dos. Definimos el signo de D , $\text{Sg}(D)$, como $+1$ si este número es par, y -1 en otro caso. De esta forma, el signo del diagrama va a coincidir con el signo que aparece al utilizar la ecuación (6.28) para simplificar las contribuciones de los diagramas. Es fácil leer el signo de un diagrama pensando en los signos de las “montañas” de un diagrama. Podemos pensar que cada diagrama está compuesto por distintas “montañas”, estructuras en las que la curva pasa de 1 a 2, atraviesa cierto número de rectas verticales en 2, y luego pasa de 2 a 1. Como cada “montaña” agrega 2 líneas verticales y un cierto número de líneas verticales cruzadas en 2, a cada “montaña” le podemos asignar un signo, que es $+1$ si cruza un número impar de líneas, y -1 si cruza un número par de

lineas. El signo del diagrama se puede calcular como el producto de los signos de las “montañas” del diagrama.

La única contribución a la acción efectiva que sobrevive a distancias grandes entre paredes sale de tomar $S_i = 1 \forall i$. La forma del diagrama de esta contribución se muestra en la figura 6.2. La contribución de este diagrama a la acción efectiva es $\det \left(e^{-(\lambda_{2n}-\lambda_0)\sqrt{\mathbb{H}_0/m_0^2}} \right) \det \Omega_{11}^\infty \equiv \det (\Omega_{11}^+ \Omega_{22}^-)^n$ cuando hay $2n$ paredes, y $\det \left(e^{-(\lambda_{2n+1}-\lambda_1)\sqrt{\mathbb{H}_0/m_0^2}} \right) \det \Omega_{11}^\infty \equiv \det [(\Omega_{11}^+ \Omega_{22}^-)^n \Omega_{11}^+]$ cuando hay $2n + 1$.

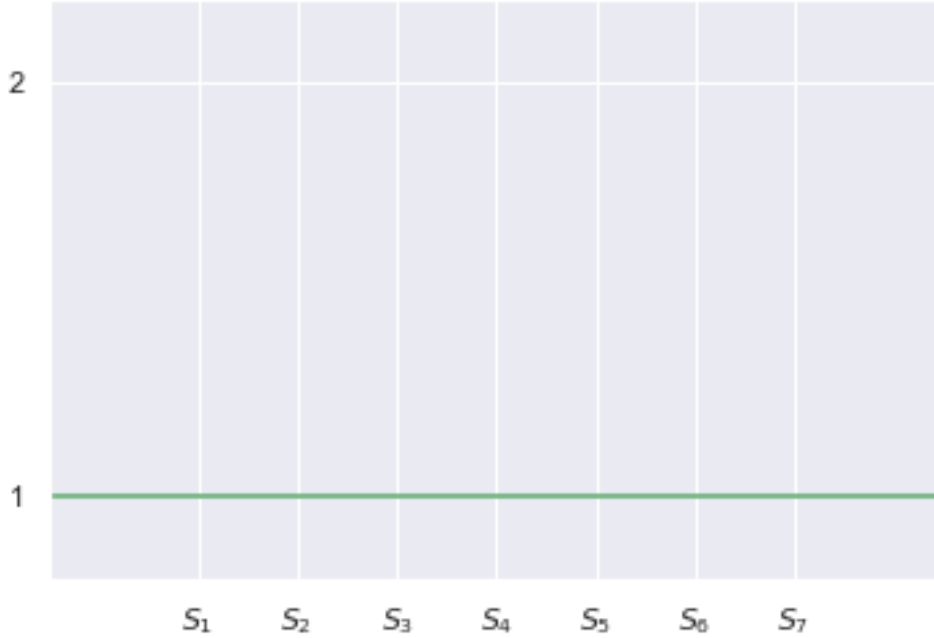


Figura 6.2: Forma del diagrama de la contribución principal a distancias entre paredes grandes o k_{\parallel}^2 grande de las acciones efectivas.

Utilizando que todo lo que aparece en la contribución de un diagrama conmuta con Ω_{11}^\pm , que todos los diagramas que contribuyen a una acción tienen el mismo número de términos multiplicados y que $\frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0}/1 - \frac{m_0^2}{\mathbb{H}_0} = \frac{m_0^2}{-\nabla^2}$, podemos calcular la contribución $C(D)$ de un diagrama D a $\Omega_{11}/\Omega_{11}^\infty$. Esta nos da

$$C(D) = \text{Sg}(D) \frac{1}{(-\nabla/m_0)^{|D|}} e^{-2 \sum_{i:S_i=2} (\lambda_{i+1}-\lambda_i)\sqrt{\mathbb{H}_0/m_0^2}}. \quad (6.29)$$

Es útil notar que $\sum_{i:S_i=2} (\lambda_{i+1}-\lambda_i)$ se puede reescribir como $\sum_{i \in I^+} \lambda_i - \sum_{i \in I^-} \lambda_i$, donde $I^+ = \{i \in \{1, \dots, N-1\} : S_{i-1} = 2 \text{ y } S_i = 1\}$ es el conjunto de puntos en los que la curva pasa de 1 a 2 e $I^- = \{i \in \{1, \dots, N-1\} : S_{i-1} = 1 \text{ y } S_i = 2\}$, el conjunto de puntos en los que la curva pasa de 2 a 1. Notamos $S_0 = S_N = 1$. Estos conjuntos se

pueden leer directamente de los diagramas.

Entonces, la acción efectiva sustraída de para un sistema de paredes planas puede escribirse en términos de la contribución de sus diagramas como

$$\tilde{\Gamma} = \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty du u^{d-2} \ln \left[\sum_D C_u(D) \right], \quad (6.30)$$

con

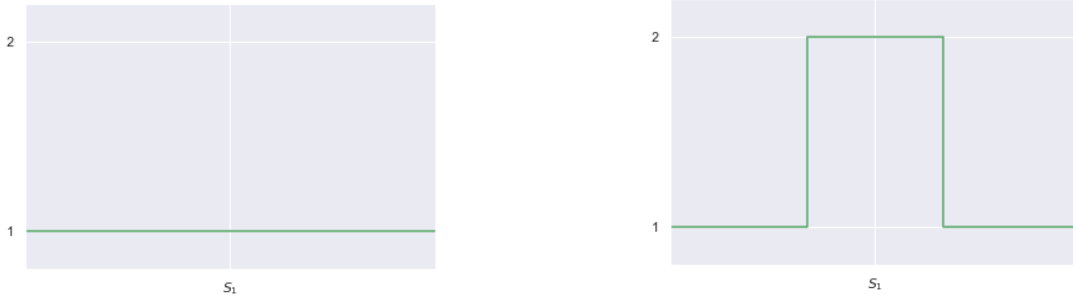
$$C_u(D) = \text{Sg}(D) \frac{1}{u^{|D|}} e^{-2 \sum_{i:S_i=2} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \sqrt{u^2+1}}. \quad (6.31)$$

6.6.3. Recuperando los Resultados Anteriores Usando el Algoritmo

Los resultados que ya calculamos en esta tesis se pueden obtener de manera mucho más simple utilizando el algoritmo.

Pared-Antipared

Para un sistema pared-antipared, se muestran las contribuciones a la acción efectiva en la figura 6.3.



(a) $\text{Sg}(D) = +1$, $I^+ = I^- = \emptyset$, $|D| = 0$.
 $C_u(D) = 1$.

(b) $\text{Sg}(D) = +1$, $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$, $|D| = 1$.
 $C_u(D) = \frac{1}{u} e^{-2(\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{u^2+1}}$.

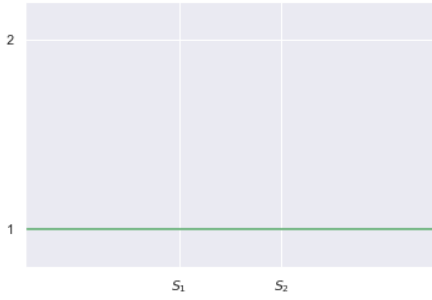
Figura 6.3: Diagramas que contribuyen a la acción efectiva de un sistema pared-antipared.

Aplicando (6.31), podemos calcular $C_u(D)$ para cada diagrama. Para la figura 6.3a, $C_u(D) = 1$. Para la figura 6.3b, $C_u(D) = \frac{1}{u} e^{-2(\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{u^2+1}}$. Usando (6.30), recuperamos la acción efectiva de un par pared-antipared (6.14).

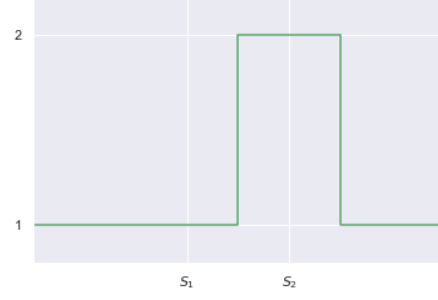
Pared-Antipared-Pared

Para un sistema pared-antipared-pared, se muestran las contribuciones a la acción efectiva en la figura 6.4.

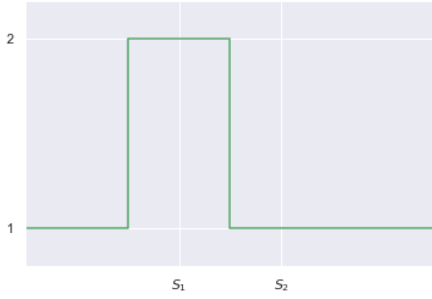
Igual que antes, calculamos los $C_u(D)$. Para la figura 6.4a, $C_u(D) = 1$. Para la figura 6.4b, $C_u(D) = \frac{1}{u} e^{-2(\lambda_3 - \lambda_2) \sqrt{u^2+1}}$. Para la figura 6.4c, $C_u(D) = \frac{1}{u} e^{-2(\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{u^2+1}}$. Y para



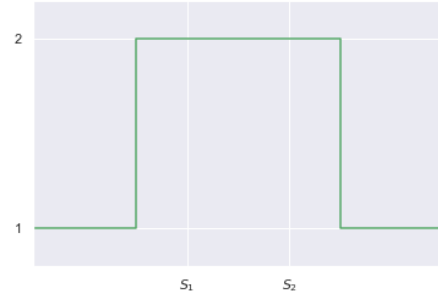
(a) $\text{Sg}(D) = +1, I^+ = I^- = \emptyset, |D| = 0.$
 $C_u(D) = 1.$



(b) $\text{Sg}(D) = +1, I^+ = \{2\} I^- = \{3\}, |D| = 1.$
 $C_u(D) = C_u(D) = \frac{1}{u} e^{-2(\lambda_3 - \lambda_2)\sqrt{u^2 + 1}}.$



(c) $\text{Sg}(D) = +1, I^+ = \{1\} I^- = \{2\}, |D| = 1.$
 $C_u(D) = C_u(D) = \frac{1}{u} e^{-2(\lambda_2 - \lambda_1)\sqrt{u^2 + 1}}.$



(d) $\text{Sg}(D) = -1, I^+ = \{1\} I^- = \{3\}, |D| = 1.$
 $C_u(D) = C_u(D) = -\frac{1}{u} e^{-2(\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{u^2 + 1}}.$

Figura 6.4: Diagramas que contribuyen a la acción efectiva de un sistema pared-antipared-pared.

la figura 6.4d, $C_u(D) = -\frac{1}{u} e^{-2(\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{u^2 + 1}}$. Utilizando (6.30), reobtenemos la acción efectiva de un sistema pared-antipared-pared (6.25).

6.6.4. Programando este Algoritmo y Utilizándolo

Programamos el algoritmo en Python, que genera un archivo .txt con la acción efectiva escrita en \LaTeX . Utilizamos el programa para calcular la acción efectiva de 6 paredes, que cuenta con $2^5 = 32$ términos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{6 \text{ paredes}} &= \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty du u^{d-2} \\
&\ln \left[1 + \frac{1}{u^2} \left(e^{2(\lambda_1-\lambda_2)} + e^{2(\lambda_2-\lambda_3)} - e^{2(\lambda_1-\lambda_3)} + e^{2(\lambda_3-\lambda_4)} - e^{2(\lambda_2-\lambda_4)} + \right. \right. \\
&e^{2(\lambda_1-\lambda_4)} + e^{2(\lambda_4-\lambda_5)} - e^{2(\lambda_3-\lambda_5)} + e^{2(\lambda_2-\lambda_5)} - e^{2(\lambda_1-\lambda_5)} + e^{2(\lambda_5-\lambda_6)} - e^{2(\lambda_4-\lambda_6)} + \\
&e^{2(\lambda_3-\lambda_6)} - e^{2(\lambda_2-\lambda_6)} + e^{2(\lambda_1-\lambda_6)} \left. \right) + \frac{1}{u^4} \left(e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)} + e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4-\lambda_5)} + \right. \\
&e^{2(\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5)} - e^{2(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5)} - e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_5)} + e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_5-\lambda_6)} + \\
&e^{2(\lambda_2-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)} - e^{2(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)} + e^{2(\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6)} - e^{2(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6)} + \\
&e^{2(\lambda_1-\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6)} - e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4-\lambda_6)} - e^{2(\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)} + e^{2(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)} + \\
&\left. \left. e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_6)} \right) + \frac{1}{u^6} \left(e^{2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6)} \right) \right] \quad (6.32)
\end{aligned}$$

El programa de Python que hicimos se muestra a continuación.

```

# -*- coding: utf-8 -*-

class diagrama:

    def __init__(self,N): #Describe un diagrama con N paredes. La última
        siempre va a +1
        self.saltos=[]
        self.Nparedes=N
        self.total_diagramas=2**(N-1)
        self.orden=0
        self.orden_maximo= N if N%2==0 else N-1
        self.signo=1
        self.exponenciales=[]
        for i in range(N-1):
            self.saltos.append(1)

    def cambiar(self): #Cambia el diagrama para iterar sobre ellos

        for n in range(self.Nparedes-1):
            self.saltos[n]*=-1
            if self.saltos[n]<0:

```

```
        break

def es_trivial(self): #verifica si el diagrama es el trivial

    for i in range(self.Nparedes-1):
        if self.saltos[i]==-1:
            return False
    return True

def calcular_orden(self): #calcula el orden del diagrama

    if self.saltos[0]==-1:
        self.orden=1
        self.exponenciales=[1]
    else:
        self.orden=0
        self.exponenciales=[]

    for n in range(1,self.Nparedes-1):
        if self.saltos[n]!=self.saltos[n-1]:
            self.orden+=1
            self.exponenciales.append(n+1)

    if self.saltos[-1]==-1:
        self.orden+=1
        self.exponenciales.append(self.Nparedes)

def calcular_signo(self):
    self.signo=1
    for n in range(1,self.Nparedes-1):
        if self.saltos[n]==-1 and self.saltos[n-1]==-1:
            self.signo*=-1

def Calcular_Accion_Efectiva(N):
```

```

d=diagrama(N)
d.cambiar()
exponenciales=[]
for i in range(d.orden_maximo//2):
    exponenciales.append([])

while not d.es_trivial():
    d.calcular_orden()
    d.calcular_signo()

    exponenciales[d.orden//2-1].append([d.signo,d.exponenciales.copy()])

    d.cambiar()

ecuacion=open('Accion_Efeciva_de_'+str(N)+'_paredes.txt','w')
ecuacion.write('\frac{-T\prod_{n=1}^{d-1}L_n}{2^d}\,
    \pi^{\frac{d-1}{2}} \text{tr}\{\mathds{1}_{\text{spin}}\}
    \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty
    \mathrm{d} u \, u^{d-2} \ln\Big[1')

for i in range(d.orden_maximo//2):
    ecuacion.write('+ \frac{1}{u^{'+str(2*(i+1))+'}} \Big(')
    primero=True
    for j in range(len(exponenciales[i])):

        if j!=0:
            ecuacion.write('+ ' if exponenciales[i][j][0]==1 else '-')

        elif exponenciales[i][0][0]==-1:
            ecuacion.write('-')

    ecuacion.write('\mathrm{e}^{\{2(')

    primero = True
    signo=1
    for k in exponenciales[i][j][1]:
        if not primero:
            ecuacion.write('+ ' if signo==1 else '-')

```

```
    primero=False
    signo*=-1

    ecuacion.write('\lambda_'+str(k))

    ecuacion.write('}')

    ecuacion.write('\Big)')

    ecuacion.write('\Big]')
    ecuacion.close()
```

Capítulo 7

Sistemas con Ordenamiento no Trivial

“The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.”

— David Hilbert

En este capítulo se estudian sistemas de paredes que no pueden ser descritos solamente utilizando $\mathcal{U}^{(0)}$ y las matrices T_{\pm} . En estos, el *path ordering* se vuelve más relevante, y es necesario encontrar una forma de tratarlo. En 7.1.1 se muestra una forma de calcular \mathcal{U} cuando $[\mathbb{H}(x_d), \mathbb{H}(y_d)] = 0$, que se usa en para calcular las energías de dos modelos de paredes planas con ancho finito y se estudia la divergencia de ellas. 7.1.2. En 7.2 se estudian paredes planas cilíndricas: se comienza en 7.2.1 calculando el operador \mathcal{U} para problemas de Sturm-Liouville y en 7.2.2 separando variables en coordenadas cilíndricas. Esto se utiliza en 7.2.3 para escribir $\mathcal{U}^{(0)}$ en problemas con simetría cilíndrica, y este resultado se aplica en 7.2.4 para estudiar la acción efectiva de una pared cilíndrica delgada. Finalmente, en 7.2.5, se muestra como este problema puede aproximarse cuando el radio de la pared es muy grande.

7.1. Paredes Planas con Ancho Finito

7.1.1. Una Mejor Fórmula Para \mathcal{U}

La facilidad con la que se pueden analizar las paredes planas proviene del hecho de que se puede calcular una fórmula explícita para \mathcal{U} . Para las paredes de ancho finito resulta más difícil hacer esto, y la principal dificultad proviene del operador de *path ordering*. Frente a esto, presentamos una fórmula para \mathcal{U} que no contiene ningún operador de ordenamiento cuando $[\mathbb{H}(x), \mathbb{H}(y)] = 0 \forall x, y$. Para hacer esto, comenzamos

por la definición de \mathcal{U} :

$$\mathcal{U}(b, a) = \mathcal{P} e^{\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d)}. \quad (7.1)$$

Como el operador \mathcal{P} está definido en términos de series de potencias, podemos escribir $e^x = \sinh(x) + \cosh x$, de forma que

$$\mathcal{U}(b, a) = \mathcal{P} \cosh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) + \mathcal{P} \sinh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right). \quad (7.2)$$

Vamos a analizar estos dos términos por separado. Empezamos por el término \cosh .

$$\mathcal{H}(x_d)\mathcal{H}(y_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{H}(x_d) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{H}(y_d) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{H}(y_d) & 0 \\ 0 & \mathbb{H}(x_d) \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

Entonces,

$$\mathcal{P} \cosh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) = \frac{1}{2} \mathcal{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right)^{2k} \quad (7.4)$$

Sin embargo, utilizando la expresión anterior obtenemos que esto es igual a

$$\mathcal{P} \cosh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) = \frac{1}{2} \mathcal{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} [(b-a)I_{b,a}]^k \mathbf{1}, \quad (7.5)$$

donde $I_{b,a} \equiv \int_a^b dx_d \mathbb{H}(x_d)$. Entonces,

$$\mathcal{P} \cosh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) = \mathcal{P} \cosh \left[\sqrt{(b-a)I_{b,a}} \right] \mathbf{1}, \quad (7.6)$$

donde el operador \mathcal{P} actúa sólo sobre el ordenamiento de los \mathbb{H} , de forma que cuando estos conmutan,

$$\mathcal{P} \cosh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) = \cosh \left[\sqrt{(b-a)I_{b,a}} \right] \mathbf{1}. \quad (7.7)$$

Obtuvimos una fórmula para la primer parte de \mathcal{U} . Ahora, para la segunda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \sinh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) &= \frac{1}{2} \mathcal{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right)^{2k+1} \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \left(\int_a^{x_d} dy_d \mathcal{H}(y_d) \right)^{2k} \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \mathcal{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\int_a^{x_d} dy_d \mathcal{H}(y_d) \right)^{2k} \\
&= \int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \mathcal{P} \cosh \left[\sqrt{(x_d - a) I_{x_d, a}} \right],
\end{aligned} \tag{7.8}$$

De manera análoga, se obtiene también que

$$\mathcal{P} \sinh \left(\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \right) = \mathcal{P} \int_a^b dx_d \cosh \left[\sqrt{(b - x_d) I_{b, x_d}} \right] \mathcal{H}(x_d). \tag{7.9}$$

En estas dos fórmulas, el ordenamiento solo afecta a las \mathbb{H} , pues el operador \mathcal{H} que aparece está siempre en la posición que le corresponde (último o primero dependiendo de la fórmula). Entonces, cuando los \mathbb{H} conmutan, el *path ordering* desaparece. Por lo tanto,

$$\mathcal{U}(b, a) = \mathcal{P} \cosh \left[\sqrt{(b - a) I_{b, a}} \right] \mathbb{1} + \int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \mathcal{P} \cosh \left[\sqrt{(x_d - a) I_{x_d, a}} \right], \tag{7.10}$$

y, cuando los \mathbb{H} conmutan,

$$\mathcal{U}(b, a) = \cosh \left[\sqrt{(b - a) I_{b, a}} \right] \mathbb{1} + \int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \cosh \left[\sqrt{(x_d - a) I_{x_d, a}} \right]. \tag{7.11}$$

7.1.2. Aplicación a Paredes de Ancho Finito

Con esta nueva fórmula, podemos llegar a una expresión para Ω para paredes planas. Si tenemos un *background* arbitrario plano $m(x_d)$,

$$\mathbb{H}(x_d) = -\partial_{\parallel}^2 + m^2(x_d) - \gamma^d m'(x_d). \tag{7.12}$$

De forma que $[\mathbb{H}(x_d), \mathbb{H}(y_d)] = 0$. Además,

$$I_{b, a} = (b - a) (-\partial_{\parallel}^2) + \gamma^d [m(a) - m(b)] + \int_a^b dx_d m^2(x_d). \tag{7.13}$$

Entonces, podemos expresar

$$\Omega^{b,a} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}, \frac{1}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \mathcal{U}(b, a) \left(\frac{\mathbb{1}}{\sqrt{\mathbb{H}_0}} \right) \quad (7.14)$$

utilizando la fórmula a la que llegamos. Esto nos queda

$$\Omega^{b,a} = \cosh \left[\sqrt{(b-a)I_{b,a}} \right] + \int_a^b dx_d \frac{\mathbb{H}_0 + \mathbb{H}(x_d)}{2\sqrt{\mathbb{H}_0}} \cosh \left[\sqrt{(x-a)I_{x,a}} \right]. \quad (7.15)$$

Esta fórmula se puede usar entonces para encontrar la acción efectiva para cualquier *background* plano.

7.1.3. Pared Lineal

Un ejemplo de aplicación es poner

$$m(x) = \begin{cases} -m_0 & \text{si } x < -l/2 \\ \frac{2m_0x}{l} & \text{si } |x| < \frac{l}{2} \\ m_0 & \text{si } x > l/2 \end{cases} \quad (7.16)$$

de forma que la pared tiene un ancho l . Entonces,

$$\mathbb{H}(x) = -\partial_{\parallel}^2 - \frac{2m_0}{l}\gamma^d + \frac{4m_0^2}{l^2}x^2 \quad (7.17a)$$

$$I_{x_d, -l/2} = (x + l/2) \left(-\partial_{\parallel}^2 - \frac{2m_0}{l}\gamma^d \right) + \frac{4m_0^2}{3l^2} (x^3 + (l/2)^3). \quad (7.17b)$$

Para $x \in (-l/2, l/2)$. La segunda línea puede reescribirse como

$$I_{x_d, -l/2} = l(x/l + 1/2) \left[-\partial_{\parallel}^2 - \frac{2m_0}{l}\gamma^d + \frac{4m_0^2}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{l}(x/l - 1/2) \right) \right]. \quad (7.18)$$

Entonces, reemplazando en la fórmula anterior,

$$\Omega = \cosh \left[l \sqrt{-\partial_{\parallel}^2 - \frac{2m_0}{l}\gamma^d + \frac{m_0^2}{3}} \right] + l \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{-\partial_{\parallel}^2 - \frac{m_0}{l}\gamma^d + \frac{m_0^2}{2}(1 + 4x^2)}{\sqrt{-\partial_{\parallel}^2 + m_0^2}} \cosh \left[l(x + 1/2) \sqrt{-\partial_{\parallel}^2 - \frac{2m_0}{l}\gamma^d + \frac{4m_0^2}{3} \left(\frac{1}{4} + x(x - 1/2) \right)} \right]. \quad (7.19)$$

De forma que la acción efectiva queda

$$\Gamma = \frac{-T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty du u^{d-2} \ln \left\{ e^{-\lambda\sqrt{u^2+1}} \left[\cosh\left(\lambda\sqrt{u^2 - \frac{2s}{\lambda} + \frac{1}{3}}\right) + \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left(\sqrt{u^2+1} - \frac{\frac{s}{\lambda} + \frac{1}{2} - 2x^2}{\sqrt{u^2+1}} \right) \cosh\left(\lambda(x+1/2)\sqrt{u^2 - \frac{2s}{\lambda} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x(x-1/2)}\right) \right] \right\}. \quad (7.20)$$

Se puede ver que en el límite $\lambda \rightarrow 0$ se recupera la acción efectiva correspondiente a una pared plana.

Para estudiar la convergencia de esta integral en el ultravioleta, expandimos el integrando en términos de $1/u$. Haciendo eso, obtenemos

$$\Gamma = \frac{T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty du u^{d-2} \left(\frac{\lambda}{6u} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right) \right). \quad (7.21)$$

De forma que siempre que la pared es no plana ($\lambda \neq 0$) la integral diverge, y la divergencia es peor que la que ocurre para paredes planas. Entendemos que esto está relacionado con que hay un conjunto de medida no nula en la que la masa es distinta de m_0 . Para entender mejor esto, es útil mirar otro modelo con esta propiedad. Podemos pensar una pared de la forma

$$m(x) = \begin{cases} m_0 & \text{si } x < -l/2, \\ 0 & \text{si } |x| < l/2, \\ -m_0 & \text{si } x > l/2 \end{cases}. \quad (7.22)$$

La acción efectiva de este sistema puede calcularse de manera análoga a como calculamos sistemas de paredes planas y, al expandir la integral resultante en términos de $\frac{1}{u}$, obtenemos

$$\Gamma = \frac{T \prod_{n=1}^{d-1} L_n}{2^{d-1} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\} \frac{m_0^d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty du u^{d-2} \left(\frac{\lambda}{2u} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right) \right). \quad (7.23)$$

Podemos ver que la divergencia tiene la misma forma que antes, y también es proporcional a la longitud del intervalo donde $m(x) \neq m_0$; como antes. El factor que acompaña a la divergencia cambia y en este caso, en el que $m(x)$ difiere más de m_0 , el factor es mayor. Creemos que es importante notar que en ambos casos $|m(x)| \leq m_0 \forall x$,

porque sabemos que la energía de vacío está relacionada con las fluctuaciones cuánticas de los campos, y que el módulo de la masa suprime dichas fluctuaciones. Entonces, conjeturamos que para cualquier modelo de pared en el que $|m(x)| \leq m_0 \forall x$ y la medida del conjunto $\{x : m(x) \neq m_0\}$ es no nula, la acción efectiva tiene una divergencia de la forma como las que mostramos, y esa divergencia es proporcional a la medida de $\{x : m(x) \neq m_0\}$.

7.2. Paredes Cilíndricas

7.2.1. Otra Generalización de Gelfand-Yaglom

La versión del teorema de Gelfand-Yaglom que utilizamos hasta ahora es útil sólo para paredes planas. Para trabajar con paredes curvas es necesario utilizar una versión más general. Esta permite estudiar los determinantes de operadores de la forma ¹

$$\mathbb{K} = -\partial_d (P(x_d)\partial_d) + \mathbb{H}(x_d), \quad (7.24)$$

donde \mathbb{H} es un operador y $P \neq 0$ es un escalar.

Se puede hacer el mismo proceso que antes que, cuando las condiciones de contorno son de Dirichlet queda[11]

$$\det \mathbb{K} = \det \mathcal{U}_{12}, \quad (7.25)$$

donde $\mathcal{U}(b, a)$ se define como

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{P} e^{\int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d)}, \quad (7.26)$$

con $\mathcal{H}(x_d)$ dado por

$$\mathcal{H}(x_d) = \begin{pmatrix} 0 & P^{-1}(x_d) \\ \mathbb{H}(x_d) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Utilizando esto, generalizamos la fórmula para \mathcal{U} , que nos queda

$$\mathcal{U}(b, a) = \mathcal{P} \cosh \left[\sqrt{L_{b,a} I_{b,a}} \right] \mathbb{1} + \int_a^b dx_d \mathcal{H}(x_d) \mathcal{P} \cosh \left[\sqrt{L_{x_d,a} I_{x_d,a}} \right], \quad (7.28)$$

donde $L_{b,a} \equiv \int_a^b dx_d P^{-1}(x_d)$. Igual que antes, cuando $\mathbb{H}(x_d)$ conmuta para distintos x_d , los *path orderings* desaparecen.

7.2.2. Separar Variables en el Problema de Paredes Cilíndricas

Consideremos en $2 + 1$ dimensiones un problema con simetría rotacional. De forma que $m(x) = m(r)$, donde (x_0, r, θ) son las coordenadas cilíndricas sobre el espaciotiem-

¹En realidad permite casos más generales, pero no necesitamos usarlos ahora.

po. Para las matrices γ , elegimos $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^{1,2} = \sigma_{1,2}$. Entonces, \mathbb{K} queda

$$\mathbb{K} = -\partial^2 + m^2(r) - \sigma_\mu \partial_\mu m(x) = -\partial^2 + m^2(r) - (\sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta) m'(r). \quad (7.29)$$

Definimos $\gamma^r(\theta) \equiv (\sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta)$. Para expresar esto de manera más simple, vamos a hacer un cambio de base dependiente de θ diagonalizando γ^r . Definimos

$$\psi_+(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad (7.30a)$$

$$\psi_-(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ -e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (7.30b)$$

Como para $\theta = 0$ $\gamma^r \psi_\pm = \pm \gamma_\pm$ y $\psi(\theta)_\pm$ se obtienen de rotar a $\psi_\pm(0)$ como spinores, sabemos que para todo θ $\gamma^r \psi_\pm = \pm \gamma_\pm$. Es importante notar que $\psi_\pm(2\pi) = -\psi_\pm(0)$, lo que va a implicar condiciones de contorno antiperiódicas en θ . Para terminar de separar variables, tenemos que escribir $\partial^2 = \partial_t^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r)$. Si escribimos una función arbitraria $\psi(x) = \phi_+(x) \psi_+(\theta) + \phi_-(x) \psi_-(\theta)$,

$$\partial^2 \psi = \left[\partial_t^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r) \right] [\phi_+(x) \psi_+(\theta) + \phi_-(x) \psi_-(\theta)]. \quad (7.31)$$

Necesitamos calcular $\partial_\theta \psi_\pm$ y $\partial_\theta^2 \psi_\pm$. Estas derivadas son

$$\partial_\theta \psi_\pm = \frac{-i}{2} \psi_\mp, \quad (7.32a)$$

$$\partial_\theta^2 \psi_\pm = \frac{-1}{4} \psi_\pm. \quad (7.32b)$$

Reemplazando, la acción de \mathbb{K} sobre ψ queda

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \psi = & \left\{ \left[-\partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r) + m^2 - m'(r) \right] \phi_+ - \frac{i}{r^2} \partial_\theta \phi_- \right\} \psi_+ \\ & + \left\{ \left[-\partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r) + m^2 + m'(r) \right] \phi_- - \frac{i}{r^2} \partial_\theta \phi_+ \right\} \psi_-. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Finalmente, si ahora interpretamos al operador \mathbb{K} actuando sobre la función $\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}$, escribimos

$$\mathbb{K} \phi = \left[-\partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r) + m^2 - \sigma_3 m'(r) - \frac{i}{r^2} \partial_\theta \sigma_1 \right] \phi. \quad (7.34)$$

De forma que en estas nuevas coordenadas, el operador \mathbb{K} queda expresado como

$$\mathbb{K} = -\partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + m^2 - \sigma_3 m'(r) - \frac{i}{r^2} \partial_\theta \sigma_1. \quad (7.35)$$

Notar que como $\psi(2\pi) = \psi(0)$, $\phi(2\pi) = -\phi(0)$. Entonces \mathbb{K} escrito de esta manera actúa sobre funciones con condiciones de contorno *antiperiodicas* en θ . Esto se va a ver representado en que los autovalores del operador $-i\partial_\theta$ son $m + 1/2$ con $m \in \mathbb{Z}$ en lugar de m . Esta diferencia es la contribución del spin al momento angular total.

Además, si bien esta cuenta fue hecha para $2 + 1$ dimensiones, siempre es posible elegir una representación de las matrices γ en la que se cumpla que

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix} = \sigma_1 \otimes \mathbb{1}, \quad (7.36a)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_2 \end{pmatrix} = \sigma_2 \otimes \mathbb{1}, \quad (7.36b)$$

donde la dimensión de $\mathbb{1}$ es la mitad del número de componentes de los spinores, es decir $\text{tr}\{\mathbb{1}_{\text{spin}}\}/2$. De forma que si en más dimensiones se observa un problema en el que la masa depende solamente de $x_d^2 + x_{d-1}^2$ la fórmula se generaliza como

$$\mathbb{K} = -\partial_{\parallel}^2 - \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + m^2 - \sigma_3 m'(r) - \frac{i}{r^2} \partial_\theta \sigma_1, \quad (7.37)$$

donde se obvio el $\otimes \mathbb{1}$ y $\partial_{\parallel} \equiv (\partial_0, \dots, \partial_{d-2})$.

Queremos evaluar el determinante de \mathbb{H} , pero necesitamos tener el término de ∂_r de la forma $\partial_r(P(r)\partial_r)$. Acá nos sobra un factor multiplicativo $\frac{1}{r}$. Como sólo nos interesa calcular cocientes entre determinantes, podemos redefinir $\mathbb{K} \rightarrow r\mathbb{K}$, de forma que

$$\mathbb{K} = -\partial_r (r \partial_r) - r \partial_{\parallel}^2 - \frac{1}{r} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) + r m^2 - r \sigma_3 m'(r) - \frac{i}{r} \partial_\theta \sigma_1, \quad (7.38)$$

Haciendo un último cambio de coordenadas, podemos cambiar $\sigma_3 \rightarrow \sigma_1$ y $\sigma_1 \rightarrow \sigma_3$, para que el propagador de masa constante quede más simple. Con este último cambio, la expresión para \mathbb{K} queda

$$\mathbb{K} = -\partial_r (r \partial_r) - r \partial_{\parallel}^2 - \frac{1}{r} \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{4} \right) + r m^2 - r \sigma_1 m'(r) - \frac{i}{r} \partial_\theta \sigma_3, \quad (7.39)$$

de forma que \mathbb{K} tiene la forma necesaria para aplicar el teorema de Gelfand-Yaglom,

con

$$P(r) = r \implies P^{-1}(r) = \frac{1}{r} \implies L_{b,a} = \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (7.40a)$$

$$\mathbb{H}(r) = -r\partial_{\parallel}^2 - \frac{1}{r}\left(\partial_{\theta}^2 - \frac{1}{4}\right) + rm^2(r) - r\sigma_1 m'(r) - \frac{i}{r}\partial_{\theta}\sigma_3. \quad (7.40b)$$

Con esta representación de \mathbb{H} y la ecuación (7.28) podemos comenzar a estudiar paredes cilíndricas separando variables. Es importante recalcar que a diferencia de en el caso plano $\mathbb{H}(r)$ no conmuta para distintos r excepto cuando m es constante, de forma que el *path ordering* va a contribuir a los \mathcal{U} con masa no constante, pero no a $\mathcal{U}^{(0)}$.

7.2.3. $\mathcal{U}^{(0)}$ en Coordenadas Cilíndricas

De la misma forma que para paredes planas, cuando la masa es constante $\mathbb{H}(r) = \mathbb{H}_0(r)$ conmuta para distintos r . Entonces, es posible aplicar (7.28) sin que los *path orderings* tengan algún efecto. Ya sabemos que $L_{b,a} = \ln b/a$. Ahora hace falta calcular $I_{b,a}$. El resultado es

$$\begin{aligned} I_{b,a} &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \left(-\partial_{\parallel}^2 + m_0^2\right) + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{1}{4} - \partial_{\theta}^2 - i\partial_{\theta}\sigma_3\right) \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \left(-\partial_{\parallel}^2 + m_0^2\right) + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(-i\partial_{\theta} + \frac{\sigma_3}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (7.41)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(0)}(b, a) &= \cosh \left[\sqrt{\ln b/a} \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \left(-\partial_{\parallel}^2 + m_0^2\right) + \ln(b/a) \left(-i\partial_{\theta} + \frac{\sigma_3}{2}\right)^2} \right] + \\ &+ \int_a^b dr \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ r \left(-\partial_{\parallel}^2 + m_0^2\right) + \frac{1}{r} \left(-i\partial_{\theta} + \frac{\sigma_3}{2}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\cosh \left[\sqrt{\ln r/a} \sqrt{\frac{1}{2}(r^2 - a^2) \left(-\partial_{\parallel}^2 + m_0^2\right) + \ln(r/a) \left(-i\partial_{\theta} + \frac{\sigma_3}{2}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Es importante notar que esto diverge tanto para $b \rightarrow \infty$ como para $a \rightarrow 0$, por lo que igual que para el caso de paredes planas va a ser necesario analizar el problema con condiciones de contorno de Dirichlet en ϵ y Λ , y luego tomar $\epsilon \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow \infty$ ². Estas integrales no son simples de hacer, entonces las dejaremos expresadas. De ahora en adelante usaremos también formas más compactas, escribiendo $I_{b,a}^{(0)}$ y $\mathbb{H}_0(r)$ en lugar de mostrar la complejidad de las fórmulas en todo su esplendor.

²Esto puede hacerse con otras condiciones de contorno, pero no va a aportar nada pues en el límite las condiciones de contorno no contribuyen

7.2.4. Una Pared Cilíndrica Delgada

Otra cantidad relativamente fácil de calcular en este contexto es T_{\pm} , la evolución asociada a un salto de masa en $\pm 2m_0$. Siguiendo el mismo procedimiento que en ese caso, obtenemos

$$T_{\pm} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \mp 2m_0 r \sigma_1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Entonces, la acción efectiva de una pared sin ancho de radio R puede expresarse como

$$e^{-2\Gamma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty} \det \left[\frac{(\mathcal{U}^{(0)}(\epsilon, R) T_{\pm} \mathcal{U}^{(0)}(R, \Lambda))_{12}}{\mathcal{U}^{(0)}(\epsilon, \Lambda)_{12}} \right]. \quad (7.44)$$

Esperamos que esta acción efectiva diverja, igual que en el caso plano. Sin embargo, también es posible calcular la diferencia entre las acciones efectivas para dos radios como R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$

$$e^{-2(\Gamma_2 - \Gamma_1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty} \det \left[\frac{(\mathcal{U}^{(0)}(\epsilon, R_2) T_{\pm} \mathcal{U}^{(0)}(R_2, \Lambda))_{12}}{(\mathcal{U}^{(0)}(\epsilon, R_1) T_{\pm} \mathcal{U}^{(0)}(R_1, \Lambda))_{12}} \right]. \quad (7.45)$$

Esta acción podría llegar a ser finita, y permitiría calcular la presión ejercida por el vacío fermiónico sobre paredes cilíndricas. Sin embargo estas expresiones son complejas de manejar, y no conseguimos un resultado cerrado frente a esto. Es por eso que utilizamos métodos aproximados para calcular acciones efectivas de este tipo de sistemas para curvatura grande.

7.2.5. Aproximación Para el Problema con $R \rightarrow \infty$

Una manera de aproximar acciones efectivas de sistemas circulares es evaluar la acción efectiva obtenida para el caso plano, pero compactificarla como un círculo con el mismo radio del sistema que se quiere estudiar. Esta aproximación es válida para sistemas en los que la curvatura es pequeña. De esta forma es posible aproximar la acción efectiva del caso anterior utilizando (6.14). Para el caso de $2 + 1$ dimensiones, el resultado es

$$\Gamma = \frac{m_0 T}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{l^2}{m_0^2 R^2}} - \frac{|l|}{m_0 R} \right]. \quad (7.46)$$

Al igual que el resultado no compactificado, esta acción efectiva diverge. Sin embargo, la diferencia entre las acciones para distintos R finitos es convergente. Otra cosa que resulta ser finita es la presión fermiónica, que se obtiene, como $P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{1}{T} \frac{\partial \Gamma}{\partial V} =$

$-\frac{1}{2\pi RT} \frac{\partial \Gamma}{\partial R}$. Entonces

$$P = \frac{1}{4\pi R^3} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\frac{l^2}{m_0 R \sqrt{1 + \frac{l^2}{m_0^2 R^2}}} - |l| \right] \quad (7.47)$$

Capítulo 8

Correcciones de la Acción de Heisenberg-Euler

“What we observe is not nature itself, but nature exposed to our method of questioning.”

— Werner Heisenberg

En este capítulo, se estudia la respuesta de sistemas fermiónicos no masivos en presencia de un campo de gauge. En 8.1 se muestra como se acoplan fermiones a un campo electromagnético en dimensión par. En 8.2 se estudia la acción efectiva de este tipo de sistemas en $d = 4$ y en 8.2.1 se introduce la acción de Heisenberg-Euler, la acción de fermiones en $d = 4$ en un campo eléctrico constante. Luego, en 8.2.2 se estudian sus correcciones cuando el campo es casi constante. En 8.2.4 se prueba que la primer corrección a la acción es cero, y en 8.2.5 se calcula la corrección a segundo orden y se prueba que es finita.

8.1. Fermiones No Masivos Acoplados al Campo Electromagnético en Dimensión Par

La acción de un campo fermiónico no masivo acoplado a un campo de gauge A_μ es

$$\mathcal{S} = - \int d^d x \bar{\psi} \not{D} \psi = - \int d^d x \bar{\psi} [\not{\partial} + ie\mathcal{A}] \psi, \quad (8.1)$$

Para d par, se pueden elegir las matrices γ de la siguiente forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2a)$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_{\parallel}^i \\ -i\gamma_{\parallel}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.2b)$$

donde γ_{\parallel}^i son una representación de las matrices gamma en $d - 1$ dimensiones que, como d es par, su tamaño es la mitad del de γ^μ . Entonces, si definimos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (8.3a)$$

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R), \quad (8.3b)$$

la acción para los fermiones queda

$$\mathcal{S} = - \int d^d x \{ \bar{\psi}_L [\partial_0 + ieA_0 + iD_i\gamma_{\parallel}^i] \psi_L + \bar{\psi}_R [\partial_0 + ieA_0 - iD_i\gamma_{\parallel}^i] \psi_R \}. \quad (8.4)$$

La acción efectiva sobre el campo A se define entonces como

$$e^{-\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\mathcal{S}[\bar{\psi},\psi,A]}. \quad (8.5)$$

Γ es la variación en la acción del campo electromagnético por su interacción con el campo fermiónico. En general no es posible calcularla exactamente, pero se puede expresar en términos de determinantes funcionales. Haciendo la integral de caminos, se obtiene que

$$e^{-\Gamma[A]} = \det [-i\partial_0 + eA_0 + D_i\gamma_{\parallel}^i] \det [-i\partial_0 + eA_0 - D_i\gamma_{\parallel}^i]. \quad (8.6)$$

Si suponemos que A tiene solo componente A_0 y depende solamente de la componente d , obtenemos

$$e^{-\Gamma[A]} = \det \left[-\partial_{\text{esp}}^2 - (\partial_0 + ieA_0)^2 + e\gamma^d \frac{dA_0}{dx_d} \right], \quad (8.7)$$

donde ∂_{esp} es la derivada espacial. Si luego desarrollamos en los modos de Matsubara de los fermiones, obtenemos

$$e^{-\Gamma[A]} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \det \left[-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n + eA_0)^2 + e\gamma^d \frac{dA_0}{dx_d} \right], \quad (8.8)$$

donde $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$. O, para la acción efectiva,

$$\Gamma[A] = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tr} \ln \left[-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n + eA_0)^2 + e\gamma^d \frac{dA_0}{dx_d} \right]. \quad (8.9)$$

La acción efectiva es entonces la suma sobre todos los modos de Matsubara de las acciones efectivas de fermiones en un *background*, con $m(x_d) = \omega_n + eA_0$.

8.2. La Acción de A

8.2.1. La Acción de Heisenberg-Euler

Si bien no es siempre posible resolver (8.5), hay ciertos casos que son exactamente solubles. Uno de ellos es el caso de E constante a temperatura finita [12, 13]. Si bien es posible hacerlo en general, de aquí en adelante trabajaremos en $d = 4$ por simplicidad. Entonces, la acción puede calcularse para $A_0 = -Ex_3$, $A_i = 0$ y con condiciones periódicas en la coordenada 0: $\psi(\beta) = -\psi(0)$, $\bar{\psi}(\beta) = -\bar{\psi}(0)$. La acción que se obtiene se llama la acción de Heisenberg-Euler.

La acción de Heisenberg-Euler está relacionada con los modos cero, pues (8.9) puede interpretarse como que cada modo de Matsubara tiene una masa dependiente de la posición $m_n(x) = \omega_n + eA_0(x) = \omega_n - eEx_3$. Usando los resultados probados en 3.3.1, se ve que para cada n aparece un modo cero dado por $\phi_n(x_3) = e^{-\frac{eE}{2}(x_3 - \frac{\omega_n}{eE})^2}$ si $eE > 0$; y $\phi_n(x_3) = e^{\frac{eE}{2}(x_3 - \frac{\omega_n}{eE})^2}$ si $eE < 0$. Los modos cero son modos Gaussianos centrados en $\frac{\omega_n}{eE}$ con ancho $\sqrt{|eE|}$.

Es importante recalcar que estos modos cero no son independientes de la elección de gauge. En ciertos gauges pueden estar centrados en otro punto o no existir.

8.2.2. Correcciones a la Acción de Heisenberg-Euler

Si bien la acción de Heisenberg-Euler es exactamente soluble, es muy poco general. Por lo tanto, nos propusimos a calcular una expansión de Γ alrededor de $A_\mu = \begin{pmatrix} -Ex_3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Para hacer esto, notamos que

$$\Gamma[A] = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tr} \ln [\omega_n + eA_0 + D_i \gamma_{\parallel}^i] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tr} \ln [\omega_n + eA_0 - D_i \gamma_{\parallel}^i]. \quad (8.10)$$

Pero como $[\omega_n + eA_0 + D_i\gamma_{\parallel}^i]^\dagger = [\omega_n + eA_0 - iD_i\gamma_{\parallel}^i]$,

$$\Gamma[A] = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re tr ln} [\omega_n + eA_0 + \partial_i\gamma_{\parallel}^i + ieA_i\gamma_{\parallel}^i]. \quad (8.11)$$

Más aún, en $d = 4$ se puede tomar $\gamma_{\parallel}^i = \sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli. Entonces

$$\Gamma[A] = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re tr ln} [\omega_n + eA_0 + \partial_i\gamma_{\parallel}^i + ieA_i\sigma^i]. \quad (8.12)$$

Finalmente, si tomamos $A_0 = -Ex_3 + f_0$ y $A_i = f_i$,

$$\Gamma[f] = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re tr ln} [\omega_n - eEx_3 + \partial_i\gamma_{\parallel}^i + ef_0 + ief_i\sigma^i]. \quad (8.13)$$

Y podemos, expandiendo esta expresión, calcular las correcciones a la acción de Heisenberg-Euler.

Si definimos

$$\Gamma_n[A] \equiv -2 \text{Re tr ln} [\omega_n - eEx_3 + \partial_i\gamma_{\parallel}^i + ef_0 + ief_i\sigma^i], \quad (8.14)$$

tenemos $\Gamma[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n[f]$ y podemos expandir $\Gamma_n[f] = \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_n^{(l)}[f]$, donde

$$\Gamma_n^{(l)}[f] = \frac{1}{n!} \int d^{d-1}x_{\text{esp1}} \dots \int d^{d-1}x_{\text{espl}} f_{\mu_1}(x_1) \dots f_{\mu_l}(x_l) \left. \frac{\delta^l \Gamma_n[f]}{\delta f_{\mu_1}(x_{\text{esp1}}) \dots \delta f_{\mu_l}(x_{\text{espl}})} \right|_{f=0}. \quad (8.15)$$

La contribución a orden cero de la acción total es la acción de Heisenberg-Euler.

8.2.3. Definiciones para el Desarrollo

Antes de calcular explícitamente los primeros términos del desarrollo, introducimos las siguientes definiciones útiles:

$$G_n = [\omega_n - eEx_3 + \partial_i\gamma_{\parallel}^i]^{-1}, \quad (8.16a)$$

$$\Delta_n = [-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n - eEx_3)^2 - eE\sigma_3]^{-1}. \quad (8.16b)$$

Además, notamos que

$$G_n = (\omega_n - eEx_3 - \partial_i\sigma_i)\Delta_n, \quad (8.17)$$

y definimos

$$\Delta_n^+ = [-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n - eEx_3)^2 - eE]^{-1}, \quad (8.18a)$$

$$\Delta_n^- = [-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n - eEx_3)^2 + eE]^{-1}. \quad (8.18b)$$

De forma que

$$\Delta_n = P_+ \Delta_n^+ + P_- \Delta_n^-, \quad (8.19)$$

con $P_{\pm} = \frac{1 \pm \sigma_3}{2}$ los proyectores sobre los autoespacios de σ_3 .

Además, definimos

$$\tilde{\Delta}_n = P_+ \Delta_n^- + P_- \Delta_n^+, \quad (8.20)$$

y notamos que $\sigma_{1,2} \Delta_n = \tilde{\Delta}_n \sigma_{1,2}$.

8.2.4. Desarrollo a Primer Orden

Sabemos que $\frac{\delta \Gamma}{\delta f_{\mu}(x)} = \langle j^{\mu}(x) \rangle$, donde j^{μ} es la corriente electromagnética de los fermiones. Por las simetrías de la acción de Heisenberg-Euler, sabemos que para $f = 0$, $\langle j^{\mu}(x) \rangle$ no depende de x y se anula para $\mu = 1, 2$. Como la carga total del vacío se anula, sigue que $j^0 = 0$. Entonces,

$$\Gamma^{(1)} = \beta \langle j^3 \rangle_{f=0} \int d^3 x_{\text{esp}} f_3(x_{\text{esp}}). \quad (8.21)$$

Pero cómo la acción efectiva debe ser invariante de gauge, y $\int d^3 x_{\text{esp}} f_3(x_{\text{esp}})$ cambia ante una transformación de gauge, $\langle j^3 \rangle = 0$ y

$$\Gamma^{(1)} = 0. \quad (8.22)$$

8.2.5. Desarrollo a Segundo Orden

Por las simetrías del problema ($O(2)$ en el plano xy , reflexión temporal y carga), sabemos que las correcciones a orden dos pueden incluir términos $\mathcal{O}(f_0^2)$, $\mathcal{O}(f_3^2)$, $\mathcal{O}(f_1)^2$, $\mathcal{O}(f_2^2)$ y $\mathcal{O}(f_1 f_2)$; pero no puede contener términos cruzados que involucren a f_0 o f_3 . Por lo tanto se harán redefiniciones de $\Gamma_n^{(2)}$ para descartar los términos que sabemos que al sumar sobre n no van a contribuir. Para indicar esto usamos el símbolo \sim , de forma que notamos $A(f_0^2) + B(f_1 f_3) \sim A(f_0^2)$.

Desarrollando (8.14) a segundo orden, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{(2)} &= \text{Re Tr} [(ef_0 + ie\sigma_i f_i)G_n(ef_0 + ie\sigma_j f_j)G_n] \sim \\ &\sim e^2 \{ \text{Re Tr} [f_0 G_n f_0 G_n] - \text{Re Tr} [f_3 \sigma_3 G_n f_3 \sigma_3 G_n] - \\ &\quad - \text{Re Tr} [f_{\parallel i} \sigma_{\parallel i} G_n f_{\parallel j} \sigma_{\parallel j} G_n] \},\end{aligned}\quad (8.23)$$

donde se nota $A_{\parallel} = (A_1, A_2)$ para cualquier vector A . Entonces tenemos que calcular las tres trazas para obtener la contribución $\mathcal{O}(f_0^2)$, $\mathcal{O}(f_3^2)$ y $\mathcal{O}(f_{\parallel}^2)$.

La contribución de f_0

La contribución de f_0 a la corrección de acción efectiva es $\Gamma_{n0}^{(2)} \equiv e^2 \text{Re Tr} [f_0 G_n f_0 G_n]$. Si usamos (8.17), obtenemos

$$\Gamma_{n0}^{(2)} = e^2 \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_i \sigma_i) \Delta_n f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_j \sigma_j) \Delta_n]. \quad (8.24)$$

Si ahora usamos (8.19), obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{n0}^{(2)} &= e^2 \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_i \sigma_i) \Delta_n f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_j \sigma_j) \Delta_n] = \\ &= e^2 \{ \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3 \sigma_3) \Delta_n f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3 \sigma_3) \Delta_n] + \\ &\quad + \text{Re Tr} [f_0 \partial_{\parallel i} \sigma_{\parallel i} \Delta_n f_0 \partial_{\parallel j} \sigma_{\parallel j} \Delta_n] + \\ &\quad + 2 \text{Re Tr} [f_0 \partial_{\parallel i} \sigma_{\parallel i} \Delta_n f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3 \sigma_3) \Delta_n] \} = \\ &= e^2 \{ \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3) \Delta_n^+ f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3) \Delta_n^+] + \\ &\quad + \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 + \partial_3) \Delta_n^- f_0(\omega_n - eEx_3 + \partial_3) \Delta_n^-] + \\ &\quad + \text{Re Tr} [f_0 \partial_{\parallel i} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij} \sigma_3) \tilde{\Delta}_n f_0 \partial_{\parallel j} \Delta_n] \} = \\ &= e^2 \{ \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3) \Delta_n^+ f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3) \Delta_n^+] + \\ &\quad + \text{Re Tr} [f_0(\omega_n - eEx_3 + \partial_3) \Delta_n^- f_0(\omega_n - eEx_3 + \partial_3) \Delta_n^-] + \\ &\quad + 2 \text{Re Tr} [f_0 \partial_{\parallel i} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij}) \Delta_n^- f_0 \partial_{\parallel j} \Delta_n^+] \},\end{aligned}\quad (8.25)$$

donde se usó que $\text{Tr} [f_0 \partial_{\parallel i} \sigma_{\parallel i} \Delta_n f_0(\omega_n - eEx_3 - \partial_3 \sigma_3) \Delta_n] = 0$, pues la parte de spin se puede descomponer como $(A + B\sigma_3)(C\sigma_1 + D\sigma_2) = A\sigma_1 + \tilde{B}\sigma_2 + \tilde{C}\sigma_3$. Para calcular las trazas, hay que elegir una base de funciones apropiada. Sabemos que para cada n el operador $-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n - eEx_3)^2 = -\partial_{\text{esp}}^2 + (eE)^2(x_3 - \frac{\omega_n}{eE})^2$ es análogo en las coordenadas 1 y 2 al Hamiltoniano de una partícula libre y en la coordenada 3, al de un oscilador armónico. Entonces, se lo puede diagonalizar tomando una base de estados $|k_{\parallel}, m, n\rangle$ que cumplen

$$[-\partial_{\text{esp}}^2 + (\omega_n - eEx_3)^2] |k_{\parallel}, m, n\rangle = [k_{\parallel}^2 + (2m + 1)|eE|] |k_{\parallel}, m, n\rangle. \quad (8.26)$$

Estos estados estan dados por

$$(x_{\text{esp}}|k_{\parallel}, m, n) = \frac{1}{2\pi} e^{ik_{\parallel} \cdot x_{\parallel}} \phi_m \left(x_3 - \frac{\omega_n}{eE} \right), \quad (8.27)$$

donde ϕ_m es la función de onda del m -ésimo estado del oscilador armónico. Los elementos de matriz de una función $g(x_{\text{esp}})$ se calculan como

$$(k'_{\parallel}, m', n|g|k_{\parallel}, m, n) = \int \frac{d^3 x_{\text{esp}}}{2\pi} e^{i(k_{\parallel} - k'_{\parallel})x_{\parallel}} \phi_m \left(x_3 - \frac{\omega_n}{eE} \right) \phi_{m'} \left(x_3 - \frac{\omega_n}{eE} \right) g(x). \quad (8.28)$$

donde se usó que las autofunciones del oscilador armónico son reales.

Sin perder generalidad, de aquí en adelante se asume que $eE > 0$.

Los operadores de creación y destrucción asociados a este operador son

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{2eE}} (\omega_n - eEx_3 - \partial_3), \quad (8.29a)$$

$$a_n^{\dagger} = -\frac{1}{\sqrt{2eE}} (\omega_n - eEx_3 + \partial_3), \quad (8.29b)$$

y por ende cumplen

$$a_n |k_{\parallel}, m, n) = \sqrt{m} |k_{\parallel}, m-1, n), \quad (8.30a)$$

$$a_n^{\dagger} |k_{\parallel}, m, n) = \sqrt{m+1} |k_{\parallel}, m+1, n). \quad (8.30b)$$

Entonces,

$$\Delta_n^+ |k_{\parallel}, m, n) = \frac{1}{k_{\parallel}^2 + 2meE} |k_{\parallel}, m, n), \quad (8.31a)$$

$$\Delta_n^- |k_{\parallel}, m, n) = \frac{1}{k_{\parallel}^2 + 2(m+1)eE} |k_{\parallel}, m, n). \quad (8.31b)$$

Utilizando esto, podemos reescribir la traza a calcular como

$$\begin{aligned} \Gamma_{n0}^{(2)} = \frac{e}{2E} \{ & \text{Re Tr}[f_0 a_n \Delta_n^+ f_0 a_n \Delta_n^+] + \text{Re Tr}[f_0 a_n^{\dagger} \Delta_n^- f_0 a_n^{\dagger} \Delta_n^-] \} + \\ & + 2e^2 \text{Re Tr}[f_0 \partial_{\parallel i} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij}) \Delta_n^- f_0 \partial_{\parallel j} \Delta_n^+]. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Tomando traza y usando la relación de completitud para la base obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n0}^{(2)} = & \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \int d^2 k_{\parallel} \int d^2 k'_{\parallel} \\
& \frac{e}{2E} \left\{ \sqrt{mm'} \frac{(k_{\parallel}, m, n | f_0 | k'_{\parallel}, m' - 1, n) (k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m - 1, n)}{k_{\parallel}^2 + 2m'eE} \frac{(k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m + 1, n)}{k_{\parallel}^2 + 2meE} + \right. \\
& \left. + \sqrt{(m+1)(m'+1)} \frac{(k_{\parallel}, m, n | f_0 | k'_{\parallel}, m' + 1, n) (k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m + 1, n)}{k_{\parallel}^2 + 2(m'+1)eE} \frac{(k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m + 1, n)}{k_{\parallel}^2 + 2(m+1)eE} \right\} - \\
& - e^2 k_{\parallel i} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij}) k'_{\parallel j} \frac{(k_{\parallel}, m, n | f_0 | k'_{\parallel}, m', n) (k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m, n)}{k_{\parallel}^2 + 2(m'+1)eE} \frac{(k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m, n)}{k_{\parallel}^2 + 2meE}.
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Finalmente, tomando parte real y reorganizando índices, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n0}^{(2)} = & \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \int d^2 k_{\parallel} \int d^2 k'_{\parallel} \\
& \frac{e}{E} \sqrt{mm'} \frac{\operatorname{Re} \left[(k_{\parallel}, m, n | f_0 | k'_{\parallel}, m' - 1, n) (k'_{\parallel}, m', n | f_0 | k_{\parallel}, m - 1, n) \right]}{\left[k_{\parallel}^2 + 2m'eE \right] \left[k_{\parallel}^2 + 2meE \right]} - \\
& - e^2 k_{\parallel} \cdot k'_{\parallel} \frac{|(k_{\parallel}, m, n | f_0 | k'_{\parallel}, m', n)|^2}{\left[k_{\parallel}^2 + 2(m'+1)eE \right] \left[k_{\parallel}^2 + 2meE \right]}.
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Esta contribución no tiene divergencias si los elementos de matriz de f_0 no las tienen. Es decir, si f_0 es una función cuadrado integrable, $\Gamma_{n0}^{(2)}[f_0]$ no diverge.

La contribución de f_3

La contribución de f_3 a la corrección de la acción efectiva es $\Gamma_{n3}^{(2)} \equiv -e^2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr}[f_3 \sigma_3 G_n f_3 \sigma_3 G_n]$. Si desarrollamos igual que antes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n3}^{(2)} = & -e^2 \left\{ \operatorname{Re} \operatorname{Tr}[f_3 (\omega_n - eEx_3 - \partial_3) \Delta_n^+ f_3 (\omega_n - eEx_3 - \partial_3) \Delta_n^+] + \right. \\
& + \operatorname{Re} \operatorname{Tr}[f_3 (\omega_n - eEx_3 + \partial_3) \Delta_n^- f_3 (\omega_n - eEx_3 + \partial_3) \Delta_n^-] - \\
& \left. - 2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr}[f_3 \partial_{\parallel i} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij}) \Delta_n^- f_3 \partial_{\parallel j} \Delta_n^+] \right\},
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Esta expresión es muy similar a lo que obtuvimos para f_0 , lo que facilita el cálculo. Si esto lo expresamos en la misma base que antes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n3}^{(2)} = & -\operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \int d^2 k_{\parallel} \int d^2 k'_{\parallel} \\
& \frac{e}{E} \sqrt{mm'} \frac{\operatorname{Re} \left[(k_{\parallel}, m, n | f_3 | k'_{\parallel}, m' - 1, n) (k'_{\parallel}, m', n | f_3 | k_{\parallel}, m - 1, n) \right]}{\left[k_{\parallel}^2 + 2m'eE \right] \left[k_{\parallel}^2 + 2meE \right]} + \quad (8.36) \\
& + e^2 k_{\parallel} \cdot k'_{\parallel} \frac{|(k_{\parallel}, m, n | f_3 | k'_{\parallel}, m', n)|^2}{\left[k_{\parallel}^2 + 2(m' + 1)eE \right] \left[k_{\parallel}^2 + 2meE \right]}.
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso de f_0 , la contribución no tiene divergencias si los elementos de matriz de f_3 no las tienen. Es decir, cuando f_3 es una función cuadrado integrable, $\Gamma_{n3}^{(2)}[f_3]$ es finita.

La contribución de f_{\parallel}

Finalmente, la contribución de f_{\parallel} a la corrección de acción efectiva es $\Gamma_{n\parallel}^{(2)} \equiv -e^2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \sigma_{\parallel i} G_n f_{\parallel j} \sigma_{\parallel j} G_n]$. Expandiendo igual que antes, tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n\parallel}^{(2)} = & -e^2 \left\{ \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \sigma_i (\omega_n - eEx_3 - \sigma_j \partial_j) \Delta_n f_{\parallel l} \sigma_l (\omega_n - eEx_3 - \sigma_m \partial_m) \Delta_n] \right\} \\
= & -e^2 \left\{ \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \sigma_i (\omega_n - eEx_3 - \sigma_3 \partial_3) \Delta_n f_{\parallel l} \sigma_l (\omega_n - eEx_3 - \sigma_3 \partial_3) \Delta_n] - \right. \\
& - 2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \sigma_i (\omega_n - eEx_3 + \sigma_3 \partial_3) \Delta_n f_{\parallel l} \sigma_l \sigma_m \partial_{\parallel m} \Delta_n] + \\
& \left. + \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \sigma_i \partial_{\parallel j} \sigma_j \Delta_n f_{\parallel l} \sigma_l \partial_{\parallel m} \sigma_m \Delta_n] \right\} \\
= & -e^2 \left\{ \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \partial_{\parallel j} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij} \sigma_3) \Delta_n f_{\parallel l} \partial_{\parallel m} (\delta^{lm} + i\epsilon_{\parallel}^{lm} \sigma_3) \Delta_n] + \right. \quad (8.37) \\
& \left. + \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [(\omega_n - eEx_3 - \sigma_3 \partial_3) \Delta_n f_{\parallel i} (\omega_n - eEx_3 + \sigma_3 \partial_3) \tilde{\Delta}_n f_{\parallel i} (\delta^{li} + i\epsilon_{\parallel}^{li} \sigma_3)] \right\} \\
= & -e^2 \left\{ \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \partial_{\parallel j} (\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij}) \Delta_n^+ f_{\parallel l} \partial_{\parallel m} (\delta^{lm} + i\epsilon_{\parallel}^{lm}) \Delta_n^+] + \right. \\
& \left. + \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} \partial_{\parallel j} (\delta^{ij} - i\epsilon_{\parallel}^{ij}) \Delta_n^- f_{\parallel l} \partial_{\parallel m} (\delta^{lm} - i\epsilon_{\parallel}^{lm}) \Delta_n^-] \right\} - \\
& - \frac{e}{E} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [f_{\parallel i} a_n \Delta_n^+ f_{\parallel l} a_n^\dagger \Delta_n^- (\delta^{li} + i\epsilon_{\parallel}^{li})].
\end{aligned}$$

Si expresamos las trazas usando la misma base que antes,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n\parallel}^{(2)} = & \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \int d^2 k_{\parallel} \int d^2 k'_{\parallel} \\
& e^2 (\delta^{ij} \delta^{ls} - \epsilon_{\parallel}^{ij} \epsilon_{\parallel}^{ls}) \frac{(k_{\parallel}, m, n | f_{\parallel, i} | k'_{\parallel}, m', n) k'_{\parallel, j} (k'_{\parallel}, m', n | f_{\parallel, l} | k_{\parallel}, m, n) k_{\parallel, s}}{(k_{\parallel}^2 + 2meE) (k'_{\parallel}^2 + 2m'eE)} + \\
& + e^2 (\delta^{ij} \delta^{ls} - \epsilon_{\parallel}^{ij} \epsilon_{\parallel}^{ls}) \frac{(k_{\parallel}, m, n | f_{\parallel, i} | k'_{\parallel}, m', n) k'_{\parallel, j} (k'_{\parallel}, m', n | f_{\parallel, l} | k_{\parallel}, m, n) k_{\parallel, s}}{(k_{\parallel}^2 + 2(m+1)eE) (k'_{\parallel}^2 + 2(m'+1)eE)} - \\
& - \frac{e}{E} \sqrt{(m'+1)(m+1)} \\
& \frac{\operatorname{Re} \left[(\delta^{ij} + i\epsilon_{\parallel}^{ij}) (k_{\parallel}, m, n | f_{\parallel, i} | k'_{\parallel}, m', n) (k'_{\parallel}, m', n | f_{\parallel, j} | k_{\parallel}, m+1, n) \right]}{(k_{\parallel}^2 + 2(m+1)eE) (k'_{\parallel}^2 + 2(m'+1)eE)}. \tag{8.38}
\end{aligned}$$

Igual que en los otros dos casos, la contribución no tiene divergencias si f_{\parallel} es cuadrado integrable.

Con lo que concluye el cálculo de la corrección a segundo orden de la acción efectiva, pues

$$\Gamma^{(2)}[f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{n0}^{(2)}[f_0] + \Gamma_{n3}^{(2)}[f_3] + \Gamma_{n\parallel}^{(2)}[f_{\parallel}] \tag{8.39}$$

8.3. Conclusiones

Primero, en 1 y 2 se presentaron los conceptos teóricos en los que se basa nuestro trabajo: las integrales de camino y los métodos funcionales para teoría cuántica de campos. Se introdujeron distintas funcionales generatrices, en particular la acción efectiva. Luego, en 3, se mostró como se acopla un sistema fermiónico a un *background* escalar y se definieron los modos cero (3.1), se aplicaron estos conceptos a tres sistemas con paredes de dominio planas (3.2) y se probaron resultados generales sobre la existencia de modos cero y/o localizados en sistemas planos (3.3). Después, en 4, se estudió el comportamiento de los modos cero cuando se introduce un campo electromagnético externo: se mostró cómo se representa el acoplamiento entre los fermiones y este (4.1) y se utilizó la solución al modelo de Schwinger para calcular la corriente eléctrica inducida sobre los modos cero (4.2). En los tres capítulos siguientes (5,6 y 7), se utilizó el teorema de Gelfand-Yaglom para calcular las acciones efectivas de fermiones. En 5 se presentó el teorema y se explicó como puede aplicarse para este tipo de sistemas. En 6, se lo utilizó para calcular la acción efectiva de una pared plana (6.2) y de sistemas de dos (6.3) y tres (6.5) paredes planas. También se calculó la energía de interacción entre dos sistemas arbitrarios (6.4). Finalmente, se presentó un algoritmo gráfico que permite calcular la acción efectiva de cualquier número de paredes planas (6.6). Luego,

en 7, se estudiaron sistemas más complicados: paredes de ancho finito (7.1) y sistemas con simetría cilíndrica (7.2). Para terminar, en 8, se calculó la corrección a segundo orden de la acción de Heisenberg-Euler.

Apéndice A

Conceptos Matemáticos

“La matemática es el lenguaje en que Dios ha escrito el universo.”

— Galileo Galilei

En este apéndice se introducen dos conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo de este trabajo: las integrales Gaussianas y las variables de Grassman. La evaluación de integrales Gaussianas es fundamental para la formulación de integral de caminos. Constituyen la base para calcular propiedades de teorías no interactuantes, y por ende son esenciales para hacer teoría de perturbaciones. Las variables de Grassman son necesarias para poder construir teorías de campos que den lugar a fermiones.

Primero se introducirán las integrales Gaussianas reales (A.1). Luego se presentarán las estructuras algebraicas necesarias para estudiar teorías de campos: las estructuras complejas (A.2) y las variables de Grassman (A.3), sus propiedades y las definiciones de integración y derivación de variables de Grassman. Se generalizarán también las integrales Gaussianas para estas estructuras.

A.1. Integrales Gaussianas

Dada una matriz inversible simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ de parte real no negativa y un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^d$, se define la integral gaussiana

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \int d^d x e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_i}. \quad (\text{A.1})$$

Esta integral se puede hacer analíticamente y el resultado es [1]

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = e^{\frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j} \left(\det \frac{\mathbf{A}}{2\pi} \right)^{-1/2}. \quad (\text{A.2})$$

Más aún, es posible calcular analíticamente valores de expectación Gaussianos. Se define el valor de expectación de una función f como

$$\langle f(x) \rangle \equiv \mathcal{Z}(\mathbf{A}, 0)^{-1} \int d^d x f(x) e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j}. \quad (\text{A.3})$$

Para calcular los valores de expectación de funciones analíticas, alcanza con calcular los de monomios:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n} \rangle \equiv \mathcal{Z}(\mathbf{A}, 0)^{-1} \int d^d x x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n} e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j}. \quad (\text{A.4})$$

Los valores de expectación de monomios son esenciales para calcular propiedades perturbativamente y, en el contexto de teorías de campos, están íntimamente relacionados con secciones eficaces de *scattering*. Estas integrales se pueden calcular notando que $\int d^d x x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n} e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = \int d^d x \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_n}} e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_j} \Big|_{\mathbf{b}=0}$. Reemplazando esto en (A.4), uno obtiene [1]

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n} \rangle = \left\{ \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_n}} e^{b_i (A^{-1})_{ij} b_j} \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (\text{A.5})$$

De esta forma, se puede expresar el valor medio de cualquier función analítica como [1]

$$\langle f(x) \rangle = \left\{ f \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \right) e^{b_i (A^{-1})_{ij} b_j} \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, de (A.5) puede obtenerse el teorema de Wick, que afirma [1]

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \\ \sum_P \langle x_{k_{P_1}} x_{k_{P_2}} \rangle \dots \langle x_{k_{P_{n-1}}} x_{k_{P_n}} \rangle & \text{si } n \in 2\mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

donde la suma es sobre permutaciones P de $\{1, \dots, n\}$, y $\langle x_{k_a} x_{k_b} \rangle = (A^{-1})_{k_a k_b}$.

Todas las ecuaciones aquí descritas se generalizan a infinitos grados de libertad. Eso es lo que se hace al trabajar con integrales de camino.

A.2. Estructuras Complejas

A.2.1. Definición

Suele ocurrir de encontramos con un problema en el que aparezcan $2n$ variables $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$, de forma tal que el problema es invariante ante rotación simultánea en todos los planos (x_i, y_i) . Como los números complejos expresan de forma más simple

la invariancia ante rotaciones, es usual introducir las variables

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{x_i + iy_i}{\sqrt{2}} \\ \bar{z}_i &= \frac{x_i - iy_i}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Esto es de importancia, porque este tipo de variables son esenciales para representar campos con carga eléctrica. En teoría de campos, la generalización a infinitas dimensiones de z representará a un tipo de partícula, y \bar{z} a su antipartícula.

Para integrar sobre estructuras complejas, se define $\frac{dzd\bar{z}}{i} = dxdy$. Vale notar que z_i y \bar{z}_i no son realmente conjugados complejos, pues x_i e y_i pueden ser variables complejas, por lo que las integrales respecto a z_i y \bar{z}_i son hechas sobre una hipersuperficie de \mathbb{C}^2 . En este trabajo, las funciones integradas serán siempre analíticas como funciones de x_i e y_i , por lo que las integrales no dependerán de la hipersuperficie elegida. Por lo tanto, esta no se explicitará.

A.2.2. Integrales Gaussianas con Estructuras Complejas

Bajo estas condiciones, la integral Gaussiana más general posible es [1]

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}; \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}) \equiv \left(\prod_{i=1}^n \frac{dz_i d\bar{z}_i}{2i\pi} \right) e^{-\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{b}_i z_i + b_i \bar{z}_i}, \quad (\text{A.9})$$

donde \mathbf{A} es cualquier matriz de invertible. Estas integrales también pueden ser resueltas exactamente y el resultado es [1]

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}; \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}) = (\det \mathbf{A})^{-1} e^{\bar{b}_i (A^{-1})_{ij} b_j}. \quad (\text{A.10})$$

Se definen los valores de expectación Gaussianos para variables complejas de manera análoga a en (A.3A.4). Vale que [1]

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{b}_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{b}_{i_l}} \frac{\partial}{\partial b_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{j_k}} \mathcal{Z}(\mathbf{A}; \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}) \right|_{\mathbf{b}=\bar{\mathbf{b}}=0} = \langle z_{i_1} \cdots z_{i_l} \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_k} \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Se puede obtener el teorema de Wick de la misma manera que antes, diferenciando respecto a b_i y \bar{b}_i [1]. Se obtiene que sólo los monomios que tengan igual número de factores de z y \bar{z} no se anulan, pues los resultados deben ser invariantes ante $z \rightarrow e^{i\varphi} z$, $\bar{z} \rightarrow e^{-i\varphi} \bar{z}$. Para estos vale que

$$\langle z_{i_1} \bar{z}_{j_1} \cdots z_{i_l} \bar{z}_{j_l} \rangle = \sum_P \langle z_{i_1} \bar{z}_{j_{P_1}} \rangle \cdots \langle z_{i_l} \bar{z}_{j_{P_l}} \rangle, \quad (\text{A.12})$$

donde P son las permutaciones de $\{1, \dots, l\}$ y $\langle z_{i_a} \bar{z}_{j_b} \rangle = (A^{-1})_{i_a j_b}$.

A.3. Variables de Grassman

A.3.1. Definición y Propiedades Generales

Hasta ahora en este trabajo sólo se han presentado resultados en los cuales las variables de interés son números complejos. La multiplicación de números complejos es una operación conmutativa, por lo tanto es apropiada sólo para representar a bosones. Para representar partículas que cumplan relaciones de anticonmutación, es necesario introducir variables que anticonmuten entre sí. Para esto se introducen las variables de Grassman.

Las variables de Grassman se definen como el álgebra \mathfrak{G} sobre \mathbb{C} generada por un conjunto de generadores $\{\theta_i : i \in I\}$ y 1, con las relaciones de anticonmutación [1]

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0 \quad \forall i, j \in I. \quad (\text{A.13})$$

Estas relaciones de anticonmutación son mucho más restrictivas que las de conmutación que actúan sobre los números complejos. En particular, implican que

$$\theta_i^2 = \theta_i \theta_i = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$f(\theta_i) = f_0 + f_1 \theta_i. \quad (\text{A.15})$$

Es decir, el cuadrado de una variable de Grassman es 0, y las funciones de variables de Grassman son a lo sumo polinomios de grado 1 en una variable dada. Las variables de Grassman forman también un álgebra graduada. Es decir, a cada monomio $\theta_{i_1} \dots \theta_{i_p}$ se le puede asignar un número entero p , el número de generadores necesario para construirlo. Como el cuadrado de cualquier generador es 0, p no puede ser mayor al número de elementos de I . Una consecuencia de esto es que si I tiene n elementos, $\dim \mathfrak{G} = 2^n$. Por último, un elemento ψ de \mathfrak{G} es invertible si y sólo si el producto de ψ con cualquier otro elemento de \mathfrak{G} es no nulo. Esto ocurre si y sólo si ψ tiene una componente de grado cero (una componente que es un número complejo) [1]. Por ejemplo, $a + b\theta_i$ es invertible si y sólo si $a \neq 0$. Su inversa es $1/a + b/a^2\theta_i$.

Otra operación que puede ser definida sobre \mathfrak{G} es la paridad \mathbf{P} . Se define a \mathbf{P} como la transformación lineal que cumple [1]

$$\mathbf{P}(\theta_{i_1} \dots \theta_{i_p}) = (-1)^p \theta_{i_1} \dots \theta_{i_p}. \quad (\text{A.16})$$

\mathbf{P} cumple que $\mathbf{P}^2 = 1$, y separa a \mathfrak{G} en dos autoespacios \mathfrak{G}^\pm , de forma que si $\psi^\pm \in \mathfrak{G}^\pm$, $\mathbf{P}(\psi^\pm) = \pm\psi^\pm$.

En particular, en \mathfrak{G}^+ están los elementos de grado par. Entonces $\mathbb{C} \subset \mathfrak{G}^+$, pues si $z \in \mathbb{C}$, el grado de z como variable de Grassman es 0. Además, si el producto de dos monomios contenidos en \mathfrak{G}^+ no es nulo, su grado será la suma de los grados de los monomios. Entonces, $\{\psi, \phi\} \subset \mathfrak{G}^+ \implies \psi\phi \in \mathfrak{G}^+$. Es decir \mathfrak{G}^+ es una subálgebra de \mathfrak{G} . Más aún, \mathfrak{G}^+ es el subálgebra conmutativa de \mathfrak{G} . Es decir, $\mathfrak{G}^+ = \{\psi \in \mathfrak{G} : \psi\eta = \eta\psi \ \forall \eta \in \mathfrak{G}\}$ [1].

A.3.2. Diferenciación e Integración en Álgebras de Grassman

Para la aplicación de variables de Grassman a la teoría de campos, es necesario aprender a derivar e integrar funciones de variables de Grassman. Es importante notar que las operaciones de diferenciación e integración son operaciones netamente formales. Es decir, no provienen de un cociente incremental o sumas de Riemann. Por lo tanto no pueden ser interpretadas en base a eso, lo que lleva a que las operaciones tengan propiedades contraintuitivas.

Dada una variable de Grassman $A \in \mathfrak{G}$, siempre puede considerarse como función de un generador θ_i , y escribirse como $A = A_1 + \theta_i A_2$, con A_1 y A_2 independientes the θ_i . Entonces, se define al derivada con respecto a θ_i de A como [1]

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} [A_1 + \theta_i A_2] \equiv A_2. \quad (\text{A.17})$$

Se puede ver que la diferenciación con respecto a variables de Grassman cumple una versión de la regla de la cadena: si $\sigma(\theta) \in \mathfrak{G}^+$ y $\chi(\theta) \in \mathfrak{G}^-$, vale que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\sigma, \chi) = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \chi}. \quad (\text{A.18})$$

Más aún, los operadores $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ generan un álgebra de Grassman naturalmente isomorfa a la generada por los θ_i , dónde el producto no es más que la aplicación sucesiva de operadores. Es decir

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} = 0. \quad (\text{A.19})$$

De forma que el mapeo $\theta_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ genera el isomorfismo canónico entre las álgebras.

También es necesario introducir la idea de integración sobre funciones de variables de Grassman. Uno quiere encontrar una operación lineal $\mathcal{I}_i \equiv \int d\theta_i$ sobre \mathfrak{G} que cumpla

que

$$\mathcal{I}_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} = 0, \quad (\text{A.20a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathcal{I}_i = 0, \quad (\text{A.20b})$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_i} = 0 \implies \mathcal{I}(BA) = \mathcal{I}(B)A, \quad (\text{A.20c})$$

$$\mathcal{I}\mathbf{P} = -\mathbf{P}\mathcal{I}. \quad (\text{A.20d})$$

El significado de A.20a es simplemente que la integral de una derivada total es 0. El de A.20b es que integrar respecto a una variable quita la dependencia de una función en ella. El de A.20c es que las constantes salen de la integración. Y el de A.20d es que la integral cambia la paridad. Es decir que $d\theta_i$ actúa como algo con paridad negativa. Se puede probar [1] que la única operación que cumple estas condiciones es, salvo por una constante multiplicativa,

$$\int d\theta_i \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_i}. \quad (\text{A.21})$$

Entonces, para variables de Grassman, se define la integración con respecto a una variable θ_i como la diferenciación con respecto a esa variable.

Una consecuencia importante de esta definición para la integración es la fórmula de cambio de variables. Si tenemos un cambio de coordenadas

$$\theta_i = \theta_i(\theta'). \quad \theta_i, \theta'_i \in \mathfrak{G}^-, \quad (\text{A.22})$$

tal que la matriz $\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta'_j}$ tiene inversa, se puede haber una fórmula de cambio de variables [1].

$$d\theta_1 \dots d\theta_n = d\theta'_1 \dots d\theta'_n J(\theta'), \quad (\text{A.23})$$

donde $J(\theta') = \left(\det \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta'_j} \right)^{-1}$. Este resultado resulta contraintuitivo, pues el jacobiano para integrales de variables conmutativas es la inversa del obtenido para variables de Grassman. Esto ocurre por la definición de la integración como una derivada. En particular, si $\alpha \in \mathbb{R}$

0 y θ es una variable de Grassman, $\int d(\lambda\theta) = \frac{\partial}{\partial(\lambda\theta)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{\lambda} \int d\theta$. Entonces $d(\lambda\theta) = \frac{d\theta}{\lambda}$, lo que muestra que ante transformaciones de escala, los diferenciales transforman a la inversa que las variables conmutativas.

A.3.3. Conjugación Compleja de Variables de Grassman

Para representar partículas fermiónicas que no son su propia antipartícula, es necesario generalizar los conceptos de las estructuras complejas a las variables de Grassman.

Para hacer esto, conviene introducir la operación de conjugación compleja $\bar{\cdot}$. Para hacer eso, se consideran álgebras de Grassman en las que los generadores vienen en pares conjugados. Por cada generador θ_i existe otro generador $\bar{\theta}_i$ que es su conjugado. Se define a $\bar{\cdot}$ de forma de que si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\bar{\lambda}$ es su complejo conjugado. Y finalmente se pide que $\forall \psi, \eta \in \mathfrak{G}$ $\overline{\psi\phi} = \bar{\psi}\bar{\phi}$ y $\overline{\psi + \phi} = \bar{\psi} + \bar{\phi}$. Usando esto se pueden extender las ideas detrás de las estructuras complejas.

A.3.4. Integrales Gaussianas con Variables de Grassman

Para hacer teoría de campos fermiónicos, es necesario calcular integrales Gaussianas en álgebras de Grassman. Para hacer esto se trabaja en el álgebra generada por dos conjuntos de pares de generadores, que serán llamados $\theta, \bar{\theta}, \eta$ y $\bar{\eta}$. Si \mathbf{M} es una matriz antisimétrica, se define

$$\mathcal{Z}(\mathbf{M}; \eta, \bar{\eta}) \equiv \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \dots d\theta_n d\bar{\theta}_n e^{\bar{\theta}_i M_{ij} \theta_j + \bar{\eta}_i \theta_i + \bar{\theta}_i \eta_i}. \quad (\text{A.24})$$

Esta integral se puede resolver. El resultado es [1]

$$\mathcal{Z}(\mathbf{M}; \eta, \bar{\eta}) = \det(\mathbf{M}) e^{-\bar{\eta}_i (M^{-1})_{ij} \eta_j}. \quad (\text{A.25})$$

También se puede probar que que [1]

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{i_l}} \frac{\partial}{\partial \eta_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \eta_{j_k}} \mathcal{Z}(\mathbf{M}; \eta, \bar{\eta}) \right|_{\eta = \bar{\eta} = 0} = (-1)^k \langle \theta_{i_1} \dots \theta_{i_l} \bar{\theta}_{j_1} \dots \bar{\theta}_{j_k} \rangle, \quad (\text{A.26})$$

donde se extendió la notación de $\langle \cdot \rangle$ para variables de Grassman. Notar el factor $(-1)^k$ producto de la anticonmutación de las variables de Grassman. Esto permite escribir una versión del teorema de Wick para variables de Grassman. Es igual a la versión para variables complejas, salvo por un signo producto de la anticonmutatividad de las variables de Grassman:

$$\langle \bar{\theta}_{i_1} \theta_{j_1} \dots \bar{\theta}_{i_n} \theta_{j_n} \rangle = \det \langle \bar{\theta}_{i_k} \theta_{j_l} \rangle = \sum_P \sigma(P) \langle \bar{\theta}_{i_1} \theta_{j_{P_1}} \rangle \dots \langle \bar{\theta}_{i_n} \theta_{j_{P_n}} \rangle, \quad (\text{A.27})$$

donde P corre sobre las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$, $\sigma(P)$ es el signo de la permutación, y $\langle \bar{\theta}_i \theta_j \rangle = (M^{-1})_{ji}$

Bibliografía

- [1] Zinn-Justin, J. Quantum field theory and critical phenomena. Clarendon Press, 1996. [5](#), [7](#), [10](#), [11](#), [12](#), [15](#), [17](#), [18](#), [19](#), [26](#), [89](#), [90](#), [91](#), [92](#), [93](#), [94](#), [95](#)
- [2] Zinn-Justin, J. Path integrals in quantum mechanics. Oxford University Press, 2010. [6](#), [7](#), [8](#), [12](#)
- [3] Rubakov, V. Classical theory of gauge fields. Princeton University Press, 2009. [30](#)
- [4] Callan Jr, C. G., Harvey, J. A. Anomalies and fermion zero modes on strings and domain walls. *Nuclear Physics B*, **250** (1-4), 427–436, 1985. [33](#)
- [5] Yin, L.-J., Jiang, H., Qiao, J.-B., He, L. Direct imaging of topological edge states at a bilayer graphene domain wall. *Nature communications*, **7** (1), 1–6, 2016. [34](#)
- [6] Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Katsnelson, M. I., Grigorieva, I., *et al.* Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. *nature*, **438** (7065), 197–200, 2005. [34](#)
- [7] Fujikawa, K., Fujikawa, K., Suzuki, H., *et al.* Path integrals and quantum anomalies. 122. Oxford University Press on Demand, 2004. [44](#)
- [8] Einhorn, M., Jones, D. Comment on fujikawa’s path-integral derivation of the chiral anomaly. *Physical Review D*, **29** (2), 331, 1984. [44](#)
- [9] Kleinert, H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. World scientific, 2009. [48](#)
- [10] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. A magnus approximation approach to harmonic systems with time-dependent frequencies. *Annals of Physics*, **399**, 258–269, 2018. [48](#)
- [11] Kirsten, K., McKane, A. J. Functional determinants for general sturm–liouville problems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37** (16), 4649, 2004. [70](#)

- [12] Blau, S. K., Visser, M., Wipf, A. Analytic results for the effective action. *International Journal of Modern Physics A*, **6** (30), 5409–5433, 1991. [79](#)
- [13] Dunne, G. V. Heisenberg–euler effective lagrangians: basics and extensions. En: *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: Ian Kogan Memorial Collection* (In 3 Volumes), págs. 445–522. World Scientific, 2005. [79](#)